R1. Estudiar la derivabilitat de les funcions que s'indiquen, calculant el seu camp de derivabilitat. Escriure l'expressió de la funció derivada corresponent, en el cas de que existeixi.

(a) $f(x) = \sin x \cdot E(x)$; (b) $f(x) = x|x|$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \le 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$; (d) $f(x) = x^2 - E(x^2)$.

Resultats:

(a) f derivable en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ i $f'(x) = \cos(x) \cdot E(x)$, $x \notin \mathbb{Z}$

(b) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 , & x \ge 0 \\ -x^2 , & x < 0 \end{cases}$

La funció f és derivable per $x \le 0$ i $x \ge 0$. Estudiem la derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2}{h} = h = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2}{h} = -h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Per tant, f és derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x) = \begin{cases} 2x , & x \ge 0 \\ -2x , & x < 0 \end{cases}$

(c) És evident que f és derivable per $x < 0$ i $x > 0$. Estudiem la derivabilitat en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{e^{-x} - 1}{h} \overset{\text{inf. eq.}}{=} -1 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\cancel{1} - h - \cancel{1}}{h} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = -1.$$

Per tant, f és derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x) = \begin{cases} -1 , & x \le 0 \\ -e^{x} , & x > 0 \end{cases}$

(d) Sabem que la funció $E(x)$ té salts a tots els enters i per tant, la funció $E(x^2)$ té discontinuitats de salt (i en conseqüencia no és derivable) a $\pm\sqrt{|k|}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Tenim llavors que f és derivable en $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | x = \pm\sqrt{|k|},\ k \in \mathbb{Z}\}$ i $f'(x) = 2x$, $x \neq \pm\sqrt{|k|}, k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Núria Parés, Francesc Pozo, Yolanda Vidal, Irene Arias

R2. Es considera la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + 3, & \text{si } x < 1 \\ 3, & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - bx}{x+5}, & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

Estudiar la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$.

Estudiem primer línterior dels intervals:

- en $(-\infty, 1)$, f és continua i derivable $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- en $(1, \infty)$, f és continua i derivable $\forall a, b \in \mathbb{R}$ per que el denominador no s'anul.la en aquest interval.

Resta llavors estudiar el punt $x = 1$:

- Continuitat:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{h\to 1^-} 2ax + 3 = 2a + 3 \\ \lim_{h\to 1^+} f(x) &= \lim_{h\to 1^+} \frac{x^2 - bx}{x+5} = \frac{1-b}{6} \end{aligned}$$

i llavors f cont. en $x = 1 \Leftrightarrow 3 = 2a + 3 = \frac{1-b}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -17 \end{cases}$

- Derivabilitat: Hem d'estudiar només el cas en que f és continua, és a dir, $a = 0$ i $b = -17$.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{6}(1+h)^2 + \frac{17}{6}(1+h) - 3}{h} = \frac{19}{6} \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{3-3}{h} = 0 \end{aligned}$$

i per tant f no és derivable en $x = 1$ per cap valor de $a, b \in \mathbb{R}$.

□

R3. Sigui la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar la continuïtat de la funció en $\mathbb{R}$.

(b) Estudiar la derivabilitat de la funció en $\mathbb{R}$. Calculeu la funció derivada Df.

(c) Aplicant la definició de derivada d'una funció en un punt, calculeu $Df(-3)$.

(d) Estudieu l'existència de la derivada segona de f.

(a) f és continua en $\mathbb{R}$ donç

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0 = f(0).$$

(b) f és derivable en $x = 0$ donç

$$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} & = & \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0 \\ \displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} & = & \displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Df(0) = 0$$

i $Df(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \geq 0 \\ -2x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(c)

$$Df(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(-3+h)^2 + (-3)^2}{h} = 6.$$

(d) És evident que Df és derivable en $x < 0$ i $x > 0$. Estudiem la derivabilidad de Df en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{Df(h)-Df(0)}{h} & = & \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{Df(h)-Df(0)}{h} & = & \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists Df(0)$$

i per tant, la segona derivada de f existeix en $\mathbb{R}-\{0\}$ i

$$D^2 f = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0 \\ -2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

□

R4. Estudiar la continuïtat i derivabilitat de les funcions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definides per: $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

segons els valors de $n \in \mathbb{N}$.

Les funcions f_n són funcions contínues ja que:

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{acotat} = 0 = f_n(0).$$

En el límit anterior hem usat que al fer el límit quan x tendeix a 0, avaluem la funció $f_n(x)$ en punts $x \neq 0$ propers a zero. Per això hem posat que $f_n(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$. També s'ha fet servir que per $n \geq 1$, si $x \to 0$, llavors $x^n \to 0$.

Estudiem ara la derivabilitat: si $x \neq 0$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}.$$

Si $x = 0$, utilitzem la definició de derivada:

$$f_n'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$$
$$= \begin{cases} 0 \cdot \text{acotat} = 0 & \text{si } n > 1 \\ \nexists & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Per tant, les funcions $f_n(x)$ són contínues en $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. També són derivables en $\mathbb{R}$, excepte la funció $f_1(x)$ que és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. □

R5. Calcular les derivades laterals de les funcions següents en els punts que s'indiquen:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en el punt $a = 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} (x-2)\arctan \frac{1}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $a = 2$.

(a)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$
$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/0^+}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/0^-}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1. \end{cases}$$

Per tant, $f_+'(0) = 0$ i $f_-'(0) = 1$, i com que no coincideixen les derivades laterals, la funció f no és derivable en el zero.

(b)

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\arctan \frac{1}{x-2}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \arctan \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

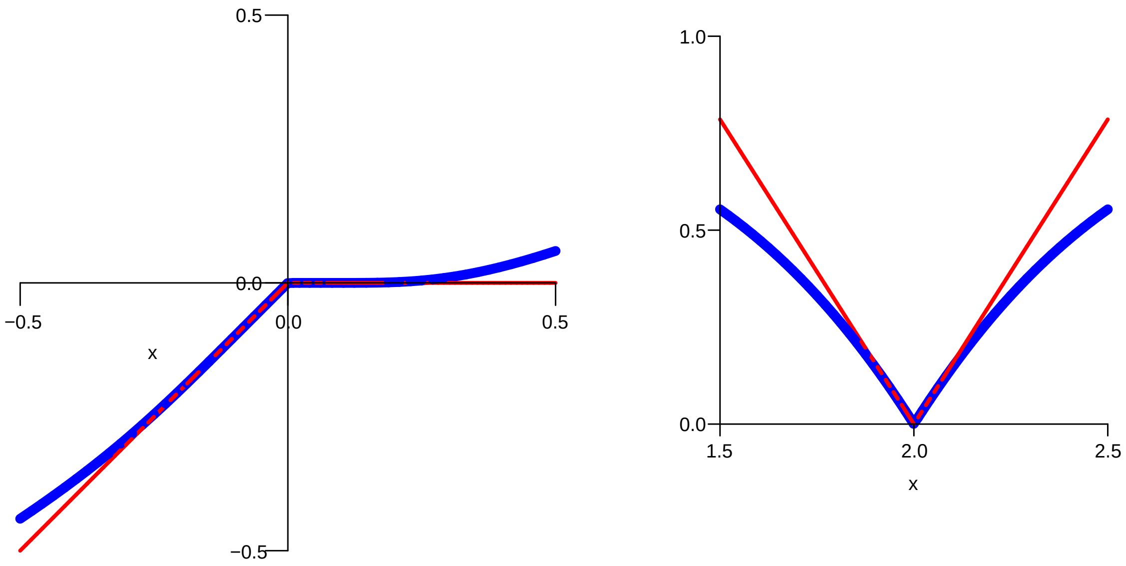
Llavors,

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2+} \arctan \frac{1}{x-2} = \lim_{y\to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2},$$

i

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2-} \arctan \frac{1}{x-2} = \lim_{y\to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2},$$

on en els dos límits anteriors s'ha fet el canvi de variable $y = \frac{1}{x-2}$.
Per tant, $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}$ i $f'_-(0) = -\frac{\pi}{2}$, i com que no coincideixen les derivades laterals, la funció f no és derivable en el punt $x = 2$.



A la figura s'han representat les gràfiques de les funcions i les rectes tangents laterals en els punts conflictius. □

R6 i 7. Resultats: els resultats dels problemes 6 i 7 es poden calcular amb l'ajuda del maple.

Nota: per comprovar aquest problema amb el maple, les comandes que cal fer servir són:

1.- definir la funció

$[> f := x- > exp(x^2);$

2.- calcular la primera derivada

$[> diff(f(x), x);$

3.- calcular la segona derivada

$[> diff(diff(f(x), x), x);$

□

R8. Provar que en la paràbola d'equació $y = Ax^2 + Bx + C$, la corda que uneix als punts d'abcissa $x = a$ i $x = b$, és paral·lela a la recta tangent a la paràbola en el punt d'abcissa $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Per veure que la corda i la tangent son paral·lleles hem de veure que tenen la mateixa pendent. Sigui f la funció que defineix la parábola, la pendent de la corda és:

$$\begin{aligned} m_c &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{Ab^2 + Bb + \cancel{C} - Aa^2 - Ba + \cancel{C}}{b-a} \\ &= \frac{A(b^2 - a^2) + B(b-a)}{b-a} = A(b+a) + B \end{aligned}$$

i dáltra banda, la pendent de la tangent a la paràbola en $x = (a+b)/2$ és:

$$m_t = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \cancel{2}A\frac{a+b}{\cancel{2}} + B$$

i per tant, efectivament, $m_c = m_t$. □

R9. Calcular la segona derivada de les funcions:

(a) $f(x) = e^{x^2}$;

(b) $h(x) = (1 + x^2)\arctan x$;

(c) $g(x) = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$;

(d) $i(x) = a\cosh \dfrac{x}{a}$.

Resultats:

(a) $f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$

(b) $h'(x) = 2x\arctan(x) + 1, \quad h''(x) = 2\arctan(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}$

(c) $g'(x) = \dfrac{2x}{3(1+x^2)}, \quad g''(x) = \dfrac{2}{3(1+x^2)} - \dfrac{4x^2}{3(1+x^2)^2}$

(d) $i'(x) = \sinh(\dfrac{x}{a}), \quad i''(x) = \dfrac{1}{a}\cosh(\dfrac{x}{a})$

$\square$

R10. Estudieu la derivabilitat i calculeu la derivada de les següents funcions:

(a) $f(x) = |x| + x$

(b) $f(x) = e^{-x^2} + \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(h) $f(t) = \begin{cases} e^t & , t \leq 0 \\ 1 & , 0 < t < 1 \\ \ln t & , t \geq 1 \end{cases}$

(g) $f(t) = \begin{cases} |t| & , t \leq 1 \\ -(t-1)^2 & , t > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \cos^2 x + \sin(2x) + \arctan x$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sin(\dfrac{1}{x^2}) + \ln\left(x^2+1\right)$

Resultats:

(a) f és derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ i $f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$

(b) f és derivable en $\mathbb{R}^+$ i $f'(x) = -2xe^{-x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) f és derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ i $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

(d) f és derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ i $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{x+1}}$.

(e) f derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x)=2\cos 2x+\dfrac{1}{1+x^2}$.

(f) f és derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ i $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(g) f és derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ i $f'(t)=\begin{cases} e^t, & t<0\\ 0, & 0<t<1\\ \frac{1}{t}, & t>1\end{cases}$.

(h) f és derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ i

$$f'(t)=\begin{cases} -1, & t<0\\ 1, & 0<t<1\\ -2(t-1), & t>1\end{cases}.$$

□

R11. Trobeu els punts en els que la recta tangent a la corba $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ és paral·lela a l'eix d'abcisses.

Per ser paral·lela a l'eix d'abcisses, la recta tangent $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+20$ a de tenir pendent nula, és a dir,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3+12x^2-24x=12x(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow\\ & \begin{cases} x=0 & \to & f(0)=20\\ x=1 & \to & f(1)=15\\ x=-2 & \to & f(-2)=-12\end{cases}\end{aligned}$$

i per tant els punts de tangent horitzontal son (0,20), (1,15), (-2,-12). □

R12. Trobeu els punts en que la recta tangent a la corba $y=x-\dfrac{1}{x}$ és paral·lela a la recta $2x-y=5$.

La recta $2x-y=5$ té pendent $m=2$. Es tracta llavors de probar els punts (x,f(x)), amb $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, tals que $f'(x)=2$. Tenim

que
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$
i com que $f(1) = 0$; $f(-1) = 0$, els punts que busquems son (-1,0) i (1,0). □

R13. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és funció derivable, calculeu les derivades de les funcions:

(a) $g(x) = f(x^2 + 1)$;

(b) $g(x) = \dfrac{f(x) + 1}{x^2 + 1}$;

(c) $g(x) = f(\sin^2 x) + \cos(f(x))$;

(d) $g(x) = e^{f(x)} + x^2 f(x) + f(f(x))$;

(a) $g'(x) = 2xf'(x^2 + 1)$

(b) $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x^2 + 1) - 2x(f(x) + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

(c) $g'(x) = 2\sin x \cos x f'(\sin^2(x)) + \sin(f(x))f'(x)$

(d) $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} + 2xf(x) + x^2 f'(x) + f'(f(x))f'(x)$

□

R14. En quins punts la pendent de la recta tangent a $f(x) = x^3 - 6x$ és paral·lela al segment que uneix $P_1(0, 0)$ i $P_2(2, -4)$?

La pendent del segment donat és $m_s = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4 - 0}{2 - 0} = -2$. Busquem llavors punts on la tangent tingui pendent -2, és a dir,
$$f'(x) = 3x^2 - 6 = -2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Els punts buscats son llavors $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{28}{9\sqrt{3}}\right)$ i $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{28}{9\sqrt{3}}\right)$. □

R15. Calcula la pendent de les tangents a la paràbola

$y = -x^2 - 4x + 1$ en els seus punts d'intersecció amb l'eix OX.

La paràbola talla l'eix d'abcisses en punts tals que:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{5}$$

Les pendents de les tangents a f en aquests punts s'obtenen avaluant la derivada $f'(x) = -2x - 4$ i son:

$$f'(-2 \pm \sqrt{5}) = \mp 2\sqrt{5}.$$

□

R16. Sigui f la funció real definida per

$$f(x) = 5 - (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1) - x^2 \qquad \forall x \in [0, e]$$

Determineu, si és possible, el nombre d'arrels en $[0, e]$.

Hem de calcular el nombre d'arrels o el que és el mateix, el nombre de zeros de la funció $f(x) = 5 - (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1) - x^2$.

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, per tant, f és contínua en $[0, e]$ i derivable en $(0, e)$.

Com que $f(0) = 5$ i $f(e) = -20.23$, pel teorema de Bolzano sabem que com a mínim hi ha un zero en aquest interval.

Per saber quants zeros hi han, estudiarem el creixement i decreixement de la funció. Com que la funció és derivable, sabem que en els punts on $f'(x) > 0$, la funció serà creixent i on $f'(x) < 0$, la funció serà decreixent.

Per calcular el signe de $f'(x)$ ens interessa saber els punts on $f'(x)$ s'anul.la.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\ln(x^2+1) - (x^2+1)\frac{2x}{x^2+1} - 2x \\ &= -2x\ln(x^2+1) - 2x - 2x = -2x(\ln(x^2+1) + 2) \end{aligned}$$

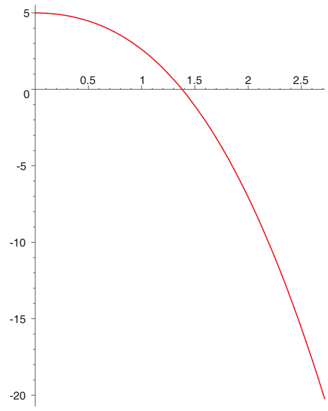
Per tant, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ o bé

$$\ln(x^2+1) = -2 \Longrightarrow x^2+1 = e^{-2} \Longrightarrow x^2 = e^{-2} - 1 = -.86$$

per tant l'únic punt crític en $[0, e]$, és $x = 0$.

A més, com que $f'(e) = -22.44$, la funció f és estrictament decreixent en l'interval $[0, e]$.

Per tant, com que la funció és estrictament decreixent, només tenim un zero en l'interval $[0, e]$.



$\square$

R17. Trobeu els extrems relatius de

$$f(x) = x + \sqrt{x^3}$$

$\square$

La funció f está definida en $[0, \infty)$. Per trobar els extrems relatius hem d'estudiar:

- els punts on $\nexists f'$. En aquest cas, f és derivable en $(0, \infty)$.
- els punts crítics en $(0, \infty)$. En aquest cas tenim que:

$$\forall x \in (0, \infty) \quad f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

- els extrems d l'interval. En aquest cas:
  - avaluem la derivada lateral en $x = 0$, és a dir $f'(0) = 1 \neq 0$.

– calculem $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$

Per tant, la funció f no té extrems relatius.

R18. Trobeu l'equació de la paràbola que millor aproxima en el punt (0,0) a la corba $f(x) = e^x \ln(x+1)$.

La paràbola que millor aproxima la corba en el punt $(0,0)$ és el polinomi de Taylor d'ordre 2 de la funció en el punt 0, és a dir

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

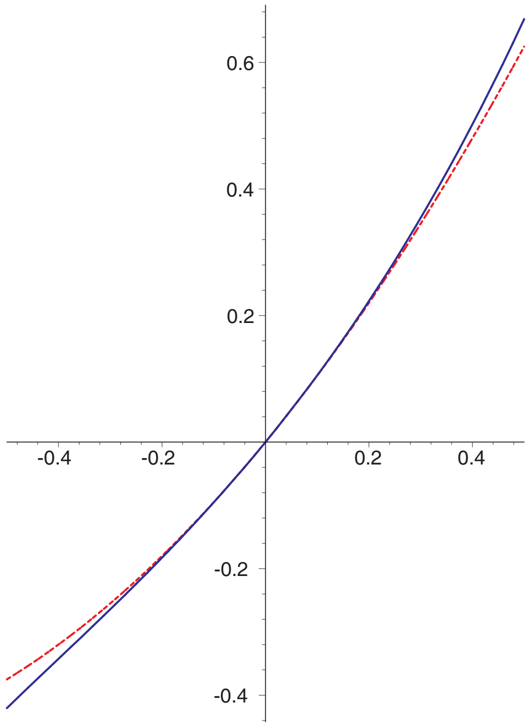
$$f(x) = e^x \ln(x+1) \Longrightarrow f(0) = e^0 \ln(1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \frac{1}{x+1} = f(x) + \frac{e^x}{x+1} \Longrightarrow f'(0) = 0 + \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = f'(x) + \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} \Longrightarrow f''(0) = 1 + \frac{1-1}{1} = 1.$$

Per tant

$$p(x) = 0 + x + \frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}x^2.$$



□

R19. Calculeu $\cos(1)$ amb un error inferior a 0.001 aplicant la fórmula de Taylor.

Per aproximar $\cos(1)$ utilitzem el polinomi de Taylor de la funció $\cos(x)$ en el punt $x_0 = 0$. L'ordre del polinomi n ve determinat per la precissió requerida: en aquest cas ens demanen que l'error de l'aproximació sigui inferior a 0.001, és a dir, que 0.001 ha de ser una cota superior estricta del residu associat al polinomi de grau n i avaluat en 1:

$$|R_{n+1}(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| < 0.001, \quad \xi \in (0,1)$$

Sabem que la derivada $(n+1)-$éssima de cos pot ser o bé $\pm \sin$ o bé $\pm \cos$, segons el valor de n. Com que $\xi \in (0,1)$, sabem que:

$$|f^{(n+1)}(\xi)| < 1$$

i per tant

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{(n+1)!} < 0.001 \Leftrightarrow (n+1)! > 1000$$

Així donç, prenent $n = 6$ tenim $(n+1)! = 7! = 5040 > 1000$. Hem de construir llavors el polinomi de Taylor d'ordre 6 de $f(x) = \cos(x)$ en el punt $x_0 = 0$, és a dir

$$\begin{aligned} T_6(x) \quad &= \quad f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \\ & \quad\quad \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6. \end{aligned}$$

Tenim que:

$$\begin{array}{ll} f(0) = \cos(0) = 1 & f^{(4)} = \cos(0) = 1 \\ f'(0) = -\sin(0) = 0 & f^{(5)} = -\sin(0) = 0 \\ f''(0) = -\cos(0) = -1 & f^{(6)} = -\cos(0) = -1 \\ f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 & \end{array}$$

i així

$$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

i per tant

$\cos(1) \approx T_6(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} \approx 0.5402777778.$ □

R20. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x) = x^3 - 3x$ a l'interval $[0,2]$.

Com que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sabem que f és contínua en $[0,2]$ i derivable en $(0,2)$. Per tant els possibles extrems són $x = 0$, $x = 2$ i els punts crítics.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1.$$

Anem a més a estudiar el signe de la derivada:

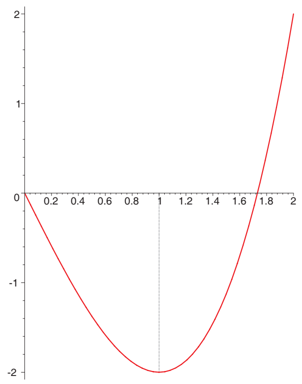
$$f'(0) = -3, \quad f'(1) = 0, \quad f'(2) = 9,$$

per tant f és decreixent en $[0,1]$ i creixent en $[1,2]$.

L'únic que ens falta és calcular els valors de les funcions

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2.$$

$x = 0$	màxim relatiu
$x = 1$	mínim absolut
$x = 2$	màxim absolut



□

R21. a) Expresseu el teorema de Taylor per a la funció exponencial en $x_0 = 0$.

b) Calculeu e amb un error inferior a 10^{-8}.

(a) anem a calcular primer el polinomi de Taylor de la funció $f(x) = e^x$ al voltant del punt $x_0 = 0$.

El polinomi de Taylor d'f al voltant del punt $x = 0$ d'ordre n és:

$$P_n(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(x)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^n(0)x^n.$$

En el cas en que $f(x) = e^x$, com que $f^k(x) = f(x) = e^x$, per a tota $k \in \mathbb{N}$, tenim que $f^k(0) = e^0 = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Per tant, el polinomi de Taylor és:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

A més, sabem que, donat un punt $x_0 \in (a, b)$ concret, la diferència entre el valor de la funció f i el polinomi P_n en aquest punt es pot expressar com:

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)x^{n+1},$$

per algun $\xi \in (a, b)$.

(b) observem que $e = f(1)$. Per tant, per calcular e farem servir l'aproximació d'f pels polinomis $P_n(x)$ calculats en l'apartat (a). Com que el punt $x = 1$ està bastant lluny, per calcular una aproximació amb tanta precisió necessitarem agafar n

gran. Per fer-nos una primera idea, fem una taula de valors:

n	$P_n(1)$
1	1.
2	2.
3	2.500000000
4	2.666666667
5	2.708333333
6	2.716666667
7	2.718055556
8	2.718253968
9	2.718278770
10	2.718281526

Veiem que a mesura que anem augmentant l'ordre del polinomi, l'aproximació que obtenim del nombre e és millor. En aquest cas, no és fins que considerem $n = 13$, que obtenim que

$$P_{13}(1) = 2.718281828,$$

que té un error de $e^1 - P_{13}(1) = 0.17288 \cdot 10^{-9} < 10^{-8}$.

□

R22. Estudieu els límits:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\ln(1+bx)}$ $(b \neq 0)$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\sin(2x)}{2x}$;

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$;

(e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$;

(f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$;

(g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}$;

(h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$;

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(2x-2)-2(x-1)}{(x-1)^3}$;

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\ln(1+bx)} = \frac{0}{0} = IND$

Per resoldre la indeterminació considerarem els polinomis de Taylor de les funcions que apareixen en el numerador i en el denominador al voltant del punt on estem calculant el límit, $x = 0$. Serà suficient calcular el polinomi de Taylor fins al terme principal.

Considerem primer la funció $f(x) = \arctan(ax)$, llavors

$$\begin{array}{ll} f(x) = \arctan(ax) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{a}{1+a^2x^2} & f'(0) = a. \end{array}$$

Per tant el polinomi de Taylor d'ordre 2 d'f és: $p_2^f(x) = 0 + ax$, i a més podem escriure que en un entorn del punt $x = 0$, $f(x) = ax + \mathcal{O}(x^2)$.

De la mateixa manera, considerem la funció $g(x) = \ln(1 + bx)$, on

$$\begin{array}{ll} g(x) = \ln(1+bx) & g(0) = 0 \\ g'(x) = \frac{b}{1+bx} & g'(0) = b. \end{array}$$

Per tant tenim que: $p_2^g(x) = bx$ i $g(x) = bx + \mathcal{O}(x^2)$.

Llavors podem resoldre el límit segons:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\ln(1+bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax + \mathcal{O}(x^2)}{bx + \mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{a + \mathcal{O}(x)}{b + \mathcal{O}(x)} = \frac{a+0}{b+0} = \frac{a}{b},$$

on hem usat que $b \neq 0$.

A més podem deduir d'aquest problema que si $a \neq 0$ i $b \neq 0$, llavors $\arctan(ax) \sim_0 ax$ i que $\ln(1 + bx) \sim_0 bx$.

Una altra manera de fer aquest problema és aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\ln(1+bx)} = \frac{0}{0} = IND.$$

Les funcions $\arctan(ax)$ i $\ln(1+bx)$ són contínues i derivables en un entorn del punt $x=0$ i a més $(\ln(1+bx))' = \frac{b}{1+bx}$ si $b \neq 0$ no s'anul.la en un entorn del punt $x=0$, per tant:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\ln(1+bx)} == \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a}{1+a^2x^2}}{\frac{b}{1+bx}} = \frac{a}{b}.$$

Observem que per saber que la indeterminació era del tipus $0/0$, hem hagut d'avaluar les funcions en $f(x) = \arctan(ax)$ i $g(x) = \ln(1+bx)$ en el punt $x=0$. A més hem hagut de calcular les derivades $f'(x)$ i $g'(x)$ i també avaluar-les en $x=0$. És a dir, hem necessitat la mateixa informació que per fer els respectius polinomis de Taylor.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\sin(2x)}{2x} = \frac{0}{0} = IND$

Sabem que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, per tant tenim que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\sin(2x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1+2\cos(x))}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{1+2\cos(x)}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2\cos(x)}{2} = \frac{3}{2},$$

on hem usat que $\sin x \sim_0 x$. Anem a demostrar-ho usant la fòrmula de Taylor de la funció $f(x) = \sin x$ al voltant del zero:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) & f'(0) = 1. \end{array}$$

Per tant tenim que $f(x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ al voltant del zero i:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{x+\mathcal{O}(x^2)}{x} = \lim_{x=0} \frac{1+\mathcal{O}(x)}{1} = 1,$$

com volíem veure.

Si haguéssim fet aquest límit per l'Hôpital, haguéssim obtingut:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\sin(2x)}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+2\cos(x)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Observem que hem pogut fer servir l'Hôpital perquè les funcions del nominador i denominador són $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i a més la derivada del denominador és $2 \neq 0$ en un entorn del punt $x = 0$.

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} = IND$

En aquest cas usarem la fòrmula de Taylor fins a ordre 2 al voltant del punt $x = 2$ per factoritzar els polinomis que ens apareixen en el denominador i en el numerador:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4 & f(2) &= 0 \\ f'(x) &= 2x & f'(2) &= 4 \\ f''(x) &= 2 & f''(2) &= 2, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 3x + 2 & g(2) &= 0 \\ g'(x) &= 2x - 3 & g'(2) &= 1 \\ g''(x) &= 2 & g''(2) &= 2, \end{aligned}$$

per tant: $f(x) = 4(x-2) + \frac{2}{2}(x-2)^2 = 4(x-2) + (x-2)^2$ i $g(x) = (x-2) + (x-2)^2$.

D'aquesta manera tenim que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)+(x-2)^2}{(x-2)+(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{4+(x-2)}{1+(x-2)} = 4.$$

Una altra manera hagués sigut factoritzar tant numerador i denominador segons:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

Finalment, si ho haguéssim fet fent servir la regla de l'Hôpital haguéssim tingut:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-3} = \frac{4}{1} = 4.$$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0} = IND$

La primera manera de fer aquest problema és sabent factoritzar $x^m - 1$:

$$x^m - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1}),$$

per tant

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1})}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1} = m.$$

Sinó es pot considerar el polinomi de Taylor de la funció $f(x) = x^m - 1$ d'ordre 2 al voltant del punt $x = 1$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^m - 1 & f(1) = 0 \\ f'(x) = mx^{m-1} & f'(1) = m, \end{array}$$

per tant

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{m(x-1) + \mathcal{O}((x-1)^2)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} m + \mathcal{O}((x-1)) = m.$$

Finalment, usant la regla de l'Hôptial tenim que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{mx^{m-1}}{1} = m.$$

(e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = IND$

Considerem primer el canvi de variable $t = \frac{1}{x}$. Noteu que si $x \to +\infty$, llavors $t \to 0^+$, per tant tenim que:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+e^{\frac{1}{t}})}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+} t\ln(1+e^{\frac{1}{t}}).$$

Una manera de calcular aquest límit és considerant el polinomi de Taylor de la funció $f(t) = \ln(1 + e^{\frac{1}{t}})$ al voltant del punt $t = 0$. En aquest cas tenim que $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, i per tant no tindria sentit calcular el polinomi de Taylor d'aquesta funció. A més, $\lim_{t\to 0^+} \ln(1 + e^{\frac{1}{t}}) = +\infty$, cosa que encara ho complica més. Tot i que es podria fer amb Taylor, en aquest cas l'ús de la regla de l'Hôpital ens facilita les coses:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} &= \frac{+\infty}{+\infty} = IND \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{1}{1+0} = 1.\end{aligned}$$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)} = \frac{+\infty}{+\infty} = IND$

Aquesta indeterminació es pot resoldre dividint per x tant el numerador com el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\sin(x)}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

En aquest cas no podríem aplicar la regla de l'Hôpital, ja que si considerem la derivada del denominador $(x - \sin(x))' = 1 - \cos(x)$, veiem que no podem afirmar que a partir d'algun nombre, a, $(x - \sin(x))' \neq 0$, per a tot $x \geq a$. De fet, sigui quin sigui el valor d'a, sempre podrem trobar un $x > a$ pel qual $1 - \cos(x) = 0$.

(h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = IND$

Per odres d'infinitud sabem que: $\sqrt{x} << \ln(x)$, i per tant:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Si calculem el límit utilitzant l'Hôptial tenim que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(2x-2)-2(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{0}{0} = IND$

Anem a resoldre aquest límit primer calculant el polinomi de Taylor de la funció del numerador
$f(x) = \tan(2x-2) - 2(x-1)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan(2x-2) - 2(x-1)\\
f'(x) &= 2(1+\tan^2(2x-2)) - 2 = 2\tan^2(2x-2)\\
f''(x) &= 8\tan(2x-2)(1+\tan^2(2x-2)) = 8\tan(2x-2) + 8\tan^3(2x-2)\\
f'''(x) &= 16(1+\tan^2(2x-2)) + 48\tan^2(2x-2)(1+\tan^2(2x-2))\\
&= 16 + 64\tan^2(2x-2) + 48\tan^4(2x-2)
\end{aligned}$$

Per tant:

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0 \quad \text{i} \quad f'''(1) = 16,$$

i podem escriure que en un entorn del punt $x = 1$,

$$f(x) = \frac{16}{3!}(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).$$

D'aquesta manera:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(2x-2)-2(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{8}{3}(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4)}{(x-1)^3}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{8}{3} + \mathcal{O}((x-1))}{1} = \frac{8}{3}.$$

Com que hem hagut de considerar el polinomi de Taylor fins a ordre 3, per resoldre el límit utilitzant la regla de l'Hôpital ens caldran tres passos per trobar el resultat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\tan(2x-2)-2(x-1)}{(x-1)^3} &= \frac{0}{0} = IND \\
= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3} &= \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{3(x-1)^2} = \frac{0}{0} = IND \\
= \lim_{x\to 1} \frac{f''(x)}{6(x-1)} &= \frac{0}{0} = IND \\
= \lim_{x\to 1} \frac{f'''(x)}{6} &= \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

□

R23. Calculeu els extrems de la funció $f(x) = x\sin(x)$ a l'interval $[0,6]$.

Com que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, en particular f és contínua en $[0,6]$ i derivable en $(0,6)$. Per tant, els candidats a extrems de la funció en l'interval $[0,6]$ són els punts crítics d'f (punts amb derivada nul.la) i els extrems $x = 0, 6$.

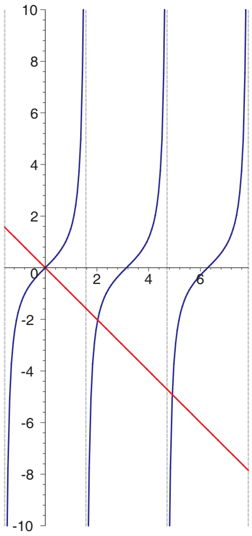
A més, pel teorema del màxim i del mínim (per a funcions contínues en un tancat), sabem que hi ha un màxim i un mínim absoluts en $[0,6]$.

Determinació dels punts crítics:

$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x) = 0 \iff -x = \tan(x)$

Aquesta equació no es pot resoldre de manera analítica, per tant haurem de fer servir el Teorema de Bolzano.

Per això primer hem d'identificar en quins intervals tindrem els zeros. En aquest cas, els punts crítics venen donats per l'intersecció de la recta $y = -x$ i la corba $y = \tan(x)$ que són fàcils de representar.



Com veiem en la figura, sabem que les dues funcions, $y = -x$ i $y = \tan(x)$, es tallen tres vegades en l'interval $[0, 6]$, la primera en $x = 0$, la segona en $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ i la segona en $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Per determinar les dues interesec-cions en $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ i $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ farem servir el mètode de la bisecció aplicat a la funció $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$.

Considerem primer l'interval $[\frac{\pi}{2}, \pi]$:

x_e	x_d	$f'(x_e)$	$f'(x_d)$	x_m	$f'(x_m)$
1.5708	3.1416	.99999	−3.1416	2.3562	−.95900
1.5708	2.3562	.99999	−.95900	1.9635	.17247
1.9635	2.3562	.17247	−.95900	2.1598	−.36831
1.9635	2.1598	.17247	−.36831	2.0616	−.08974
1.9635	2.0616	.17247	−.08974	2.0126	.04345
2.0126	2.0616	.04345	−.08974	2.0371	−.02262
2.0126	2.0371	.04345	−.02262	2.0249	.01041
2.0249	2.0371	.01041	−.02262	2.0310	−.00607
2.0249	2.0310	.01041	−.00607	2.0279	.00232
2.0279	2.0310	.00232	−.00607	2.0295	−.00202
2.0279	2.0295	.00232	−.00201	2.0288	−.00011

Per tant, com que f' és contínua en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ i $f'(2.0279) \cdot f'(2.0295) < 0$, sabem que f' té un zero en aquest interval (pel teorema de Bolzano). Per tant, sabem que el zero, amb dos decimals correctes és: $x_2 = 2.02$.

De fet, calculat amb l'ordinador el zero dona $x_2 = 2.028757838$.

Considerem ara l'interval $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$:

x_e	x_d	$f'(x_e)$	$f'(x_d)$	x_m	$f'(x_m)$
4.7124	6.2832	−.99995	6.2832	5.4978	3.1805
4.7124	5.4978	−.99995	3.1805	5.1051	1.0298
4.7124	5.1051	−.99995	1.0298	4.9088	−.02282
4.9088	5.1051	−.02282	1.0298	5.0070	.49698
4.9088	5.0070	−.02282	.49698	4.9579	.23499
4.9088	4.9579	−.02282	.23499	4.9334	.10582
4.9088	4.9334	−.02282	.10582	4.9211	.04140
4.9088	4.9211	−.02282	.04140	4.9150	.00951
4.9088	4.9150	−.02282	.00951	4.9119	−.00667
4.9119	4.9150	−.00667	.00951	4.9135	.00167

Per tant, com que f' és contínua en $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ i $f'(4.9119) \cdot f'(4.9150) < 0$, sabem que f' té un zero en aquest interval (pel teorema de Bolzano). Per tant, sabem que el zero, amb dos decimals correctes és: $x_3 = 4.91$.

De fet, calculat amb l'ordinador el zero dona $x_3 = 4.913180439$.

Per tant tenim que els punts candidats són $x = 0, 2.02, 4.91$ i 6.

Per determinar el màxim i mínim absoluts calcularem les imatges dels punts candidats

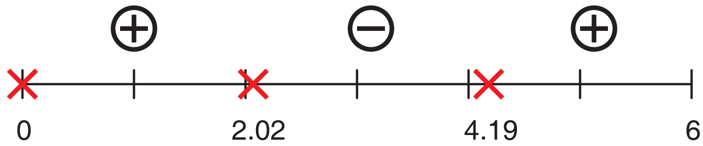
x	$f(x)$
0	0
2.02	1.82
4.91	−4.81
6	−1.68

Per tant tenim que el mínim absolut és $x = 4.91$ i que el màxim absolut és $x = 2.02$.

Ara només ens falta mirar què tenim en $x = 0$ i $x = 6$. Això ho farem estudiant el signe de la derivada.

Sabem que f' s'anul.la en $x = 0, 2.02$ i 4.19 i a més és una funció contínua, per tant f' no canvia de signe en els intervals $[0, 2.02]$, $[2.02, 4.19]$ i $[4.19, 6]$.

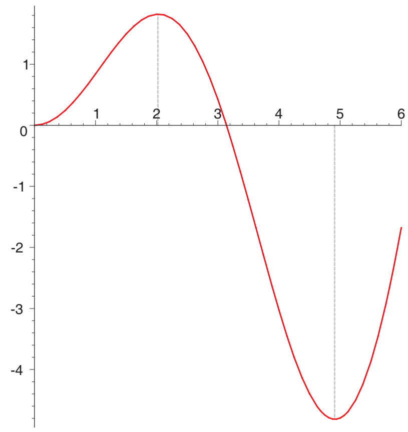
Com que $f'(1) = 1.38$, $f'(3) = -2.82$ i $f'(5) = 0.46$, el signe de la derivada és:



Per tant, f és creixent en $[0, 2.02]$ i en $[4.19, 6]$ i decreixent en $[2.02, 4.19]$.

Per tant tenim:

$x = 0$	mínim relatiu
$x = 2.02$	màxim absolut
$x = 4.19$	mínim absolut
$x = 6$	màxim relatiu



□

R24. Calculeu els extrems de la funció $f(x) = x\ln(x)$ a l'interval $[0.1, 3]$.

---

f és contínua en $[0.1, 3]$ i derivable en $(0.1, 3)$. Per tant els candidats a extrems són els punts crítics i 0.1 i 3. A més, pel teorema del màxim i del mínim sabem que en $[0.1, 3]$ tenim un màxim i un mínim absoluts.

Calculem els punts crítics:

$$f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1.$$

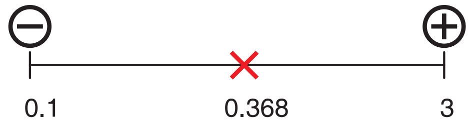
Per tant $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.368.$

Calculem primer el màxim i el mínim absoluts

x	01	0.368	3
$f(x)$	-0.23	-0.37	3.29

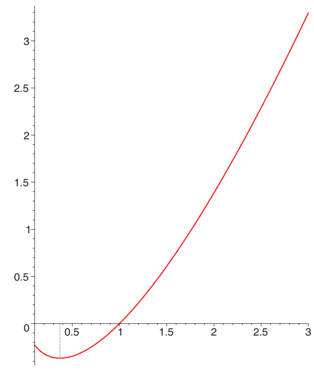
Per tant, $x = 0.368$ és el mínim absolut i $x = 3$ és el màxim absolut. Com que f és contínua, els màxims i mínims s'alternen, per tant $x = 0.1$ serà un màxim relatiu. Anem-ho a comprobar amb el creixement (signe de la derivada).

$f'(0.1) = -1.30$, $f'(0.368) = 0$ i $f'(3) = 2.09$, per tant tenim



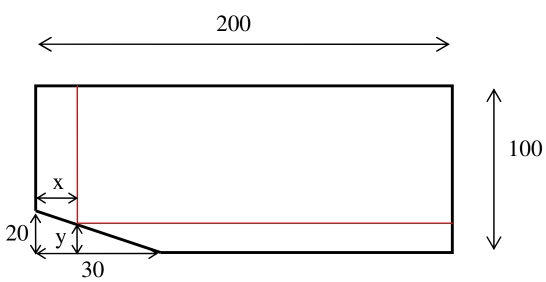
és a dir, f és decreixent en $[0.1, 0.368]$ i creixent en $[0.368, 3]$.

$x = 0.1$	màxim relatiu
$x = 0.368$	mínim absolut
$x = 3$	màxim absolut



$\square$

R25. D'un mirall rectangular de 2m de llargària i 1m d'alçada se n'ha trencat, en un dels vèrtexs, un triangle rectangle que té 30cm de llargària i 20cm d'altura. Com s'haurà de tallar un altre mirall de costats paral.lels al mirall inicial de manera que l'àrea d'aquest nou mirall sigui màxima.



Es tracta de determinar el punt (x, y) que maximitza l'àrea $A(x) = (200 - x)(100 - y)$, on $0 \le x \le 30$ i $0 \le x \le 20$.

Per semblança de triangles, tenim $\dfrac{30-x}{y} = \dfrac{30}{20} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}(30-x)$ i llavors

$$A(x) = (200-x)(100-y) = \frac{2}{3}(200-x)(120+x)$$

Busquem el màxim absolut d'aquesta funció en l'interval [0,30]. Com que la funció és derivable en (0,30), sabem que el màxim por ser o bé un punt crític o bé un dels extrems de l'interval. Estudiem primer els punts crítics:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(-120-x+200-x) = 0 \Leftrightarrow x = 40 \notin (0,30)$$

Llavors, el màxim absolut es troba en un dels extrems de l'interval:

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{2}{3}(200-0)(120+0) = 16000 \\ A(30) &= \frac{2}{3}(200-30)(120+30) = 17000, \end{aligned}$$

i per tant, hem de tallar el mirall pel punt (30,0). □

R26. Disposem d'un filferro d'1m de llargària. De quina manera s'haurà de repartir per tal de construir una circumferència i un quadrat de manera que la suma de l'àrea del cercle que determina la circumferènca i l'àrea del quadrat sigui mínima.

Sigui r el radi de la circumferència i l el costat del quadrat, s'ha de cumplir que $r + l = 1$m. Podem escriure l'àrea total de les dues figures com:

$$A(r) = \pi r^2 + (1-r)^2, \quad r \in [0,1].$$

Aquesta funció és derivable en (0,1) i per tant el seu mínim absolut es troba o bé en un punt crític o bé en els extrems de l'interval. Estudiem els punts crítics:

$$A'(r) = 2\pi r - 2(1-r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{1-\pi},$$

és un mínim, perque A(r) és una paràbola amb coefficient director possitiu. El valor de l'àrea corresponent és

$$A\left(\frac{1}{1-\pi}\right) = \frac{\pi(\pi+1)}{(1-\pi)^2} \approx 2.84\mathrm{m}^2$$

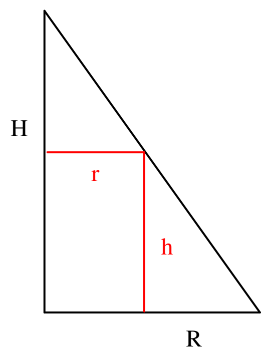
D'altra banda tenim

$$\begin{aligned} A(0) &= 1\mathrm{m}^2 < 2.84\mathrm{m}^2 \\ A(1) &= \pi\mathrm{m}^2 \approx 3.14\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

i per tant l'area mínima s'aconsegueix en el cas degenerat $r = 0$ i $l = 1$. □

R27. Determinar l'altura del cilindre circular recte de volum màxim que es pot inscriure en un con circular recte d'un metre d'altura.

Sigui R el radi del con i H la seva altura (H=1m). Siguin r, h el radi i la altura, respectivament, del cilindre, $V = \pi r^2 h$ el seu volum. Considerem la secció principal del con.



Per semblança de triangles tenim

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h} \Leftrightarrow r = \frac{R(H-h)}{H}$$

Podem escriure llavors

$$V(h) = \pi\frac{R^2(H-h)^2}{H^2}h = \frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h$$

Busquem un màxim absolut d'aquesta funció. Estudiem primer els punts crítics:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)(H-3h) = 0 \Leftrightarrow h = H \quad \text{ó} \quad h = \frac{H}{3}$$

La solució $h = H$ no té sentit donç correspon a un cilindre de radi 0 i, en conseqüència, volum 0. D'altra banda, comprovem que

$$V''(h) = \frac{2\pi R^2}{H^2}(3h - 2H); \quad V''\left(\frac{H}{3}\right) = -2\pi\frac{R^2}{H} < 0$$

i, per tant, la solució $h = \dfrac{H}{3}\left(= \dfrac{1}{3}\text{m}\right)$ correspon a un màxim de V(h). $\square$

R28. Un col.leccionista, entre segells i monedes, en té 50. Si un altre col.leccionista li dóna tres segells a canvi d'una moneda, el producte del nombre de monedes que li queden pel de segells és màxim. Quants segells i monedes tenia inicialment.

Siguin $s, m \in \mathbb{N}$, els nombres inicials de segells i monedes, respectivament. Llavors $s + m = 50 \Leftrightarrow m = 50 - s$. Després de l'intercanvi, el producte $p(s) = (s + 3)(m - 1) = (s + 3)(49 - s)$ és un màxim absolut. Si el màxim fos un extrem relatiu, tindriem

$$p'(s) = 49-s-s-3 = 46-2s = 0 \Leftrightarrow s = 23 \rightarrow p(23) = 26*26 = 676$$

D'altra banda, en els extrems de l'interval, en aquest cas $s = 0$ o $s = 49$ (donç $m \geq 1$ per que el canvi de l'enunciat sigui possible), tenim $p(0) = p(49) = 0$. Per tant, $s = 23$ i $m = 27$.

$\square$

R29. Troba dos nombres positius que sumant 30 tinguin mínima la suma dels seus quadrats.

Siguin $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 0$, tals que $p + q = 30 \Leftrightarrow p = 30 - q$. La suma de quadrats és $S(p) = p^2 + (30 - p)^2$. El punt crític d'aqusta funció és:

$$S'(p) = 2p - 2(30 - p) = 4p - 60 = 0 \leftrightarrow p = 15; \quad S(15) = 450$$

Com $S(p)$ és una paràbola amb coeficient director possitiu, $p = q = 15$ és un mínim relatiu i també absolut en $\mathbb{R}^+$. $\square$

R30. Es vol construir un recipient cilíndric, amb tapa, de volum $100m^3$. Quines han de ser les seves dimensions perquè s'utilitzi la mínima quantitat de material?

Siguin R, H el radi i l'altura del recipient, respectivament. Sabem que el seu volum $V = \pi R^2 H = 100\text{m}^3 \Leftrightarrow H = \dfrac{V}{\pi R^2}$. Busquem els valors de R, H que fan mínim l'àrea total del recipient, és a dir, el mínim absolut de la funció

$$A(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R + \frac{V}{\pi R^2})$$

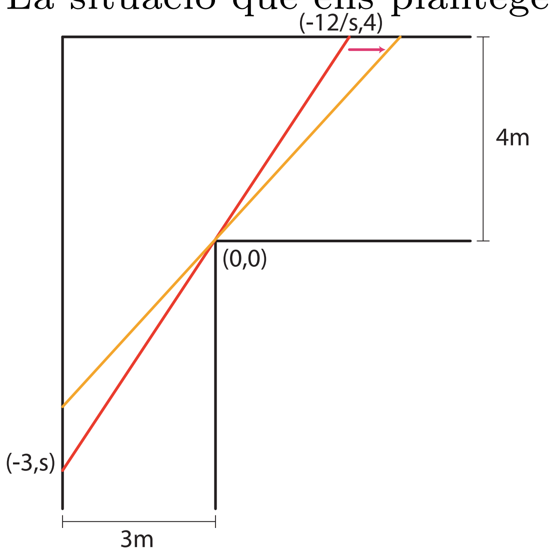
busquem primer punts crítics de $A(R)$:

$$A'(R) = 2\frac{2\pi R^3 - V}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 2.5\text{m}; H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \approx 5.0\text{m}$$

Aquest mínim relatiu és també el mínim absolut donç $\lim_{R\to 0^+} A(R) = \lim_{R\to\infty} A(R) = \infty$ □

R31. Una persona transporta un vidre molt prim per un carrer en forma de L, de manera que una de les parts del carrer té 4m d'amplada i l'altra, 3m. Quina serà la longitud màxima que podrà tenir el vidre per poder passar-hi?

La situació que ens plantegen és la de la figura següent:



Observem que si el mirall comença en el punt $(-3, s)$, llavors, el punt on toca la paret de dalt (passant tangent pel punt $(0, 0)$ és el punt $(-\frac{12}{s}, 4)$.
Això és degut a que la recta que passa pels punts $(-3, s)$ i $(0, 0)$ és $y = -\frac{s}{3}x$ i per tant en $y = 4$ val $x = -\frac{12}{s}$.

Per tant per saber la longitud màxima que pot tenir hem de mirar, per cada s que prenem, $s < 0$, la distància entre els punts $(-3, s)$ i $(-\frac{12}{s}, 4)$. La mínima distància que hi hagi serà la longitud màxima que podrà tenir el mirall (que suposem que té un gruix negligible).

Per tant ens plantegem el problema de

$$\min_{s \leq 4} d^2,$$

on $d^2 = (-\dfrac{12}{s} - (-3))^2 + (4-s)^2$ és la distància al quadrat entre els punts límits del mirall.

Per tant si considerem la funció $f(s) = d^2$, hem de trobar el mínim d'aquesta funció en l'interval $(-\infty, 0)$. Com que la funció és contínua i derivable en $(-\infty, 0)$ per ser polinòmica, només cal que estudiem els punts crítics.

$$f(s) = \frac{12^2}{s^2} + 9 - \frac{3 \cdot 24}{s} + 16 + s^2 - 8s = \frac{144}{s^2} - \frac{72}{s} - 8s + s^2 + 25.$$

i

$$f'(s) = -\frac{288}{s^3} + \frac{72}{s^2} - 8 + 2s = 0 \Longleftrightarrow -144 + 36s - 4s^3 + s^4 = 0$$

Si resolem l'equació anterior usant el maple ens surt que tenim dues solucions reals i dues imaginàries. La comanda per resoldre amb maple és:

$$[> solve(-144 + 36s - 4s^3 + s^4 = 0, s);$$

i retorna les dues solucions reals $s = 4.$i -3.301927249. D'aquestes dues solucions ens quedem amb la negativa que és la que ens cau dins l'interval que estem considerant i la denotem per $s_0 = -3.301927249$.

A més, $f'(s) < 0$ si $s < s_0$ i $f'(s) > 0$ si $s > s_0$. Per tant, en $s = s_0$ tenim un mínim.

En aquest cas la distància al quadrat que tenim del mirall és:

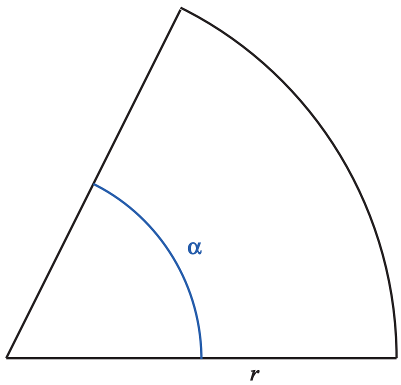
$$f(s_0) = (-\frac{12}{s_0} - (-3))^2 + (4 - s_0)^2 = 97.33129765,$$

i per tant la distància l'obtenim prenent arrels quadrades:

$$d = 9.865662555.$$

$\square$

R32. Hem de construir un parterre en forma de sector circular amb perímetre de 20m. Calcula el radi del sector per tal d'obtenir-lo d'àrea màxima.



Si denotem per α el radi del sector circular i per r el radi, hem de determinar r i α de manera que, sabent que el perímetre és 20, l'àrea sigui màxima. Sabem a més que $r \geq 0$ i que $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Com que el perímetre d'un sector circular és: $P = \alpha \cdot r + 2r$, sabem que $\alpha \cdot r + 2r = 20$. A més, l'àrea és: $\frac{\alpha}{2}r^2$.

Per tant hem de resoldre el problema d'optimització:

$$\max_{r \geq 0, \alpha \in [0,2\pi]} \quad \frac{\alpha}{2}r^2$$
$$\text{t.q.} \ \ \alpha \cdot r + 2r = 20$$

La restricció la podem usar per passar el problema anterior a un problema d'una variable, ja que: $\alpha \cdot r + 2r = 20 \iff r = \frac{20}{\alpha+2}$.

Llavors la restricció $r \geq 0$, es dona per qualsevol $\alpha \in [0, 2\pi]$, per tant no cal imposar-la, i per tant tenim que volem resoldre el problema:

$$\max_{\alpha \in [0,2\pi]} \quad \frac{\alpha}{2}\left(\frac{20}{\alpha+2}\right)^2$$

Denotem per $f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{20}{\alpha+2}\right)^2 = \frac{200\alpha}{(2+\alpha)^2}$.

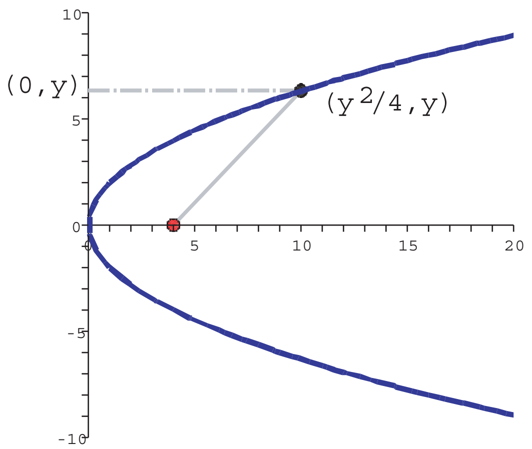
Llavors com que en l'interval que ens demanen la funció és contínua i derivable, hem de mirar els punts crítics.

$$f'(\alpha) = \frac{200(2+\alpha)^2 - 2(2+\alpha)200\alpha}{(2+\alpha)^4} = \frac{200(2+\alpha) - 400\alpha}{(2+\alpha)^3}$$
$$= \frac{400-200\alpha}{(2+\alpha)^3} = 0 \iff 400 - 200\alpha = 0 \iff \alpha = 2.$$

Per tant el punt crític és $\alpha = 2$, $r = \frac{20}{2+2} = 5$.

Per $\alpha = 2$ i $r = 5$ l'àrea és màxima i val $A = r^2 = 25$. □

R33. Troba els punts de la gràfica de la funció $y^2 = 4x$, tals que la distància al punt $(4,0)$ sigui mínima. Calcula aquesta distància.



Observem que la funció $y^2 = 4x$ és equivalent a $x = \frac{1}{4}y^2$ que és una paràbola intercambiant els eixos. Per tant, ens estan demanant que determinem els punts de sobre de la paràbola que estan a menys distància del punt $(4,0)$. La figura il.lustra el problema.

Si considerem un punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per minimitzar la distància d'aquest punt al $(4,0)$, minimitzarem la distància al quadrat (que és equivalent), on

$$d^2 = (x-4)^2 + y^2.$$

A més, haurem d'imposar que el punt estigui sobre de la paràbola. Per tant tenim el problema d'optimització:

$$\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad (x-4)^2 + y^2$$
$$\text{t.q. } y^2 = 4x$$

Observem que en aquest cas podem aïllar la x de la restricció tenim que $x = \frac{1}{4}y^2$, per tant obtindríem el problema equivalent:

$$\max_{y\in\mathbb{R}} \qquad (\frac{1}{4}y^2 - 4)^2 + y^2$$

Ara bé, com que en l'expressió que volem minimitzar només ens apareix y^2, també podem usar que $y^2 = 4x$, amb el que arribem a:

$$\max_{x\geq 0} \qquad (x-4)^2 + 4x$$

on ara hem restringit que $x \geq 0$, ja que si $4x = y^2 \Longrightarrow x \geq 0$. L'avantatge és que ara la funció que hem de minimitzar és la paràbola:

$$f(x) = x^2 - 4x + 16.$$

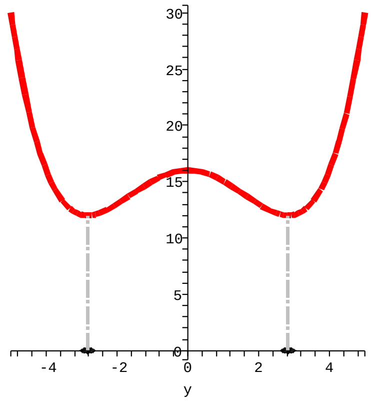
Com que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, el mínim serà un punt crític o l'extrem $x = 0$.

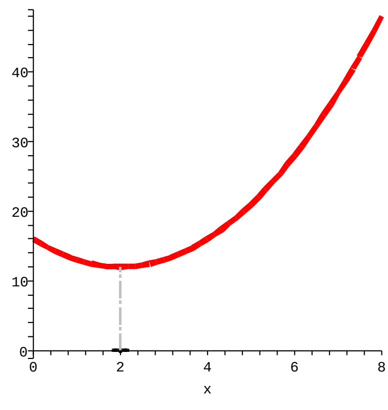
$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2.$$

Si fem una taula de valors tenim:

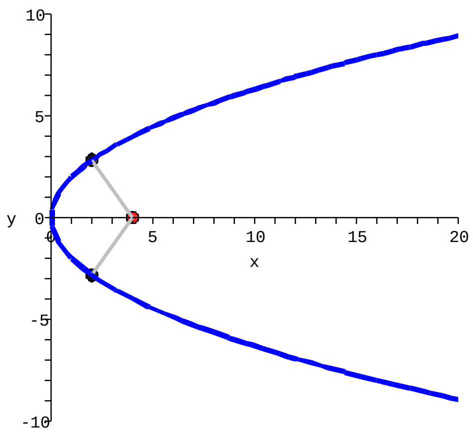
x	0	2
$f(x)$	16	12

Per tant tenim que en $x = 0$ hi ha un màxim local i en $x = 2$ hi tenim el mínim global que estem buscant. A més, si $x = 2$, $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.





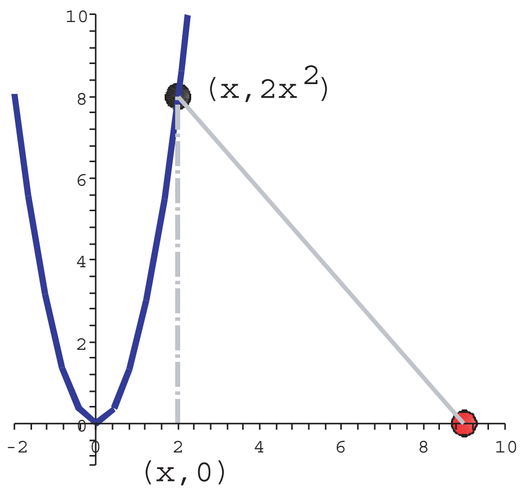
En les gràfiques anteriors s'han representat les dues funcions que s'havien de minimitzar (en funció o bé d'x o bé d'y). Es veu que totes dues tenen un màxim local en $x = 0, y = 0$ i en $x = 2, y = \pm 2\sqrt{2}$.



Per tant els punts que minimitzen la distància són els punts: □

$$(2, -2\sqrt{2}) \qquad \text{i} \qquad (2, 2\sqrt{2}).$$

R34. Troba el punt de la paràbola $y = 2x^2$ que està més a prop del punt $(9, 0)$.



Igual que en el problema anterior, enlloc de minimitzar la distància d'un punt de la paràbola al punt $(9, 0)$, minimitzarem la distància al quadrat.

Si considerem un punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per minimitzar la distància d'aquest punt al $(9, 0)$, minimitzarem la distància al quadrat (que és equivalent), on

$$d^2 = (x - 9)^2 + y^2.$$

A més, haurem d'imposar que el punt estigui sobre de la paràbola.

Per tant tenim el problema d'optimització:

$$\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad (x-9)^2+y^2$$
$$\text{t.q. } y=2x^2$$

Observem que en aquest cas directament podem aïllar la y de la restricció, per tant obtindríem el problema equivalent:

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \quad (x-9)^2+(2x^2)^2 = \max_{x\in\mathbb{R}} \quad x^2-18x+81+4x^4.$$

Observem que en aquest cas, no podem usar l'equació $x^2=\frac{1}{2}y$ ja que en l'expressió que hem de minimitzar ens apareixen no només x^2 i $x^4=(x^2)^2$, sinó que també hi tenim una x.

Per tant hem de trobar el mínim de la funció:

$$f(x)=4x^4+x^2-18x+81.$$

Llavors, com que $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, els candidats a mínim són els punts crítics.

$$f'(x)=16x^3+2x-18=0 \Longleftrightarrow 8x^3+x-9=0.$$

En aquest cas com que tenim una equació de tercer grau, a mà només podrem trobar les arrels enteres que sabem que són divisors del terme independent 9. Per tant les possibles solucions enteres són $x=\pm1,\pm3,\pm9$. D'aquestes, es veu clarament que $x=1$ és la solució que busquem.

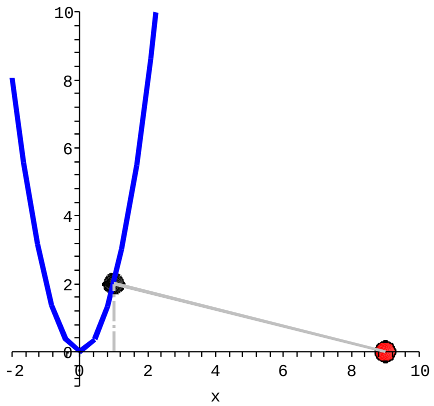
Per tant si fem rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 0 & 1 & -9 \\ 1 & & 8 & 8 & 9 \\ \hline & 8 & 1 & 9 & 0 \end{array}$$

tenim que $f'(x)=(x-1)(8x^2+x+9)$. Si busquem ara les solucions de l'equació $8x^2+x+9=0$ usant la fòrmula de l'equació de segon grau tenim:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 8 \cdot 9}}{16} \notin \mathbb{R}.$$

Per tant l'únic candidat és $x = 1 \Longrightarrow y = 2$. Com que $f'(x) > 0$ si $x < 1$ i $f'(x) < 0$ si $x > 1$, en $x = 1$ hi tenim un mínim.



Per tant el punt que minimitzen la distància és el punt $(1, 2)$. $\square$

R35. Calcula els punts de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en què la tangent té pendent màxim.

Donat un punt $(x, f(x))$, el pendent de la recta tangent ve donat per $f'(x)$. Per tant, ens estan demanant que resolguem el següent problema:

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \quad f'(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} \quad -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Com que $f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, els candidats a màxim seran punts crítics de la funció $f'(x)$, és a dir que hem de resoldre l'equació

$$f''(x) = 0.$$

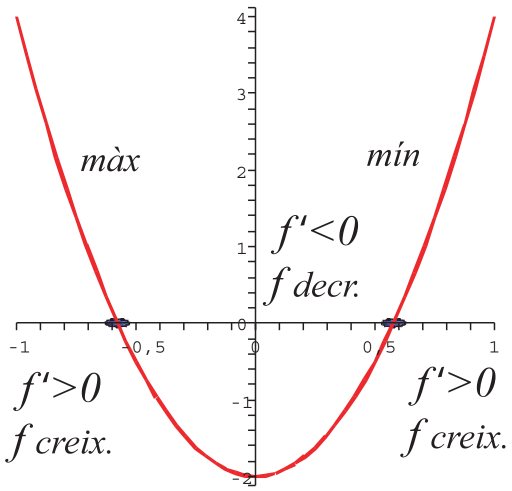
$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Llavors $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2(1+x^2) - 8x^2 = 0$, per tant

$$2 - 6x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

A més, com que el denominador que apareix en l'expressió de $f''(x)$ és sempre positiu,

$$\text{signe}(f''(x)) = \text{signe}(-(2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2))) = \text{signe}(6x^2-2).$$



A la figura s'ha representat la funció $6x^2 - 2$ i s'ha justificat que en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ tenim un màxim del pendent i que en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hi ha un mínim.

Per saber si són màxims o mínims absoluts haurem de mirar el límit de la funció f' a $\pm\infty$.

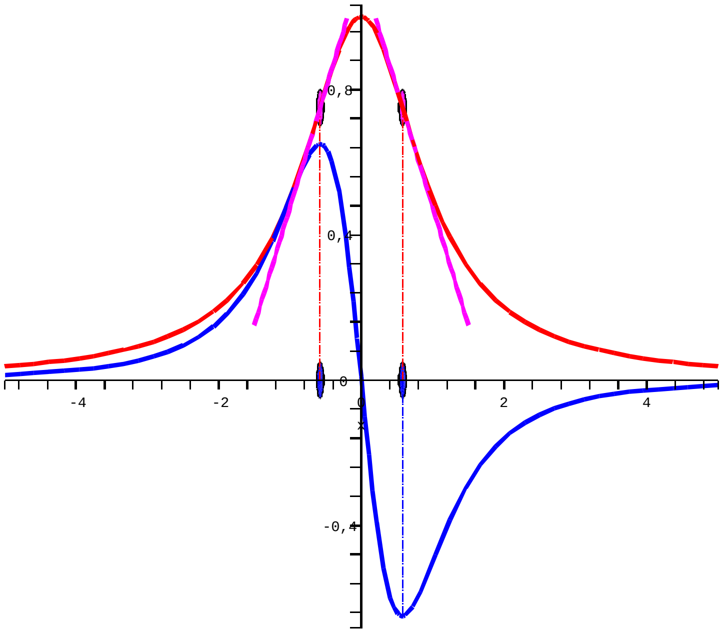
$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2\dfrac{x}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}(1+x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2\dfrac{1}{x^3}}{(\dfrac{1}{x^2}+1)^2} = \tfrac{0}{1} = 0.$$

Per tant si fem una taula de valors tenim que:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞
$f'(x)$	0	.6495190530	$-$.6495190530	0

Per tant en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ tenim un mínim absolut del pendent i en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tenim un màxim del pendent.



A la figura s'han representat en vermell la funció $f(x)$ i en blau la seva derivada $f'(x)$. Com es veu en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ la derivada té un màxim i la recta tangent d'f en aquest punt té pendent màxim. De la mateixa manera per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ la derivada té un mínim, i la recta tangent d'f en aquest punt té pendent mínim. $\square$

R36. La trajectòria d'un projectil disparat per un canó d'artilleria situat a l'origen de coordenades és la paràbola $f(x) = -k(1 + \tan^2 \alpha)x^2 + \tan\alpha\, x$, on k és una constant positiva que depèn de les característiques del canó i α és l'angle que formen l'eix de les x positives i el canó. L'angle α se suposa comprès entre 0 i $\frac{\pi}{2}$. Calcula l'angle α per al qual la paràbola anterior talla a l'eix de les x el més lluny possible de l'origen.

La paràbola $f(x) = -k(1 + \tan^2 \alpha)x^2 + \tan\alpha\, x$ talla a l'eix de les

x quan $f(x) = 0$,

$$f(x) = 0 \iff -k(1+\tan^2\alpha)x^2 + \tan\alpha\, x = 0$$
$$\iff (-k(1+\tan^2\alpha)x + \tan\alpha)x = 0$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{\tan\alpha}{k(1+\tan^2\alpha)} \end{cases}$$

El punt $x_1 = 0$ és el punt des d'on es dispara el projectil, i el punt $x_2 = \frac{\tan\alpha}{k(1+\tan^2\alpha)}$ és el punt on cau, que depèn de l'angle de llençament.

En aquest problema ens demanen que calculem l'angle que fa que la paràbola anterior talli el més lluny possible, per tant hem de resoldre el següent problema:

$$\max_{\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]} \quad \frac{\tan\alpha}{k(1+\tan^2\alpha)}.$$

Per tant considerem la funció $g(\alpha) = \dfrac{\tan\alpha}{k(1+\tan^2\alpha)}$. Com que $g(\alpha)$ és contínua en $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$, els candidats són els punts crítics i els extrems $\alpha = 0$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

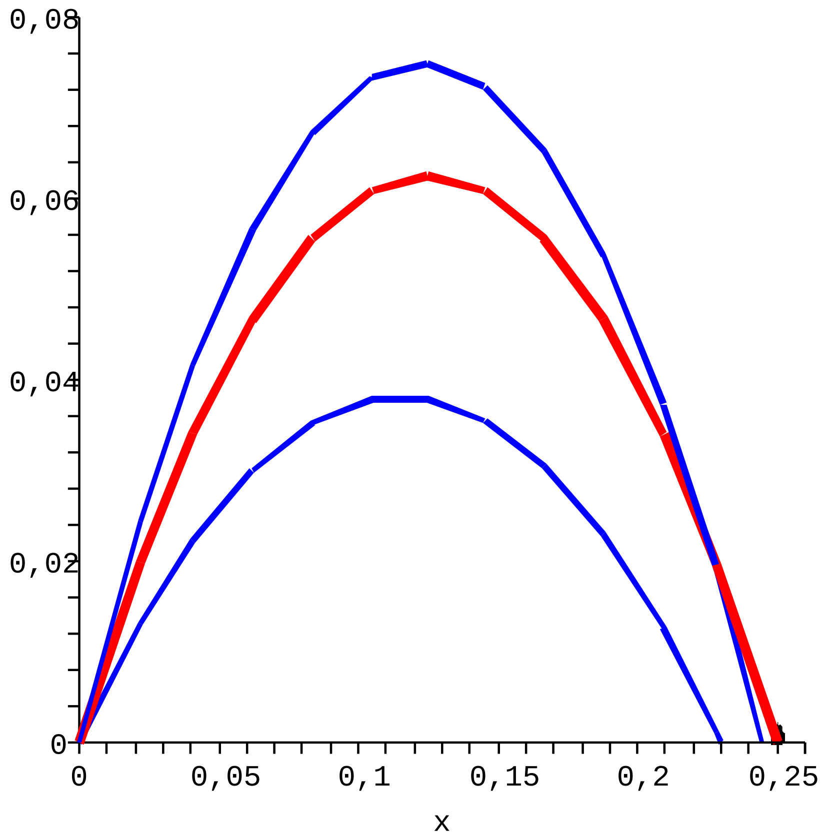
Calculem els punts crítics:

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{(1+\tan^2\alpha)k(1+\tan^2\alpha) - \tan\alpha\; 2k\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)}{k^2(1+\tan^2\alpha)^2} \\ &= \frac{k(1+\tan^2\alpha) - 2k\tan^2\alpha}{k^2(1+\tan^2\alpha)} = \frac{k(1-\tan^2\alpha)}{k(1+\tan^2\alpha)} \end{aligned}$$

Per tant
$g'(\alpha) = 0 \iff 1 - \tan^2\alpha = 0 \iff \tan^2\alpha = 1 \iff \tan\alpha = \pm 1.$

L'únic angle dins de l'interval $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que verifica que $\tan\alpha = \pm 1$ és $\alpha = \frac{\pi}{4}$. A més, com que $g'(\alpha) > 0$ si $\alpha < \frac{\pi}{4}$ i $g'(\alpha) < 0$ si $\alpha > \frac{\pi}{4}$, en aquest angle hi tenim un màxim.

Per tant l'angle òptim és $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



A la figura s'han dibuixat les diferents trajectòries per $k = 2$ per l'angle òptim $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i per angles més grans i més petits. $\square$