UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Dirección de Operaciones. Stocks II

DIRECCIÓN DE OPERACIONES 240EO024 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización (240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista · Rocío Alfaro

OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2017/10 240EO024 (20170406) - http://futur.upc.edu/OPE - www.prothius.com - Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

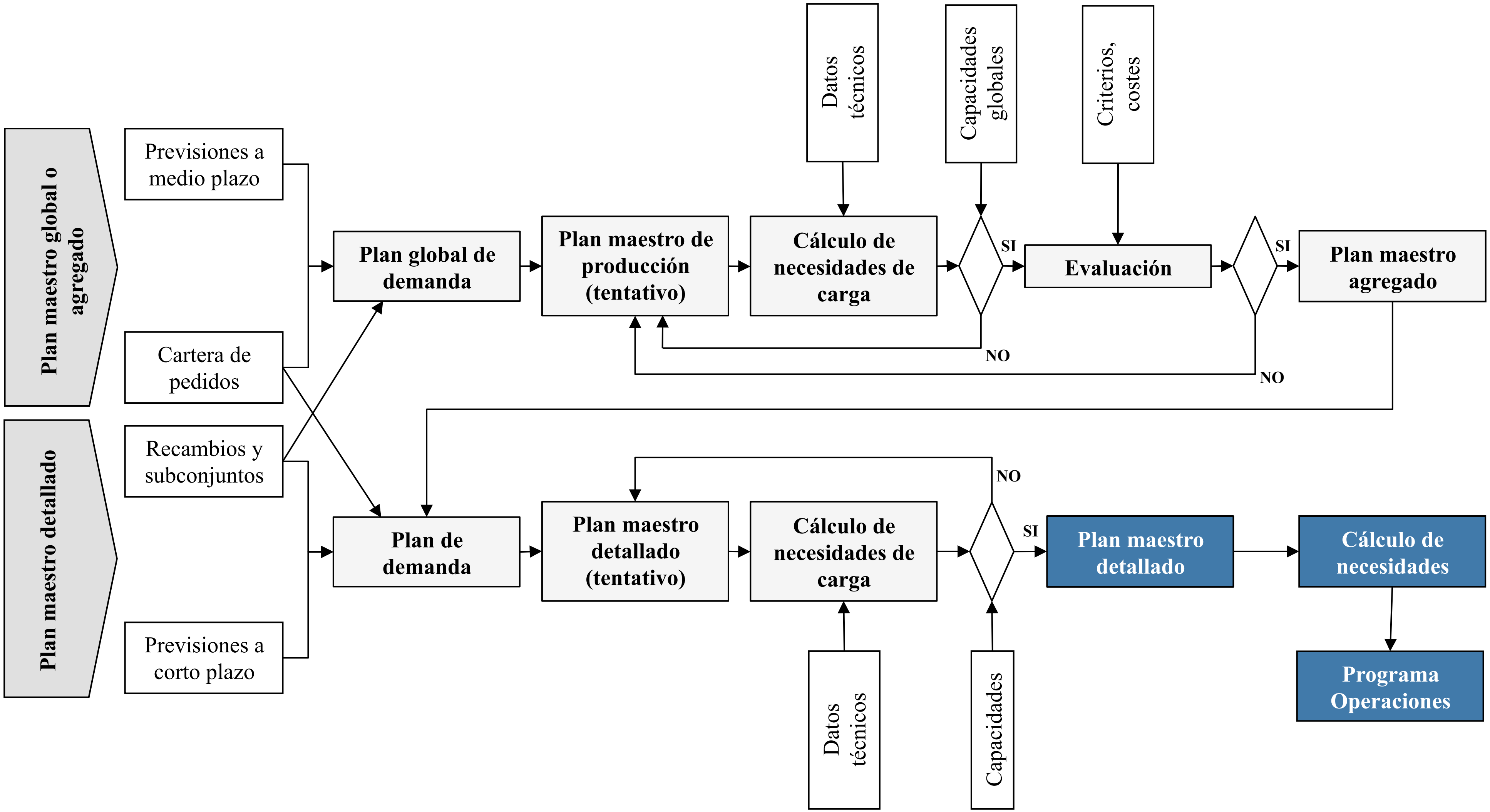
Contenido

Plan. Concepto y tipología

Plan.- Camino que se traza desde un estado inicial hasta un estado final para alcanzar un objetivo productivo.

NOMBRE	MOTIVO	HORIZONTE	FRECUENCIA	INTERVALO	RIGIDEZ	NIVEL
Estratégico-Producto	Definir binomio producto-mercado	10 años	2 a 3 años	1 año	4 a 5 años	Modelo gran opción
Estratégico-Proceso	Nuevas plantas Nuevas filiales	5 a 7 años	1 a 2 años	trimestral (para 1 año)	2 a 3 años	Grandes líneas
Operativo-Táctico	Coordinar inversiones	3 a 5 años	anual	Trimestral (para 1 año)	1 año	Modelo global
Maestro global	Asignar recursos críticos	12 meses	mensual	1 mes	2 meses	Familias de producto
Maestro detallado	Tasas de producción. Aprovisionamiento	16 semanas	semanal	semana	3 semanas	Productos o Mezclas
Cálculo necesidades	Órdenes fabricación y aprovisionamiento	12 semanas	semanal	semana	2 semanas	Orden
Programa operaciones	Situar operaciones en tiempo y espacio	5 días	diaria	día	1 día	Operación

Planificación. Gestión de Stocks



Gestión de Stocks. Contexto

Características de un motor

1.- 747 piezas y 330 referencias en 6 versiones del motor diesel
2.- Nº de operaciones de Montaje: 378 (incluida la prueba rápida).
3.- Nº de operarios, para un turno de 301 motores: 79

Características de la fabricación

1.- Montaje: 9 tipos de motores de 3 familias: 4x4 (p1 a p3); furgonetas (p4, p5); camiones MT (p6 a p9).
2.- Nº de operaciones: 140. Atributos: temporales, espaciales y de riesgo
3.- Demanda diaria: 30 motores de cada tipo (instancia #1 Nissan-BCN), 2 turnos de 6h 45’ (8h): c=180 s.

Stocks. Concepto y tipología

Stock · Concepto: Reserva material con valor económico sin uso inmediato.

NOMBRE	CAUSA	FUNCIÓN	HORIZONTE	TIPO PLAN
Stock de ciclo	Tiempos de preparación muy superiores a tiempos de proceso	Reducir frecuencia de lanzamientos	semana · mes	Programa operaciones
Stock de seguridad	Incertidumbre ante la variación de la demanda	Evitar diferir la demanda y roturas	12 semanas	Cálculo de necesidades
Stock estacional	Desajuste temporal entre producción y demanda	Atender a puntas de demanda estacional	12 meses	Maestro detallado
Stock de tránsito	Desajuste espacial entre los puntos de producción y de consumo	Garantizar suministro continuo	infinito	Plan en Flujo continuo

NOMBRE SEGÚN NATURALEZA (I)	NOMBRE SEGÚN NATURALEZA (II)
1. Materias primas (v.g. petróleo, madera, bronce)	5. Productos acabados (v.g. coche, ropa, perfume)
2. Componentes (v.g. caja de cambios, carburador, asientos)	6. Subproductos (v.g. nata, alquitrán)
3. Obra en curso (v.g. status en 7ª estación de la línea)	7. Recambios (v.g. prensas, probetas)
4. Productos semielaborados (v.g. vacuna, carrocería, motor)	8. Envases (v.g. pinturas, bebidas, lámparas)

Stocks. Costes asociados

Tipos de costes:

Coste de Adquisición del lote:
$$\left\{\begin{array}{l} -\ \text{Coste de Lanzamiento o emisión de orden : } c_A\,(um\,/\,orden) \\ -\ \text{Coste unitario de adquisición (fabricación o compra): } c_u\,(um\,/\,up) \end{array}\right\}$$

Coste de Posesión de stock:
$$\left\{\begin{array}{l} -\ \text{Mantenimiento de generación y existencias} \\ -\ \text{Movimiento de artículos} \\ -\ \text{Seguridad} \\ -\ \text{Información y control} \\ -\ \text{Cargas financieras} \end{array}\right\} : c_h\,(um\,/\,(up \times ut))$$

Insatisfacción de la demanda:
$$\left\{\begin{array}{ll} -\ \text{Demanda diferida: Coste de diferir} & : c_b\,(um\,/\,(up \times ut)) \\ -\ \text{Demanda perdida: Coste de rotura} & : c_r\,(um\,/\,up) \end{array}\right\}$$

Objetivo:
$$\left\{\begin{array}{l} -\ \text{Minimizar el coste de gestión por unidad de tiempo} \\ -\ \min \dot{C}(Q) = \dot{C}_A(Q) + \dot{C}_u(Q) + \dot{C}_h(Q) + \dot{C}_b(Q) + \dot{C}_r(Q)\ \ (um\,/\,ut) \end{array}\right\}$$

Modelo EOQ generalizado · Fundamentos (1)

Concepto: Determinar el tamaño del lote de fabricación o de aprovisionamiento con menor coste de gestión

Modelo · EOQ generalizado · Hipótesis:

1. Se considera un horizonte de planificación de stocks T^∞ (Se fija $T^\infty = 1$ · v.g.: año, mes, semana, día).
2. Se tiene un solo tipo de producto.
3. La demanda del producto durante T^∞ es constante y homogénea en el tiempo.
4. La entrada del producto en el sistema, en forma de lote, es progresiva con una tasa de producción P homogénea en el tiempo mayor que la tasa de demanda D.
5. La fabricación o adquisición de un lote tiene un coste fijo, llamado coste de lanzamiento, que es independiente del tamaño del lote.
6. La fabricación o compra de una unidad de producto tiene un coste constante llamado coste unitario de adquisición (producción o compra).
7. La preservación de una unidad de producto durante T^∞ tiene un coste constante, llamado coste de posesión, que depende del coste unitario de adquisición y de la tasa de posesión.
8. Se puede diferir la demanda durante T^∞ con un coste adicional llamado coste de diferir.
9. El coste de gestión de stocks, durante T^∞, es la suma de cuatro tipos de costes: (1) lanzamiento, (2) adquisición, (3) posesión y (4) de diferir.

Modelo EOQ generalizado · Fundamentos (2)

Modelo · EOQ generalizado · Nomenclatura:

Parámetros:

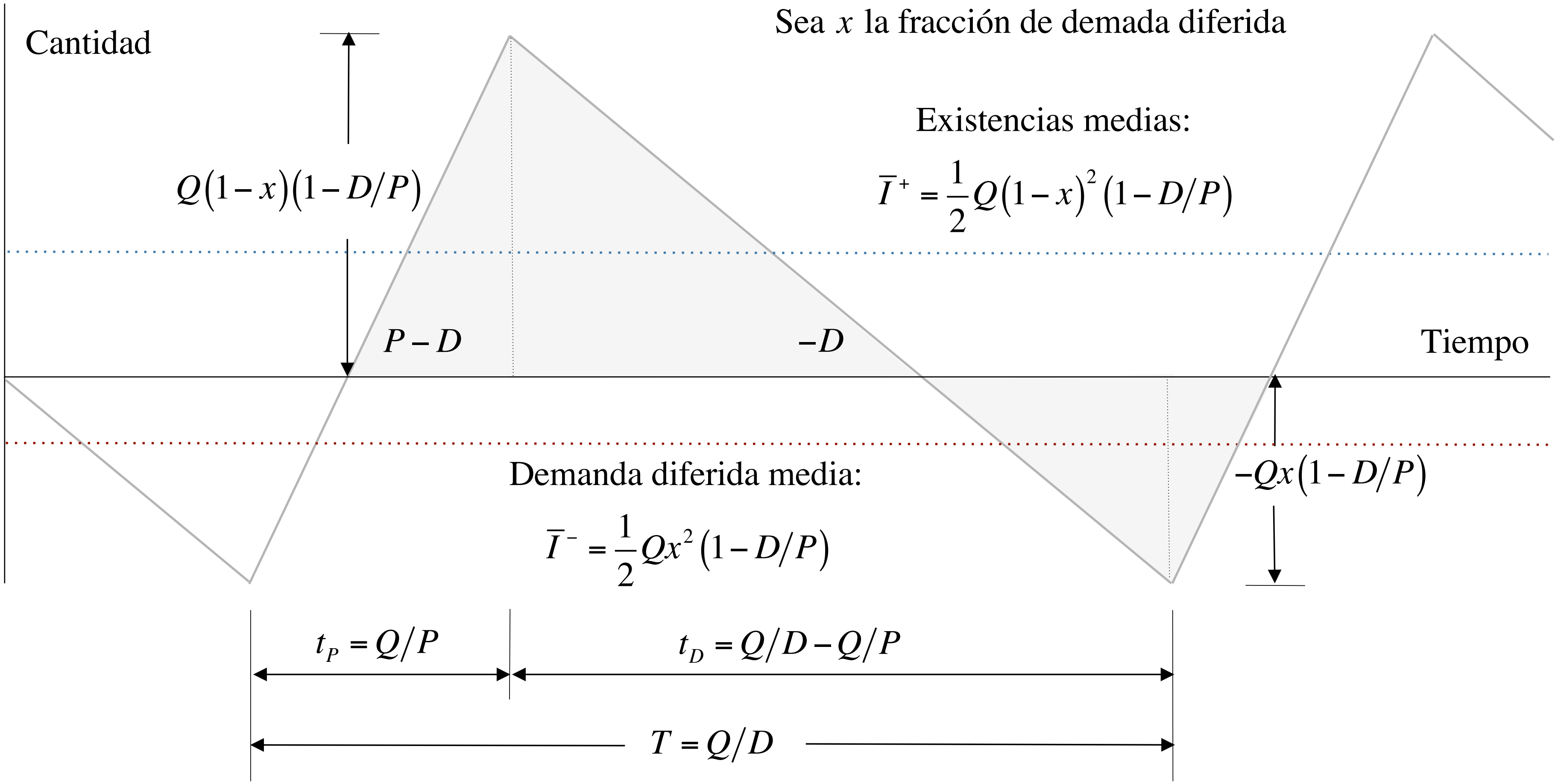
T^{∞}	Horizonte de planificación de stocks (se fija $T^{\infty}=1\,ut$ (unidad de tiempo), v.g.- año, mes, día)
L	Plazo de obtención o entrega (tiempo entre los instantes de emisión y recepción de cualquier orden)
D,P	Tasa de demanda y Tasa de producción · Demanda y Producción del artículo durante $T^{\infty}=1\,ut$: up/ut
c_A,c_u	Coste de lanzamiento o emisión de orden: $um/orden$ · Coste unitario de producción o adquisición: um/up
c_h,c_b	Coste unitario de posesión de stock: $um/(up\times ut)$ · Coste unitario por diferir la demanda: $um/(up\times ut)$
i_S	Tasa de posesión de stock · Ratio entre los costes unitarios de posesión y de adquisición: $i_S=c_h/c_u\,(ut^{-1})$

Variables:

Q,Q^*	Tamaño de lote (Q) de una orden de reposición · Tamaño óptimo (Q^*) del lote: $up/orden$
ν,ν^*	Frecuencia de reposición (número de órdenes durante T^{∞}) · Frecuencia óptima de reposición
T,T^*	Tiempo de ciclo (tiempo entre dos órdenes consecutivas) · Ciclo óptimo
$\bar{I},x$	Nivel medio de stock (Existencias ($\bar{I}^+$) y demanda diferida ($\bar{I}^-$) medias) · Fracción de demanda diferida
$\dot{C}(Q)$	Coste de gestión de stocks durante T^{∞} en función de Q: $\dot{C}(Q)=\dot{C}_A(Q)+\dot{C}_u(Q)+\dot{C}_h(Q)+\dot{C}_b(Q)$
$\dot{C}^*$	Coste óptimo de gestión de stocks durante T^{∞}: $\dot{C}^*=\dot{C}(Q^*)$

Modelo EOQ generalizado · Fundamentos (3)

Modelo · EOQ generalizado · Esquema:



Modelo EOQ generalizado · Fundamentos (4)

Modelo · EOQ generalizado · Formulación y resolución:

Función objetivo: $\min \dot{C}(Q,x) = c_A \dfrac{D}{Q} + c_u D + c_h \dfrac{1}{2} Q(1-x)^2 (1-D/P) + c_b \dfrac{1}{2} Q x^2 (1-D/P)$

Resolución: $\dfrac{\partial \dot{C}(Q,x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -c_h Q(1-x)(1-D/P) + c_b Q x (1-D/P) = 0 \Rightarrow x^* = \dfrac{c_h}{c_h + c_b}$

Resultado:

0. $\dot{C}^*(Q) = \dot{C}(Q,x^*) = c_A \dfrac{D}{Q} + c_u D + c_h \dfrac{1}{2} Q \left(\dfrac{c_b}{c_h + c_b}\right)^2 \left(1 - \dfrac{D}{P}\right) + c_b \dfrac{1}{2} Q \left(\dfrac{c_h}{c_h + c_b}\right)^2 \left(1 - \dfrac{D}{P}\right)$

1. $Q^* = \sqrt{\dfrac{2 c_A D (c_h + c_b)^2}{(c_h c_b^2 + c_b c_h^2)(1-D/P)}} = \sqrt{\dfrac{2 c_A D (c_h + c_b)^2}{c_h c_b (c_h + c_b)(1-D/P)}} = \sqrt{\dfrac{2 c_A D (c_h + c_b)}{c_h c_b (1-D/P)}}$

2. $v^* = \dfrac{D}{Q^*} = D \sqrt{\dfrac{c_h c_b (1-D/P)}{2 c_A D (c_h + c_b)}} \Rightarrow v^* = \sqrt{\dfrac{c_h c_b D (1-D/P)}{2 c_A (c_h + c_b)}}$

3. $T^* = \dfrac{1}{v^*} \Rightarrow T^* = \sqrt{\dfrac{2 c_A (c_h + c_b)}{c_h c_b D (1-D/P)}}$

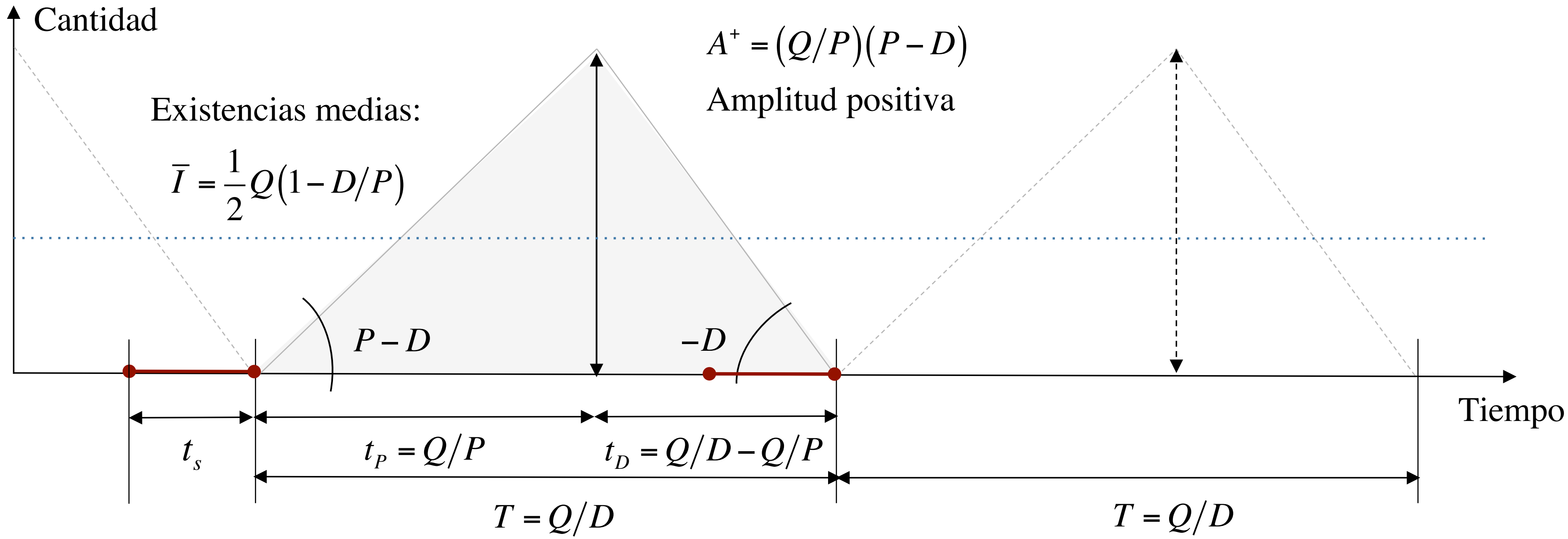
4. $\dot{C}^* = \dot{C}(Q^*, x^*) = c_u D + \sqrt{\dfrac{2 c_A c_h c_b D (1-D/P)}{c_h + c_b}}$

Modelo EOQ Tasa de producción finita y tiempo de preparación (1)

Tasa de producción finita y tiempo de preparación · Caso 1 producto · Hipótesis adicionales:

1. La producción del artículo durante T^{∞} es constante y homogénea en el tiempo.
2. La entrada del producto en el sistema (lote fijo) depende de la tasa de producción del artículo.
3. Cada lanzamiento requiere un tiempo de preparación (setup).
4. La tasa de producción P es mayor que la tasa de demanda D.

Esquema: Sea t_s el tiempo de preparación (setup) requerido en cada lanzamiento



Modelo EOQ Tasa de producción finita y tiempo de preparación (2)

EOQ Tasa de producción finita y tiempo de preparación · Caso 1 producto · Formulación y resolución:

Función objetivo:

$$\min \dot{C}(Q) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\text{s.a.:} \qquad t_s + \frac{Q}{P} \le \frac{Q}{D}$$

Resolución:

$$\frac{\partial \dot{C}(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -c_A \frac{D}{Q^2} + \frac{1}{2} c_h \left(1 - \frac{D}{P}\right) = 0 \Rightarrow \hat{Q} = \sqrt{\frac{2 c_A D}{c_h \left(1 - D/P\right)}}$$

$$t_s + \frac{Q}{P} \le \frac{Q}{D} \Rightarrow t_s \le Q\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right) = \frac{Q}{D}\left(1 - D/P\right) \Rightarrow Q \ge \frac{t_s D}{\left(1 - D/P\right)} \Rightarrow Q_{\min} = \frac{t_s D}{1 - D/P}$$

Resultado:

1. $Q^* = \max\left\{\hat{Q}, Q_{\min}\right\}$
2. $\left\{\hat{v} = D/\hat{Q}\right\} \wedge \left\{v_{\max} = D/Q_{\min}\right\} \Rightarrow v^* = \min\left\{\hat{v}, v_{\max}\right\}$
3. $\left\{\hat{T} = 1/\hat{v}\right\} \wedge \left\{T_{\min} = 1/v_{\max}\right\} \Rightarrow T^* = \max\left\{\hat{T}, T_{\min}\right\}$
4. $\left\{\begin{array}{l} \dot{C}(\hat{Q}) = c_u D + \sqrt{2 c_A c_h \left(1 - D/P\right) D} \\ \dot{C}(Q_{\min}) = c_u D + c_A \left(1 - D/P\right)/t_s + c_h t_s D/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C}^* = \min\left\{\dot{C}(\hat{Q}), \dot{C}(Q_{\min})\right\}$

Ejemplo 6. Presentación

Ejemplo 6 · EOQ P finita y tiempo de preparación · Caso 1 producto· Enunciado:

Se tiene un plan de demanda de un artículo, con horizonte de 10 semanas. En la Tabla 1 se recogen los valores de dicho plan. La línea tiene una capacidad de producción de 10 unidades a la semana. El coste unitario de posesión de stock es 1 unidad monetaria por semana, el coste de lanzamiento de un lote es 30 um y el tiempo de preparación de la línea es 1 semana cada vez que se emite una orden. La línea está lista para fabricar la primera semana. Determinar el plan de producción de menor coste con lotes de idéntico tamaño y sin rotura de stock.

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-l. Horizonte 10 semanas.

$$\begin{Bmatrix} D = 60\, up/ut \\ P = 100\, up/ut \end{Bmatrix} \qquad c_A = 30\, um/orden \qquad \begin{Bmatrix} c_h = 10\, um/(up \times ut) \\ t_s = 0.1\ ut\ /\ orden \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_h = 1\, um/(up \times semana) \\ t_s = 1\ semana\ /\ orden \\ T^{\infty} = 10\, semanas = 1\, ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 6. Resolución (1)

Ejemplo 6 · EOQ P-t_s · Resolución Lotes estáticos · Lote óptimo (mínimo coste global)

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{\begin{array}{l} Q_t = d_t (t=1,..,10) \\ I_t = 0 \ (t=1,..,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A v = 30 \times 10 = 300\, um/ut \cdot$ Inviable

2. Regla de Harris-Wilson: $\left\{\begin{array}{l} \hat{Q} = \sqrt{\dfrac{2c_A D}{C_h(1-D/P)}} = \sqrt{\dfrac{2\times 30\times 60}{10\times 0.4}} = 30 \\ Q_{\min} = \dfrac{t_s D}{1-D/P} = \dfrac{0.1\times 60}{0.4} = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q^* = \max\{\hat{Q}, Q_{\min}\} = 30 \\ v^* = 2 \\ T^* = 1/2 = 5 \text{ semanas} \end{array}\right\}$

Periodo t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t	30				t_s	30				
I_t	25	19	10	3	0	20	14	10	2	0
$\dot{C}_t$	55	19	10	3	0	50	14	10	2	0

Demanda discreta: $\dot{C} = c_A + \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 30 + 163 = 193\, um/ut$

Demanda continua: $\dot{C}^* = c_u D + c_h Q^* \left(1 - D/P\right) = 0 + 10 \times 30 \times 0.4 = 120\ um/ut$

Ejemplo 6. Resolución (2)

Ejemplo 6 · EOQ P-t_s · Resolución Lotes estáticos . Lote mínimo (mínimo coste de posesión)

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{\begin{array}{l} Q_t = d_t (t=1,..,10) \\ I_t = 0 \ (t=1,..,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A v = 30 \times 10 = 300 \, um/ut$ · Inviable

2. Máximo número de órdenes: $\left\{\begin{array}{l} Q_{\min} = \dfrac{t_s D}{1-D/P} = \dfrac{0.1 \times 60}{0.4} = 15 \\ v_{\max} = D/Q_{\min} = 60/15 \,;\, T_{\min} = 1/v_{\max} = 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q_{\min} = 15 \\ v_{\max} = 4 \\ T_{\min} = 1/4 = 2.5 \text{ semanas} \end{array}\right\}$

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t	15	t_s	15	t_s	15	t_s	15			
I_t	10	4	10	3	15	5	14	10	2	0
$\dot{C}_t$	40	4	40	3	45	5	44	10	2	0

Demanda discreta: $\dot{C} = c_A + \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 30 + 193 = 223 \, um/ut$

Demanda continua: $\dot{C}^* = c_u D + c_A v_{\max} + c_h t_s D/2 = 0 + (30 \times 4) + (10 \times 0.1 \times 60 / 2) = 150 \ um/ut$

Modelo EOQ multi-producto *P*-finita y tiempo de preparación (1)

Modelo · EOQ P-finita y tiempo de preparación · Caso multi-producto · Nomenclatura:

Parámetros:

T^∞	Horizonte de planificación de stocks (se fija $T^\infty = 1ut$ (unidad de tiempo), v.g.- año, mes, día)
L	Plazo de obtención o entrega (tiempo entre los instantes de emisión y recepción de cualquier orden)
J	Conjunto de artículos o tipos de producto ($j = 1,..,\lvert J\rvert$)
D_j, P_j	Tasa de demanda y Tasa de producción de $j \in J$ · Demanda y Producción de $j \in J$ durante $T^\infty = 1ut$: up/ut
c_{A_j}, c_{u_j}	Coste de lanzamiento de $j \in J$ $(um/orden)$ · Coste unitario de adquisición de $j \in J$ (um/up)
c_{h_j}, c_{b_j}	Coste unitario de posesión de $j \in J$ $(um/(up \times ut))$ · Coste de diferir la demanda de $j \in J$ $(um/(up \times ut))$
i_{S_j}, t_{s_j}	Tasa de posesión de $j \in J$: $\left[i_{S_j} = c_{h_j} / c_{u_j} \, (ut^{-1}) \right]$ · Tiempo de preparación de lote de $j \in J$ $(ut / orden)$

Variables:

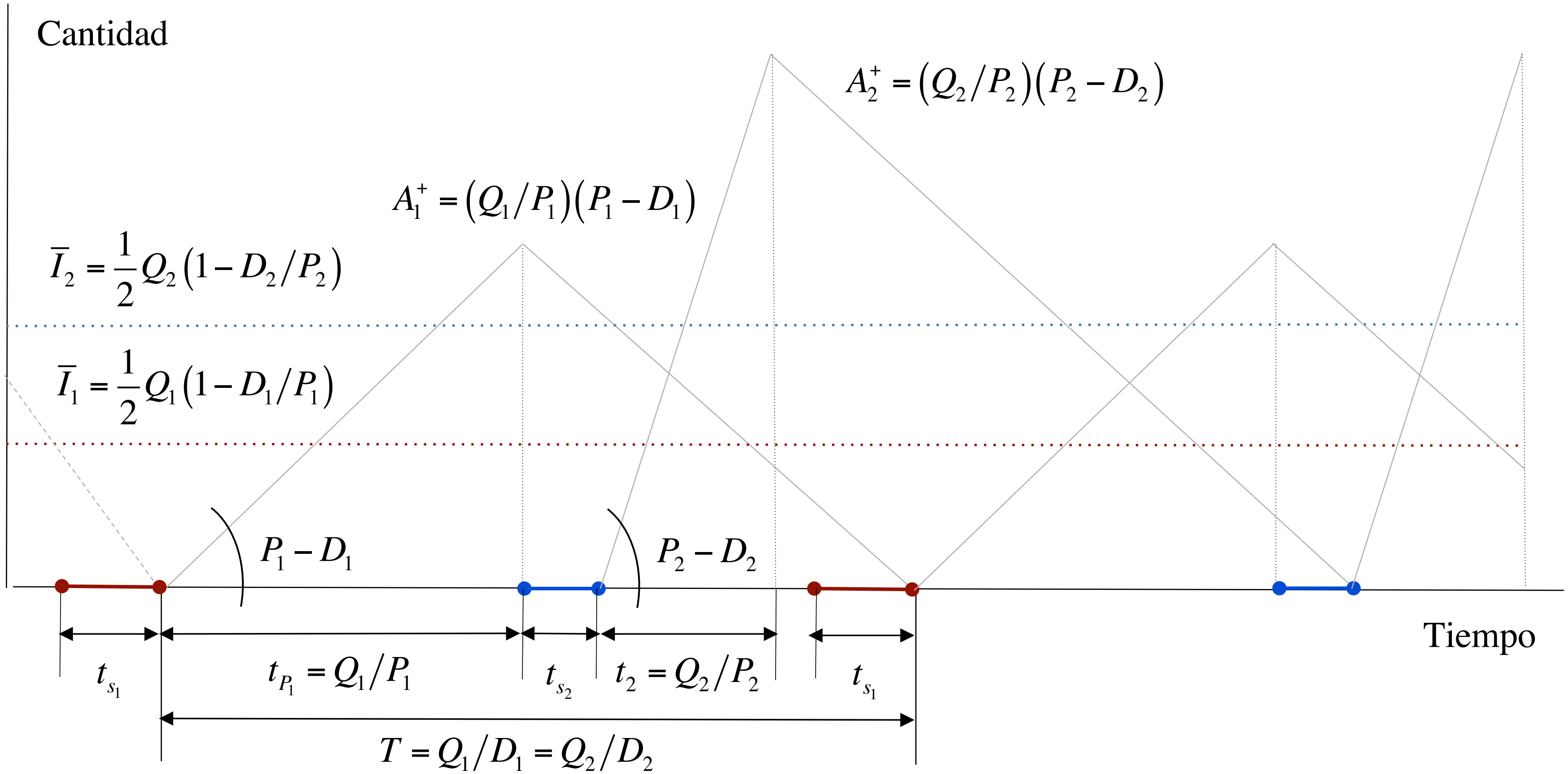
Q_j, Q_j^*	Tamaño de lote (Q_j) de $j \in J$ · Tamaño óptimo (Q_j^*) del lote de $j \in J$ $(up/orden)$
v_j, v_j^*	Frecuencia de reposición de $j \in J$ · Frecuencia óptima de reposición de $j \in J$
T_j, T_j^*	Tiempo de ciclo de $j \in J$ (tiempo entre dos órdenes consecutivas) · Ciclo óptimo de $j \in J$
$\bar{I}_j, x_j$	Nivel medio de stock de $j \in J$ ($\bar{I}_j = \bar{I}_j^+ - \bar{I}_j^-$) · Fracción de demanda diferida de $j \in J$
$\dot{C}(\vec{Q})$	Coste de gestión de stocks durante T^∞ en función de $\vec{Q}$: $\dot{C}(\vec{Q}) = \dot{C}_A(\vec{Q}) + \dot{C}_u(\vec{Q}) + \dot{C}_h(\vec{Q}) + \dot{C}_b(\vec{Q})$
$\dot{C}^*$	Coste óptimo de gestión de stocks durante T^∞: $\dot{C}^* = \dot{C}(\vec{Q}^*)$

Modelo EOQ multi-producto *P*-finita y tiempo de preparación (2)

Tasa de producción finita y tiempo de preparación · Caso multi-producto · Hipótesis adicionales:

1. Un lanzamiento de cada producto en cada ciclo a lo largo de T^{∞} sin diferir la demanda.

Esquema:



Modelo EOQ multi-producto *P*-finita y tiempo de preparación (3)

Tasa de producción finita y tiempo de preparación Caso multi-producto · Formulación y resolución:

Hipótesis: $D_j/Q_j \equiv \nu_j = \nu \;\; \forall j \in J$ (un solo lanzamiento por producto y ciclo)

Función objetivo: $$\min \dot{C}(\nu) = \nu \sum_{j\in J} c_{A_j} + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{1}{2\nu} \sum_{j\in J} c_{h_j} D_j \left(1 - D_j/P_j\right)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j\in J} t_{s_j} + \sum_{j\in J} \frac{Q_j}{P_j} \le T \Leftrightarrow \sum_{j\in J} t_{s_j} + \frac{1}{\nu} \sum_{j\in J} \frac{D_j}{P_j} \le \frac{1}{\nu}$$

Resolución: $$\frac{\partial \dot{C}(\nu)}{\partial \nu} = 0 \Rightarrow \sum_{j\in J} c_{A_j} - \frac{1}{2\nu^2} \sum_{j\in J} c_{h_j} D_j \left(1 - D_j/P_j\right) = 0 \Rightarrow \hat{\nu} = \sqrt{\frac{\sum_{j\in J} c_{h_j} D_j \left(1 - D_j/P_j\right)}{2\sum_{j\in J} c_{A_j}}}$$

$$\sum_{j\in J} t_{s_j} + \frac{1}{\nu} \sum_{j\in J} D_j/P_j \le \frac{1}{\nu} \Rightarrow \sum_{j\in J} t_{s_j} \le \frac{1}{\nu}\left(1 - \sum_{j\in J} D_j/P_j\right) \Rightarrow \nu \le \frac{1 - \sum_{j\in J} D_j/P_j}{\sum_{j\in J} t_{s_j}} \equiv \nu_{\max}$$

Resultado:

1. $\nu^* = \min\left\{\hat{\nu}, \nu_{\max}\right\}$
2. $T^* = 1/\nu^*$
3. $Q_j^* = D_j T^* \;\; \forall j \in J$
4. $\dot{C}^* = \dot{C}(\nu^*) = \nu^* \sum_{j\in J} c_{A_j} + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{1}{2\nu^*} \sum_{j\in J} c_{h_j} D_j \left(1 - D_j/P_j\right)$

Ejemplo 7. Presentación

Ejemplo 7 · P-finita y tiempo de preparación · Caso multi-producto · Enunciado:

Un taller fabrica 2 artículos de estampación, E1 y E2, con demandas mensuales iguales a 5000 y 10000 unidades, respectivamente. La Línea_6 puede fabricar al mes 12500 piezas E1 o bien 25000 E2, repartiendo su tiempo entre ambas. El tiempo de preparación de la L_6 es igual a 1 día cuando se cambia de pieza; el coste de lanzamiento de un lote es 1000 um, sin depender del tipo de pieza; el coste de fabricación de una unidad en L_6 es 50 um para E1 y 20 um para E2; la tasa de posesión de stock es el 10% mensual para los dos tipos. Determine un ciclo de fabricación con idéntico número de lanzamientos para ambas piezas sin diferir la demanda.

Nota: Considere un mes con 20 días laborales, tanto en demanda como en producción.

$$\begin{Bmatrix} D_1 = 5000\, up/ut \\ P_1 = 12500\, up/ut \\ D_2 = 10000\, up/ut \\ P_2 = 25000\, up/ut \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} c_{A_1} = 1000\, um/orden \\ c_{A_2} = 1000\, um/orden \\ c_{u_1} = 50\, um/up \\ c_{u_2} = 20\, um/up \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} c_{h_1} = 5\, um/(up \times ut) \\ c_{h_2} = 2\, um/(up \times ut) \\ t_{s_1} = 0.05\, ut\, /\, orden \\ t_{s_2} = 0.05\, ut\, /\, orden \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} i_s = 0.1\, ut^{-1} \\ t_{s_1} = 1\, día\, /\, orden \\ t_{s_2} = 1\, día\, /\, orden \\ T^{\infty} = 20\, días = 1\, ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 7. Resolución (1)

Ejemplo 7 · P-finita y tiempo de preparación · Caso multi-producto · Resolución:

0. Frecuencias:

$$(i)\quad \hat{v} = \sqrt{\frac{\sum_{j\in J} c_{h_j} D_j \left(1 - D_j / P_j\right)}{2\sum_{j\in J} c_{A_j}}} \Rightarrow \quad \hat{v} = \sqrt{\frac{5\times 5000\times 0.6 + 2\times 10000\times 0.6}{2\times\left(1000+1000\right)}} \approx 2.6\, orden/ut$$

$$(ii)\quad v_{\max} = \frac{1-\sum_{j\in J} D_j / P_j}{\sum_{j\in J} t_{s_j}} \Rightarrow \quad v_{\max} = \frac{1-(0.4+0.4)}{0.05+0.05} = 2\ \ orden/ut$$

Resultado:

1. $v^* = \min\left\{\hat{v}, v_{\max}\right\} \Rightarrow v^* = \min\left\{2.6,\ 2\right\} \Rightarrow v^* = 2\ \ orden/ut$

2. $T^* = 1/v^* \Rightarrow T^* = 1/2 \Rightarrow T^* = 0.5\ \ ut = 10\ \ días$

3. $Q_j^* = D_j T^* \quad \forall j\in J \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1^* = 5000\times 0.5 = 2500\ \ up/orden \\ Q_2^* = 10000\times 0.5 = 5000\ \ up/orden \end{Bmatrix}$

4. $\dot{C}^* = \dot{C}(v^*) = v^* \sum_{j\in J} c_{A_j} + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{T^*}{2} \sum_{j\in J} c_{h_j} D_j \left(1 - D_j / P_j\right)$

$$\dot{C}^* = 2\times(1000+1000) + (2.5+2)\times 10^5 + 0.25\times(5\times 5000\times 0.6 + 2\times 10000\times 0.6) = 4.61\times 10^5\ \ um/ut$$

Modelo EOQ multi-producto sujeto a restricción lineal

EOQ multi-producto sujeto a restricción lineal · Formulación y resolución:

Nomenclatura: a_j Coeficiente tecnológico-financiero del producto $j \in J$

b Límite tecnológico-financiero asociado al conjunto de productos J

Modelo: $\min \dot{C}(\vec{Q}) = \sum_{j\in J} c_{A_j} D_j \big/ Q_j + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} c_{h_j} Q_j$

s.a.: $\sum_{j\in J} a_j Q_j \le b$

Resolución:

1. Óptimos tentativos: $\partial \dot{C}(\vec{Q}) \big/ \partial Q_j = 0 \quad \forall j \in J \Rightarrow \hat{Q}_j = \sqrt{2 c_{A_j} D_j \big/ c_{h_j}}$

2. Test de satisfacción: Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j\in J} a_j \hat{Q}_j \le b \;\; \text{Hacer: } Q_j^* = \hat{Q}_j \;\; \forall j \in J \cdot \text{Finalizar} \\ \sum_{j\in J} a_j \hat{Q}_j > b \;\; \text{Continuar} \end{array} \right\}$

3. Lagrange: $\min \Lambda(\vec{Q},\lambda) = \sum_{j\in J} c_{A_j} D_j \big/ Q_j + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} c_{h_j} Q_j \; + \lambda\left(\sum_{j\in J} a_j Q_j - b\right)$

   3.1. $\partial \Lambda(\vec{Q},\lambda) \big/ \partial Q_j = 0 \quad \forall j \in J \Rightarrow Q_j(\lambda) = \sqrt{2 c_{A_j} D_j \big/ (c_{h_j} + 2 a_j \lambda)}$

   3.2. $\partial \Lambda(\vec{Q},\lambda) \big/ \partial \lambda = 0 \;\; \Rightarrow \sum_{j\in J} a_j Q_j = b$

   3.3. Resolver ecuación en λ: $\sum_{j\in J} a_j \sqrt{2 c_{A_j} D_j \big/ (c_{h_j} + 2 a_j \lambda)} = b$ · Obtener λ^*

4. Determinar óptimos: $Q_j^* = Q_j(\lambda^*) \quad \nu_j^* = D_j \big/ Q_j^* \quad T_j^* = 1 \big/ \nu_j^* \quad \dot{C}^* = \dot{C}(\vec{Q}^*)$

J. Bautista, R. Alfaro

Ejemplo 8. Limitación stock medio · Presentación

Ejemplo 8 · Caso multi-producto sujeto a restricción lineal (Stock) · Enunciado:

Un almacén aprovisiona 2 piezas de estampación, E1 y E2, con demandas mensuales iguales a 5000 y 2000 unidades, respectivamente. El coste de pedir un lote de piezas es 2000 um para E1 y 500 um para E2; el coste de adquisición de una pieza es 50 um para E1 y 20 um para E2; la tasa de posesión de stock es el 10% mensual para los dos tipos de pieza. Determine los lotes óptimos de aprovisionamiento teniendo en cuenta que el almacén está preparado para un máximo de 1000 piezas en promedio.

Nota: Considere un mes con 20 días laborales, tanto en demanda como en producción.

$$\begin{Bmatrix} D_1 = 5000\, up/ut \\ D_2 = 2000\, up/ut \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} c_{A_1} = 2000\, um/orden \\ c_{A_2} = 500\, um/orden \\ c_{u_1} = 50\, um/up \\ c_{u_2} = 20\, um/up \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} c_{h_1} = 5\, um/(up \times ut) \\ c_{h_2} = 2\, um/(up \times ut) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} i_s = 0.1\, ut^{-1} \\ T^{\infty} = 20\, días = 1\, ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 8. Resolución

Ejemplo 8 · Caso multi-producto sujeto a restricción lineal (Stock) · Resolución:

Modelo: $$\min \dot{C}(\vec{Q}) = \sum_{j\in J} c_{A_j} D_j / Q_j + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} c_{h_j} Q_j$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j\in J} a_j Q_j \le b \Rightarrow \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{2} \le 1000$$

1. Tentativo: $$\hat{Q}_j = \sqrt{2c_{A_j} D_j / c_{h_j}} : \begin{Bmatrix} \hat{Q}_1 = \sqrt{2\cdot 2000\cdot 5000/5} = 2000 \\ \hat{Q}_2 = \sqrt{2\cdot 500\cdot 2000/2} = 1000 \end{Bmatrix}$$

2. Test : $\dfrac{\hat{Q}_1}{2} + \dfrac{\hat{Q}_2}{2} = 1500 > 1000;$ Continuar

3. Lagrange: $$\begin{Bmatrix} Q_j(\lambda) = \sqrt{2c_{A_j} D_j / (c_{h_j} + 2a_j\lambda)} : \begin{Bmatrix} Q_1(\lambda) = \sqrt{20\cdot 10^6/(5+\lambda)} \\ Q_2(\lambda) = \sqrt{2\cdot 10^6/(2+\lambda)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \dfrac{Q_1(\lambda)}{2} + \dfrac{Q_2(\lambda)}{2} = 1000 \\ \text{Resolver: } \sqrt{20\cdot 10^6/(5+\lambda)} + \sqrt{2\cdot 10^6/(2+\lambda)} = 2000 \Rightarrow \lambda^* = 4.5477 \end{Bmatrix}$$

4. Óptimos: $$\begin{Bmatrix} Q_1^* = Q_1(\lambda^*) = \sqrt{20\cdot 10^6/(5+4.5477)} = 1447.32 \Rightarrow \nu_1^* = 3.45 \ \ orden/mes; \ T_1^* = 5.79 \ días \\ Q_2^* = Q_2(\lambda^*) = \sqrt{2\cdot 10^6/(2+4.5477)} = 552.68 \Rightarrow \nu_2^* = 3.62 \ \ orden/mes; \ T_1^* = 5.53 \ días \\ \dot{C}^* = \dot{C}(\vec{Q}^*) = 302889.67 \ um/mes \qquad \hat{\dot{C}} = \dot{C}(\hat{\vec{Q}}) = 302000.00 \ um/mes \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 9. Limitación valor inmovilizado medio · Presentación

Ejemplo 9 · Caso multi-producto sujeto a restricción lineal (Valor inmovilizado) · Enunciado:

Un almacén aprovisiona 2 piezas de estampación, E1 y E2, con demandas mensuales iguales a 5000 y 2000 unidades, respectivamente. El coste de pedir un lote de piezas es 2000 um para E1 y 500 um para E2; el coste de adquisición de una pieza es 50 um para E1 y 20 um para E2; la tasa de posesión de stock es el 10% mensual para los dos tipos de pieza. Determine los lotes óptimos de aprovisionamiento teniendo en cuenta que el valor del inmovilizado medio está limitado a un máximo de 30000 um.

Nota: Considere un mes con 20 días laborales, tanto en demanda como en producción.

$$\begin{Bmatrix} D_1 = 5000\,up/ut \\ D_2 = 2000\,up/ut \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} c_{A_1} = 2000\,um/orden \\ c_{A_2} = 500\,um/orden \\ c_{u_1} = 50\,um/up \\ c_{u_2} = 20\,um/up \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{h_1} = 5\,um/(up \times ut) \\ c_{h_2} = 2\,um/(up \times ut) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} i_s = 0.1\ ut^{-1} \\ T^{\infty} = 20\,días = 1\,ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 9. Resolución

Ejemplo 9 · Caso multi-producto sujeto a restricción lineal (Valor inmovilizado medio) · Resolución:

Modelo: $\min \dot{C}(\vec{Q}) = \sum_{j\in J} c_{A_j} D_j / Q_j + \sum_{j\in J} c_{u_j} D_j + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} c_{h_j} Q_j$

s.a.: $\sum_{j\in J} a_j Q_j \le b \Rightarrow \frac{c_{u_1} Q_1}{2} + \frac{c_{u_2} Q_2}{2} \le 30000\ um$

1. Tentativo: $\hat{Q}_j = \sqrt{2 c_{A_j} D_j / c_{h_j}} : \left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}_1 = \sqrt{2\cdot 2000 \cdot 5000/5} = 2000 \\ \hat{Q}_2 = \sqrt{2\cdot 500\cdot 2000/2} \quad = 1000 \end{array} \right\}$

2. Test : $\frac{c_{u_1}\hat{Q}_1}{2} + \frac{c_{u_2}\hat{Q}_2}{2} = \frac{50\times 2000}{2} + \frac{20\times 1000}{2} = 60000 > 30000;\ \text{Continuar}$

3. Lagrange: $\left\{ \begin{array}{l} Q_j(\lambda) = \sqrt{2 c_{A_j} D_j/(c_{h_j} + 2 a_j \lambda)} : \left\{ \begin{array}{l} Q_1(\lambda) = \sqrt{20\cdot 10^6/(5+50\lambda)} \\ Q_2(\lambda) = \sqrt{2\cdot 10^6/(2+20\lambda)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{c_{u_1} Q_1(\lambda)}{2} + \frac{c_{u_2} Q_2(\lambda)}{2} = 30000 \\ \text{Resolver: } 50\sqrt{20\cdot 10^6/(5+50\lambda)} + 20\sqrt{2\cdot 10^6/(2+20\lambda)} = 60000 \Rightarrow \lambda^* = 0.3 \end{array} \right\}$

4. Óptimos: $\left\{ \begin{array}{l} Q_1^* = Q_1(\lambda^*) = \sqrt{20\cdot 10^6/(5+15)} = 1000 \Rightarrow \nu_1^* = 5\ \ orden/mes;\ T_1^* = 4\ días \\ Q_2^* = Q_2(\lambda^*) = \sqrt{2\cdot 10^6/(2+6)} \ = \ 500 \Rightarrow \nu_2^* = 4\ \ orden/mes;\ T_1^* = 5\ días \\ \dot{C}^* = \dot{C}(\vec{Q}^*) = 305000.00\ um/mes \qquad \hat{\dot{C}} = \dot{C}(\hat{\vec{Q}}) = 302000.00\ um/mes \end{array} \right\}$

El problema DLS: Dynamic Lot Sizing (1)

Descripción:

Grupo de problemas de stocks que considera un tipo de artículo con una demanda variable en el tiempo. Se establece un horizonte finito y a cada periodo se asigna una demanda concreta. No se admiten roturas y se consideran dos tipos de costes: fabricación de lote (lanzamiento), y posesión de stock. El objetivo es determinar cuándo fabricar y el tamaño de los lotes para satisfacer la demanda total de la forma más eficaz.

Enfoques:

- Programación lineal entera mixta.
- Heurística de *Silver-Meal*.
- Algoritmo de *Wagner-Whitin*.
- Camino extremo en grafo polietápico.
- Programación dinámica

El problema DLS: Dynamic Lot Sizing (2)

Resolución · DLS: Heurística Silver-Meal

Nomenclatura:

T^{∞}, d_t	Horizonte dividido en periodos t $(t=1,..,T^{\infty})$ · Demanda en el periodo t $(t=1,..,T^{\infty})$: $D=\Sigma_{t=1}^{T^{\infty}} d_t$
Q_t, I_t	Lote de fabricación en el periodo t $(t=1,..,T^{\infty})$ · Posición de stock en el periodo t $(t=1,..,T^{\infty})$
c_A, c_h	Coste de lanzamiento y coste de posesión referido a un periodo
$c_{t,n}$	Coste por periodo para cubrir la demanda del intervalo $[t, t+n-1]$ con emisión de lote en t

Costes por periodo:

$$c_{1,1}=c_A \qquad c_{1,2}=\frac{1}{2}(c_A+c_h d_2) \qquad c_{1,3}=\frac{1}{3}(c_A+c_h d_2+2c_h d_3) \quad .. \quad c_{1,n}=\frac{1}{n}(c_A+c_h d_2+..+(n-1)c_h d_n)$$

$$c_{t,1}=c_A \qquad c_{t,2}=\frac{1}{2}(c_A+c_h d_{t+1}) \qquad c_{t,3}=\frac{1}{3}(c_A+c_h d_{t+1}+2c_h d_{t+2}) \quad .. \quad c_{t,n}=\frac{1}{n}(c_A+c_h d_{t+1}+..+(n-1)c_h d_{t+n-1})$$

Procedimiento:

0. Inicio: Hacer $t=1,\ n=1,\ c_{t,0}=\infty,\ Q_t=0\ \forall t$

1. Si $t+n-1 \le T^{\infty}$, Determinar: $c_{t,n}=\dfrac{1}{n}\left\{c_A+\sum_{k=0}^{n-1} k\cdot c_h d_{t+k}\right\}$ · Si_no, Finalizar

2. Si $c_{t,n} < c_{t,n-1}$, Hacer: $\left\{\begin{matrix} Q_t \leftarrow Q_t + d_{t+n-1} \\ n \leftarrow n+1 \end{matrix}\right\}$ Ir a paso 1

3. Si $c_{t,n} \ge c_{t,n-1}$, Nuevo lote: Hacer: $\left\{\begin{matrix} t \leftarrow t+n-1 \\ n = 1 \end{matrix}\right\}$ Ir a paso 1

Ejemplo 10. Presentación

Ejemplo 10 · Dynamic Lot Sizing · Enunciado:

Se tiene un plan de demanda (heterogénea) de un artículo, con horizonte de 10 semanas. En la Tabla 1 se recogen los valores de dicho plan. El coste unitario de posesión de stock es de 1 unidad monetaria por semana, mientras que el coste de fabricar un lote es de 30 um por cada lanzamiento a línea. Determinar el plan de producción de menor coste con órdenes de tamaño de lote sin limitaciones y sin rotura de stock.

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-1. Horizonte 10 semanas.

$$D = 60\, up/ut \quad c_A = 30\, um/orden \qquad c_h = 10\, um/(up \times ut) \Leftrightarrow \begin{cases} c_h = 1\, um/(up \times semana) \\ T^{\infty} = 10\, semanas = 1\ ut \end{cases}$$

Ejemplo 10. Resolución (1)

Ejemplo 9 · Dynamic Lot Sizing · Resolución:

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-l. Horizonte 10 semanas.

$D = 60\, up/ut \quad c_A = 30\, um/orden \quad c_h = 1\, um/(up \times semana)$

$t = 1$: Primer lote

$$c_{1,1} = 30;\ c_{1,2} = \frac{1}{2}(30+6) = 18;\ c_{1,3} = \frac{1}{3}(30+6+2\times 9) = 18 \Rightarrow \begin{Bmatrix} t \leftarrow 1+3-1 = 3 \\ Q_1 = 5+6 = 11 \end{Bmatrix}$$

$t = 3$: Segundo lote

$$c_{3,1} = 30,\ c_{3,2} = \frac{1}{2}(30+7) = 18.5,\ c_{3,3} = \frac{1}{3}(30+7+2\times 3) = 14.\widehat{3},\ c_{3,4} = \frac{1}{4}(30+7+2\times 3+3\times 10) = 18.25 \Rightarrow \begin{Bmatrix} t \leftarrow 6 \\ Q_3 = 19 \end{Bmatrix}$$

$t = 6$: Tercer lote

$$c_{6,1} = 30,\ c_{6,2} = \frac{1}{2}(30+6) = 18,\ c_{6,3} = \frac{1}{3}(30+6+2\times 4) = 14.\widehat{6},\ c_{6,4} = \frac{1}{4}(30+6+2\times 4+3\times 8) = 17 \Rightarrow \begin{Bmatrix} t \leftarrow 9 \\ Q_6 = 20 \end{Bmatrix}$$

$t = 9$: Cuarto lote

$$c_{9,1} = 30,\ c_{9,2} = \frac{1}{2}(30+2) = 16 \Rightarrow \begin{Bmatrix} t \leftarrow 11 \\ Q_9 = 10 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 10. Resolución (2)

Ejemplo 9 · Dynamic Lot Sizing · Resolución:

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{ \begin{array}{l} Q_t = d_t (t = 1,..,10) \\ I_t = 0 \ (t = 1,..,10) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A v = 30 \times 10 = 300 \, um/ut$

2. Regla de Silver-Meal: $\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = 11, \, Q_3 = 19, \, Q_3 = 20, \, Q_9 = 10 \\ c_{1,2} = 18, \, c_{3,3} = 14.\widehat{3}, \, c_{6,3} = 14.\widehat{6}, \, c_{9,2} = 16 \end{array} \right\}$

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t	11		19			20			10	
I_t	6	0	10	3	0	10	4	0	2	0
$\dot{C}_t$	36	0	40	3	0	40	4	0	32	0

$$\dot{C} = \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 36 + 40 + 3 + 40 + 4 + 32 = 155 \, um/ut$$

$$\dot{C} = 2c_{1,2} + 3c_{3,3} + 3c_{6,3} + 2c_{9,2} = 2 \times 18 + 3 \times 14.\widehat{3} + 3 \times 14.\widehat{6} + 2 \times 16 = 155 \, um/ut$$

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Al lado del Edén

Pero cuando llegó la 852 noche · Ella dijo:

"Cargados de esta manera llegaron, ante una gran roca que había al pie del montículo, y se pararon. El jefe, que era el que iba a la cabeza, dejando un instante en el suelo su pesada alforja, se encaró con la roca, y con voz retumbante, dirigiéndose a alguien o algo que permanecía invisible a todas las miradas, exclamó: "¡Sésamo, ábrete! Al momento la roca se entreabrió, y entonces el jefe se apartó un poco para dejar pasar a sus hombres, y cuando hubieron entrado todos, volvió a cargar su alforja sobre sus espaldas, entrando el último, y exclamando con voz autoritaria que no admitía réplica: "¡Sésamo, ciérrate!" (…)

LAS MIL Y UNA NOCHES (C.IX) – *Noche 852*