

R1. Es consideren els vectors de \mathbb{R}^4 :

$$x_1 = (1, -2, 0, 3), \quad x_2 = (-1, 2, -1, -1), \quad x_3 = (1, 3, -2, 0).$$

(a) Calculeu les combinacions lineals següents:

$$2x_1 + x_2 + x_3, \quad 2(x_1 + x_2) + x_3, \quad x_1 - x_2 + 3x_3.$$

(b) Determineu els escalars $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que el vector $ax_1 + bx_2 + cx_3$ tingui les dues últimes components nul·les.

(a) Calculem les combinacions lineals demanades:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = (2, 1, -3, 5)$$

$$2(x_1 + x_2) + x_3 = (1, 3, -4, 4)$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = (5, 5, -5, 4)$$

(b) Ens demanen determinar els valors d' a, b i c de manera que el vector $ax_1 + bx_2 + cx_3$ tingui les dues últimes components nul·les.

Per això primer calcularem el vector i després imosarem que les dues últimes components siguin nul·les.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= a(1, -2, 0, 3) + b(-1, 2, -1, -1) + c(1, 3, -2, 0) \\ &= (a - b + c, -2a + 2b + 3c, -b - 2c, 3a - b) \end{aligned}$$

Per tant, si volem que les dues últimes components siguin nul·les hem de resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} -b - 2c = 0 \\ 3a - b = 0 \end{array} \right\} \implies b = 3a, \quad c = -\frac{1}{2}b = -\frac{3}{2}a.$$

Per exemple, per $a = 2, b = 6, c = -3$, el vector és:

$$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = (-7, -1, 0, 0).$$

□

R2. Estudieu la dependència o la independència lineal dels següents conjunts de vectors en \mathbb{R}^2 i, en cas de dependència lineal, trobeu-ne la relació de dependència:

$$X_1 = \{(1, 2, 3)\};$$

$$X_2 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8)\};$$

$$X_3 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8), (1, 3, 8)\};$$

$$X_4 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8), (1, 3, 8), (2, 1, -1)\}.$$

X_1 : Donat un subconjunt d'elements d'un subespai vectorial format per un únic element, sempre serà un conjunt els elements del qual són linealment independents. En efecte, sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(1, 2, 3) = 0$. Obviament, $\alpha = 0$ i per tant, X_1 és un conjunt de vectors linealment independent.

X_2 : Siguin $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 5, 8) = (0, 0, 0).$$

Els dos vectors seran linealment independents si i només si, l'equació anterior implica $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, i linealment dependents altrament.

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 5, 8) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + 8\alpha_2).$$

Per tant, si igualarem l'equació anterior a l'element neutre $(0, 0, 0)$ arribem al sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Els dos vectors seran linealment independents si el sistema és compatible determinat, és a dir, si el rang és màxim igual a 2, i seran linealment dependents si el sistema és compatible indeterminat, és a dir, si el rang és menor que 2.

Per tant, el problema es redueix a estudiar el rang de la matriu del sistema. Noteu que la matriu del sistema està formada per dues columnes que contenen els vectors donats.

En aquest cas el rang és 2 perquè el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Per tant el conjunt X_2 està format per vectors linealment independents.

X_3 : Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 5, 8) + \alpha_3(1, 3, 8) = (0, 0, 0).$$

Els tres vectors seran l.i. si i només si, l'equació anterior implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, i l.d. altrament.

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 5, 8) + \alpha_3(1, 3, 8) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 8\alpha_3). \end{aligned}$$

Per tant, si igualem l'equació anterior a l'element neutre $(0, 0, 0)$ arribem al sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Els tres vectors seran l.i. si tenim un SCD, és a dir, si el rang és màxim igual a 3, i seran l.d. si tenim un SCI, és a dir, si el rang és menor que 3.

Com abans, noteu que el problema es redueix a estudiar el rang de la matriu formada pels vectors posats en columna.

En aquest cas el rang és 3 perquè el determinant és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 18 + 16 - 15 - 32 - 24 = 3 \neq 0.$$

X_4 : Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 5, 8) + \alpha_3(1, 3, 8) + \alpha_4(2, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

Els tres vectors seran l.i. si i només si, l'equació anterior implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, i l.d. altrament.

$$\begin{aligned} & \alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 5, 8) + \alpha_3(1, 3, 8) + \alpha_4(2, 1, -1) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 8\alpha_3 - \alpha_4). \end{aligned}$$

Per tant, si igualem l'equació anterior a l'element neutre $(0, 0, 0)$ arribem al sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 8\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Els quatre vectors seran l.i. si tenim un SCD, és a dir, si el rang és igual al nombre d'incògnites, 4, i l.d. altrament.

Com que la matriu del sistema només té tres files, el rang pot ser com a molt 3, per tant el sistema és SCI i per tant els vectors són ld. \square

R3. Comproveu que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 9\}$ no és un subespai vectorial de \mathbb{R}^3 .

Si

F és un subespai vectorial de \mathbb{R}^3 , el vector nul de \mathbb{R}^3 , $(0, 0, 0)$, hauria d'estar en F .

Com que $(0, 0, 0) \notin F$ ja que $0 + 0 + 0 \neq 9$, F no és un subespai vectorial. \square

R4. A l'espai vectorial \mathbb{R}^4 estudieu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials:

$$X_1 = \{(a, b, c, d) \mid 2b + 3c = 5\};$$

$$X_2 = \{(a, b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\};$$

$$X_3 = \{(a, -b + 2a, a + 2b, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\};$$

$$X_4 = \{(a, b, c, d) \mid a - b = d - c\}.$$

X_1 : X_1 no és subespai vectorial de \mathbb{R}^4 ja que $(0, 0, 0, 0) \notin X_1$.

X_2 : Anem a comprovar que X_2 és subespai vectorial de \mathbb{R}^4 . Per això cal comprovar les dues propietats:

$$(SV1) \quad \forall u, v \in X_2, \quad u + v \in X_2$$

$$(SV2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in X_2, \quad \lambda u \in X_2$$

(SV1) Prenem $u = (a_1, b_1, a_1, b_1), v = (a_2, b_2, a_2, b_2) \in X_2$. Vegem si $u + v \in X_2$.

$$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in X_2$$

prenent $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$.

(SV2) Prenem $\lambda \in \mathbb{R}$ i $u = (a_1, b_1, a_1, b_1) \in X_2$. Vegem si $\lambda u \in X_2$.

$$\lambda u = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda a_1, \lambda b_1) \in X_2$$

prenent $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1$.

X_3 : Anem a comprovar que X_3 és subespai vectorial de \mathbb{R}^4 . Per això cal comprovar les dues propietats (SV1) i (SV2).

(SV1) Prenem $u = (a_1, -b_1 + 2a_1, a_1 + 2b_1, -b_1), v = (a_2, -b_2 + 2a_2, a_2 + 2b_2, -b_2) \in X_3$. Vegem si $u + v \in X_3$.

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1 + a_2, -b_1 + 2a_1 - b_2 + 2a_2, a_1 + 2b_1 + a_2 + 2b_2, -b_1 - b_2) \\ &= (a_1 + a_2, -(b_1 + b_2) + 2(a_1 + a_2), (a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2), -(b_1 + b_2)) \end{aligned}$$

que pertany a X_3 prenent $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$.

(SV2) Prenem $\lambda \in \mathbb{R}$ i $u = (a_1, -b_1 + 2a_1, a_1 + 2b_1, -b_1) \in X_3$.

Vegem si $\lambda u \in X_3$.

$$\begin{aligned}\lambda u &= (\lambda a_1, \lambda(-b_1 + 2a_1), \lambda(a_1 + 2b_1), \lambda(-b_1)) \\ &= (\lambda a_1, -\lambda b_1 + 2\lambda a_1, \lambda a_1 + 2\lambda b_1, -\lambda b_1) \in X_3\end{aligned}$$

prenent $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$.

X_4 : Anem a comprovar que X_4 és subespai vectorial de \mathbb{R}^4 . Per això cal comprovar les dues propietats (SV1) i (SV2).

(SV1) Prenem $u = (a_1, b_1, c_1, d_1), v = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in X_4$. Que $u, v \in X_4$ comporta que

$$a_1 - b_1 = d_1 - c_1, \quad a_2 - b_2 = d_2 - c_2.$$

Vegem si $u + v \in X_4$, on $u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$. $u + v \in X_4$ si la resta de la primera i la segona component és igual a la resta e la quarta i la tercera. Comprovem si és cert.

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = \\ &= (d_1 - c_1) + (d_2 - c_2) = (d_1 + d_2) - (c_1 + c_2),\end{aligned}$$

i per tant $u + v \in X_4$.

(SV2) Prenem $\lambda \in \mathbb{R}$ i $u = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in X_4$, és a dir $a_1 - b_1 = d_1 - c_1$. Vegem si $\lambda u \in X_4$, on

$$\lambda u = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1).$$

Llavors

$$\lambda a_1 - \lambda b_1 = \lambda(a_1 - b_1) = \lambda(d_1 - c_1) = \lambda d_1 - \lambda c_1$$

i per tant $\lambda u \in X_4$. □

R5. A l'espai vectorial \mathbb{R}^4 es considera el subespai vectorial $F = [\{(1, 2, 3, 4), (4, 7, 4, 1)\}]$. Calculeu els valors de a i b per tal que el vector $u = (a, b, 1, -3)$ pertanyi a F .

F és el subespai vectorial generat pels dos vectors $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ i $u_2 = (4, 7, 4, 1)$. És a dir, F està format per totes les combinacions lineals de u_1 i u_2 .

Per tant, $u \in F$ si u és combinació lineal de u_1 i u_2 , és a dir, si existeixen dos escalaris $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tals que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 &= \alpha_1(1, 2, 3, 4) + \alpha_2(4, 7, 4, 1) \\ &= (\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 7\alpha_2, 3\alpha_1 + 4\alpha_2, 4\alpha_1 + \alpha_2),\end{aligned}$$

per tant volem determinar a i b de manera que

$$(\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 7\alpha_2, 3\alpha_1 + 4\alpha_2, 4\alpha_1 + \alpha_2) = (a, b, 1, -3).$$

Això és equivalent a resoldre el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + 4\alpha_2 = a \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 = b \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 1 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 = -3 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

u serà combinació de u_1 i u_2 si hi ha alguns valors de a i b que fan que el sistema anterior sigui compatible, és a dir, si per alguns valors d' a i b el sistema anterior admet alguna solució.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 2 & 7 & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 \leftarrow 3f_4 - 4f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 2 & 7 & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -13 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_4 \leftarrow -\frac{1}{13}f_4 \\ f_3 \leftarrow f_3 - 3f_1 \\ f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 2 & 7 & b \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 0 & -1 & b - 2a \\ 0 & -8 & 1 - 3a \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_2 \leftarrow f_2 + f_4 \\ f_3 \leftarrow f_3 + 8f_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 0 & 0 & b - 2a + 1 \\ 0 & 0 & 9 - 3a \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{pf_{42}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 - 3a \\ 0 & 0 & b - 2a + 1 \end{array} \right)$$

El sistema anterior és compatible, si els dos últims elements del terme independent són nuls, ja que en aquest cas el rang de la matriu i de l'ampliada és el mateix igual a 2. Per tant hem d'imposar que:

$$\left. \begin{array}{l} 9 - 3a = 0 \\ b - 2a + 1 = 0 \end{array} \right\} \implies a = \frac{9}{3} = 3, \quad b = 2a - 1 = 6 - 1 = 5.$$

En aquest cas a més, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = a - 4\alpha_2 = 3 - 4 = -1$.

Anem a comprovar que realment $u = -u_1 + u_2$.

$$-u_1 + u_2 = -(1, 2, 3, 4) + (4, 7, 4, 1) = (3, 5, 1, -3) = (a, b, 1, -3).$$

□

R6. Determineu entre els següents conjunts quins són subespais vectorials de \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^4 :

- a) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- b) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 4x_1^2 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
- c) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$
- d) $E = \{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} / x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, 4x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
- e) $E = \{(3x_2, x_2, x_2 + x_4, x_4) / x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

- (a) Per veure si E és subespai vectorial d' \mathbb{R}^3 hem de comprovar les dues propietats de subespai vectorial.

De fet, les propietats (SV1) i (SV2) són equivalents a comprovar la propietat següent:

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda u + \beta v \in E.$$

Prenem $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in E$ i $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Que $u, v \in E$ comporta que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Vegem si $\lambda u + \beta v \in E$, on

$$\lambda u + \beta v = (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3).$$

$\lambda u + \beta v \in E$ si la suma de les tres components és nul.la.

Comprovem si és cert:

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) + (\lambda x_3 + \beta y_3) &= \\ \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_0 + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_0 &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $\lambda u + \beta v \in E$.

- (b) En aquest cas per veure si E és un subespai vectorial o no mirarem primer si verifica la propietat (SV2). És a dir, volem veure si per a tot $u \in E$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in E$.

Prenem $u \in E$, és a dir, $u = (x_1, x_2, x_3)$ on $4x_1^2 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Llavors $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. Vegem si λu verifica la restricció d'estar en E .

$$\begin{aligned} 4(\lambda x_1)^2 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 &= 4(\lambda x_1)^2 - 4\lambda x_1^2 + 4\lambda x_1^2 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 \\ &= 4(\lambda x_1)^2 - 4\lambda x_1^2 + \lambda \underbrace{(4x_1^2 - 2x_2 + x_3)}_0 \\ &= 4\lambda^2 x_1^2 - 4\lambda x_1^2 = 4\lambda x_1^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Veiem que per u i λ qualsevol en general $4\lambda x_1^2(\lambda - 1) \neq 0$, per exemple, prenent $u = (1, 2, 0) \in E$ i $\lambda = 2$ tenim que:

$$4(\lambda x_1)^2 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 = 16 - 8 = 8 \neq 0.$$

Per tant, com que hem trobat un element de E que al multiplicar-lo per 2 deixa d'estar en E , E no és un subespai vectorial de \mathbb{R}^3 .

- (c) En aquest cas E no és subespai vectorial de \mathbb{R}^3 . Això és degut a que tot subespai vectorial conté l'element neutre, que en aquest cas és el vector $(0, 0, 0)$.

En aquest cas $(0, 0, 0) \notin E$ i per tant E no és subespai vectorial.

- (d) Per veure si E és subespai vectorial veurem si verifica la propietat

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda u + \beta v \in E.$$

Prenem $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in E$ i $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Que $u, v \in E$ comporta que

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} y_1 - 4y_2 + y_3 = 0 \\ 4y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Vegem si $\lambda u + \beta v \in E$, on

$$\lambda u + \beta v = (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3).$$

$\lambda u + \beta v \in E$ si es verifiquen les dues condicions del subespai vectorial. Comprovem si són certes.

$$\begin{aligned} &(\lambda x_1 + \beta y_1) - 4(\lambda x_2 + \beta y_2) + (\lambda x_3 + \beta y_3) = \\ &\underbrace{\lambda(x_1 - 4x_2 + x_3)}_0 + \underbrace{\beta(y_1 - 4y_2 + y_3)}_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4(\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) - (\lambda x_3 + \beta y_3) = \\ &\underbrace{\lambda(4x_1 + x_2 - x_3)}_0 + \underbrace{\beta(4y_1 + y_2 - y_3)}_0 = 0, \end{aligned}$$

per tant $\lambda u + \beta v \in E$.

- (e) En aquest cas també veurem si E és un subespai vectorial o no comprovant la propietat combinada de la suma i del producte per escalar.

Siguin $u = (3x_2, x_2, x_2 + x_4, x_4)$, $v = (3y_2, y_2, y_2 + y_4, y_4) \in E$ i $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Vegem si $\lambda u + \beta v \in E$.

$$\begin{aligned}\lambda u + \beta v &= (3\lambda x_2 + 3\beta y_2, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda(x_2 + x_4) + \beta(y_2 + y_4), \lambda x_4 + \beta y_4) \\ &= (\underbrace{3(\lambda x_2 + \beta y_2)}_a, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_a, \underbrace{(\lambda x_2 + \beta y_2) + (\lambda x_4 + \beta y_4)}_a, \underbrace{\lambda x_4 + \beta y_4}_b) \\ &= (3a, a, a + b, b) \in E.\end{aligned}$$

Per tant E és un subespai vectorial de \mathbb{R}^4 .

NOTA: Una altra manera de veure que E és subespai vectorial, és adonar-se de que si $u \in E$,

$$u = (3x_2, x_2, x_2 + x_4, x_4) = x_2(3, 1, 1, 0) + x_4(0, 0, 1, 1).$$

Per tant, tot element de E és combinació lineal dels vectors $(3, 1, 1, 0)$ i $(0, 0, 1, 1)$. Alhora, tota combinació lineal d'aquests vectors és d' E . Per tant, $E = [(3, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)]$, és a dir, E és el subespai vectorial generat pels vectors $(3, 1, 1, 0)$ i $(0, 0, 1, 1)$, i evidentment és un subespai vectorial d' \mathbb{R}^4 . \square

R7. Contesteu les següents preguntes:

- (a) Forma $B = \{(1, 2, 1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0)\}$ una base de \mathbb{R}^3 ?
- (b) Pertany el vector $(1, 0, 3, 4)$ al subespai generat per $(-1, 1, 0, 2)$ i $(2, 1, 1, 0)$?
- (c) Sigui $F = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2z = 0\}$. Demostra que és subespai vectorial. Troba una base i la dimensió de F .

- (a) Per veure si B forma una base de \mathbb{R}^3 hem de veure dues coses:

- (B1) si els vectors que formen B són linealment independents
- (B2) si formen un conjunt de generadors, és a dir, si tot vector de \mathbb{R}^3 és combinació lineal dels vectors de B .

(B1) Els vectors de B seran linealment independents si la matriu que té per columnes els tres vectors de B té rang 3. En efecte, si denotem per $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, -1, 1)$ i $u_3 = (-1, 1, 0)$, u_1, u_2, u_3 són vectors l.i. si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 - \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2),$$

per tant arribem al sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Els tres vectors seran linealment independents si el sistema anterior és compatible determinat. Com que tenim un sistema homogeni, és compatible. Perquè el sistema sigui compatible determinat, el rang de la matriu ha de ser 3.

El rang és 3 si i només si el determinant és no nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 2 - 1 - 1 = -4 \neq 0,$$

per tant els tres vectors són linealment independents.

(B2) per veure si són base també hem de veure si generen. Com que la dimensió de \mathbb{R}^3 és 3 i tenim 3 vectors linealment independents a \mathbb{R}^3 , els tres vectors formen un conjunt de vectors generadors. Per tant, com que generen i són li, són base.

Si volem comprovar que són un conjunt de vectors generadors usant la definició, hem de veure que tot vector de \mathbb{R}^3 es pot posar com a combinació lineal dels tres vectors anteriors.

Sigui $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, existeixen escalars $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 ?$$

L'equació anterior dona lloc al sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_3 = x_1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_3 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El sistema anterior és compatible determinat perquè $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 3$. Per tant té solució, i per tant si que podem determinar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que verifiquin l'equació que volíem.

- (b) En aquest apartat ens pregunten si el vector $u = (1, 0, 3, 4)$ pertany al subespai generat pels vectors $u_1 = (-1, 1, 0, 2)$ i $u_2 = (2, 1, 1, 0)$. Com que el subespai vectorial generat per u_1 i u_2 està format per les combinacions lineals d' u_1 i u_2 , ens estan preguntant si u és combinació lineal d' u_1 i u_2 , és a dir, si existeixen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

L'equació anterior és equivalent al sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = 4 \end{array} \right\}$$

De les dues últimes equacions tenim que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, però llavors $\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \neq 0$. Per tant, el sistema anterior és incompatible i per tant u no és combinació lineal d' u_1 i u_2 .

- (c) Vegem primer que F és un subespai vectorial. Si $u \in F$, $u = (x, y, z)$ on $x + 2z = 0$, per tant $x = -2z$.

D'aquesta manera podem escriure que

$u = (-2z, y, z) = z(-1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$, és a dir

$$F = \left\{ u = (-2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)].$$

Com que F és el subespai vectorial generat pels dos vectors $u_1 = (-1, 0, 1)$ i $u_2 = (0, 1, 0)$, és un subespai vectorial d' \mathbb{R}^3 .

Per determinar una base partirem del conjunt de generadors $\{u_1, u_2\}$. Si aquests dos vectors són li, directament seran base. Sinó haurem de buscar un subconjunt de vectors li.

u_1 i u_2 són linealment independents perquè la matriu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

té rang 2 ja que $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Per tant els dos vectors són l.i. i generadors i per tant són base.

A més, com que una base de F està formada per dos vectors, la dimensió d' F és 2.

□

R8. A \mathbb{R}^4 es donen els vectors

$$u_1 = (1, 1, 2, 1), \quad u_2 = (1, -1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 0, -1, 1), \quad u_4 = (1, 2, 2, 0)$$

$$v = (1, 1, 1, 1)$$

- (a) Demostreu que u_1, u_2, u_3 i u_4 formen una base.
 - (b) Determineu les coordenades de v en la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
-
- (a) Per veure que un conjunt de vectors són base d'un espai vectorial cal veure que són linealment independents i que generen.

Vegem primer si són linealment independents. Els vectors seran linealment independents si la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

té rang màxim igual a 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{pc_{13} \\ pf_{14}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 \leftarrow f_3 + f_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 + f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_4 \leftarrow f_4 - \frac{1}{2}f_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant els quatre vectors són linealment independents. A més, com que la dimensió de \mathbb{R}^4 és 4, pel fet de ser quatre vectors linealment independents directament generen, i per tant són base.

- (b) Les coordenades de v en la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ són $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4.$$

L'equació anterior dona lloc al següent sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{array} \right\} \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right)$$

Si realitzem les mateixes transformacions que en l'apartat anterior a la matriu ampliada arribem a la matriu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Per tant la solució del sistema és:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{4}(3 - 4\alpha_1) = \frac{1}{4}(3 - 4\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \\ \alpha_2 &= -(1 - 2\alpha_4 - \alpha_1) = -(1 - 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \\ \alpha_3 &= 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Recordem que al haver fet una permutació de columnes l'hem de tenir en compte a l'hora de trobar les solucions.

Comprovem que sigui correcte:

$$\frac{1}{4}(1, 1, 2, 1) + \frac{1}{4}(1, -1, 0, 1) + \frac{1}{2}(0, 0, -1, 1) + \frac{1}{2}(1, 2, 2, 0) = (1, 1, 1, 1),$$

per tant les coordenades de v en la base donada són $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

□

R9. Es considera l'espai vectorial $E = \mathbb{R}^4$ i en aquest espai vectorial es defineix el subespai vectorial $F = [\{v_1, v_2, v_3\}]$ generat pels vectors:

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (4, 7, 4, 1), \quad v_3 = (2, 3, -2, -7).$$

Determineu:

- (a) Una base de F i la dimensió d'aquest subespai vectorial.
 - (b) El valor dels paràmetres a, b per tal que el vector $x = (3, 5, a, b)$ pertanyi a F .
-

- (a) Els vectors v_1, v_2 i v_3 formen un sistema de generadors de F , per tant, per determinar una base, primer mirarem si són linealment independents. Si ho són, seran base. Sinó haurem de determinar un subconjunt de vectors linealment independents.

Els tres vectors v_1, v_2 i v_3 són linealment dependents perquè $v_3 = v_2 - 2v_1$, és a dir, perquè v_3 és combinació lineal de v_1 i v_2 . A més, v_1 i v_2 són linealment independents entre si, i per tant formen una base d' F .

Una altra manera de veure que els vectors v_1, v_2 i v_3 són linealment dependents és considerar la matriu que conté els tres vectors a les columnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

i veure que la matriu no té rang màxim 3. En aquest cas, si es fa una eliminació de gauss s'arriba a la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que té rang 2. Per tant v_1, v_2 i v_3 no són base.

Una manera de determinar una base a partir d'un conjunt de generadors, és considerar la matriu formada pels vectors posats a les files

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

i llavors fent només operacions de files arribar a una matriu triangular superior. En aquest cas fent eliminació de gauss només fent servir operacions per files, arribem a la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, una base de F està formada pel conjunt de vectors $\{(1, 2, 3, 4), (0, -1, -8, -15)\}$.

Fent l'exercici de dues maneres diferents hem arribat a

$$F = [(1, 2, 3, 4), (4, 7, 4, 1)] = [(1, 2, 3, 4), (0, -1, -8, -15)].$$

- (b) El vector $x \in F$ si x és combinació lineal dels elements d'una base d' F . En aquest cas, per simplicitat considerarem la segona base d' F . És a dir, $x \in F$ si existeixen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$x = \lambda_1(1, 2, 3, 4) + \lambda_2(0, -1, -8, -15) = (\lambda_1, 2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 - 8\lambda_2, 4\lambda_1 - 15\lambda_2)$$

Per tant arribem al sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 5 \\ 3\lambda_1 - 8\lambda_2 = a \\ 4\lambda_1 - 15\lambda_2 = b \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 - 5 = 1 \\ a = 3\lambda_1 - 8\lambda_2 = 1 \\ b = 4\lambda_1 - 15\lambda_2 = -3 \end{array}$$

Comprovem que sigui cert, que $x = 3(1, 2, 3, 4) + (0, -1, -8, -15)$,

$$3(1, 2, 3, 4) + (0, -1, -8, -15) = (3, 5, 1, -3) = (3, 5, a, b) = x.$$

□

R10. Sigui $E = \mathbb{R}^4$ espai vectorial sobre \mathbb{R} . Es consideren els subespais F_1 i F_2 de E :

$$F_1 = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1), (3, -2, 1, 2), (-2, 3, 1, -3)]$$

$$F_2 = \{(2b, a - b, a + b, -a - 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Es demana:

- (a) Demostreu que F_2 és un subespai vectorial d' E .
- (b) Calculeu la dimensió de cada subespai. Calculeu una base B_1 de F_1 i B_2 de F_2 .

- (a) Per veure que F_2 és un subespai vectorial veurem que F_2 és un subespai vectorial generat per un conjunt de vectors.

En efecte, si $u \in F_2$,

$$u = (2b, a - b, a + b, -a - 4b) = a(0, 1, 1, -1) + b(2, -1, 1, -4),$$

és a dir, tot element de F_2 és combinació lineal dels vectors $(0, 1, 1, -1)$, $(2, -1, 1, -4)$. A més, tota combinació lineal d'aquests vectors està en F_2 . Per tant

$$F_2 = [(0, 1, 1, -1), (2, -1, 1, -4)],$$

i és un subespai vectorial d' \mathbb{R}^4 .

- (b) Comencem determinant una base de F_1 i la seva dimensió que serà el nombre de vectors de la base.

Els vectors que ens donen no són base perquè

$$(-2, 3, 1, -3) = (1, 0, 1, 0) + (0, 1, 1, -1) - (3, -2, 1, 2).$$

Per tant, com que l'últim vector és combinació lineal dels anteriors és combinació lineal dels altres vectors tenim que:

$$\begin{aligned} F_1 &= [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1), (3, -2, 1, 2), (-2, 3, 1, -3)] \\ &= [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1), (3, -2, 1, 2)]. \end{aligned}$$

A més,

$$(3, -2, 1, 2) = 3(1, 0, 1, 0) - 2(0, 1, 1, -1).$$

És a dir,

$$\begin{aligned} F_1 &= [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1), (3, -2, 1, 2), (-2, 3, 1, -3)] \\ &= [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1), (3, -2, 1, 2)] \\ &= [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1)]. \end{aligned}$$

Aquests últims dos vectors determinen una base de F_1 ja que a més són linealment independents.

Una altra manera de trobar una base de F_1 a partir del conjunt de generadors $[(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1), (3, -2, 1, 2), (-2, 3, 1, -3)]$ és considerar la matriu que té per files els vectors donats i fer eliminació de gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_3 \leftarrow f_3 - 3f_1 \\ f_4 \leftarrow f_4 + 2f_1 \end{array}} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_3 \leftarrow f_3 - f_2 \\ f_4 \leftarrow f_4 - f_2 \end{array}} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant una base de F_2 és $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, -1)\}$ i la dimensió és 2.

Considerem ara el subespai vectorial de F_2 . El conjunt $\{(0, 1, 1, -1), (2, -1, 1, -4)\}$ és un sistema de generadors. A més és base perquè els dos vectors són linealment independents. Per tant la dimensió de F_2 també és 2.

□

R11. Comproveu si els següents subconjunts són subespais vectorials de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , i en cas afirmatiu, trobeu-ne una base:

$$A_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, A_2 = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x, x^2, 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(A₁) Considerem $u \in A_1$, llavors $u = (x, 0) = x(1, 0)$, és a dir, és combinació lineal del vector $(1, 0)$. A més, tota combinació lineal del vector $(1, 0)$ està en A_1 . Per tant $A_1 = [(1, 0)]$, i és subespai vectorial. Alhora, el vector $(1, 0)$ determina una base d' A_1 , i per tant A_1 té dimensió 1.

(A₂) Si A_2 fos subespai vectorial de \mathbb{R}^2 , el vector nul de \mathbb{R}^2 , $(0, 0)$ estaria en aquest subespai i això no és cert. Per tant A_2 no és subespai vectorial.

(B₁) Considerem $u \in B_1$, llavors $u = (x, y, z)$ on $x + y + z = 0$, és a dir $z = -x - y$. Per tant

$$u = (x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1),$$

és a dir, tot element de B_1 és combinació lineal dels vectors $(1, 0, -1)$ i $(0, 1, -1)$. Alhora, tota combinació lineal d'aquests dos vectors està en B_1 i per tant

$$B_1 = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)].$$

A més aquests dos vectors són linealment independents i per tant determinen una base de B_1 . Per tant la dimensió de B_1 és 2.

(B₂) Considerem els vectors $(1, 1, 1)$ i $(0, 0, 1) \in B_2$. Si B_2 fos subespai vectorial, la suma d'aquests dos vectors també estaria en B_2 , però en aquest cas $(0, 0, 1) + (1, 1, 1) = (1, 1, 2) \notin B_2$. Per tant, B_2 no és un subespai vectorial. \square

R12.

- (a) Pertany el vector $(0, 1, 3, 4)$ al subespai generat per $(1, -1, 0, 2)$ i $(-2, 3, 1, 0)$?
- (b) Sigui $F = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0, x - y = 0\}$.
Demostra que és subespai vectorial. Troba una base i la dimensió de F .

(a) $(0, 1, 3, 4) \in [(1, -1, 0, 2), (-2, 3, 1, 0)]$ si $(0, 1, 3, 4)$ és combinació lineal dels altres dos vectors, és a dir, si existeixen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$(0, 1, 3, 4) = \lambda_1(1, -1, 0, 2) + \lambda_2(-2, 3, 1, 0) = (\lambda_1 - 2\lambda_2, -\lambda_1 + 3\lambda_2, \lambda_2, 2\lambda_1).$$

És a dir, si el següent sistema

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 = 4 \end{array} \right\}$$

és compatible.

De la tercera i quarta equacions deduim que $\lambda_2 = 3, \lambda_1 = 2$. Però llavors $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2 - 6 = -4 \neq 0$. Per tant el vector $(0, 1, 3, 4)$ no pertany al subespai vectorial generat pels altres dos vectors.

- (b) Primer hem de demostrar que F és un subespai vectorial.

Sigui $u \in F$, llavors $u = (x, y, z)$ on $x + 2z = 0$ i $x - y = 0$. Per tant, $y = x$ i $z = -\frac{1}{2}x$, és a dir

$$u = (x, y, z) = (x, x, -\frac{1}{2}x) = x(1, 1, -\frac{1}{2}).$$

Per tant

$$F = [(1, 1, -\frac{1}{2})].$$

A més el vector $(1, 1, -\frac{1}{2})$ determina una base d' F i la dimensió d' F és 1. □

R13. Considereu l'espai vectorial \mathbb{R}^3 sobre els reals.

- (a) Forma $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 1)\}$ una base de \mathbb{R}^3 ?
- (b) És $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0\}$ un subespai vectorial de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} ? Calcula la seva dimensió i base.
-

- (a) Com que la dimensió d' \mathbb{R}^3 és 3, els tres vectors donats determinaran una base d' \mathbb{R}^3 si són linealment independents.

A més, els vectors de B seran linealment independents si la matriu que té per columnes els tres vectors de B té rang 3. En efecte, si denotem per $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ i $u_3 = (1, 0, 1)$, u_1, u_2, u_3 són vectors l.i. si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3),$$

per tant arribem al sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Els tres vectors seran linealment independents si el sistema anterior és compatible determinat. Com que tenim un sistema homogeni, és compatible. Perquè el sistema sigui compatible determinat, el rang de la matriu ha de ser 3.

El rang és 3 si i només si el determinant és no nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 3 \neq 0,$$

per tant els tres vectors són linealment independents i determinen una base d' \mathbb{R}^3 .

- (b) Considerem ara el subespai vectorial d' \mathbb{R}^3 , F . Si $u \in F$, $u = (x, y, z)$ on $x - y - 2z = 0$, que és equivalent a $x = y + 2z$, és a dir

$$x = (x, y, z) = (y + 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1).$$

Per tant

$$F = [(1, 1, 0), (2, 0, 1)].$$

Com que els dos vectors són linealment independents determinen una base d' F i a més F té dimensió 2. \square

R14. Si $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de \mathbb{R}^3 i es consideren els vectors:

$$x = (1, 2, 3)_{B_1} \quad i \quad y = (1, 0, -1)_{B_1},$$

calculeu les components d'aquests vectors en la base B_2 definida per:

$$v_1 = 3u_1 + 2u_2 - u_3, \quad v_2 = 4u_1 + u_2 + u_3, \quad v_3 = 2u_1 - u_2 + u_3.$$

Calculeu les components en la base B_1 del vector $z = (-1, 0, 1)_{B_2}$.

Calculem primer les components del vector $x = (1, 2, 3)_{B_1}$ en la base B_2 .

$$x = (1, 2, 3)_{B_1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3.$$

Les components de x en la base B_2 són $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\begin{aligned} x &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_2} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \\ &= \alpha_1(3u_1 + 2u_2 - u_3) + \alpha_2(4u_1 + u_2 + u_3) + \alpha_3(2u_1 - u_2 + u_3) \\ &= (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3)u_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)u_2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u_3 \\ &= (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)_{B_1} \end{aligned}$$

Com que les components d'un vector en una base són úniques i tenim que

$$x = (1, 2, 3)_{B_1} = (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)_{B_1},$$

llavors

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ 3 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{array} \right\}$$

Per tant, per determinar les components del vector x en la base B_2 hem de resoldre el sistema d'equacions anterior.

De la mateixa manera, per determinar les components del vector y en la base B_2 hem de resoldre el sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ -1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{array} \right\}$$

Si passem els dos sistemes anteriors a matriu i considerem la matriu ampliada tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Noteu que la matriu del sistema està formada per les components dels vectors de la base B_2 en la base B_1

$$v_1 = (3, 2, -1)_{B_1}, v_2 = (4, 1, 1)_{B_1}, v_3 = (2, -1, 1)_{B_1}.$$

Per resoldre els dos sistemes alhora considerarem la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

i farem transformacions elementals directament sobre aquesta matriu. D'aquesta manera obtindrem les dues solucions alhora.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim f_2 \leftarrow 3f_2 - 2f_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & 10 & -2 \end{array} \right)$$

$$f_3 \leftarrow 3f_3 + f_1$$

$$\sim f_3 \leftarrow 5f_3 + 7f_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -24 & 78 & -24 \end{array} \right) \sim -\frac{1}{24}f_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim f_2 \leftarrow f_2 + 7f_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 0 & \frac{15}{2} & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -\frac{75}{4} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right) \sim -\frac{1}{5}f_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 0 & \frac{15}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right)$$

$$f_1 \leftarrow f_1 - 2f_3$$

$$\sim f_1 \leftarrow f_1 - 4f_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right) \sim \frac{1}{3}f_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{4} & 1 \end{array} \right)$$

Per tant les components dels vectors x i y en la base B_2 són:

$$x = \left(-\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, -\frac{13}{4}\right)_{B_2}, \quad \text{i que } y = (1, -1, 1)_{B_2}.$$

Comprovem que no ens hem equivocat:

$$\begin{aligned} x &= \left(-\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, -\frac{13}{4}\right)_{B_2} = -\frac{5}{2}v_1 + \frac{15}{4}v_2 - \frac{13}{4}v_3 \\ &= -\frac{5}{2}(3u_1 + 2u_2 - u_3) + \frac{15}{4}(4u_1 + u_2 + u_3) - \frac{13}{4}(2u_1 - u_2 + u_3) \\ &= \left(-\frac{15}{2} + 15 - \frac{13}{2}\right)u_1 + \left(-5 + \frac{15}{4} + \frac{13}{4}\right)u_2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{4} - \frac{13}{4}\right)u_3 \\ &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 = (1, 2, 3)_{B_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (1, -1, 1)_{B_2} = v_1 - v_2 + v_3 \\ &= (3u_1 + 2u_2 - u_3) - (4u_1 + u_2 + u_3) + (2u_1 - u_2 + u_3) \\ &= (3 - 4 + 2)u_1 + (2 - 1 - 1)u_2 + (-1 - 1 + 1)u_3 \\ &= u_1 - u_3 = (1, 0, -1)_{B_1}. \end{aligned}$$

També ens demanen calcular les components del vector $z = (-1, 0, 1)_{B_2}$ en la base B_1 . En aquest cas tenim que

$$\begin{aligned}y &= (-1, 0, 1)_{B_2} = -v_1 + v_3 = -(3u_1 + 2u_2 - u_3) + (2u_1 - u_2 + u_3) \\&= (-3 + 2)u_1 + (-2 - 1)u_2 + (1 + 1)u_3 \\&= -u_1 - 3u_2 + 2u_3 = (-1, -3, 2)_{B_1}.\end{aligned}$$

Aquest problema també s'hagués pogut fer fent servir les matrius de canvi de base de la següent manera.

La matriu que ens porta de la base B_2 a la base B_1 , $M_{B_1 B_2}$ està formada per les components de la base B_2 respecte la base B_1 , és a dir, com que

$$v_1 = (3, 2, -1)_{B_1}, v_2 = (4, 1, 1)_{B_1}, v_3 = (2, -1, 1)_{B_1},$$

$$M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, si denotem per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les components de z en la base B_1 , és a dir, $z = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_1}$ tenim que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$$

De manera inversa, si volem calcular les components dels vectors x i y respecte la base B_2 , necessitem la matriu inversa del canvi de base. En aquest cas

$$M_{B_2 B_1} = M_{B_1 B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Llavors tenim que:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{13}{4} \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}$$

□

R15. A l'espai vectorial \mathbb{R}^3 es consideren els vectors:

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1).$$

- (a) Proveu que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Trobeu una altra base $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 , tal que les equacions de canvi de base de B_1 a B_2 siguin:

$$x'_1 = x_1 - 2x_3, \quad x'_2 = -x_2 + 5x_3, \quad x'_3 = x_1 - 3x_3.$$

- (a) Per veure que B_1 és base hem de veure que són linealment independents i que generen. Ara bé, com que la dimensió d' \mathbb{R}^3 és 3, si veiem que els tres vectors són linealment independents, directament ja formaran base.

u_1, u_2 i u_3 són linealment independents si la matriu que té per columnes els tres vectors té rang màxim igual a 3.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu anterior té rang 3 ja que $\det(M) = 1 \neq 0$. Per tant els tres vectors són linealment independents i per tant són base.

(b) Ens estan dient que si tenim un vector amb components $(x_1, x_2, x_3)_{B_1}$ aquest passa a ser $(x'_1, x'_2, x'_3)_{B_2}$. Si ho escrivim en forma matricial ens queda:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{B_2 B_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Una manera de fer el problema és tenir en compte que la matriu de canvi de base $M_{B_2 B_1}$ conté a les columnes les components dels vectors de la base B_1 expressats en la base B_2 , és a dir:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = v_1 + v_3 \\ u_2 = -v_2 \\ u_3 = -2v_1 + 5v_2 - 3v_3 \end{array} \right\}$$

D'aquí tenim que $v_2 = -u_2$ i llavors

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = v_1 + v_3 \\ u_3 + 5u_2 = -2v_1 - 3v_3 \end{array} \right\}$$

$$-2u_1 - 5u_2 - u_3 = v_3, v_1 = u_1 - v_3 = 3u_1 + 5u_2 + u_3.$$

És a dir,

$$v_1 = (3, 5, 1)_{B_1} = 3(1, 1, 1) + 5(0, 1, 1) + (0, 0, 1) = (3, 8, 9)$$

$$v_2 = (0, -1, 0)_{B_1} = -5(0, 1, 1) = (0, -5, -5)$$

$$v_3 = (-2, -5, -1)_{B_1} = -2(1, 1, 1) - 5(0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (-2, -7, -8)$$

Una altra manera de fer el problema és calcular la matriu de canvi de base $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$. Aquesta matriu està formada per les components dels vectors de la base B_2 expressats en la base B_1 .

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{B_1 B_2}$$

i per tant arribem a

$$v_1 = (3, 5, 1)_{B_1}, \quad v_2 = (0, -1, 0)_{B_1}, \quad v_3 = (-2, -5, -1)_{B_1},$$

com ja havíem vist.

La última manera de fer el problema és tenir en compte que el primer vector de la base v_1 és el vector $v_1 = (1, 0, 0)_{B_2}$. Si denotem per x_1, x_2, x_3 les components de v_1 en la base B_1 , és a dir $v_1 = (x_1, x_2, x_3)_{B_1}$ aquestes components seran les solucions del següent sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 1 = x_1 - 2x_3 \\ 0 = -x_2 + 5x_3 \\ 0 = x_1 - 3x_3 \end{array} \right\}$$

De la mateixa manera, les components de v_2 i v_3 en la base B_1 es trobarien resolent els sistemes d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 0 = x_1 - 2x_3 \\ 1 = -x_2 + 5x_3 \\ 0 = x_1 - 3x_3 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 = x_1 - 2x_3 \\ 0 = -x_2 + 5x_3 \\ 1 = x_1 - 3x_3 \end{array} \right\}$$

Per resoldre aquests tres sistemes, com que la matriu dels tres sistemes és la mateixa es podrien resoldre els tres sistemes alhora considerant la matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Noteu que això és equivalent a determinar la inversa de la matriu $M_{B_2 B_1}$. □

R16. Donat l'espai vectorial \mathbb{R}^2 , $\{e_1, e_2\}$ una base i els vectors: $u_1 = e_1$ i $u_2 = e_1 - e_2$:

(a) Comproveu que $\{u_1, u_2\}$ és una base de \mathbb{R}^2 .

- (b) Calculeu les components del vector $v = e_1 - 2e_2$ en la base $\{u_1, u_2\}$.
- (c) Calculeu les components del vector $w = 3u_1 + u_2$ en la base $\{e_1, e_2\}$.
-

(a) Com que la dimensió d' \mathbb{R}^2 és 2, sempre que tinguem dos vectors linealment independents dins aquest espai directament formaran una base. Per tant, per veure que $\{u_1, u_2\}$ és base, només cal que vegem que són dos vectors linealment independents.

u_1 i u_2 seran linealment independents si donats dos escalars $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 - e_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) e_1 - \lambda_2 e_2.$$

Com que e_1, e_2 són base, en particular són linelment independents, i per tant

$$(\lambda_1 + \lambda_2) e_1 - \lambda_2 e_2 = \vec{0} \implies \lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda_2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

És a dir, $\{u_1, u_2\}$ són base d' \mathbb{R}^2 .

- (b) Si denotem per α_1, α_2 les components del vector v en la base $\{u_1, u_2\}$, tenim que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 (e_1 - e_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) e_1 - \alpha_2 e_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2)_e.$$

Com que les components d'un vector en una base són úniques tenim que si

$$v = (1, -2)_e = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2)_e \implies \alpha_1 + \alpha_2 = 1, -\alpha_2 = -2$$

i per tant $\alpha_2 = 2, \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = -1$, és a dir, $v = (-1, 2)_u$.

- (c) Considerem $w = 3u_1 + u_2 = (3, 1)_u$, llavors

$$w = 3u_1 + u_2 = 3e_1 + (e_1 - e_2) = 4e_1 - e_2 = (4, -1)_e.$$

NOTA: els apartats (b) i (c) d'aquest exercici s'haguessin pogut fer usant les matrius de canvi de base de la següent manera.

Com que sabem que $u_1 = e_1$ i $u_2 = e_1 - e_2$, coneixem les components de la base $u = \{u_1, u_2\}$ en la base $e = \{e_1, e_2\}$,

$$u_1 = (1, 0)_e, \quad u_2 = (1, -1)_e,$$

per tant la matriu de canvi de base de la base u a la base e és

$$M_{eu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriu de canvi de base de la base e a la base u és

$$M_{ue} = M_{eu}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{ue}$$

Llavors, les components de $v = (1, -2)_e$ en la base $\{u_1, u_2\}$ són:

$$M_{ue} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_u$$

De la mateixa manera, les components de $w = (3, 1)_u$ en la base $\{v_1, v_2\}$ són:

$$M_{eu} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_e$$

com ja havíem vist. □

R17. Calculeu la matriu de canvi de base de $B_1 = \{u_1, u_2\}$ a $B_2 = \{v_1, v_2\}$ on: $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (0, 1)$, $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (1, 0)$.

Per calcular la matriu de canvi de base de B_1 a B_2 , $M_{B_2 B_1}$, necessitem conèixer les components de la base B_1 en la base B_2 , és a dir, les components dels vectors u_1 i u_2 en la base B_2 .

Si denotem per $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ les components d' u_1 en la base B_2 tenim que:

$$u_1 = (\alpha_1, \alpha_2)_{B_2} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(1, 0) = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1).$$

Llavors, com que les components d'un vector en una base són úniques i tenim que:

$$u_1 = (1, 1) = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) \implies 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 1,$$

i per tant $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$, és a dir $u_1 = (1, -1)_{B_2}$.

De la mateixa manera, si denotem per $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ les components d' u_2 en la base B_2 tenim que:

$$u_2 = (\alpha_1, \alpha_2)_{B_2} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(2, 1) + \alpha_2(1, 0) = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1).$$

Llavors, com que les components d'un vector en una base són úniques i tenim que:

$$u_2 = (0, 1) = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) \implies 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 1,$$

i per tant $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$, és a dir $u_2 = (1, -2)_{B_2}$.

Si comprovem els resultats que hem obtingut:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, -1)_{B_2} = (2, 1) - (1, 0) = (1, 1) \\ u_2 &= (1, -2)_{B_2} = (2, 1) - (2, 0) = (0, 1) \end{aligned}$$

Per tant la matriu de canvi de base de B_1 a B_2 és:

$$M_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

□

R18.

- (a) Calcula els valors de a i b per tal que el vector $(a, 1, 0, b)$ pertanyi a $[(1, 1, -2, 0), (0, 1, 1, 2)]$.

(b) Forma $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ una base de \mathbb{R}^3 ?

Calcula la matriu de canvi de base que permet passar de la base canònica a B .

(a) El vector $(a, 1, 0, b)$ pertanyerà a $[(1, 1, -2, 0), (0, 1, 1, 2)]$ si és combinació lineal dels vectors $(1, 1, -2, 0)$ i $(0, 1, 1, 2)$, és a dir, si existeixen dos escalaris $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$(a, 1, 0, b) = \lambda_1(1, 1, -2, 0) + \lambda_2(0, 1, 1, 2) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_2).$$

Per tant arribem al sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = b \end{array} \right\}$$

De la segona i tercera equacions tenim que $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ i $\lambda_2 = \frac{2}{3}$. Llavors $a = \lambda_1 = \frac{1}{3}$ i $b = 2\lambda_2 = \frac{4}{3}$.

Comprovem el resultat

$$\frac{1}{3}(1, 1, -2, 0) + \frac{2}{3}(0, 1, 1, 2) = \left(\frac{1}{3}, 1, 0, \frac{4}{3}\right) = (a, 1, 0, b),$$

per tant, per $a = \lambda_1 = \frac{1}{3}$ i $b = 2\lambda_2 = \frac{4}{3}$, el vector $(a, 1, 0, b)$ pertany al subespai $[(1, 1, -2, 0), (0, 1, 1, 2)]$.

(b) Com que la dimensió d' \mathbb{R}^3 és 3, B serà una base d' \mathbb{R}^3 si i només si els tres vectors són linealment independents. Això és cert ja que

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \right| = 0 + 1 + 0 - 0 - 1 - 1 = -1 \neq 0.$$

La matriu de canvi de base de la base canònica a B està formada per les components dels vectors de la base canònica expressats en la base B posades en columnes.

Una manera de fer-ho és calcular les components dels vectors $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ en la base B directament.

Una manera equivalent, és adonar-se de que en aquest cas coneixem les components dels vectors de la base B expressats en la base canònica, i que per tant coneixem

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors la matriu $M_{BC} = M_{CB}^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per comprovar-ho, vegeu que

$$(1, 1, 1)_C = (1, 0, 0)_B, (1, 0, 1)_C = (0, 1, 0)_B, (0, 1, 1)_C = (0, 0, 1)_B.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

□

R19. Considereu el subespai vectorial de les matrius amb coeficients reals d'ordre 3 antisimètriques.

- (a) Calculeu una base d'aquest subespai vectorial.

(b) Calculeu les components de la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

en aquesta base.

(a) Sigui M una matriu d'ordre 3 antisimètrica, llavors M és de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

on a_{12}, a_{13} i $a_{23} \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$M = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, l'espai de les matrius antisimètriques és el subespai vectorial generat per les matrius:

$$B \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per veure si determinen una base hem de veure si són linealment independents. Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3.$$

Per tant, com que són generadors i linealment independents, són base.

(b) Ara hem de calcular les components de la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

en la base B, és a dir, hem de calcular α, β i γ tals que:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant tenim que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ i $\gamma = 3$, és a dir:

$$M = (1, 2, 3)_B.$$

□

R20. Considerem el subespai vectorial de les matrius amb coeficients reals d'ordre 2 simètriques.

- (a) Determineu una base d'aquest subespai vectorial.
- (b) Determineu les components de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

en la base anterior.

- (c) Denotem per $u_i, i = 1 \dots n$ els elements de la base anterior i considerem la base donada per $v_i = \sum_{j=1}^i u_j, i = 1 \dots n$.

Calculeu les components de la matriu donada en l'apartat anterior respecte aquesta nova base.

- (d) Donada la matriu que té per components el vector unitari respecte la base $\{v_i\}_{i=1 \dots n}$, calculeu les components d'aquesta matriu respecte la base $\{u_i\}_{i=1 \dots n}$.

- (a) Sigui M una matriu d'ordre 2 simètrica, llavors M és de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

on a_{11}, a_{12} i $a_{22} \in \mathbb{R}$.

Per tant:

$$M = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, l'espai de les matrius simètriques és el subespai vectorial generat per les matrius:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

D'aquesta manera hem trobat tres matrius que formen un sistema de vectors generadors.

Per veure que són base, ens cal veure que siguin linealment independents. Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

llavors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Per tant com que les tres matrius són linealment independents i generen, són base.

(b) Ara hem de calcular les components de la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

en la base B , és a dir, hem de calcular α, β i γ tals que:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Per tant tenim que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ i $\gamma = 3$, és a dir:

$$M = (1, 2, 3)_B.$$

(c) Ara considerem

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i considerem la nova base B' formada pels vectors

$$v_i = \sum_{j=1}^i u_j, \quad i = 1 \dots 3, \text{ és a dir}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{j=1}^1 u_j = u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \sum_{j=1}^2 u_j = u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \sum_{j=1}^3 u_j = u_1 + u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hem de calcular les components de la matriu M en aquesta nova base, és a dir, hem de calcular α, β i γ tals que:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \beta + \gamma \\ \beta + \gamma & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant $\gamma = 3$, $\beta = 2 - \gamma = -1$, $\alpha = 1 - \beta - \gamma = -1$, és a dir:

$$M = (-1, -1, 3)_{B'}.$$

Si ho comprobem

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una altra manera de fer resoldre aquest apartat era adonar-se que coneixem l'expressió dels vectors de la nova base respecte la vella, és a dir, que coneixem la matriu de canvi de base de B' a B ,

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que nosaltres coneixem les components de la matriu M en la base B i volem obtenir les components en la base B' , necessitem la matriu de canvi de base $M_{B'B}$, que és

$$M_{B'B} = M_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors les components de M en la nova base són:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{B'}$$

com havíem vist.

- (d) Ara ens donen la matriu $M = (1, 1, 1)_{B'}$ i ens demanen que trobem les components d'aquesta matriu respecte la base B .

La primera manera de fer-ho és fer servir la definició de components respecte d'una base:

$$\begin{aligned} M &= (1, 1, 1)_{B'} = v_1 + v_2 + v_3 = u_1 + (u_1 + u_2) + (u_1 + u_2 + u_3) \\ &= 3u_1 + 2u_2 + u_3 = (3, 2, 1)_B. \end{aligned}$$

La segona manera de fer-ho és considerant la matriu de canvi de base de B' a B , $M_{BB'}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

□