UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Dirección de Operaciones. Stocks I

DIRECCIÓN DE OPERACIONES 240EO024 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización (240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista · Rocío Alfaro

OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2017/09 240EO024 (20170405) - http://futur.upc.edu/OPE - www.prothius.com -
Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

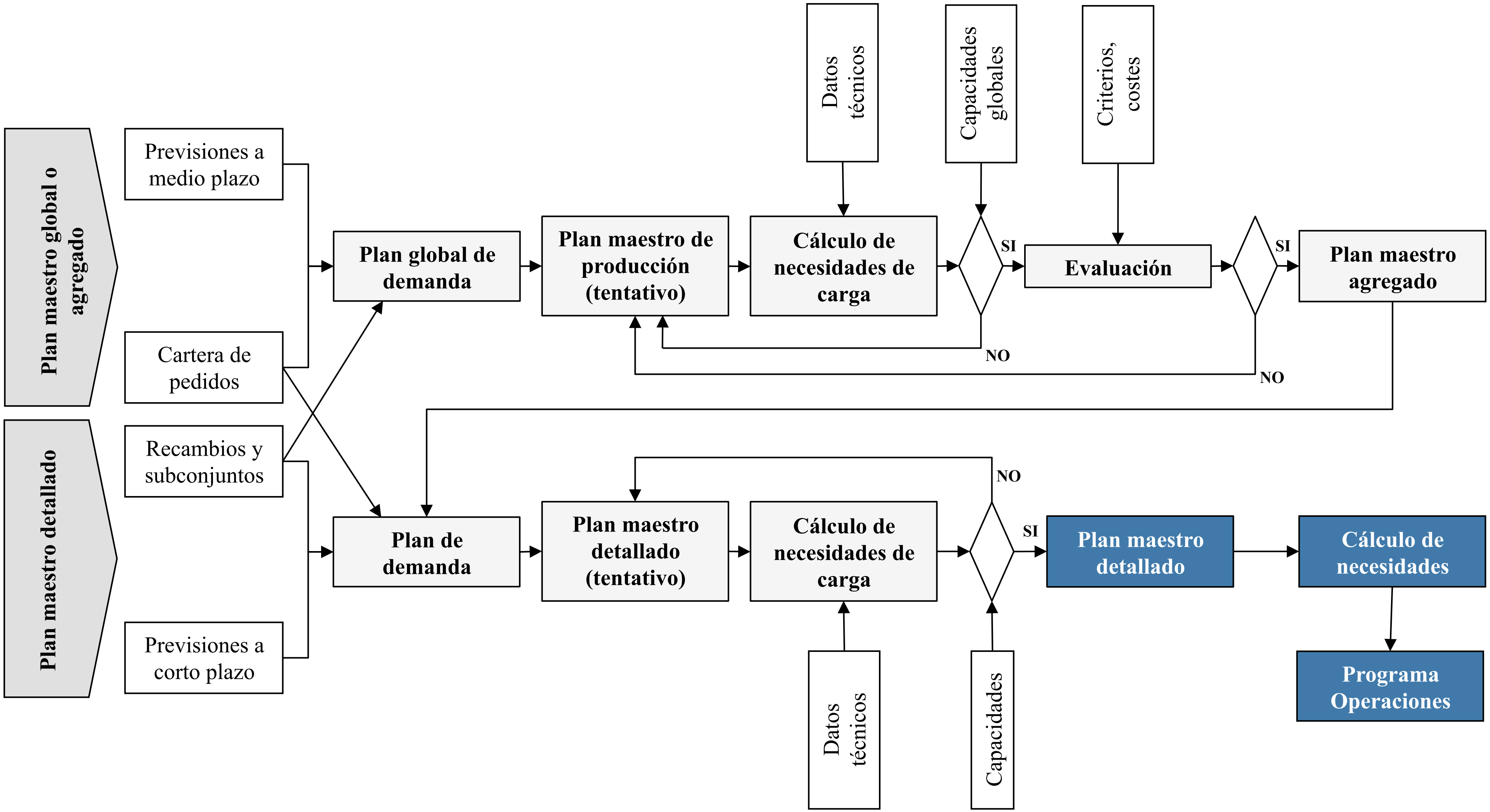
Contenido

Plan. Concepto y tipología

Plan.- Camino que se traza desde un estado inicial hasta un estado final para alcanzar un objetivo productivo.

Nombre	Motivo	Horizonte	Frecuencia	Intervalo	Rigidez	Nivel
Estratégico-Producto	Definir binomio producto-mercado	10 años	2 a 3 años	1 año	4 a 5 años	Modelo gran opción
Estratégico-Proceso	Nuevas plantas Nuevas filiales	5 a 7 años	1 a 2 años	trimestral (para 1 año)	2 a 3 años	Grandes líneas
Operativo-Táctico	Coordinar inversiones	3 a 5 años	anual	Trimestral (para 1 año)	1 año	Modelo global
Maestro global	Asignar recursos críticos	12 meses	mensual	1 mes	2 meses	Familias de producto
Maestro detallado	Tasas de producción. Aprovisionamiento	16 semanas	semanal	semana	3 semanas	Productos o Mezclas
Cálculo necesidades	Órdenes fabricación y aprovisionamiento	12 semanas	semanal	semana	2 semanas	Orden
Programa operaciones	Situar operaciones en tiempo y espacio	5 días	diaria	día	1 día	Operación

Planificación. Gestión de Stocks



Gestión de Stocks. Contexto

Características de un motor

1.- 747 piezas y 330 referencias en 6 versiones del motor diesel
2.- Nº de operaciones de Montaje: 378 (incluida la prueba rápida).
3.- Nº de operarios, para un turno de 301 motores: 79

Características de la fabricación

1.- Montaje: 9 tipos de motores de 3 familias: 4x4 (p1 a p3); furgonetas (p4, p5); camiones MT (p6 a p9).
2.- Nº de operaciones: 140. Atributos: temporales, espaciales y de riesgo
3.- Demanda diaria: 30 motores de cada tipo (instancia #1 Nissan-BCN), 2 turnos de 6h 45’ (8h): c=180 s.

Stocks. Concepto y tipología

Stock · Concepto: Reserva material con valor económico sin uso inmediato.

NOMBRE	CAUSA	FUNCIÓN	HORIZONTE	TIPO PLAN
Stock de ciclo	Tiempos de preparación muy superiores a tiempos de proceso	Reducir frecuencia de lanzamientos	semana · mes	Programa operaciones
Stock de seguridad	Incertidumbre ante la variación de la demanda	Evitar diferir la demanda y roturas	12 semanas	Cálculo de necesidades
Stock estacional	Desajuste temporal entre producción y demanda	Atender a puntas de demanda estacional	12 meses	Maestro detallado
Stock de tránsito	Desajuste espacial entre los puntos de producción y de consumo	Garantizar suministro continuo	infinito	Plan en Flujo continuo

NOMBRE SEGÚN NATURALEZA (I)	NOMBRE SEGÚN NATURALEZA (II)
1. Materias primas (v.g. petróleo, madera, bronce)	5. Productos acabados (v.g. coche, ropa, perfume)
2. Componentes (v.g. caja de cambios, carburador, asientos)	6. Subproductos (v.g. nata, alquitrán)
3. Obra en curso (v.g. status en 7ª estación de la línea)	7. Recambios (v.g. prensas, probetas)
4. Productos semielaborados (v.g. vacuna, carrocería, motor)	8. Envases (v.g. pinturas, bebidas, lámparas)

Stocks. Costes asociados

Tipos de costes:

Coste de Adquisición del lote:
$$\left\{\begin{array}{l} \text{– Coste de Lanzamiento o emisión de orden : } c_A\,(um/orden) \\ \text{– Coste unitario de adquisición (fabricación o compra): } c_u\,(um/up) \end{array}\right\}$$

Coste de Posesión de stock:
$$\left.\left\{\begin{array}{l} \text{– Mantenimiento de generación y existencias} \\ \text{– Movimiento de artículos} \\ \text{– Seguridad} \\ \text{– Información y control} \\ \text{– Cargas financieras} \end{array}\right\} : c_h\,(um/(up \times ut))\right.$$

Insatisfacción de la demanda:
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{– Demanda diferida: Coste de diferir} & : c_b\,(um/(up \times ut)) \\ \text{– Demanda perdida: Coste de rotura} & : c_r\,(um/up) \end{array}\right\}$$

Objetivo:
$$\left\{\begin{array}{l} \text{– Minimizar el coste de gestión por unidad de tiempo} \\ \text{– } \min \dot{C}(Q) = \dot{C}_A(Q) + \dot{C}_u(Q) + \dot{C}_h(Q) + \dot{C}_b(Q) + \dot{C}_r(Q)\ \ (um/ut) \end{array}\right\}$$

Políticas de gestión de stocks (1)

Nomenclatura básica:

Gestión por Aprovisionamiento periódico · Política (T,S):

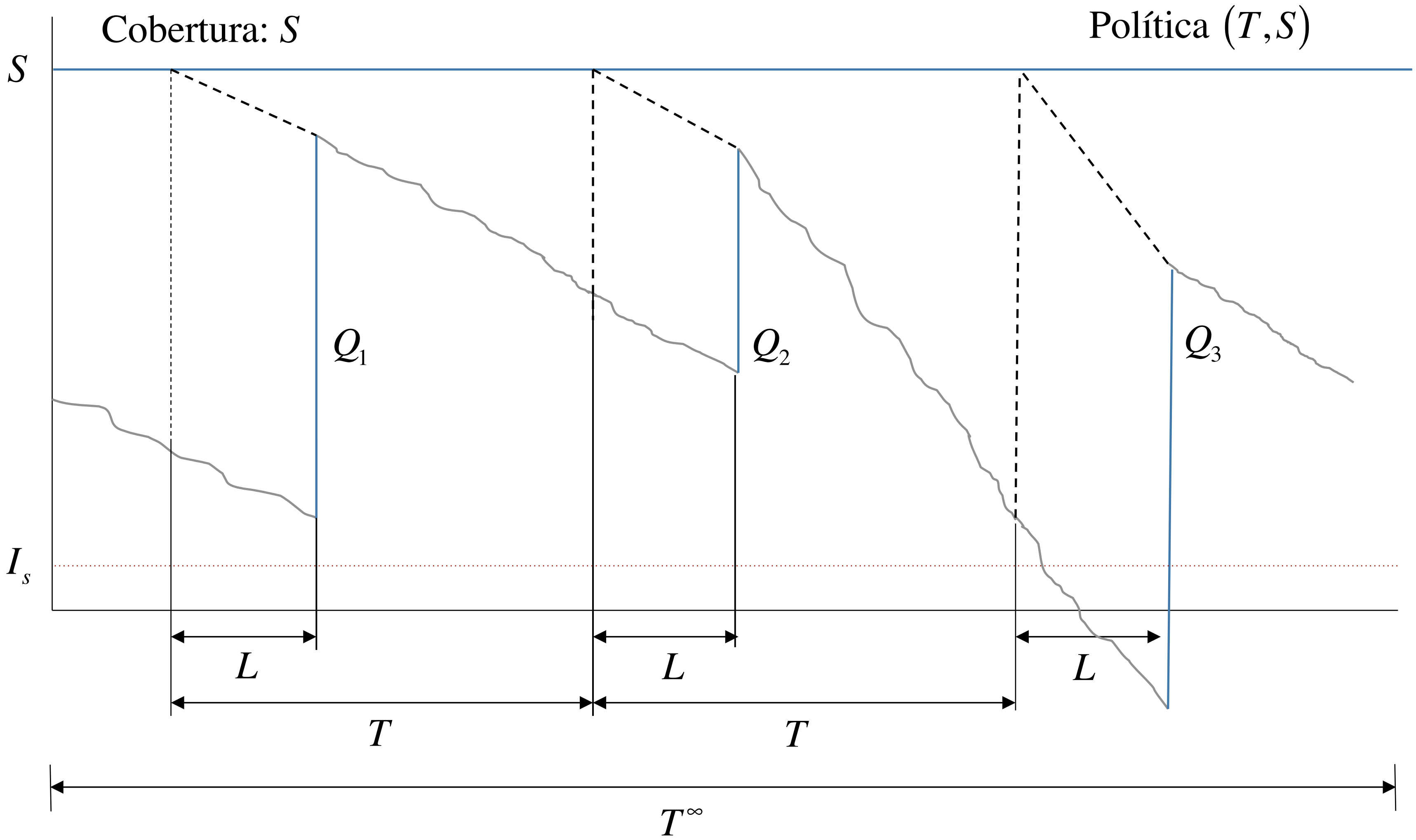
T^{∞}	Horizonte de planificación de stocks (se fija $T^{\infty}=1$, v.g.- año, mes, día)
T	Periodo de revisión constante a lo largo de T^{∞}
L	Plazo de obtención o entrega · Tiempo entre los instantes de emisión y recepción de cualquier orden
S	Cobertura
I_s	Stock de seguridad
Q_k	Tamaño de lote de la $k-$ésima orden a lo largo de T^{∞}

Gestión por Punto de pedido · Política (R,nQ):

T^{∞}	Horizonte de planificación de stocks (se fija $T^{\infty}=1$, v.g.- año, mes, día)
Q	Tamaño de lote constante · Cuantía de reposición constante para toda orden
L	Plazo de obtención o entrega · Tiempo entre los instantes de emisión y recepción de cualquier orden
R	Punto de pedido
I_s	Stock de seguridad
T_k	Tiempo entre los instantes de emisión de la orden $(k-1)$ y la orden (k) durante T^{∞}

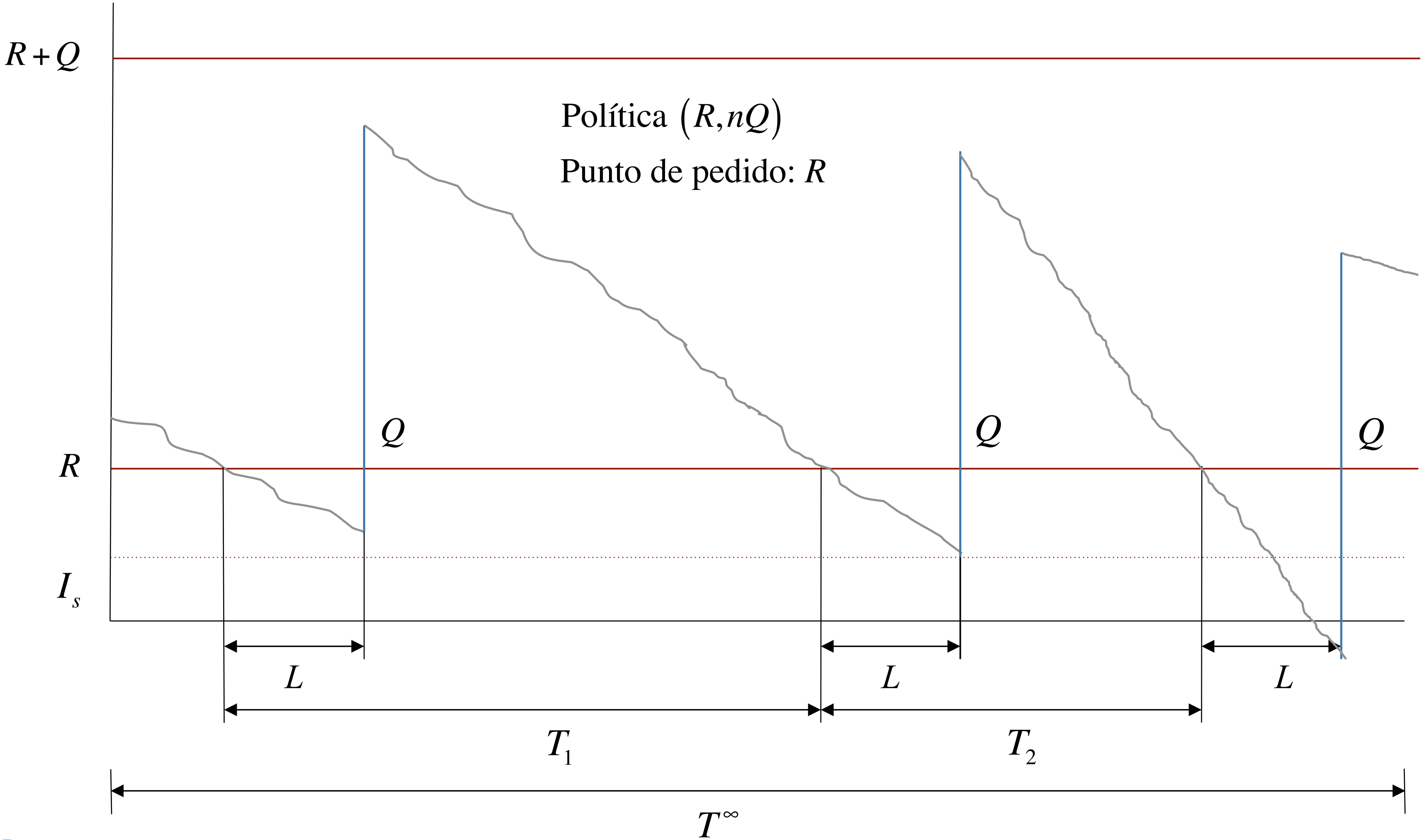
Políticas de gestión de stocks (2)

Gestión por Aprovisionamiento periódico:



Políticas de gestión de stocks (3)

Gestión por Punto de pedido:



Modelo EOQ (1)

Concepto: Determinar el tamaño del lote de fabricación o de aprovisionamiento con menor coste de gestión

Modelo básico · Harris-Wilson · Hipótesis:

1. Se considera un horizonte de planificación de stocks T^{∞} (Por comodidad, se fija $T^{\infty} = 1$ · v.g.: año, mes, semana, día).
2. Se tiene un solo tipo de producto.
3. La demanda del producto durante T^{∞} es constante y homogénea en el tiempo.
4. La entrada del producto en el sistema, en forma de lote con cantidad fija, es instantánea.
5. La fabricación o adquisición de un lote tiene un coste fijo, llamado coste de lanzamiento, que es independiente del tamaño del lote.
6. La fabricación o compra de una unidad de producto tiene un coste constante llamado coste unitario de adquisición (producción o compra).
7. La conservación o almacenamiento de una unidad de producto durante T^{∞} tiene un coste constante, llamado coste de posesión, que depende del coste unitario de adquisición y de la tasa de posesión.
8. Inicialmente, no se acepta rotura de stock (i.e.- la demanda no es mayor que las existencias).
9. El coste de gestión de stocks, durante T^{∞}, es la suma de tres tipos de costes: (1) lanzamiento, (2) adquisición y (3) posesión.

Modelo EOQ (2)

Modelo básico · Nomenclatura:

Parámetros:

T^{∞}	Horizonte de planificación de stocks (se fija $T^{\infty}=1ut$ (unidad de tiempo), v.g.- año, mes, día)
L	Plazo de obtención o entrega (tiempo entre los instantes de emisión y recepción de cualquier orden)
D,P	Tasa de demanda y Tasa de producción · Demanda y Producción del artículo durante $T^{\infty}=1ut$: up/ut
c_A,c_u	Coste de lanzamiento o emisión de orden: $um/orden$ · Coste unitario de producción o adquisición: um/up
c_h,c_b	Coste unitario de posesión de stock: $um/(up\times ut)$ · Coste unitario por diferir la demanda: $um/(up\times ut)$
i_S	Tasa de posesión de stock · Ratio entre los costes unitarios de posesión y de adquisición: $i_S=c_h/c_u\,(ut^{-1})$

Variables:

Q,Q^*	Tamaño de lote (Q) de una orden de reposición · Tamaño óptimo (Q^*) del lote: $up/orden$
ν,ν^*	Frecuencia de reposición (número de órdenes durante T^{∞}) · Frecuencia óptima de reposición
T,T^*	Tiempo de ciclo (tiempo entre dos órdenes consecutivas) · Ciclo óptimo
$\bar{I}$	Nivel medio de stock
$\dot{C}(Q)$	Coste de gestión de stocks durante T^{∞} en función de Q : $\dot{C}(Q)=\dot{C}_A(Q)+\dot{C}_u(Q)+\dot{C}_h(Q)$
$\dot{C}^*$	Coste óptimo de gestión de stocks durante T^{∞}: $\dot{C}^*=\dot{C}(Q)$

Modelo EOQ (3)

Modelo básico · Formulación y resolución:

Función objetivo:

$$\min \dot{C}(Q) = \dot{C}_A(Q) + \dot{C}_u(Q) + \dot{C}_h(Q) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q$$

Resolución:

$$\frac{\partial \dot{C}(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -c_A \frac{D}{Q^2} + \frac{1}{2} c_h = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2 c_A D}{c_h}}$$

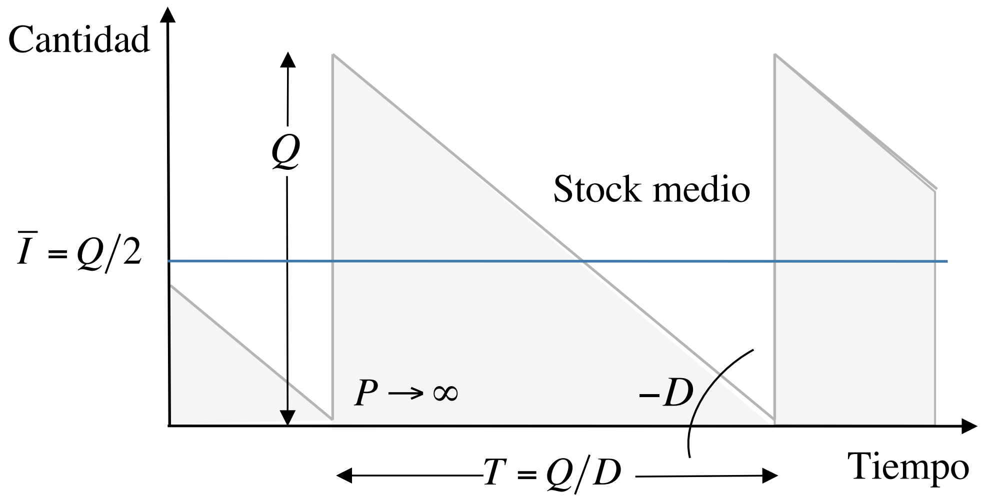
Resultado:

1. $$Q^* = \sqrt{\frac{2 c_A D}{c_h}}$$

2. $$\nu^* = \frac{D}{Q^*} = D \sqrt{\frac{c_h}{2 c_A D}} \Rightarrow \nu^* = \sqrt{\frac{c_h D}{2 c_A}}$$

3. $$T^* = \frac{1}{\nu^*} \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 c_A}{c_h D}}$$

4. $$\dot{C}^* = \dot{C}(Q^*) = c_A \frac{D}{Q^*} + c_u D + \frac{1}{2} c_h Q^* \Rightarrow$$
$$C^* = c_u D + \sqrt{2 c_A c_h D}$$



Teorema: Si $Q = Q^*$ entonces $\dot{C}_A(Q) = \dot{C}_h(Q)$

Demostración:

$$\dot{C}_A(Q^*) = c_A \frac{D}{Q^*} = c_A \nu^* = c_A \sqrt{\frac{c_h D}{2 c_A}} = \sqrt{\frac{c_A c_h D}{2}}$$

$$\dot{C}_h(Q^*) = c_h \frac{1}{2} Q^* = \frac{c_h}{2} \sqrt{\frac{2 c_A D}{c_h}} = \sqrt{\frac{c_A c_h D}{2}}$$

Ejemplo 1. Presentación

Ejemplo 1 · EOQ básico · Enunciado:

Se tiene un plan de demanda de un artículo, con horizonte de 10 semanas. En la Tabla 1 se recogen los valores de dicho plan. El coste unitario de posesión de stock se valora en 1 unidad monetaria por semana, mientras que el coste de fabricar un lote, independientemente de su tamaño, se valora en 30 um por cada lanzamiento a línea. Determinar el plan de producción de menor coste con órdenes de idéntico tamaño de lote y sin rotura de stock.

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-l. Horizonte 10 semanas.

$$D = 60\,up/ut \qquad c_A = 30\,um/orden \qquad c_h = 10\,um/(up \times ut) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_h = 1\,um/(up \times semana) \\ T^{\infty} = 10\,semanas = 1\,ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 1. Resolución

Ejemplo 1 · EOQ básico · Resolución Lotes estáticos:

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{\begin{array}{l} Q_t = d_t (t=1,..,10) \\ I_t = 0 \ (t=1,..,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A v = 30 \times 10 = 300 \, um/ut$

2. Regla de Harris-Wilson: $\left\{\begin{array}{l} Q^* = \sqrt{\dfrac{2c_A D}{C_h}} = \sqrt{\dfrac{2\times 30 \times 60}{10}} = 18.97 \\ v^* = D/Q^* = 60/18.97; \ T^* = 1/v^* = 18.97/60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q^* \approx 20 \\ v^* \approx 3 \\ T^* \approx 1/3 \approx 3 \ semanas \end{array}\right\}$

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t	20			20			20			
I_t	15	9	0	13	10	0	14	10	2	0
$\dot{C}_t$	45	9	0	43	10	0	44	10	2	0

Demanda discreta: $\dot{C} = \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 163 \, um/ut$

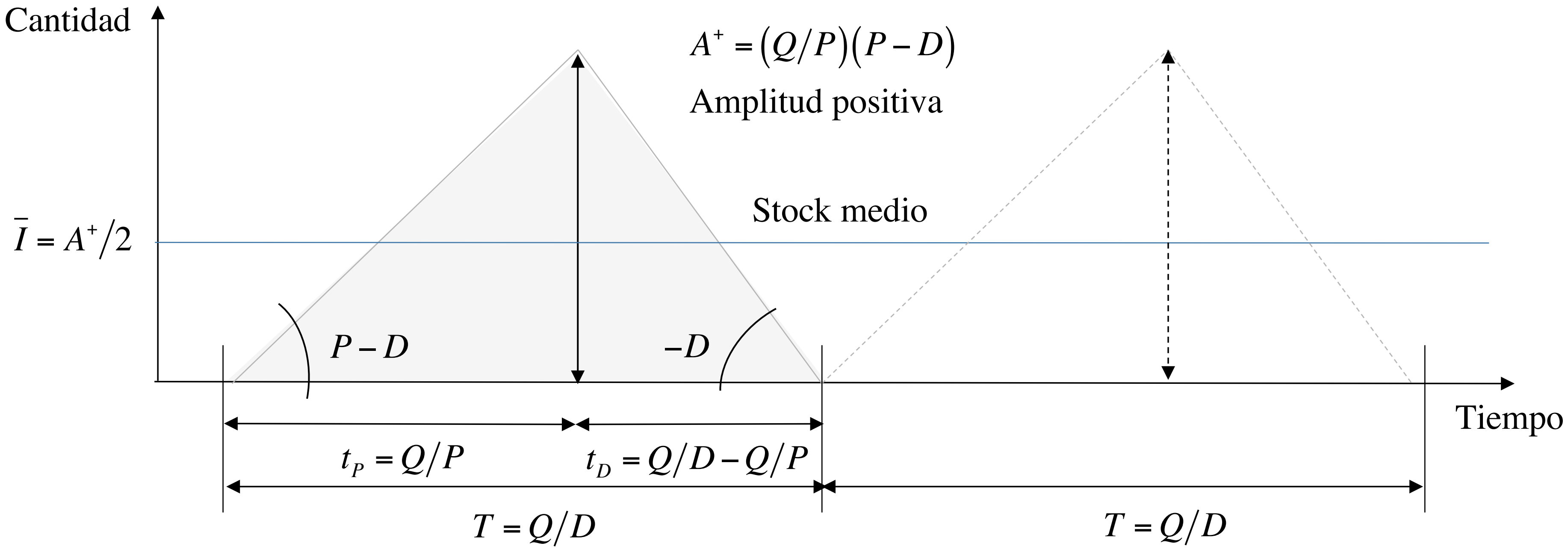
Demanda continua: $\dot{C}^* = c_u D + c_h Q^* = 0 + 10 \times 18.97 = 189.7 \, um/ut$

Modelo EOQ con Tasa de producción finita (1)

Hipótesis adicionales:

1. La producción del artículo durante T^{∞} es constante y homogénea en el tiempo.
2. La entrada del producto en el sistema, en forma de lote con cantidad fija, depende de la tasa de producción del artículo.
3. La tasa de producción P es mayor que la tasa de demanda D.

Esquema:



Modelo EOQ con Tasa de producción finita (2)

Modelo · Formulación y resolución:

Stock medio:
$$\overline{I} = \frac{A^+}{2} = \frac{1}{2} Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

Función objetivo:
$$\min \dot{C}(Q) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

Resolución:
$$\frac{\partial \dot{C}(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -c_A \frac{D}{Q^2} + \frac{1}{2} c_h \left(1 - \frac{D}{P}\right) = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2 c_A D}{c_h \left(1 - D/P\right)}}$$

Resultado:

1. $Q^* = \sqrt{\dfrac{2 c_A D}{c_h \left(1 - D/P\right)}}$
2. $\nu^* = \dfrac{D}{Q^*} = D \sqrt{\dfrac{c_h \left(1 - D/P\right)}{2 c_A D}} \Rightarrow \nu^* = \sqrt{\dfrac{c_h \left(1 - D/P\right) D}{2 c_A}}$
3. $T^* = \dfrac{1}{\nu^*} \Rightarrow T^* = \sqrt{\dfrac{2 c_A}{c_h \left(1 - D/P\right) D}}$
4. $\dot{C}^* = \dot{C}(Q^*) = c_A \dfrac{D}{Q^*} + c_u D + \dfrac{1}{2} c_h Q^* \left(1 - D/P\right) \Rightarrow C^* = c_u D + \sqrt{2 c_A c_h \left(1 - D/P\right) D}$

Ejemplo 2. Presentación

Ejemplo 2 · EOQ con Tasa de producción finita · Enunciado:

Se tiene un plan de demanda de un artículo, con horizonte de 10 semanas. En la Tabla 1 se recogen los valores de dicho plan. El coste unitario de posesión de stock se valora en 1 unidad monetaria por semana, mientras que el coste de fabricar un lote, independientemente de su tamaño, se valora en 30 um por cada lanzamiento a línea. La línea tiene una capacidad de producción de 10 unidades a la semana. Determinar el plan de producción de menor coste con órdenes de idéntico tamaño de lote y sin rotura de stock.

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-l. Horizonte 10 semanas.

$$\begin{Bmatrix} D = 60\, up/ut \\ P = 100\, up/ut \end{Bmatrix} \qquad c_A = 30\, um/orden \qquad c_h = 10\, um/(up \times ut) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_h = 1\, um/(up \times semana) \\ T^{\infty} = 10\, semanas = 1\, ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 2. Resolución

Ejemplo 2 · EOQ con Tasa de producción finita · Resolución Lotes estáticos:

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{\begin{array}{l} Q_t = d_t\,(t=1,..,10) \\ I_t = 0\ (t=1,..,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A \nu = 30 \times 10 = 300\, um/ut$

2. Regla de Harris-Wilson: $\left\{\begin{array}{l} Q^* = \sqrt{\dfrac{2c_A D}{C_h(1-D/P)}} = \sqrt{\dfrac{2\times 30\times 60}{10\times 0.4}} = 30 \\ \nu^* = D/Q^* = 60/30 = 2;\ T^* = 1/\nu^* = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q^* = 30 \\ \nu^* = 2 \\ T^* = 1/2 = 5 \text{ semanas} \end{array}\right\}$

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t	30					30				
I_t	25	19	10	3	0	20	14	10	2	0
$\dot{C}_t$	55	19	10	3	0	50	14	10	2	0

Demanda discreta: $\dot{C} = \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 163\, um/ut$

Demanda continua: $\dot{C}^* = c_u D + c_h Q^* (1 - D/P) = 0 + 10 \times 30 \times 0.4 = 120\ um/ut$

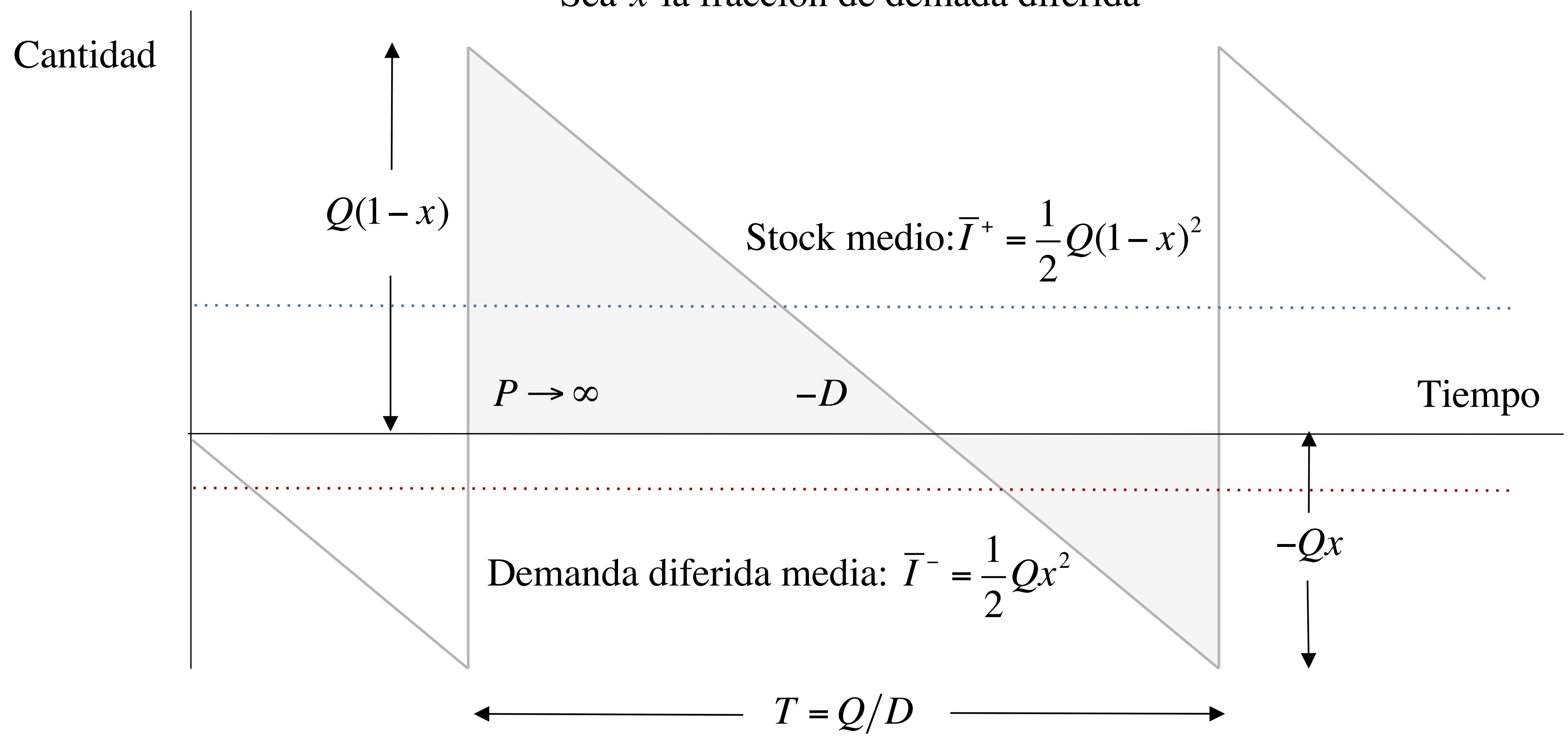
Modelo EOQ con demanda diferida (1)

Hipótesis adicional:

1. Se puede diferir la demanda con un coste adicional $c_b \; um/(up \times ut)$
2. El coste de gestión de stocks, durante T^∞, es la suma de cuatro tipos de costes: (1) lanzamiento, (2) adquisición, (3) posesión y (4) de diferir.

Esquema:

Sea x la fracción de demada diferida



Modelo EOQ con demanda diferida (2)

Modelo · Formulación y resolución:

Función objetivo: $$\min \dot{C}(Q,x) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q(1-x)^2 + c_b \frac{1}{2} Q x^2$$

Resolución: $$\frac{\partial \dot{C}(Q,x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -c_h Q(1-x) + c_b Q x = 0 \Rightarrow x^* = \frac{c_h}{c_h + c_b}$$

Resultado:

0. $$\dot{C}^*(Q) = \dot{C}(Q,x^*) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q \left(\frac{c_b}{c_h + c_b} \right)^2 + c_b \frac{1}{2} Q \left(\frac{c_h}{c_h + c_b} \right)^2$$

1. $$Q^* = \sqrt{\frac{2 c_A D (c_h + c_b)^2}{c_h c_b^2 + c_b c_h^2}} = \sqrt{\frac{2 c_A D (c_h + c_b)^2}{c_h c_b (c_h + c_b)}} = \sqrt{\frac{2 c_A D (c_h + c_b)}{c_h c_b}}$$

2. $$v^* = \frac{D}{Q^*} = D \sqrt{\frac{c_h c_b}{2 c_A D (c_h + c_b)}} \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{c_h c_b D}{2 c_A (c_h + c_b)}}$$

3. $$T^* = \frac{1}{v^*} \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 c_A (c_h + c_b)}{c_h c_b D}}$$

4. $$\dot{C}^* = \dot{C}(Q^*, x^*) = c_u D + \sqrt{\frac{2 c_A c_h c_b D}{c_h + c_b}}$$

Ejemplo 3. Presentación

Ejemplo 3 · EOQ con Demanda diferida · Enunciado:

Se tiene un plan de demanda de un artículo, con horizonte de 10 semanas. En la Tabla 1 se recogen los valores de dicho plan. El coste unitario de posesión de stock se valora en 1 unidad monetaria por semana, el coste unitario de diferir la demanda es de 3 unidades monetarias por semana y el coste de fabricar un lote se valora en 30 um por cada lanzamiento a línea. Determinar el plan de producción de menor coste con órdenes de idéntico tamaño de lote.

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-l. Horizonte 10 semanas.

$$D = 60\, up/ut \qquad c_A = 30\, um/orden \qquad \begin{Bmatrix} c_h = 10\, um/(up \times ut) \\ c_b = 30\, um/(up \times ut) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_h = 1\, um/(up \times semana) \\ c_b = 3\, um/(up \times semana) \\ T^{\infty} = 10\, semanas = 1\, ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 3. Resolución

Ejemplo 3 · EOQ con Demanda diferida · Resolución Lotes estáticos

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{\begin{array}{l} Q_t = d_t (t=1,..,10) \\ I_t = 0 \; (t=1,..,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A \nu = 30 \times 10 = 300 \, um/ut$

2. Regla de Harris-Wilson: $\left\{\begin{array}{l} Q^* = \sqrt{\dfrac{2c_A D(c_h + c_b)}{c_h c_b}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 30 \times 60 \times 40}{10 \times 30}} = 21.91 \\ \nu^* = D/Q^* = 60/21.91; \; x^* = \dfrac{c_h}{c_h + c_b} = \dfrac{10}{10+30} = 0.25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q^* \approx 20 \\ \nu^* \approx 3; T^* \approx 1/3 \\ x^* = 0.25 \end{array}\right\}$

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t	20				20			20		
I_t	15	9	0	-7	10	0	-6	10	2	0
$\dot{C}_t$	45	9	0	21	40	0	18	40	2	0

Demanda discreta: $\dot{C} = \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 175 \, um/ut$

Demanda continua: $\dot{C}^* = c_u D + \sqrt{2c_A c_h c_b D / (c_h + c_b)} = 0 + 164.32 = 164.32 \, um/ut$

Modelo EOQ generalizado (1)

Concepto: Determinar el tamaño del lote de fabricación o de aprovisionamiento con menor coste de gestión

Modelo · EOQ generalizado · Hipótesis:

1. Se considera un horizonte de planificación de stocks T^∞ (Se fija $T^\infty = 1$ · v.g.: año, mes, semana, día).
2. Se tiene un solo tipo de producto.
3. La demanda del producto durante T^∞ es constante y homogénea en el tiempo.
4. La entrada del producto en el sistema, en forma de lote, es progresiva con una tasa de producción P homogénea en el tiempo mayor que la tasa de demanda D.
5. La fabricación o adquisición de un lote tiene un coste fijo, llamado coste de lanzamiento, que es independiente del tamaño del lote.
6. La fabricación o compra de una unidad de producto tiene un coste constante llamado coste unitario de adquisición (producción o compra).
7. La preservación de una unidad de producto durante T^∞ tiene un coste constante, llamado coste de posesión, que depende del coste unitario de adquisición y de la tasa de posesión.
8. Se puede diferir la demanda durante T^∞ con un coste adicional llamado coste de diferir.
9. El coste de gestión de stocks, durante T^∞, es la suma de cuatro tipos de costes: (1) lanzamiento, (2) adquisición, (3) posesión y (4) de diferir.

Modelo EOQ generalizado (2)

Modelo · EOQ generalizado · Nomenclatura:

Parámetros:

T^{∞} Horizonte de planificación de stocks (se fija $T^{\infty} = 1ut$ (unidad de tiempo), v.g.- año, mes, día)

L Plazo de obtención o entrega (tiempo entre los instantes de emisión y recepción de cualquier orden)

D, P Tasa de demanda y Tasa de producción · Demanda y Producción del artículo durante $T^{\infty} = 1ut$: up/ut

c_A, c_u Coste de lanzamiento o emisión de orden: $um/orden$ · Coste unitario de producción o adquisición: um/up

c_h, c_b Coste unitario de posesión de stock: $um/(up \times ut)$ · Coste unitario por diferir la demanda: $um/(up \times ut)$

i_S Tasa de posesión de stock · Ratio entre los costes unitarios de posesión y de adquisición: $i_S = c_h / c_u \, (ut^{-1})$

Variables:

Q, Q^* Tamaño de lote (Q) de una orden de reposición · Tamaño óptimo (Q^*) del lote: $up/orden$

ν, ν^* Frecuencia de reposición (número de órdenes durante T^{∞}) · Frecuencia óptima de reposición

T, T^* Tiempo de ciclo (tiempo entre dos órdenes consecutivas) · Ciclo óptimo

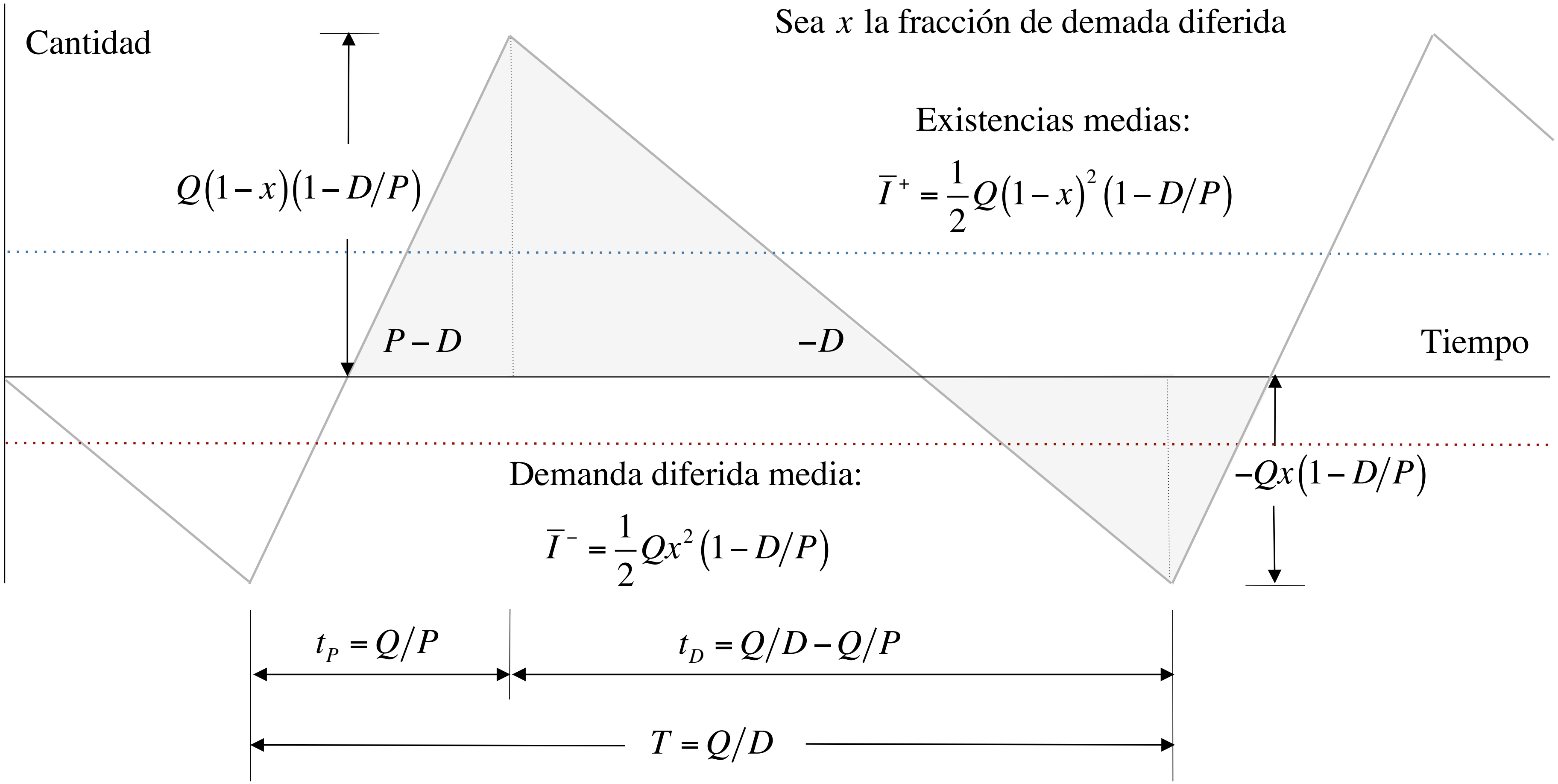
$\bar{I}, x$ Nivel medio de stock (Existencias ($\bar{I}^+$) y demanda diferida ($\bar{I}^-$) medias) · Fracción de demanda diferida

$\dot{C}(Q)$ Coste de gestión de stocks durante T^{∞} en función de Q : $\dot{C}(Q) = \dot{C}_A(Q) + \dot{C}_u(Q) + \dot{C}_h(Q) + \dot{C}_b(Q)$

$\dot{C}^*$ Coste óptimo de gestión de stocks durante T^{∞}: $\dot{C}^* = \dot{C}(Q^*)$

Modelo EOQ generalizado (3)

Modelo · EOQ generalizado · Esquema:



J. Bautista, R. Alfaro

Modelo EOQ generalizado (4)

Modelo · EOQ generalizado · Formulación y resolución:

Función objetivo: $$\min \dot{C}(Q,x) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q(1-x)^2 (1-D/P) + c_b \frac{1}{2} Q x^2 (1-D/P)$$

Resolución: $$\frac{\partial \dot{C}(Q,x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -c_h Q(1-x)(1-D/P) + c_b Q x(1-D/P) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{c_h}{c_h + c_b}$$

Resultado:

0. $$\dot{C}^*(Q) = \dot{C}(Q,x^*) = c_A \frac{D}{Q} + c_u D + c_h \frac{1}{2} Q \left(\frac{c_b}{c_h + c_b} \right)^2 \left(1 - \frac{D}{P} \right) + c_b \frac{1}{2} Q \left(\frac{c_h}{c_h + c_b} \right)^2 \left(1 - \frac{D}{P} \right)$$

1. $$Q^* = \sqrt{\frac{2c_A D\left(c_h + c_b\right)^2}{(c_h c_b^2 + c_b c_h^2)(1-D/P)}} = \sqrt{\frac{2c_A D\left(c_h + c_b\right)^2}{c_h c_b\left(c_h + c_b\right)(1-D/P)}} = \sqrt{\frac{2c_A D\left(c_h + c_b\right)}{c_h c_b(1-D/P)}}$$

2. $$v^* = \frac{D}{Q^*} = D\sqrt{\frac{c_h c_b(1-D/P)}{2c_A D\left(c_h + c_b\right)}} \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{c_h c_b D(1-D/P)}{2c_A\left(c_h + c_b\right)}}$$

3. $$T^* = \frac{1}{v^*} \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2c_A\left(c_h + c_b\right)}{c_h c_b D(1-D/P)}}$$

4. $$\dot{C}^* = \dot{C}(Q^*, x^*) = c_u D + \sqrt{\frac{2c_A c_h c_b D(1-D/P)}{c_h + c_b}}$$

Ejemplo 4. Presentación

Ejemplo 4 · EOQ generalizado · Enunciado:

Se tiene un plan de demanda de un artículo, con horizonte de 10 semanas. En la Tabla 1 se recogen los valores de dicho plan. La línea tiene una capacidad de producción de 10 unidades a la semana. El coste unitario de posesión de stock es 1 unidad monetaria por semana, el coste unitario de diferir la demanda es de 3 unidades monetarias por semana y el coste de lanzar la orden de un lote es 30 um. Determinar el plan de producción de menor coste con órdenes de idéntico tamaño de lote.

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2

Tabla 1. Plan de demanda del artículo-l. Horizonte 10 semanas.

$$\begin{Bmatrix} D = 60\,up/ut \\ P = 100\,up/ut \end{Bmatrix} \qquad c_A = 30\,um/orden \qquad \begin{Bmatrix} c_h = 10\,um/(up \times ut) \\ c_b = 30\,um/(up \times ut) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_h = 1\,um/(up \times semana) \\ c_b = 3\,um/(up \times semana) \\ T^{\infty} = 10\,semanas = 1\,ut \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 4. Resolución

Ejemplo 4 · EOQ generalizado · Resolución Lotes estáticos:

1. Lot for Lot - Just in Time: $\left\{\begin{array}{l} Q_t = d_t (t = 1,..,10) \\ I_t = 0 \; (t = 1,..,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{C} = c_A \nu = 30 \times 10 = 300\, um/ut$

2. Regla de Harris-Wilson: $\left\{\begin{array}{l} Q^* = \sqrt{\dfrac{2c_A D(c_h + c_b)}{c_h c_b (1 - D/P)}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 30 \times 60 \times 40}{10 \times 30 \times 0.4}} = 34.64 \\ \nu^* = D/Q^* = 60/34.64;\; x^* = \dfrac{c_h}{c_h + c_b} = \dfrac{10}{10 + 30} = 0.25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q^* \approx 30 \\ \nu^* \approx 2;\, T^* \approx 1/2 \\ x^* = 0.25 \end{array}\right\}$

Periodo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d_t	5	6	9	7	3	10	6	4	8	2
Q_t		30					30			
I_t	-5	19	10	3	0	-10	14	10	2	0
$\dot{C}_t$	15	49	10	3	0	30	44	10	2	0

Demanda discreta: $\dot{C} = \sum_{\forall t} \dot{C}_t = 163\, um/ut$

Demanda continua: $\dot{C}^* = c_u D + \sqrt{2c_A c_h c_b D(1 - D/P)/(c_h + c_b)} = 0 + 103.92 = 103.92\; um/ut$

Modelo EOQ con c_u dependiente del lote Q (1)

Hipótesis adicional:

1. El coste unitario de producción o adquisición es función del tamaño de lote de la orden de emisión

Resolución · Procedimiento general:

Función objetivo: $$\min \dot{C}(Q) = c_A \frac{D}{Q} + c_u(Q) D + c_h \frac{1}{2} Q$$

Resolución: $$\frac{\partial \dot{C}(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -c_A \frac{D}{Q^2} + \frac{\partial c_u(Q)}{\partial Q} D + \frac{1}{2} c_h = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2 c_A D}{c_h + 2D\left[\partial c_u(Q)/\partial Q\right]}}$$

Procedimiento: 0. Sea $Q^{[k]} = \sqrt{\dfrac{2 c_A D}{c_h + 2D\left[\Delta c_u(Q^{[k-1]})/\Delta Q\right]}}$

1. Iniciar: Hacer $Q^{[0]} = \sqrt{2 c_A D / c_h}$, $k = 1$, fijar valores $\Delta Q, \varepsilon$
2. Determinar $\alpha^{[k]} = \left[c_u(Q^{[k-1]} + \Delta Q) - c_u(Q^{[k-1]})\right] / \Delta Q$
3. Determinar $Q^{[k]} = \sqrt{2 c_A D / (c_h + 2 D \alpha^{[k]})}$
4. Test finalización: Si $\left\{ \begin{array}{l} \left|Q^{[k]} - Q^{[k-1]}\right| \le \varepsilon, \text{ Finalizar} \\ \left|Q^{[k]} - Q^{[k-1]}\right| > \varepsilon, \text{ Hacer: } k \leftarrow k+1 \text{ e Ir a Paso 2} \end{array} \right\}$

Modelo EOQ con c_u dependiente del lote Q (2)

Caso · Coste unitario de producción o adquisición sujeto a tramos de tamaño de lote:

Situación: Se dispone de un conjunto K de intervalos de valores de Q $(k = 1,2,..,\omega)$, además $c_h = i_S c_u$:

Tramo 1: Si $Q \in (0, q_1] \Rightarrow c_u = c_1$ Tramo k: Si $Q \in (q_{k-1}, q_k] \Rightarrow c_u = c_k$

Tramo 2: Si $Q \in (q_1, q_2] \Rightarrow c_u = c_2$ Tramo ω: Si $Q \in (q_{\omega-1}, \infty] \Leftrightarrow Q > q_{\omega-1} \Rightarrow c_u = c_\omega$

Función objetivo: $\min \dot{C}(Q(k)) = c_A \dfrac{D}{Q(k)} + c_u(k)D + \dfrac{1}{2} i_S c_u(k) Q(k)$ · S.a: $Q(k) \in (q_{k-1}, q_k]$ $\forall k \in K$

Resolución: $\dfrac{\partial \dot{C}(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -c_A \dfrac{D}{Q^2} + \dfrac{1}{2} i_S c_u(k) = 0 \Rightarrow \hat{Q}(k) = \sqrt{2 c_A D / (i_S c_u(k))}$ (óptimo tentativo)

Procedimiento:

1. Determinar lotes óptimos tentativos: $\hat{Q}(k) = \sqrt{2 c_A D / (i_S c_u(k))}$ $\forall k \in K$
2. Determinar lotes óptimos $\forall k \in K$: Si $\left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}(k) \in (q_{k-1}, q_k] \Rightarrow Q^*(k) = \hat{Q}(k) \\ \hat{Q}(k) < q_{k-1} \Rightarrow Q^*(k) = q_{k-1} \\ \hat{Q}(k) \geq q_k \Rightarrow Q^*(k) = q_k \end{array} \right\}$
3. Determinar costes óptimos $\forall k \in K$: $C^*(k) = \dot{C}(Q^*(k))$
4. Determinar tramo óptimo k^* : $k^* = \underset{k \in K}{\operatorname{argmin}}\, C^*(k) \Rightarrow (Q^* = Q^*(k^*)) \wedge (C^* = C^*(k^*))$

Ejemplo 5. Presentación

Ejemplo 5 · EOQ con c_u dependiente de Q · Enunciado:

Un fabricante de motocicletas eléctricas compra un componente para montaje. El tamaño de lote es fijo y la demanda anual del componente es uniforme y asciende a 10^5 unidades. El coste de emitir una orden es 10^4 um y la tasa de posesión anual de stock es 0.2. Un proveedor ofrece al fabricante el plan de descuentos que recoge la tabla 2. Determine el tamaño de lote y el número de órdenes de compra emitidas en un año

CANTIDAD (MILES)	DESDE	HASTA	PRECIO (c_u) *um/up*
Tramo 1	0	10	100
Tramo 2	10	25	99
Tramo 3	25	50	98
Tramo 4	50	Sin límite	97

Tabla 2. Plan de descuentos (Cantidades - miles de unidades - y precios unitarios por tramos)

Ejemplo 5. Resolución (1)

1. Determinar lotes óptimos tentativos: $\hat{Q}(k) = \sqrt{2c_A D / i_S c_u(k)} \qquad \forall k \in K$

Tramo 1	$\hat{Q}(1) = \sqrt{2\times 10^4 \times 10^5 / (0.2 \times 100)} = 10000 \in (0, 10000]$
Tramo 2	$\hat{Q}(2) = \sqrt{2\times 10^4 \times 10^5 / (0.2 \times 99)} = 10050 \in (10000, 25000]$
Tramo 3	$\hat{Q}(3) = \sqrt{2\times 10^4 \times 10^5 / (0.2 \times 98)} = 10102 \notin (25000, 50000]$
Tramo 4	$\hat{Q}(4) = \sqrt{2\times 10^4 \times 10^5 / (0.2 \times 97)} = 10153 \notin (50000, \infty]$

2. Determinar lotes óptimos $\forall k \in K$: Si $\left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}(k) \in (q_{k-1}, q_k] \Rightarrow Q^*(k) = \hat{Q}(k) \\ \hat{Q}(k) < q_{k-1} \Rightarrow Q^*(k) = q_{k-1};\;\; \hat{Q}(k) \geq q_k \Rightarrow Q^*(k) = q_k \end{array} \right\}$

Tramo 1	$Q^*(1) = \hat{Q}(1) = 10000$
Tramo 2	$Q^*(2) = \hat{Q}(2) = 10050$
Tramo 3	$Q^*(3) = q_2 = 25000$
Tramo 4	$Q^*(4) = q_3 = 50000$

Ejemplo 5. Resolución (2)

3. Determinar costes óptimos $\forall k \in K: C^*(k) = \dot{C}(Q^*(k)) = c_A \dfrac{D}{Q^*(k)} + c_u(k)D + \dfrac{1}{2} i_S c_u(k) Q^*(k)$

Tramo 1 $\quad C^*(1) = 10^4 \dfrac{10^5}{10000} + 100 \times 10^5 + \dfrac{1}{2} \times 0.2 \times 100 \times 10000 = 10.20 \times 10^6$

Tramo 2 $\quad C^*(2) = 10^4 \dfrac{10^5}{10050} + 99 \times 10^5 + \dfrac{1}{2} \times 0.2 \times 99 \times 10050 \quad = 10.10 \times 10^6$

Tramo 3 $\quad C^*(3) = 10^4 \dfrac{10^5}{25000} + 98 \times 10^5 + \dfrac{1}{2} \times 0.2 \times 98 \times 25000 \quad = 10.09 \times 10^6$

Tramo 4 $\quad C^*(4) = 10^4 \dfrac{10^5}{50000} + 97 \times 10^5 + \dfrac{1}{2} \times 0.2 \times 97 \times 50000 \quad = 10.21 \times 10^6$

4. Determinar tramo óptimo $k^* : k^* = \underset{k \in K}{\operatorname{argmin}}\ C^*(k) \Rightarrow (Q^* = Q^*(k^*)) \wedge (C^* = C^*(k^*))$

Tramo 3 $\quad C^* = C^*(3) = 10.09 \times 10^6\, um,\ Q^* = Q^*(3) = 25000\ up,\ \nu^* = 4\ \text{órdenes} / \text{año}$

Gestión de Stocks. Lote de mínimo coste versus MRP-I

Comparativa EOQ vs. MRP-I

EOQ (Lote de mínimo coste)	MRP-I
Tratamiento de artículos aisladamente	Tratamiento de artículos dependientemente
Demanda independiente de todos los artículos	Demanda independiente de productos finales
Demanda como variable continua	Demanda como variable discreta
Emisión de orden en punto de pedido	Emisión de orden dependiente de necesidad-plazo
Demanda histórica como base	Plan maestro de producción como base
Previsión para todos los artículos	Previsión para productos finales
Basado en cantidad-período	Basado en cantidad-lote-plazo
Stock de seguridad con demanda inestable	Stock de seguridad con demanda o plazos inestables

Al oeste del Edén

"He aquí vienen siete años de gran abundancia en toda la tierra de Egipto. Y tras ellos seguirán siete años de hambre; y toda la abundancia será olvidada en la tierra de Egipto, y el hambre consumirá la tierra. Y aquella abundancia no se echará de ver, a causa del hambre siguiente la cual será gravísima. Y el suceder el sueño a Faraón dos veces, significa que la cosa es firme de parte de Dios, y que Dios se apresura a hacerla. Por tanto, provéase ahora Faraón de un varón prudente y sabio, y póngalo sobre la tierra de Egipto.

Haga esto Faraón, y ponga gobernadores sobre el país, y quinte la tierra de Egipto en los siete años de la abundancia. Y junten toda la provisión de estos buenos años que vienen, y recojan el trigo bajo la mano de Faraón para mantenimiento de las ciudades; y guárdenlo. Y esté aquella provisión en depósito para el país, para los siete años de hambre que habrá en la tierra de Egipto; y el país no perecerá de hambre.

El asunto pareció bien a Faraón y a sus siervos, y dijo Faraón a sus siervos: ¿Acaso hallaremos a otro hombre como éste, en quien esté el espíritu de Dios?

Y dijo Faraón a José: Pues que Dios te ha hecho saber todo esto, no hay entendido ni sabio como tú.

Tú estarás sobre mi casa, y por tu palabra se gobernará todo mi pueblo; solamente en el trono seré yo mayor que tú.

Dijo además Faraón a José: He aquí yo te he puesto sobre toda la tierra de Egipto."

LA BIBLIA - *Génesis* 41, 29-41