# Funcions de variable real. Límits. Continuïtat.

Departament de Matemàtica Aplicada III
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA


Núria Parés, Francesc Pozo, Yolanda Vidal

# Funcions de variable real.

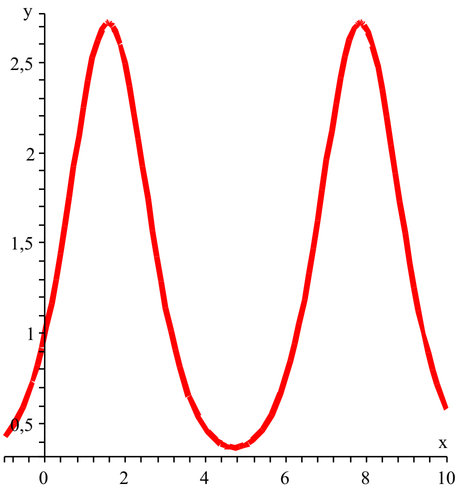
**Definició 1.** *Una funció d'una variable és una correspondència entre dos conjunts*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

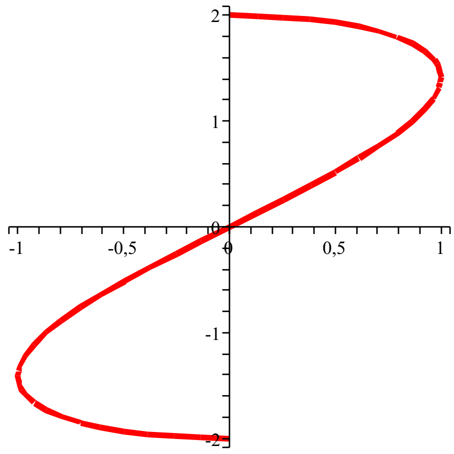
*tal que la imatge és única.*

- ▷ Si $B \subset \mathbb{R}$ es diu que $f$ és real.
- ▷ Si $A \subset \mathbb{R}$ es diu que $f$ és de variable real.

Exemple de funció




Exemple de no funció




Nosaltres només estudiarem $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

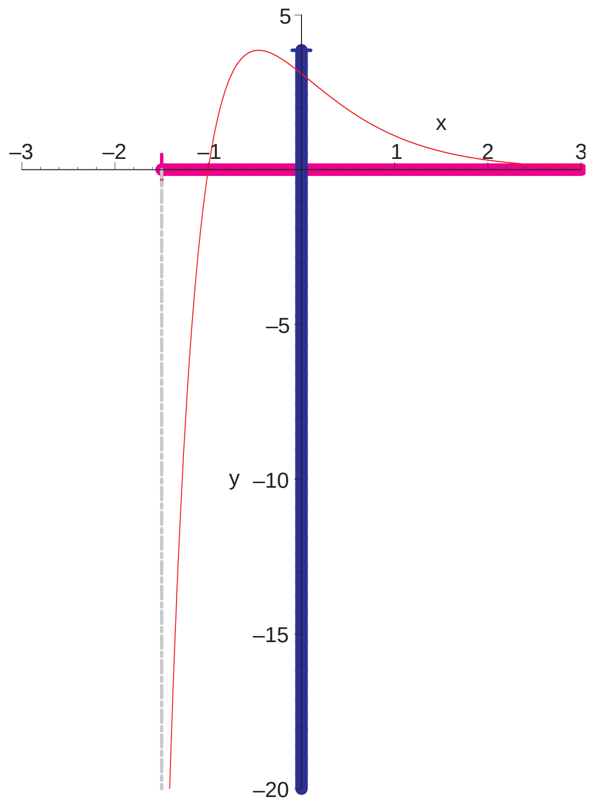
# Conjunts importants

▷ $A$ s'anomena **domini** de la funció.

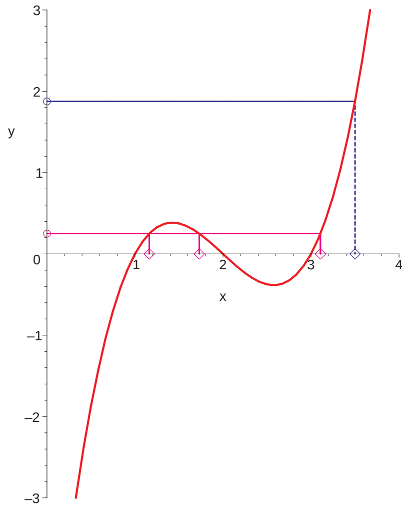
El domini d'una funció són tots els nombres reals que tenen per imatge un nombre real.

| | |
|---|---|
| $f(x) = p(x)$ | $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ | $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x,\, q(x) = 0\}$ |
| $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ | $\mathrm{Dom}(f) = \{x,\, g(x) \geq 0\}$ |
| $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$ | $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \log(g(x))$ | $\mathrm{Dom}(f) = \{x,\, g(x) > 0\}$ |
| $f(x) = \sin(g(x))$ | $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ |
| $f(x) = e^{g(x)}$ | $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ |

▷ $f(A) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in A\}$ és la **imatge** de $f$.



- ▷ $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$ és la **gràfica** de $f$.
- ▷ $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$ és el conjunt d'**antiimatges** de $y \in B$.
  - ▶ si $y \neq f(A)$, $f^{-1}(y) = \emptyset$.
  - ▶ si $y \in f(A)$, $f^{-1}(y)$ pot ser un o diversos elements.




**ex.** *Si volem calcular l'antiimatge de la funció $f(x) = 2x - 1$ en un punt $x$, prenem $y = f(x)$ i expressem la $x$ en funció de la $y$. Aleshores,*

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

⚠ Si per algun $y \in f(A)$, el conjunt $f^{-1}(y)$ consta de més d'un element, aleshores $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ no és una funció.

Altrament, $f^{-1}$ s'anomena la funció inversa de $f$.

▷ Si $X \subset A$, s'anomena **restricció** de $f$ a $X$ l'aplicació

$$f_{|X} : X \longrightarrow B$$

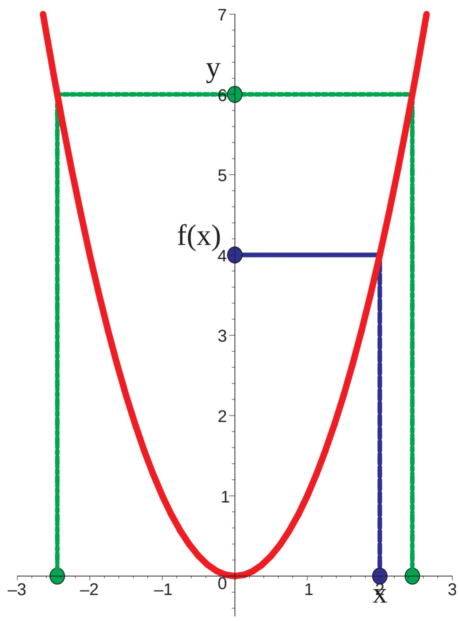
**ex.** *Donada la funció* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, *calcular la antiimatge de tots els punts* $y \in [0, \infty)$, *i calcular la funció inversa en cas d'existir.*

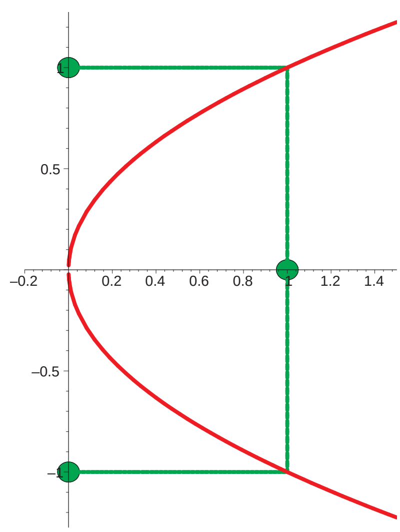
Donat $y \geq 0$, la seva antiimatge seran els punts $x \in \mathbb{R}$ tals que $f(x) = y$, és a dir, tals que $x^2 = y$.

Per $y = 0$, $x = 0$, i per $y > 0$, l'equació $x^2 = y$ té dues solucions: $x = \pm\sqrt{y}$.

Per tant tenim que donat $y \geq 0$, $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$, i per tant, l'antiimatge de $y$ no és única.

Llavors $f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$ no és una funció.



**ex.** *Considerem la funció* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, *restringida en l'interval* $X = [0, \infty)$. *Calcular la antiimatge de tots els punts* $y \in [0, \infty)$, *i calcular la funció inversa en cas d'existir.*

Ara estem considerant la funció:

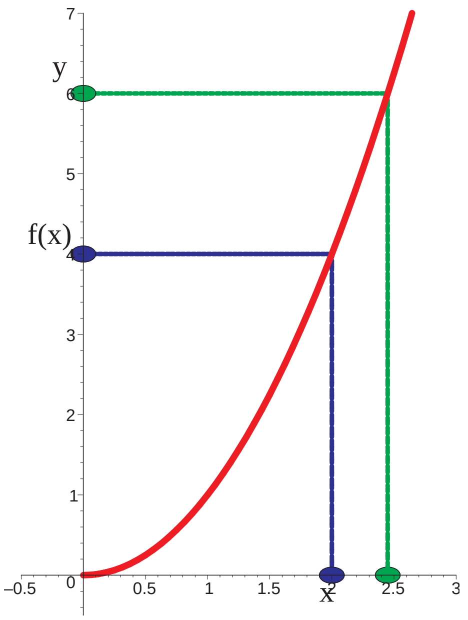
$$f_{|X} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

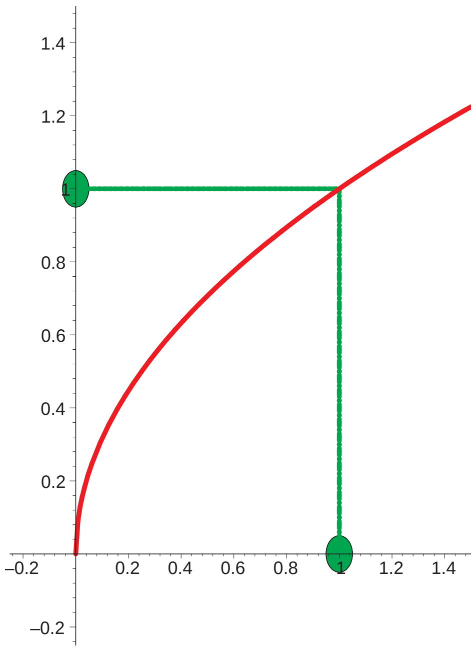
Donat $y \geq 0$, la seva antiimatge seran els punts $x \in [0, \infty)$ tals que $f_{|X}(x) = y$, és a dir, $x^2 = y$.

L'equació $x^2 = y$ té dues solucions reals, $x = \pm\sqrt{y}$, però només $+\sqrt{y}$ està en $[0, \infty)$.

Per tant, donat $y \geq 0$, $f_{|X}^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ és únic i la funció inversa existeix i és:

$$f_{|X}^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_{|X}^{-1}(y) = \sqrt{y}$$



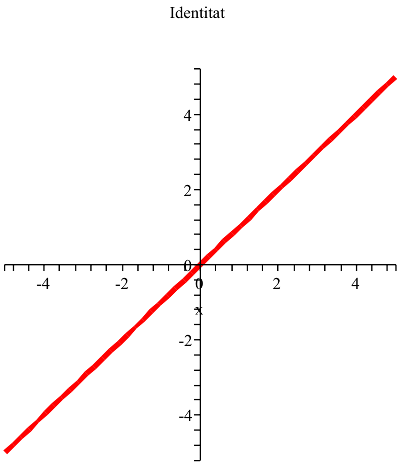



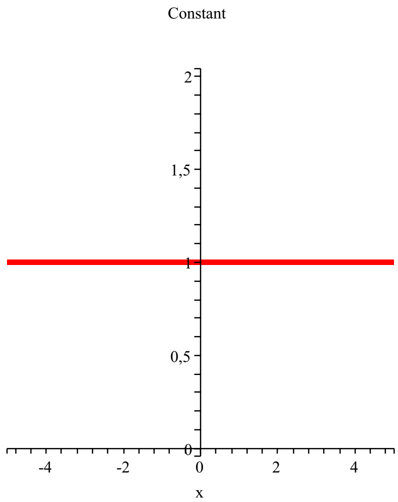
# Exemples de funcions

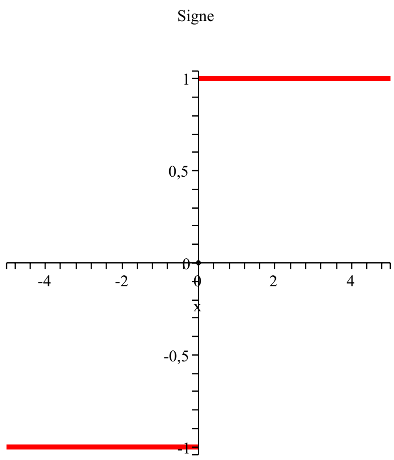
- ▷ **Identitat**. $f(x) = x$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $\mathbb{R}$ i la inversa ella mateixa.

- ▷ **Constant**. $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $\{c\}$ i no existeix inversa.

- ▷ **Funció signe**. $f(x) = -1$ si $x < 0$; $f(0) = 0$; $f(x) = 1$ si $x > 0$. El domini és $\mathbb{R}$ i la imatge és $\{-1, 0, 1\}$. No existeix inversa.

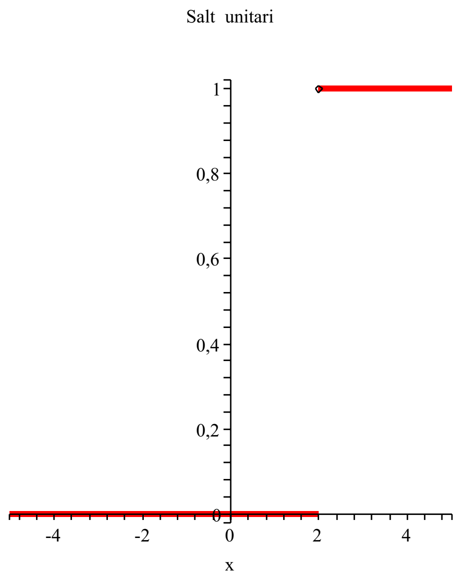


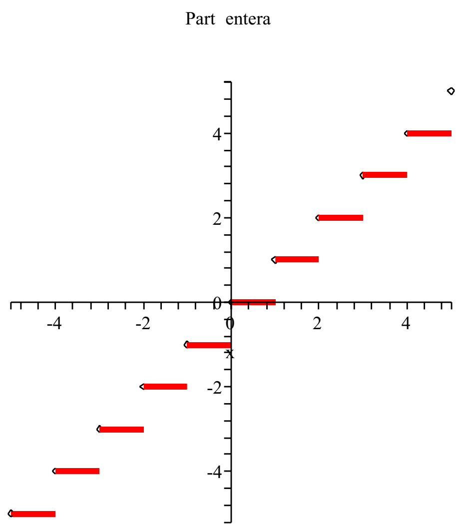



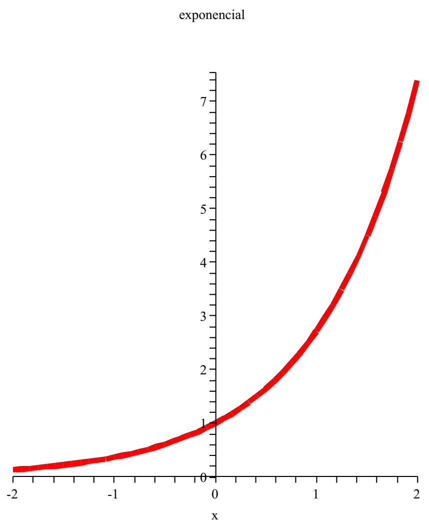
- **Funció salt unitari en un punt.** $f(x) = 0$ si $x < a$, $a \in \mathbb{R}$; $f(x) = 1$ si $x \geq a$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $\{0, 1\}$ i no existeix inversa.

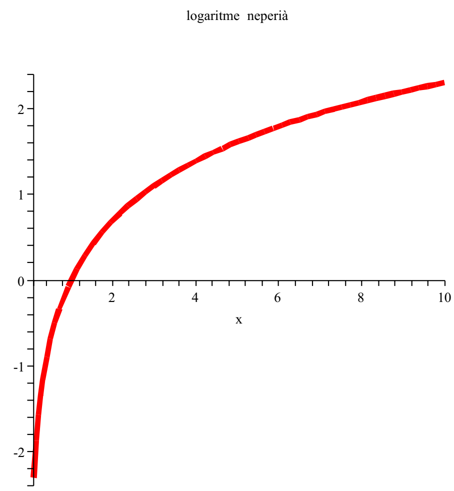
- **Funció part entera.** $f(x) = m$ si $x \in [m, m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $\mathbb{Z}$. No existeix inversa.

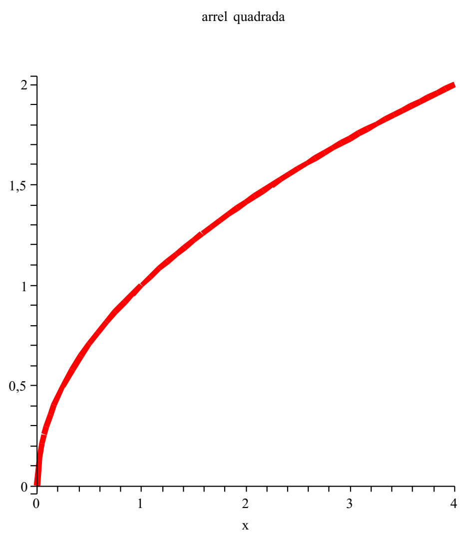


- **Funció exponencial**. $f(x) = e^x = exp(x)$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $(0, +\infty)$ la inversa és la funció logaritme neperià.
- **Funció logaritme**. $f(x) = \ln x$. El domini és $(0, +\infty)$, la imatge és $\mathbb{R}$. La funció inversa és la funció exponencial.
- **Funció arrel quadrada**. $f(x) = \sqrt{x}$. El domini és $[0, +\infty)$, la imatge és $[0, +\infty)$. La funció inversa és la funció quadrat (restringint el domini de la funció inversa).



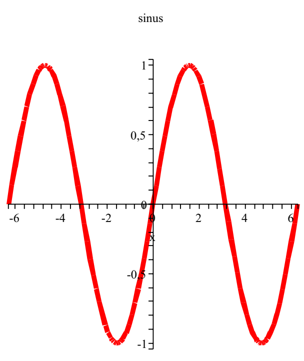



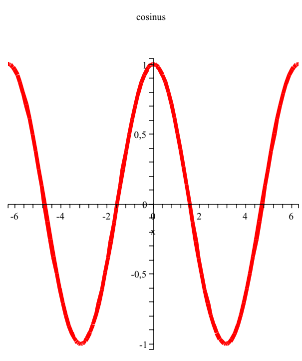



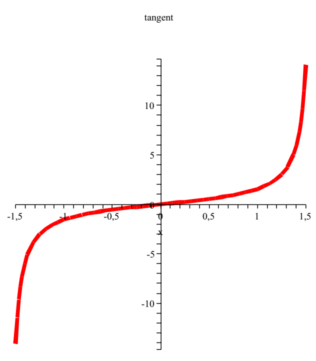
▷ **Funció sinus**. $f(x) = \sin(x)$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $[-1, 1]$. La funció inversa és $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ (restringint el domini de la funció inversa).

▷ **Funció cosinus**. $f(x) = \cos(x)$. El domini és $\mathbb{R}$, la imatge és $[-1, 1]$. La funció inversa és $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ (restringint el domini de la funció inversa).

▷ **Funció tangent**. $f(x) = \tan(x)$. El domini són tots els reals excepte els punts on s'anul·la el cosinus, la imatge és $\mathbb{R}$. La funció inversa és $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ (restringint el domini de la funció inversa).





Núria Parés, Francesc Pozo, Yolanda Vidal
Departament de Matemàtica Aplicada III
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# Operacions amb funcions

Considerem

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

dues funcions reals de variable real.

▷ SUMA/RESTA

$$\begin{aligned} f \pm g : A \cap B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \end{aligned}$$

▷ PRODUCTE

$$\begin{aligned} f \cdot g : A \cap B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

▷ QUOCIENT

$$\begin{aligned} f/g : A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

▷ PRODUCTE PER ESCALAR

$$\begin{aligned} \lambda f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \end{aligned}$$

sempre que $\lambda \in \mathbb{R}$.

## ▷ COMPOSICIÓ

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} g & : & B & \longrightarrow & C \\ & & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} g\circ f & : & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ & & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

⚠ El domini de la composició d'$f$ i $g$ és:

$$\mathrm{Dom}(g\circ f) = \{x \in A \mid f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}(B)$$

**ex.** *Considerem* $h(x) = \sqrt{2x+2}$ *i* $k(x) = 3x+2$. *Calculeu* $h \circ k$ *i* $k \circ h$ *i els seus dominis.*

$\boxed{h\circ k}$

$$\begin{aligned} (h\circ k)(x) &= h(k(x)) = h(3x+2) = \\ &= \sqrt{2(3x+2)+2} = \sqrt{6x+6} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Dom}(h\circ k) = \{x \in \mathbb{R}, 6x+6 \geq 0\} = [-1, \infty)$$

$\boxed{k\circ h}$

$$\begin{aligned} (k\circ h)(x) &= k(h(x)) = k(\sqrt{2x+2}) = \\ &= 3\sqrt{2x+2}+2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Dom}(k\circ h) = \{x \in \mathbb{R}, 2x+2 \geq 0\} = [-1, \infty)$$

▷ Funció inversa

Sigui $f : A \longrightarrow B$ una funció per la qual existeixi la inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

Llavors

$$f \circ f^{-1} = I, \quad \text{i} \quad f^{-1} \circ f = I$$

on $I(x) = x$ és la funció identitat.

**ex.** *Sigui* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. *Calculeu la funció inversa i comproveu que* $g \circ g^{-1} = I$ *i que* $g^{-1} \circ g = I$.

Sigui $y \in \mathbb{R}$, l'equació $y = x + 1$ té com a solució $x = y - 1$. Per tant, $g^{-1}(y) = y - 1$.

Llavors

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x+1) = (x+1) - 1 = x$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = g(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$$

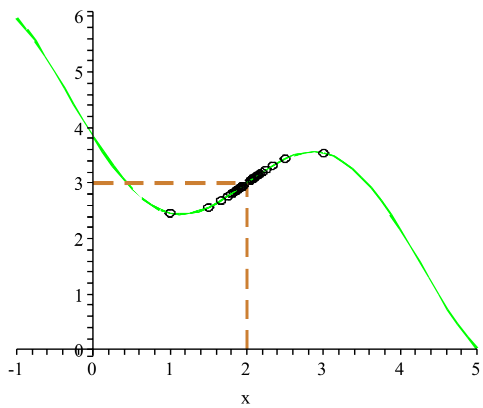
**Exercici Proposat 1.** *Calcula les inverses de les següents funcions* $f(x) = 4x - 7$, $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ *i* $f(x) = \ln(x + 1)$. *Comproveu que* $f \circ f^{-1} = I$ *i que* $f^{-1} \circ f = I$.

# Límit d'una funció en punt

L'objectiu és conèixer quin és el comportament de la funció **a prop** d'un cert punt, sense que sigui important què fa la funció en aquest punt.

Considerem per exemple la funció

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 4)(5 - x)}{6} \quad \text{i } x = 2$$




Si prenem punts propers a 2 per l'esquerra i per la dreta i mirem les imatges:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1.99 | 2.995 |
| 1.999 | 2.9995 |
| 1.9999 | 2.99995 |
| 1.99999 | 2.999995 |

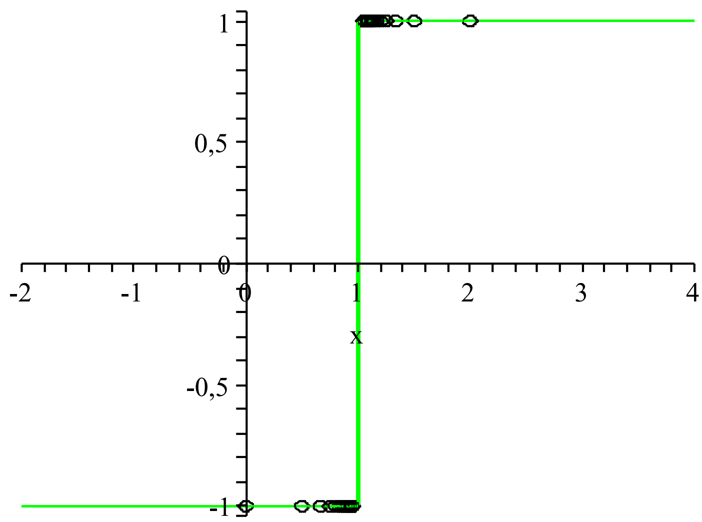
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2.01 | 3.005 |
| 2.001 | 3.0005 |
| 2.0001 | 3.00005 |
| 2.00001 | 3.000005 |

Per tant, quan $x \to 2$, $f(x) \to 3$ i es denota per

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Considerem ara en canvi el punt $x = 1$ i la funció

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$




Si prenem punts propers a 1 per l'esquerra i per la dreta i mirem les imatges dels punts tenim que:

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0.99 | $-1$ | 1.01 | 1 |
| 0.999 | $-1$ | 1.001 | 1 |
| 0.9999 | $-1$ | 1.0001 | 1 |
| 0.99999 | $-1$ | 1.00001 | 1 |
| 0.999999 | $-1$ | 1.000001 | 1 |

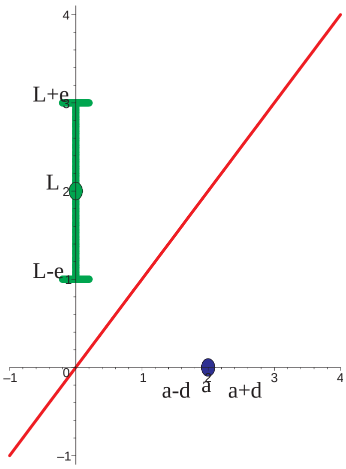
En prendre $x \longrightarrow 1$, les imatges no tendeixen a un únic valor, i per tant no existeix el límit.

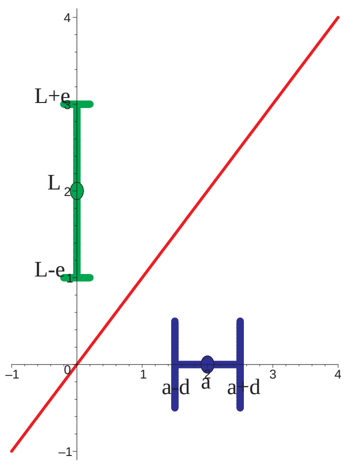
**Definició 2** (Límit d'una funció en punt)**.** *Si* $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *és una funció real i* $a \in A$*, es diu que la funció* $f$ *té* **límit** $L \in \mathbb{R}$ **en el punt** $a$*, si* $\forall \varepsilon > 0$ *arbitrari,* $\exists \delta > 0$ *de tal manera que* $\forall x \in A$*, tal que* $0 < |x - a| < \delta$*, aleshores es compleix* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Es fan servir les notacions següents:

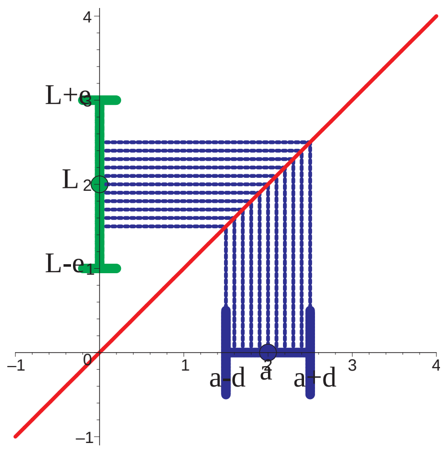
$$L = \lim_{a} f; \quad L = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Donat $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$




si $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$



**ex.** *Considerem la funció $f(x) = x$ i $a \in \mathbb{R}$. Llavors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$

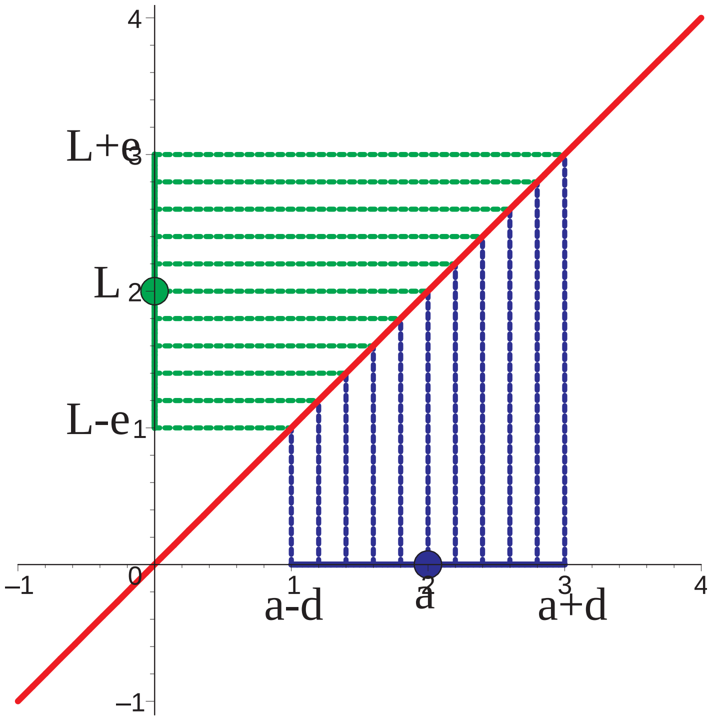
Hem de veure que donat $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ de manera que si prenem $x \in \mathbb{R}$ que verifiqui $|x - a| < \delta$, llavors $|f(x) - a| < \epsilon$.

Considerem $\epsilon > 0$ donat i prenem $\delta = \epsilon$.

Llavors, per a tot $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| < \delta$, com que $f(x) = x$ tenim que

$$|f(x) - a| < \delta = \epsilon$$

com volíem veure.



**ex.** *Considerem la funció* $f(x) = \frac{x}{2}$ *i* $a \in \mathbb{R}$. *Llavors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{a}{2}$$

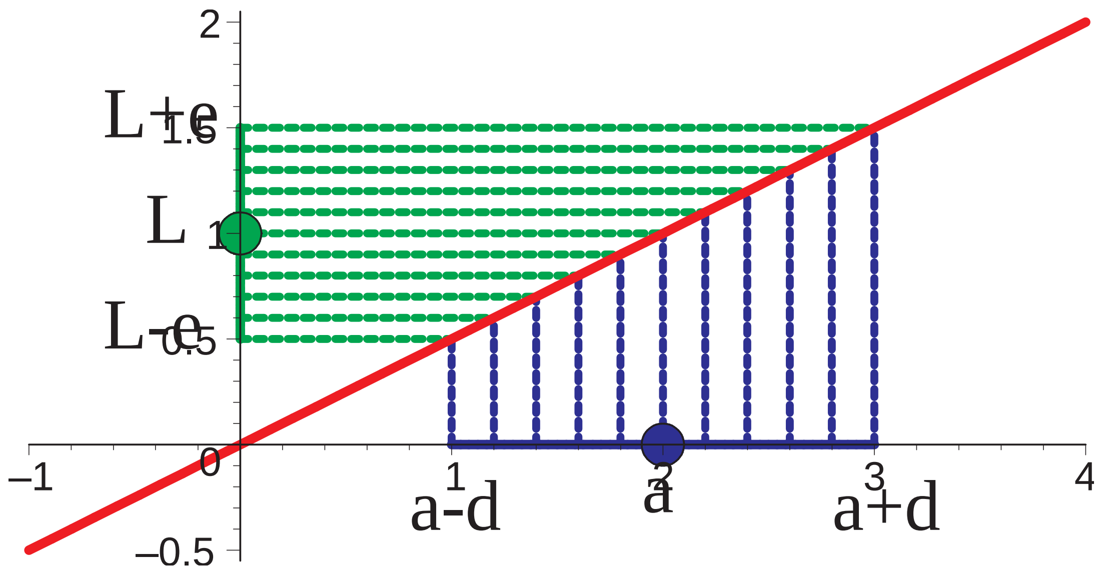
Hem de veure que donat $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ de manera que si prenem $x \in \mathbb{R}$ que verifiqui $|x - a| < \delta$, llavors $\left| f(x) - \frac{a}{2} \right| < \epsilon$.

Considerem $\epsilon > 0$ donat i prenem $\delta = 2\epsilon$.

Llavors, per a tot $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| < \delta$, com que $f(x) = x/2$ i tenim que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{x}{2} - \frac{a}{2} \right| < \frac{\delta}{2} = \epsilon$$

com volíem veure.



**ex.** *Considerem la funció $f(x) = 2x$ i $a \in \mathbb{R}$. Llavors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2a$$

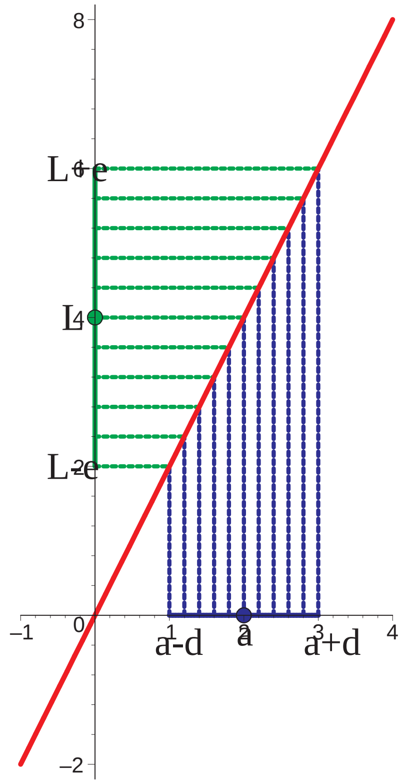
Hem de veure que donat $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ de manera que si prenem $x \in \mathbb{R}$ que verifiqui $|x - a| < \delta$, llavors $|f(x) - 2a| < \epsilon$.

Considerem $\epsilon > 0$ donat i prenem $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Llavors, per a tot $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| < \delta$, com que $f(x) = 2x$ i tenim que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |2x - 2a| < 2\delta = \epsilon$$

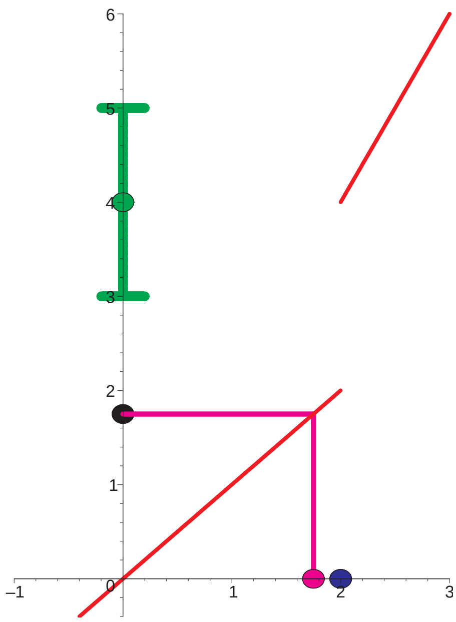
com volíem veure.



**ex.** *Considerem la funció* $f(x) = \begin{cases} x, & si\ x < 2 \\ 2x, & si\ x \geq 2 \end{cases}$ *i* $a = 2$. *Llavors*

$$\lim_{x \to 2} f(x) \ no\ existeix$$

Prenem $\epsilon = 1$. El límit no és 4 perquè podem trobar punts tant a prop com volguem de 2 tals que $|f(x) - 4| > 1$.




De la mateixa manera, el límit no és 2 perquè podem trobar punts tant a prop com volguem de 2 tals que $|f(x) - 2| > 1$.

Per a tot $L$, sempre podem trobar punts tant a prop com volguem de 2 tals que $|f(x) - L| > 1$, per tant, el límit no existeix.

**ex.** *Considerem la funció* $f(x) = x^2$ *i* $a \in \mathbb{R}$. *Llavors*

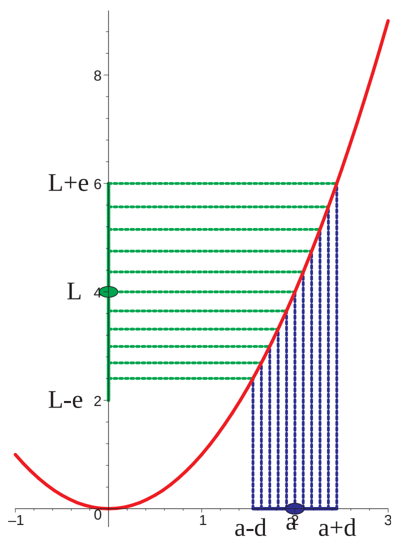
$$\lim_{x \to a} f(x) = a^2$$

En aquest cas particular només comprovarem el límit per $x = 2$. És a dir, volem veure que donat $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x \text{ tal que } |x-2| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 4| < \epsilon.$$

De fet només veurem que per $\epsilon = 3$ podem considerar $\delta = \frac{1}{2}$ i tot funciona:

$$\begin{aligned}
|x-2| < \tfrac{1}{2} \quad & \Longleftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2} < x - 2 < \tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 2 - \tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} + 2 \\
& \Longleftrightarrow \quad \tfrac{3}{2} < x < \tfrac{5}{2} \Longleftrightarrow \tfrac{9}{4} < x^2 < \tfrac{25}{4} \\
& \Longleftrightarrow \quad x^2 \in (2.25, 6.25) \Longrightarrow x^2 \in (1,7) \\
& \Longrightarrow \quad |x^2 - 4| < 3.
\end{aligned}$$



**Nota 1.** *El límit d'una funció en un punt té com a objectiu caracteritzar el comportament de les imatges dels punts propers al punt $a$.*

**Nota 2.** *El càlcul de límits mitjançant la definició és molt difícil, per tant cal buscar tècniques alternatives per calcular-los.*

**Proposició 1.** *El límit d'una funció en un punt, si existeix, és únic.*

**Proposició 2** (Àlgebra de límits de funcions). *Si $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : A \to \mathbb{R}$ són dues funcions reals, $a$ és un punt de $A$, i si aquestes funcions són tals que*

$$\lim_{x\to a} f = L_1; \quad \lim_{x\to a} g = L_2,$$

*aleshores es compleix que:*

**(a)** $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$;

**(b)** $\lim_{x\to a} (\lambda f)(x) = \lambda L_1$, qualsevol que sigui $\lambda \in \mathbb{R}$;

**(c)** $\lim_{x\to a} (fg)(x) = L_1 L_2$;

**(d)** $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$;

**(e)** $\lim_{x\to a} |f| = |L_1|$.

**ex.** *Comproveu que* $\lim_{x \to a} k_2 x^2 + k_1 x = k_2 a^2 + k_1 a.$

Sabem que $\lim_{x \to a} x = a.$

Llavors per la propietat (b)

$$\lim_{x \to a} k_1 . x = k_1 . a$$

De la mateixa manera, per la propietat (c)

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \cdot x = a \cdot a = a^2$$

i altra vegada per la propietat (b)

$$\lim_{x \to a} k_2 x^2 = k_2 a^2$$

Finalment, per la propietat (a) tenim que:

$$\lim_{x \to a} k_2 x^2 + k_1 x = k_2 a^2 + k_1 a$$

En resum:

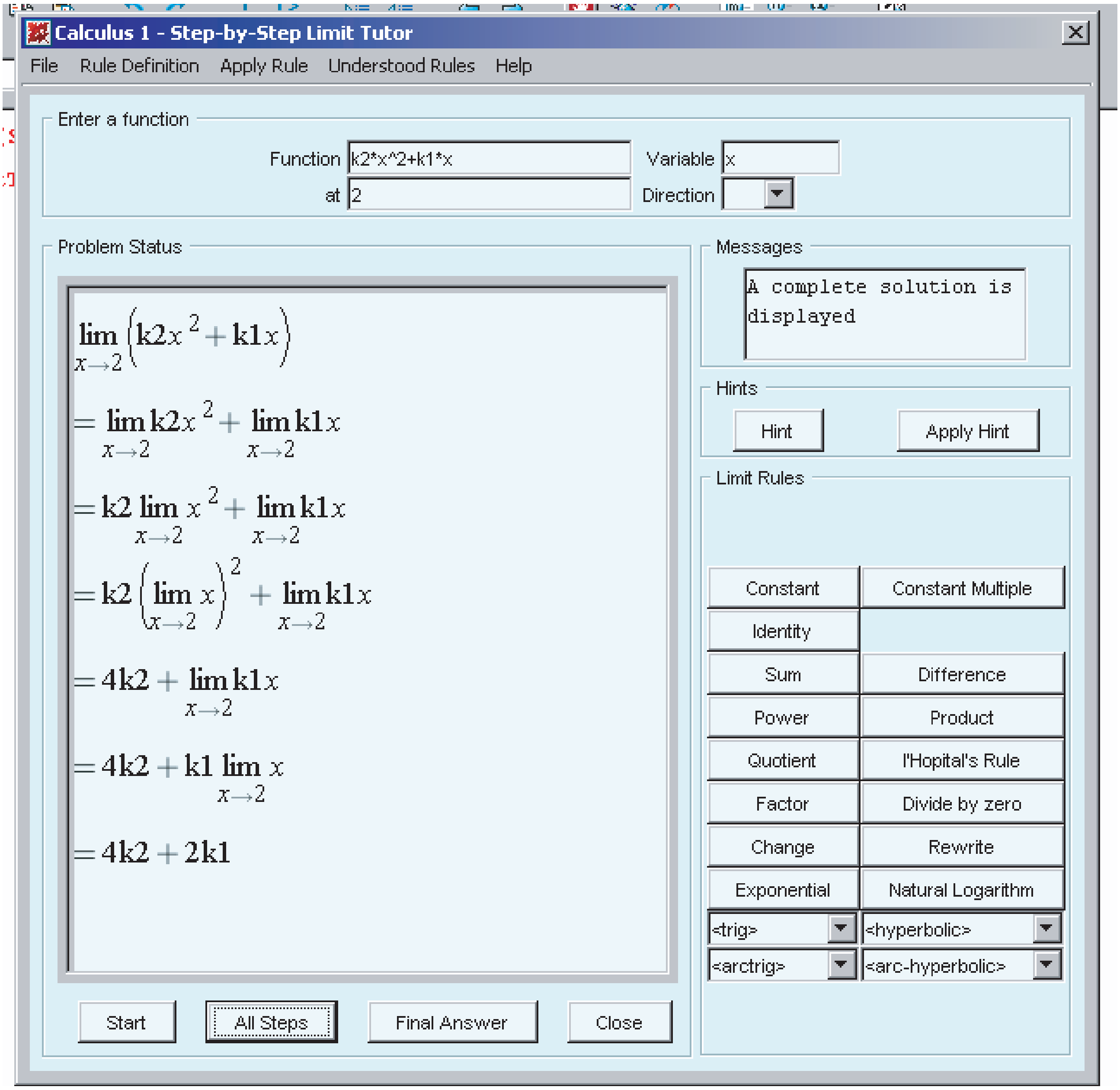
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} k_2 x^2 + k_1 x &= \lim_{x \to a} k_2 x^2 + \lim_{x \to a} k_1 x = \\
&= k_2 \lim_{x \to a} x^2 + k_1 \lim_{x \to a} x = \\
&= k_2 \lim_{x \to a} x \lim_{x \to a} x + k_1 \lim_{x \to a} x \\
&= k_2 a^2 + k_1 a.
\end{aligned}$$

El maple té una eina molt útil que ajuda a resoldre límits. L'eina és una maplet que permet introduir una funció, $f$, i un punt, $a$, i calcula el límit $\lim_{x\to a} f(x)$ pas per pas.

L'instrucció per executar la maplet és

[> with(Student[Calculus1]):

[> LimitTutor();



Les propietats d'àlgebra de límits amb el límit tutor apareixen en el quadre de missatges després de demanar ajuda (Hint) de la següent manera:

**(a)** $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

[sum] could be applied

**(b)** $\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$

[constantmultiple] could be applied

**(c)** $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$

[product] could be applied

**(d)** $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$;

[quotient] could be applied

**(e)** $\lim_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right|$.

[abs] could be applied

**ex.** *Calculeu* $\lim_{x \to a} k_2x^2 + k_1x = k_2a^2 + k_1a$ *usant el LimitTutor.*

*Nota: tot i que la funció pot contenir paràmetres desconeguts, el punt* $a$ *cal que sigui un valor concret, preneu* $a = 2$.

**ex.** *Usant l'exercici anterior vegeu que si $a \neq 0$*

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 2x}{x} = a - 2.$$

Per l'exercici anterior sabem que:

$$\lim_{x \to a} x^2 - 2x = a^2 - 2a$$

Llavors, per $a \neq 0$, el límit final es calcula usant la propietat (d):

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 2x}{x} = \frac{\lim_{x \to a} x^2 - 2x}{\lim_{x \to a} x} = \frac{a^2 - 2a}{a} = a - 2.$$

**Exercici Proposat 2.** *Usant les propietat de límits i tenint en compte que:*

$$\lim_{x \to a} x = a \ \textit{i que} \ \lim_{x \to a} k = k, \forall k \in \mathbb{R},$$

*vegeu que:*

$$\lim_{x \to 1} x^3 - 2x + 4 \quad , \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3}{x - 5}$$

**Exercici Proposat 3.** *Tenint en compte que*

$$\lim_{x\to a} x = a \ \ i \ que \ \lim_{x\to a} k = k, \forall k \in \mathbb{R},$$

*demostreu mitjançant inducció, usant les propietats anteriors de límits que si*

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

*llavors*

$$\lim_{x\to a} p(x) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + b_{n-2}a^{n-2} + \ldots + b_1 a + b_0.$$

*És a dir, si $p(x)$ és un polinomi de grau $n$,*

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

**Exercici Proposat 4.** *Usant l'exercici proposat anterior, vegeu que si $p(x)$ és un polinomi de grau $n$ i $q(x)$ és un polinomi de grau $m$ tal que $q(a) \neq 0$, llavors*

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Usant les propietats d'àlgebra de límits de funcions i els dos límits:

$$\lim_{x\longrightarrow a} x = a \text{ i que } \lim_{x\longrightarrow a} k = k, \forall k \in \mathbb{R},$$

es poden calcular tots els límits de funcions polinòmiques i funcions racionals.

**Podem calcular algun límit més?**

**ex.** *Considereu* $f(x) = \sqrt{x}$ *i* $a \geq 0$, *vegeu que:*

$$\lim_{x\longrightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

Denotem per $L$ al límit que volem calcular,
$$L = \lim_{x\longrightarrow a} \sqrt{x}.$$

Llavors usant la propietat (c) del límit d'un producte de funcions tenim que:

$$L^2 = \lim_{x\longrightarrow a} \sqrt{x} \lim_{x\longrightarrow a} \sqrt{x} = \lim_{x\longrightarrow a} (\sqrt{x})^2 = \lim_{x\longrightarrow a} x = a$$

per tant, si $L^2 = a \Longrightarrow L = \sqrt{a}$ com volíem veure.

**Exercici Proposat 5.** *Demostreu el valor dels següents límits:*

$$\lim_{x\longrightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a} \text{ i } \lim_{x\longrightarrow a} \sqrt[4]{x+2} = \sqrt[4]{a+2} \text{ si } a \geq -2.$$

Amb les propietats d'àlgebra de límits de funcions i sabent calculat límits de polinomis en un punt, només podem calcular límits de funcions que es puguin obtenir operant amb polinomis.

Per poder calcular límits de funcions genèriques necessitem altres eines. Per això introduirem dos criteris que ens ajudaran a calcular límits:

- Criteri de compresió
- Límit d'una funció acotada per una funció de límit zero

## Criteris per al càlcul de límits

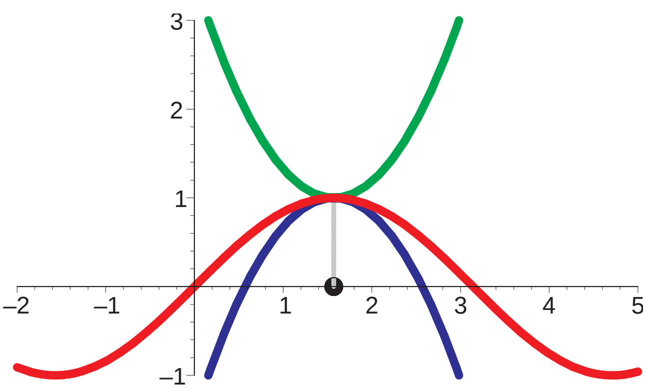
**Proposició 3** (Criteri de compressió).
*Si* $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *són tres funcions reals de variable real tals que:*

**(1)** $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a-r, a+r]$

**(2)** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L.$

Aleshores podem concloure que

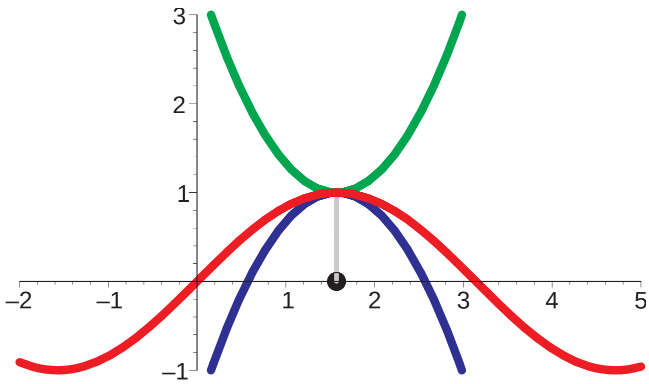
$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$



**ex.** *Comproveu que* $\lim_{x \longrightarrow \frac{Pi}{2}} \sin(x) = 1.$

Considerem les funcions

$$h(x) = \sin(x),\ f(x) = 1-(x-\frac{\pi}{2})^2 \text{ i } g(x) = (x-\frac{\pi}{2})^2+1$$




Llavors tenim que: $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ i

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 1$$

per tant: $\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1.$

*La dificultat d'aplicar el criteri de compressió està en saber trobar les dues funcions que acoten, i poder demostrar que realment* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

És important notar que és suficient que:

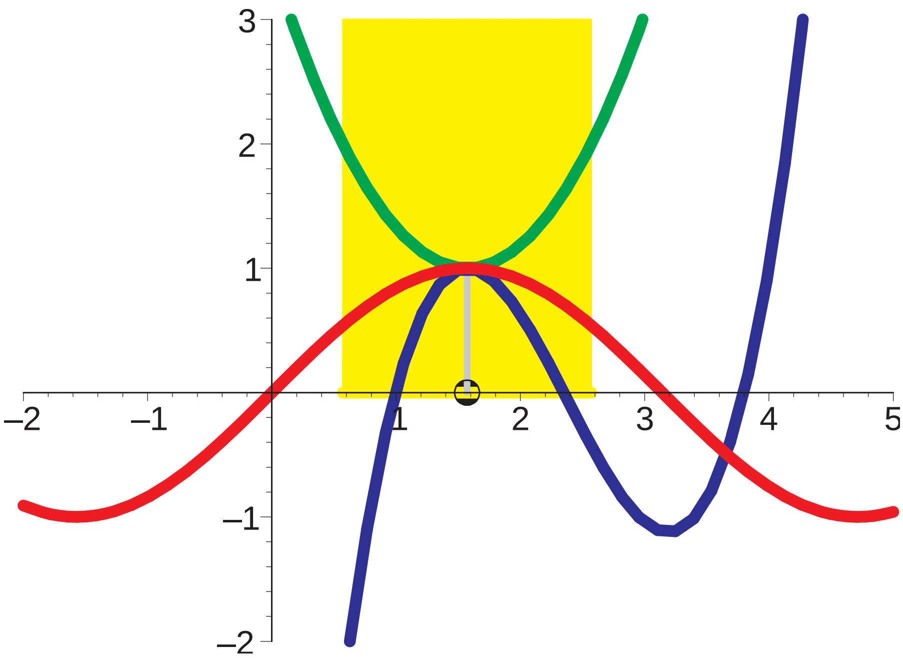
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in [a-r, a+r]$$

és a dir, en el límit anterior també haguéssim pogut considerar:

$$f(x) = 1 - (x - \frac{\pi}{2})^2(x-4) \text{ i } g(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2 + 1$$

ja que per exemple, prenent $r = 1$ tenim que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in [\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1]$$



**Proposició 4** (Zero per acotada). *Si $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són dues funcions reals de variable real tals que:*

***(1)*** $\lim_{x \to a} f(x) = 0$;

***(2)*** *$g$ és fitada en un entorn del punt $a$,*

*aleshores es verifica que*

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

**ex.** *Calculeu el límit de $f(x) = (x-2)\sin(x)$ en $x = 2$.*

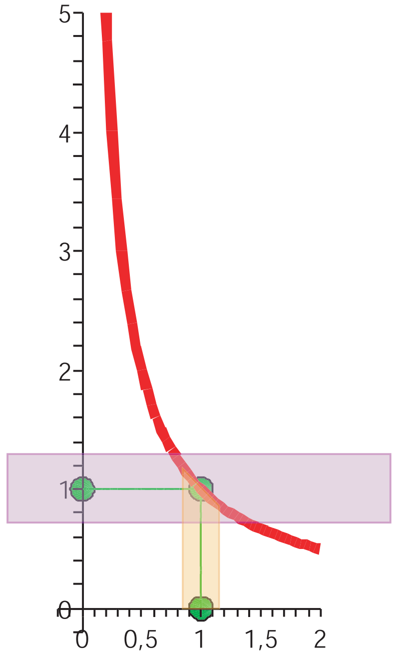
Com que

$$\lim_{x \to 2} (x-2) = 0$$

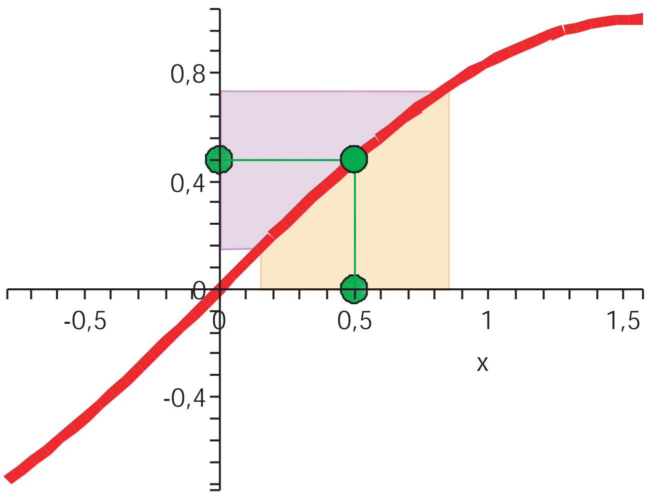
i la funció $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ és acotada, llavors:

$$\lim_{x \to 2} (x-2)\sin(x) = 0.$$

**Proposició 5.** *Si una funció té límit en un punt, aleshores existeix un entorn d'aquest punt en el qual la funció és fitada.*




**Proposició 6.** *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció tal que $\lim_{x \to a} f = L \neq 0$, aleshores existeix un entorn reduït del punt $a$ en el qual la funció conserva el signe.*



## Límits bàsics

**(a)** Si $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció constant, aleshores per a qualsevol nombre real $a$ es compleix

$$\lim_{x \longrightarrow a} \lambda = \lambda.$$

[constant] could be applied

**(b)** Si $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és la funció coordenada de $\mathbb{R}$, aleshores per a qualsevol nombre real $a$ es compleix

$$\lim_{x \longrightarrow a} x = a.$$

[identity] could be applied

# Algunes exemples tipus de càlcul de límits

- **Funció polinòmica.** Si $f(x)$ és un polinomi

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Per exemple,

$$\lim_{x \to 2} 2x^5 + 3x^2 - 11 = 2 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^2 - 11 = 65.$$

- **Funció racional.** Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, on $p(x), q(x)$ son polinomis, aleshores

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)},$$

sempre i quan $q(a) \neq 0$.

- **Funció racional del tipus $\frac{0}{0}$.** Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, on $p(x), q(x)$ són polinomis i, a més, $p(a) = q(a) = 0$, aleshores dividim el numerador i el denominador pel monomi $(x - a)$ i calculem el límit de la funció racional resultant,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{p(x)/(x-a)}{q(x)/(x-a)}.$$

- **Racionalització.** Si $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$, on $r(x), s(x)$ són expressions amb radicals, on $r(a) = s(a) = 0$, multipliquem pel conjugat de l'expressió amb radicals per desfer la indeterminació.

  Per exemple,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- **Funcions trigonomètriques.** Si $f(x) = p(x)t(x)$, on $t(x)$ és una funció trigonomètrica, podem aprofitar propietats trigonomètriques de la funció $t(x)$ per calcular el límit.

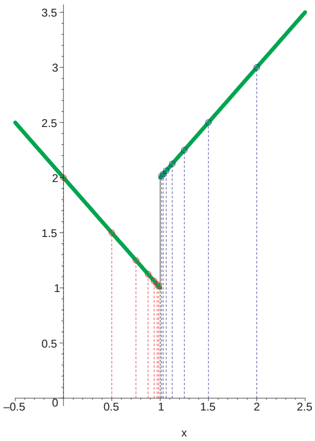
  Per exemple, a $\lim_{x\to 0} x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{funció fitada}}$ fem el límit del producte d'una funció fitada per una funció que tendeix a zero, i per tant

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

## Límits laterals d'una funció en un punt

Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & , \quad x < 1 \\ x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$




$f$ no té límit en $x = 1$ perquè en agafar punts propers a 1, les imatges no convergeixen a un únic valor.

Ara bé, si només prenem punts propers a 1 per l'esquerra, les imatges convergeixen a 1, i si només agafem punts propers a 1 per la dreta, les imatges convergeixen a 2.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 1.5 | 1.5 | 2.5 |
| 0.75 | 1.25 | 1.25 | 2.25 |
| 0.875 | 1.125 | 1.125 | 2.125 |
| 0.9375 | 1.0625 | 1.0625 | 2.0625 |
| 0.96875 | 1.03125 | 1.03125 | 2.03125 |
| 0.984375 | 1.015625 | 1.015625 | 2.015625 |

Per tant el comportament al voltant de $x = 1$ el podríem donar dient que al apropar-nos per l'esquerra tendim a 1, i que en apropar-nos per la dreta tendim a 2.

**Definició 3** (Límits laterals d'una funció en punt)**.** *Si* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és una funció real i* $a \in A$*, es diu que* $L^+ \in \mathbb{R}$ *és el* **límit per la dreta de la funció** $f$ **en el punt** $a$*, si donat* $\varepsilon > 0$ *arbitrari, existeix un* $\delta > 0$ *de tal manera que qualsevol que sigui* $x \in A$*, tal que* $a < x < a + \delta$*, aleshores es compleix* $|f(t) - L^+| < \varepsilon$.

- Es defineix de manera anàloga el **límit per l'esquerra de la funció** $f$ **en el punt** $a$, el qual s'escriu $L^-$.
- El límit per la dreta i el límit per l'esquerra reben el nom de **límits laterals** d'una funció.
- Es fan servir les notacions següents:

$$L^+ = \lim_{a^+} f = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$L^- = \lim_{a^-} f = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

**ex.** *Calculeu els límits laterals en $x = 1$ de la funció*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & , \quad x < 1 \\ x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 - x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2$$

## Igualtat dels límits laterals

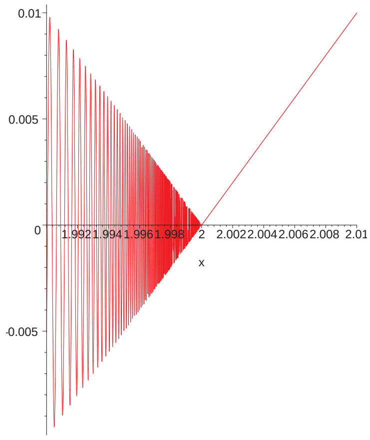
**Proposició 7.** *Si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $a \in A$, les propietats següents són equivalents:*

**(1)** $\lim_{x \to a^+} f = \lim_{x \to a^-} f = L$;

**(2)** $\lim_{x \to a} f = L$.

**ex.** *Calculeu el límit en el punt $x = 2$ de la funció*

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right), & x < 2 \\ \frac{x^2-3x+2}{x-1}, & x \geq 2 \end{cases}$$




$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \underbrace{(x-2)}_{0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}_{\text{acotada}} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

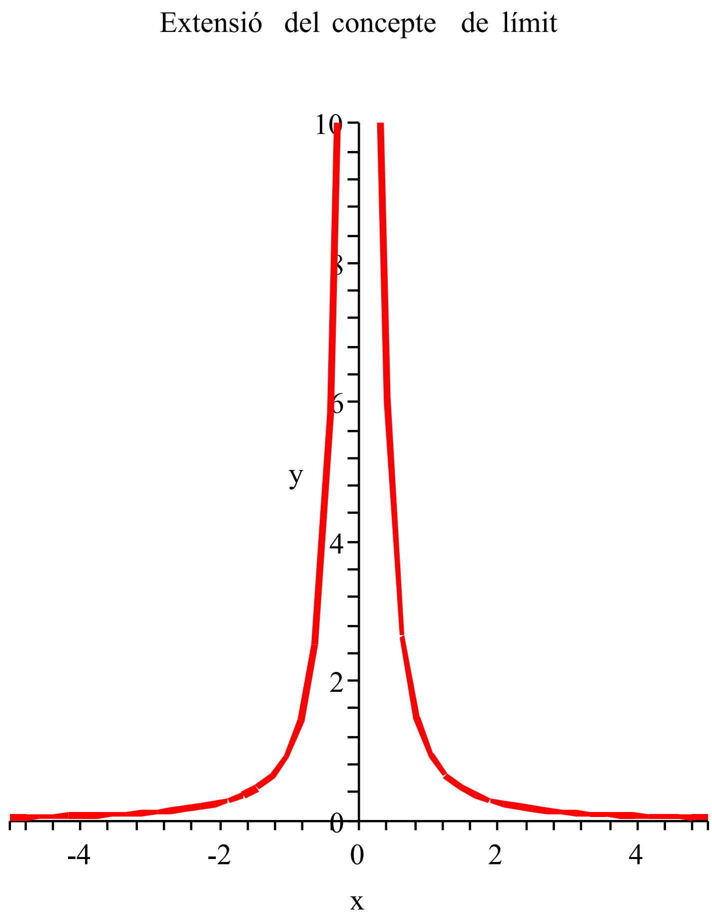
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 2^+} x - 2 = 0$$

Com que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 0.$$

# 4.2 Extensió del concepte del límit

## Idea intuïtiva




En aquest cas, hem representat la gràfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i observem que

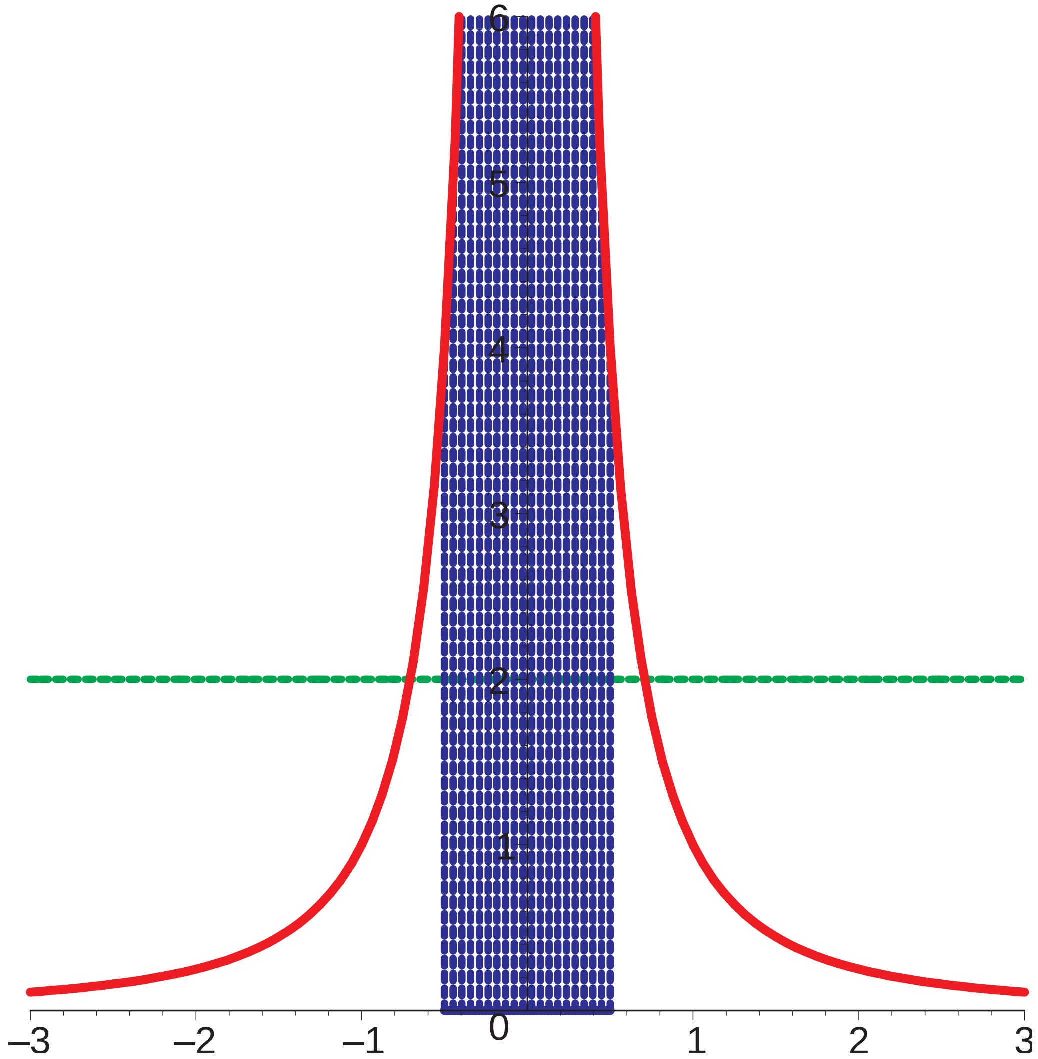
$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

però que a l'apropar-nos tant per la dreta com per l'esquerra a $x = 0$, les imatges tendeixen a $+\infty$.

**Definició 4.** *Si $f : A \to \mathbb{R}$, es diu que $f$ té límit $+\infty$ en el punt $a$ si per a qualsevol $k > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, aleshores $f(x) > k$.*

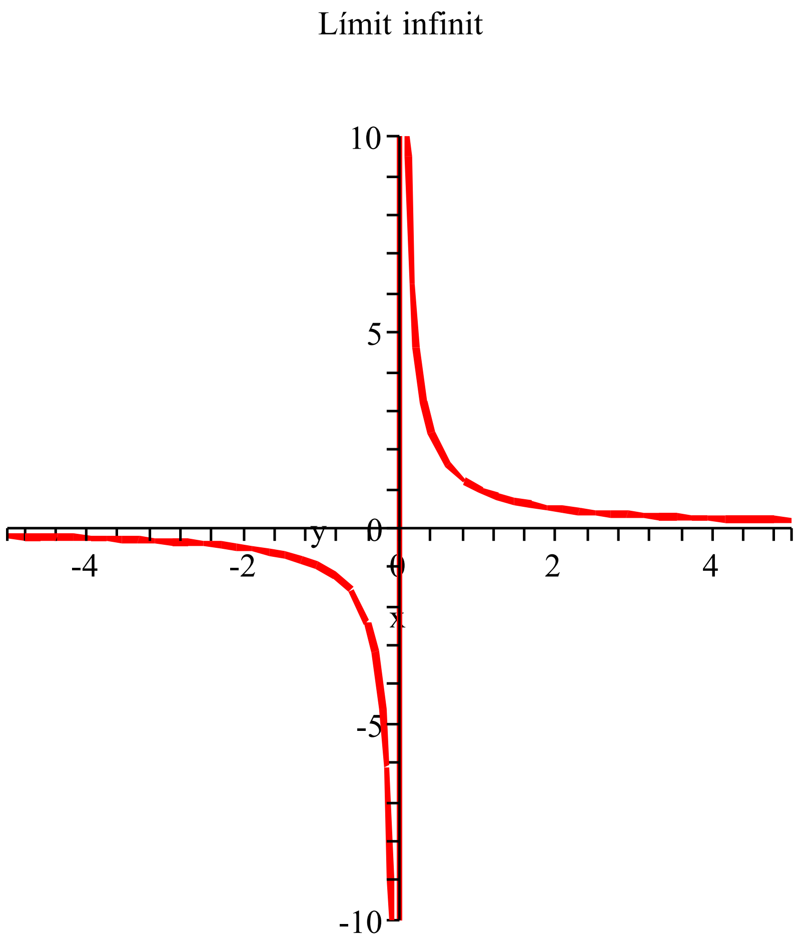
Escriurem

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$




Es defineix de manera anàloga per a $-\infty$.

Considerem la funció de la figura:




en el punt $x = 0$.

En aquest cas:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

**Proposició 8.** *Siguin $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions tals que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad L > 0$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0, \; g(x) > 0 \text{ en un entorn del punt } a$$

*Llavors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

**Exercici Proposat 6.** *Calculeu els següents límits*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

# Àlgebra de límits infinits

Si $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són tres funcions reals de variable real tals que

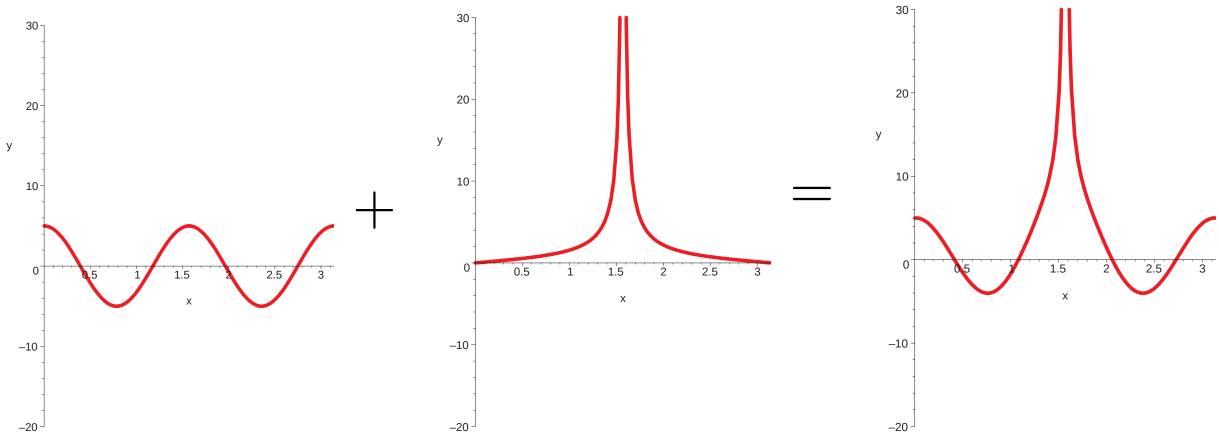
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} h(x) = +\infty,$$

aleshores

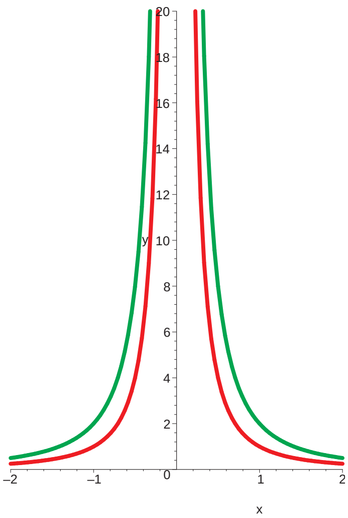
- $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \underbrace{5\cos(4x)}_{5} + \underbrace{|\tan(x)|}_{+\infty} = +\infty$$



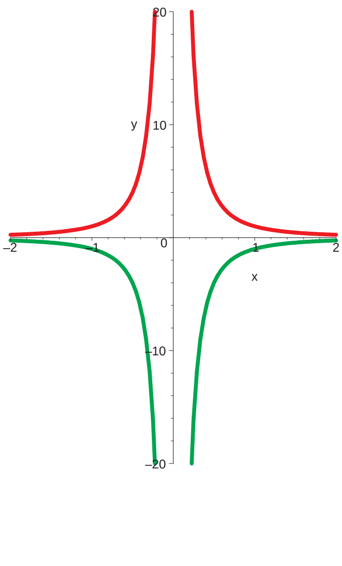
- $\lim_{x \to a} \lambda \cdot g(x) = +\infty, \quad \lambda > 0$

$$\lim_{x \to 0} 2\frac{1}{x^2} = +\infty$$



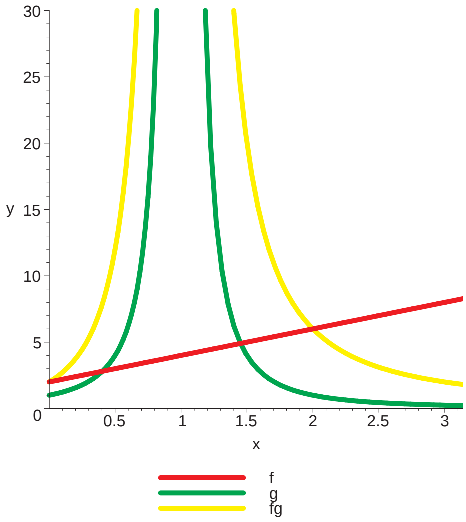

- $\lim_{x \to a} \lambda \cdot g(x) = -\infty, \quad \lambda < 0$

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$



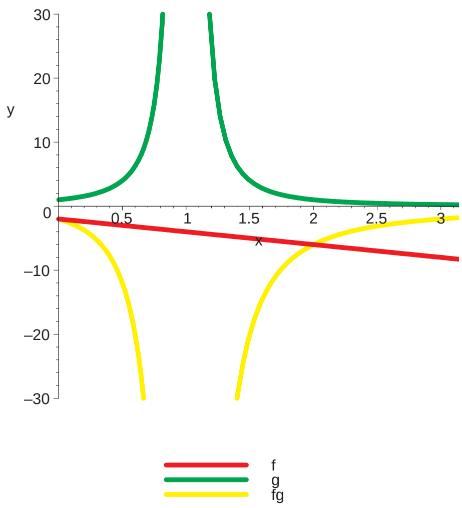
- $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty, \quad L>0$

$$\lim_{x\to 1} \underbrace{2(x+1)}_{1} \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{+\infty} = +\infty$$



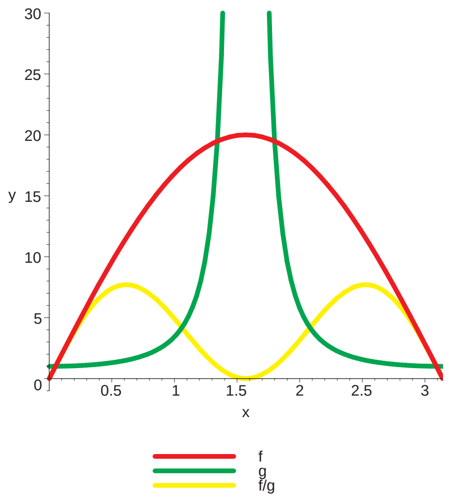

- $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty, \quad L<0$

$$\lim_{x\to 1} \underbrace{-2(x+1)}_{-1} \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{+\infty} = -\infty$$



- $$\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{20\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 0$$




- $$\lim_{x\longrightarrow a} g(x) + h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2(x)} = +\infty$$

- $$\lim_{x\longrightarrow a} g(x)\cdot h(x) = +\infty$$

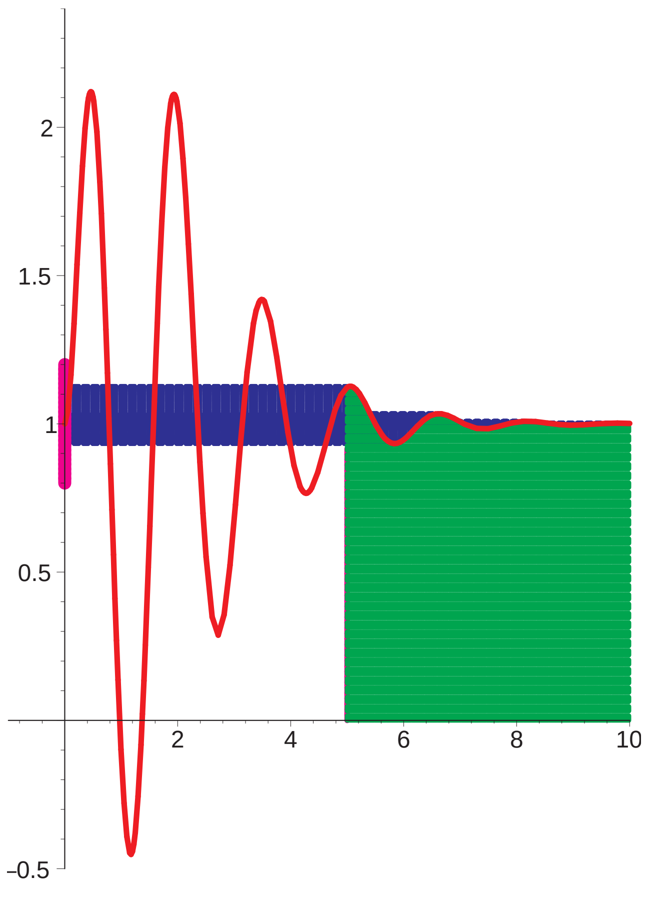
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

# Límit d'una funció a l'infinit

Com definim el següent límit?

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

**Definició 5.** *Diem que el límit de la funció* $f(x)$ *quan* $x$ *tendeix a* $+\infty$ *és* $L \in \mathbb{R}$ *si* $\forall\varepsilon > 0$ *existeix* $\lambda > 0$ *tal que si* $x > \lambda$*, aleshores* $|f(x) - L| < \varepsilon$.




Anàlogament es defineix

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

# Indeterminacions que no resol l'àlgebra de límits infinits

Si $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són tres funcions tals que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} h(x) = +\infty,$$

aleshores

- $\displaystyle \lim_{x \to a} \; g(x) - h(x) = \text{“}\infty - \infty\text{”} = ?$

$$\lim_{x \to 0} \; \frac{1}{x^2} - a\frac{1}{x^2} = \begin{cases} -\infty & , \quad a > 1 \\ 0 & , \quad a = 1 \\ \infty & , \quad a < 1 \end{cases}$$

- $\displaystyle \lim_{x \to a} \; f(x) \cdot g(x) = \text{“}0 \cdot \infty\text{”} = ?,$

$$\lim_{x \to 0} \; x^k \frac{1}{x^6} = \begin{cases} \nexists & , \quad k = 1, 3, 5 \\ +\infty & , \quad k = 2, 4 \\ 1 & , \quad k = 6 \\ 0 & , \quad k > 7 \end{cases}$$

- $\displaystyle \lim_{x \to a} \; \frac{g(x)}{h(x)} = \text{“} \frac{\infty}{\infty} \text{”} = ?$

$$\lim_{x \to 0} \; \frac{\frac{1}{x^6}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x \to 0} \; x^k \frac{1}{x^6}$$

- "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{x^6} = \lim_{x\to 0} x^k \frac{1}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^6}}{\frac{1}{x^k}}$$

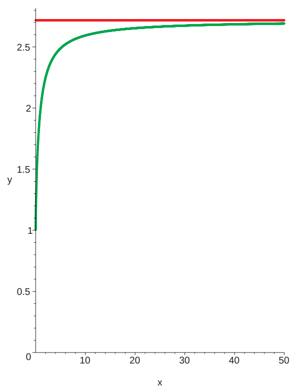
NOTA Les indeterminacions "$\frac{0}{0}$", "$0 \cdot \infty$" i $\frac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ les resoldrem per infinitessims equivalents.

També ens podrem trobar amb indeterminacions de la forma

- "$1^\infty$" (número $e$)

En aquest cas cal usar que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$




De fet, si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$,

$$\lim_{x\to a} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

**ex.** *Calculeu el següent límit:*

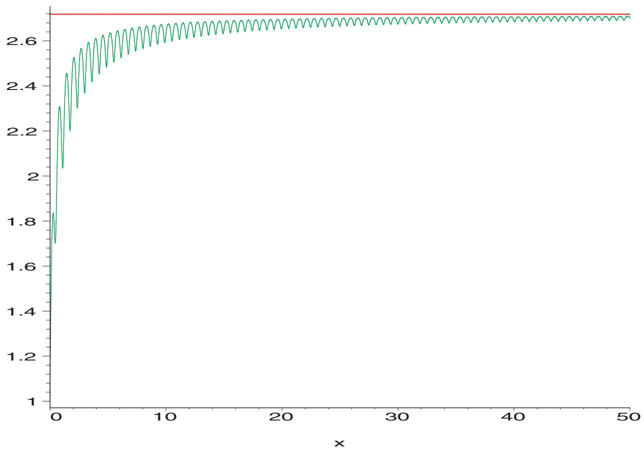
$$L = \lim_{x \to +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x(\sin(10x)+2)} \right)^{x(\sin(10x)+2)} .$$

Si definim $f(x) = x(\sin(10x)+2)$ tenim que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \underbrace{(\sin(10x)+2)}_{\geq 0} = +\infty,$$

i per tant,

$$L = \lim_{x \to +\infty} \quad 1 + \frac{1}{f(x)} \quad ^{f(x)} = e.$$




**ex.**

$$\lim_{x \to +\infty} \quad \frac{x+2}{x+1} \Bigg)^{\dfrac{ax^2-1}{x+3}} = \lim_{x \to +\infty} \quad 1 + \frac{1}{x+1} \Bigg)^{\dfrac{(x+1)(ax^2-1)}{(x+1)(x+3)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \right)^{\dfrac{ax^2-1}{(x+1)(x+3)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2-1}{(x+1)(x+3)}} = e^{a}$$

- "$0^0$" (logaritmes)

**ex.** *Calculeu*

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{e^{kx}} \right)^{-\dfrac{1}{x}}$$

Si apliquem logaritmes al límit anterior:

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \ln\Big( \lim_{x \to +\infty} \left(\tfrac{1}{e^{kx}}\right)^{-\frac{1}{x}} \Big) = \lim_{x \to +\infty} \ln\Big( \left(\tfrac{1}{e^{kx}}\right)^{-\frac{1}{x}} \Big) \\
&= \lim_{x \to +\infty} -\tfrac{1}{x} \ln\left(\tfrac{1}{e^{kx}}\right) = \lim_{x \to +\infty} -\tfrac{1}{x} \ln\left(e^{-kx}\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} -\tfrac{1}{x}(-kx) = k \implies L = e^k
\end{aligned}$$

- "$\infty^0$" (logaritmes)

**ex.** *Calculeu*

$$L = \lim_{x \to +\infty} x^{\dfrac{\sin(x)}{x}}$$

Si apliquem logaritmes al límit anterior:

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \lim_{x \to +\infty} \ln\Big( x^{\frac{\sin(x)}{x}} \Big) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \ln(x) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\sin(x)}_{\text{acotada}} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{0} = 0 \implies L = e^0 = 1
\end{aligned}$$

## Equivalència local de funcions

En aquest apartat es desenvolupa un concepte de gran interès pràctic, el de les funcions equivalents, que permet realitzar certes manipulacions en l'expressió del límit i calcular el límit d'una funció a partir d'altres funcions amb límits coneguts.

Si $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diu que $f$ i $g$ són localment equivalent en el punt $a$ (i s'escriu $f \sim g$) si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Proposició 9.** *Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions tals que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \neq 0,$$

*aleshores són equivalents.*

dem. Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions tals que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \neq 0.$$

Llavors el límit del quocient és el quocient de límits:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L} = 1$$

i per tant $f(x)$ i $g(x)$ són equivalents en $x = a$.

**Proposició 10.** *Si dues funcions $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són localment equivalents en el punt $a$, aleshores o bé ambdues tenen el mateix límit o cap d'elles té límit.*

dem. Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions equivalents en $x = a$ i suposem que $f$ té límit $L$. Com que $f$ i $g$ són equivalents

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

i tenim que:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

**ex.** *Sabent que les funcions* $\sin(x)$ *i* $x$ *són equivalents en el punt* $x = 0$*, calculeu*

$$\lim_{x\to 0} \sin(x),\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3} \quad i \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}.$$

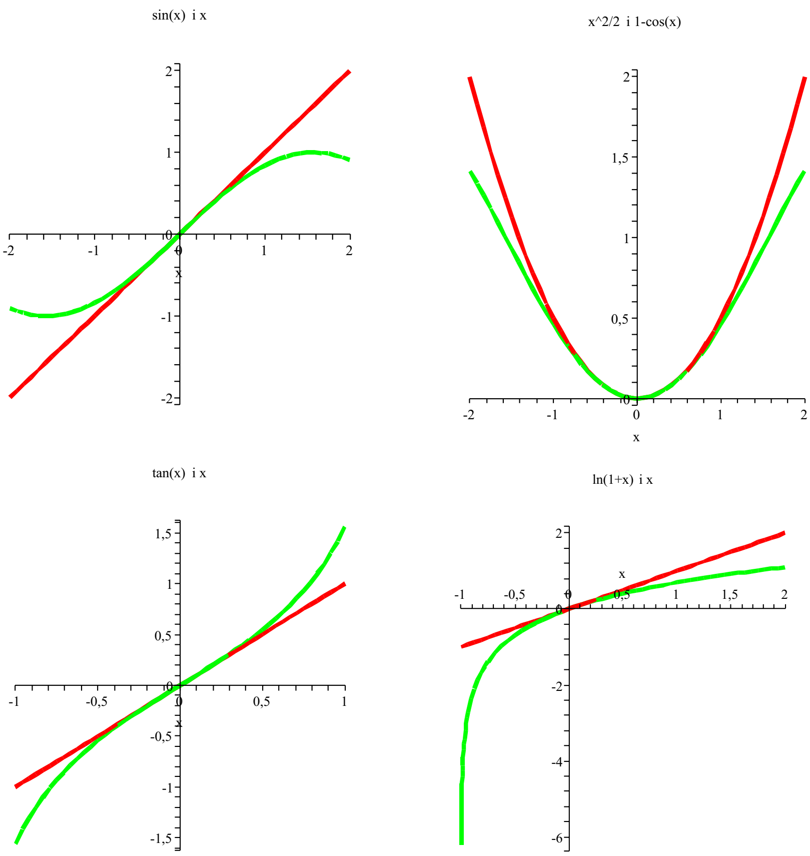
$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} 2\cos(x) = 2$$

## Infinits equivalents - Infinitèsims equivalents

- Dues funcions $f$ i $g$ que són localment equivalents en el punt $a = 0$ reben el nom d'**infinitèsims equivalents**.
  - ⊛ $\sin(x) \sim x$
  - ⊛ $\frac{x^2}{2} \sim 1 - \cos(x)$
  - ⊛ $x \sim \tan(x)$
  - ⊛ $x \sim \ln(1 + x)$



- Dues funcions $f$ i $g$ que són localment equivalents en el punt $a = \infty$ reben el nom d'**infinits equivalents**.

⊛ $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \sim e$

⊛ dos polinomis de grau $n$ i amb coeficient director 1, són equivalents
$x^3 + 2x + 3 \sim x^3 + 4x^2 - 1$

**ex.** *Calculeu el límit* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 + 2x + 1}{5x^4 + 2x + 1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{5x^4 + 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\left(x^4 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)}{5\left(x^4 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{x^4 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}} = \frac{3}{5}$$

**ex.** *Calculeu el següent límit usant infinitèsims equivalents:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^k},\quad k=1,2,3,4$$

*Com que* $1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$ *tenim que:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^k}=\begin{cases} 0 & , \quad k=1\\ \frac{1}{2} & , \quad k=2\\ \nexists & , \quad k=3\\ +\infty & , \quad k=4\end{cases}$$

**ex.** *Calculeu el següent límit*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(x+1)}{\tan(x)}.$$

Com que $x\sim\tan(x)$ i $x\sim\ln(1+x)$ tenim que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(x+1)}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}2\frac{\ln(x+1)}{x}\frac{x}{\tan(x)}=2$$

**Exercici Proposat 7.** *Calculeu el següent límit*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3 - 4\cos(x) + \cos(2x)}{x}.$$

*Ajuda:* $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

# Ordres d'infinitud

Denotarem per $f(x) \ll g(x)$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Llavors tenim que:

$$\ln(x) \ll \sqrt[n]{x} \ll \sqrt[n-1]{x} \ll x \ll x^n \ll x^{n+1} \ll e^x$$

Per tant, per exemple:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

I també:

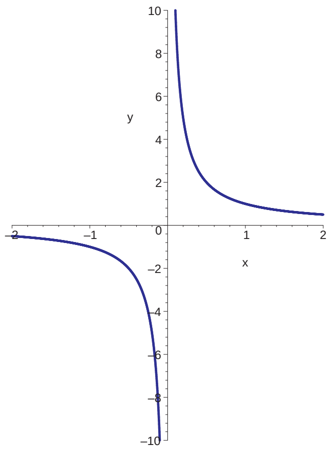
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(x)}{x}} = +\infty$$

# El concepte de continuïtat

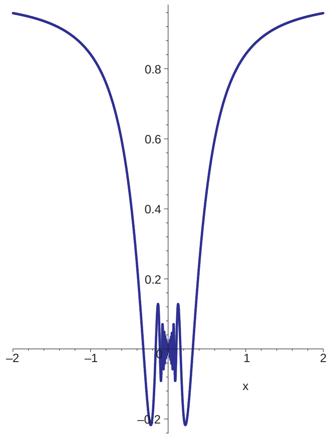
**Definició 6.** *Si $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció real de variable real, es diu que la funció $f$ és contínua en $x = a$ si es compleix la igualtat*

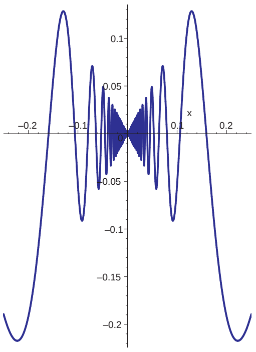
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**ex.** *La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ no és contínua en $x = 0$ perquè $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$*



**ex.** *La funció $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no és contínua en $x = 0$ perquè encara que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\nexists f(0)$.*

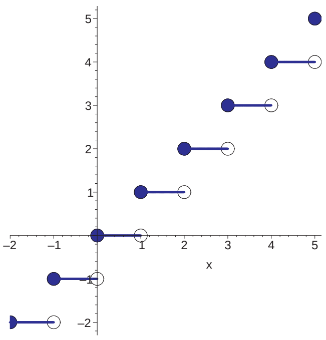


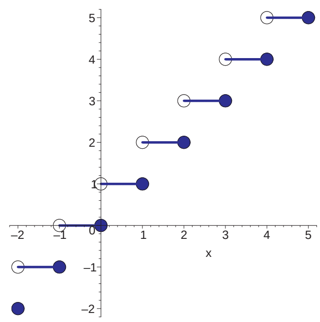


## Continuïtat en un conjunt - Camp de continuïtat

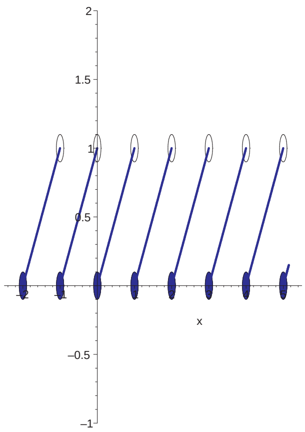
**Definició 7.** *Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció real de variable real, es diu que la funció $f$ és contínua en $X \subset A$ si $f$ és contínua en $x = a$ per a tot $a \in X$.*

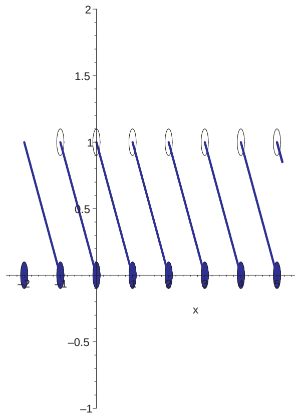
**ex.** *Les funcions $f(x) = \lfloor x \rfloor$ i $g(x) = \lceil x \rceil$ (part entera per sota i per sobre) són contínues en $X = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.*





**ex.** *Les funcions $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ i $g(x) = \lceil x \rceil - x$ són contínues en $X = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.*





## Continuïtat lateral

**Definició 8.** *Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció real de variable real, es diu que la funció $f$ és contínua per la* ***dreta*** *en $x = a$ si es compleix la igualtat*

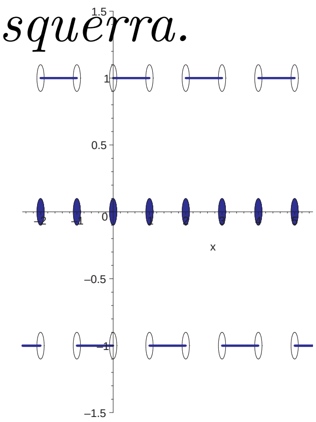
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Anàlogament es defineix la continuïtat per l'**esquerra**.

**ex.** *Les funcions $f(x) = \lfloor x \rfloor$ i $\tilde{f}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ són contínues per la dreta en tot $\mathbb{R}$. En canvi les funcions $g(x) = \lceil x \rceil$ i $\tilde{g}(x) = \lceil x \rceil - x$ són contínues per l'esquerra en tot $\mathbb{R}$.*

**ex.** *La funció $g(x) = signe(\sin(\pi x))$ en $\mathbb{Z}$ no és contínua ni per la dreta ni per l'esquerra.*

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

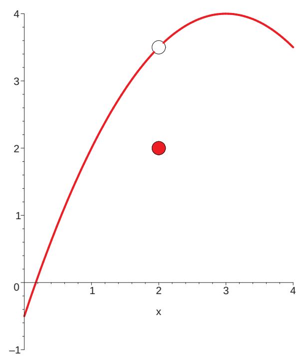


**Proposició 11.** *Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció real de variable real, es diu que la funció $f$ és contínua en $x = a$ si, i només sí, és contínua simultàniament per la dreta i per l'esquerra.*

# Classificació de les discontinuïtats d'una funció

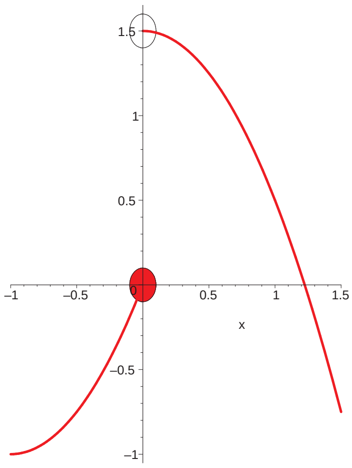
- EVITABLE

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$$



- DE SALT

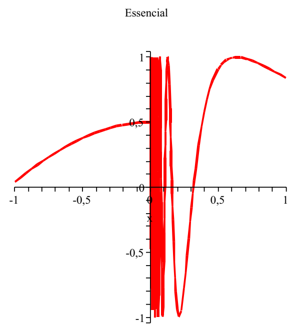
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$



- ESSENCIAL,

o bé $\nexists \lim_{x \to a^-} f(x)$

o bé $\nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$



## Criteris de continuïtat

Si dues funcions $f, g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són contínues en el punt $x = a \in A$, aleshores es compleixen les propietats següients:

- $f + g$ és contínua en $a$
- $f \cdot g$ és contínua en $a$
- $\lambda \cdot f$ és contínua en $a$ per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\frac{f}{g}$ és contínua en $a$ si $g(a) \neq 0$

**NOTA:** Si $f(x)$ és tal que, per a tot $x \in \mathrm{Dom}(f)$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a),$$

llavors $f$ és contínua en tot el seu domini.

Per tant, els polinomis, quocients de polinomis amb denominador no nul, funcions amb radicalts, funcions trigonomètriques ...
són funcions contínues.

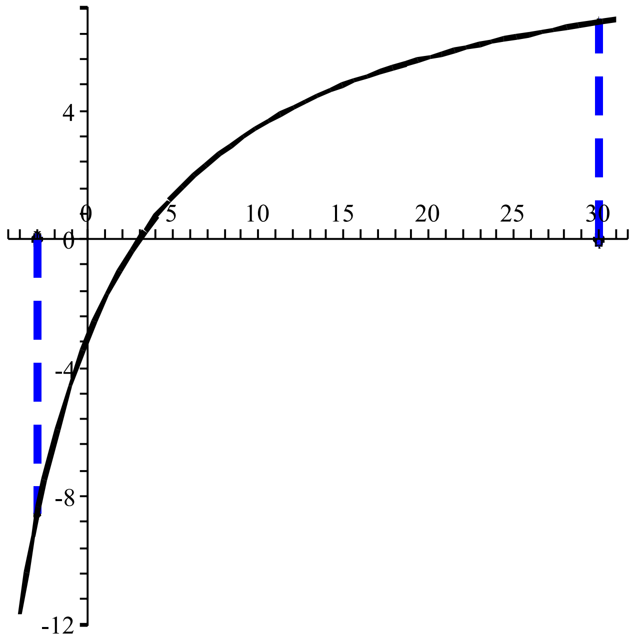
# Funcions contínues en un interval tancat

**Definició 9.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, es diu que $f$ és contínua a l'interval $[a,b]$ si*

- ▷ *$f$ és contínua en el punt $x$, per a tot $x \in (a,b)$*
- ▷ *$f$ és contínua per la dreta en el punt $x = a$*
- ▷ *$f$ és contínua per l'esquerra en el punt $x = b$*

## Teorema de Bolzano

**Teorema 1** (Bolzano)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és* ***contínua*** *a l'interval $[a,b]$ i és tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix almenys un punt $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*



# Mètode de la bisecció

## (zeros de funcions)

Del teorema de Bolzano es dedueix un mètode molt senzill per determinar zeros de funcions contínues numèricament.

Donada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua en un interval $[a,b]$, sent $f(a)\cdot f(b) < 0$, aleshores pel teorema de Bolzano sabem que hi ha un almenys un punt $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Inicialment sabem que $c \in [a,b]$. LLavors considerem el següent procediment:

1: $x_e = a$ i $x_d = b$

2: calcular el punt mig $x_m = \frac{a+b}{2}$

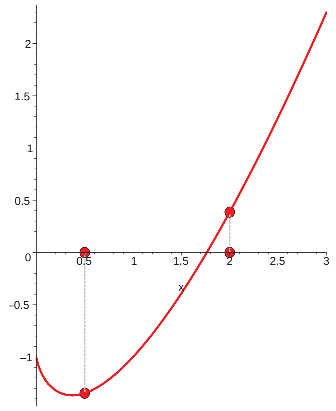
3: si $f(x_e)f(x_m) < 0$, $x_d = x_m$

sino $x_e = x_m$

Ara sabem que $c \in [x_e, x_d]$, i hem reduit l'interval inicial a la meitat.

Repetint aquest procediment ens podem acostar al punt $c$ tant com volguem.

**ex.** *Usant el mètode de la bisecció, trobeu el zero de la funció $f(x) = x\ln(x) - 1$ amb dos decimals correctes.*



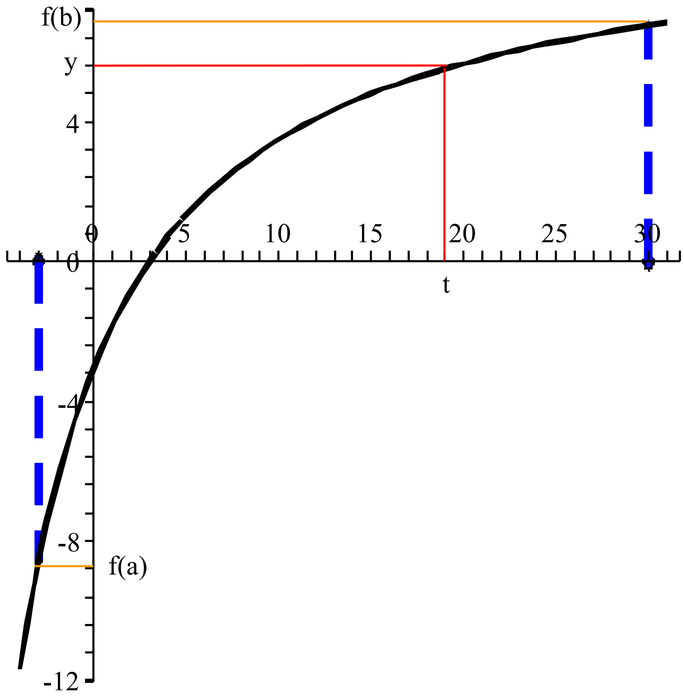

Llavors, considerant com a interval inicial $[.5, 2]$, el mètode de la bisecció ens donaria els següents intervals:

| $x_e$ | $x_d$ | $f(x_e)$ | $f(x_d)$ | $x_m$ | $f(x_m)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 2. | −1.3466 | 0.3863 | 1.2500 | −0.72108 |
| 1.2500 | 2. | −0.72108 | 0.3863 | 1.6250 | −0.21105 |
| 1.6250 | 2. | −0.21105 | 0.3863 | 1.8125 | 0.0779 |
| 1.7188 | 1.8125 | −0.06905 | 0.0779 | 1.7656 | 0.0037 |
| 0.7188 | 1.7656 | −0.06905 | 0.0037 | 1.7422 | −0.03282 |
| 1.7422 | 1.7656 | −0.03282 | 0.0037 | 1.7539 | −0.01459 |
| 1.7539 | 1.7656 | −0.01459 | 0.0037 | 1.7598 | −0.00536 |
| 1.7598 | 1.7656 | −0.00536 | 0.0037 | 1.7627 | −0.00081 |
| 1.7627 | 1.7656 | −0.00081 | 0.0037 | 1.7642 | |

Per tant, si denotem per $\alpha$ el zero de la funció $\alpha \in [1.7627, 1.7656]$, i per tant amb dos decimals és $\alpha = 1.76$.

# Teorema dels valors intermedis

**Teorema 2** (valors intermedis)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és* ***contínua*** *a l'interval $[a,b]$ i és tal que $f(a) < f(b)$, aleshores per a qualsevol $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < y < f(b)$ existeix un $t \in (a,b)$ amb $f(t) = y$.*




dem. Considerem $g(x) = f(x) - y$.

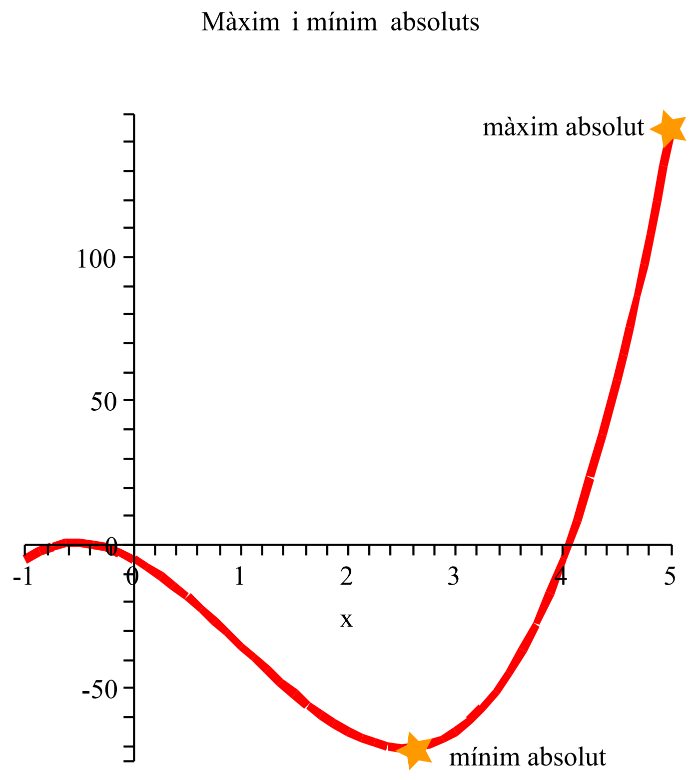
Com que $f$ és contínua en $[a,b]$, $g$ també. A més, $g(a) = f(a) - y < 0$ i $g(b) = f(b) - y > 0$. Per tant, pel teorema de Bolzano, existeix $t \in [a,b]$ tal que $g(t) = 0$.

Llavors aquest $t$ és tal que $f(t) = g(t) + y = y$.

**Proposició 12.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és **contínua** a l'interval $[a, b]$, aleshores $f$ és fitada en aquest interval. (És a dir, existeix $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < k$ per a tot $x \in [a, b]$).*

## Teorema del màxim i del mínim

**Teorema 3** (del màxim i del mínim). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és **contínua** a l'interval $[a, b]$, aleshores $f$ assoleix un **mínim** i un **màxim** absoluts en aquest interval.*




**Teorema 4** (Weierstrass). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és **contínua** a l'interval $[a, b]$, aleshores es compleix que $f([a, b])$ és un interval tancat i fitat de $\mathbb{R}$.*