UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Dirección de Operaciones. Programación

DIRECCIÓN DE OPERACIONES 240EO024 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización (240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista Valhondo

OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2017/11 240EO024 (20170501) - http://futur.upc.edu/OPE - www.prothius.com - Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Contenido

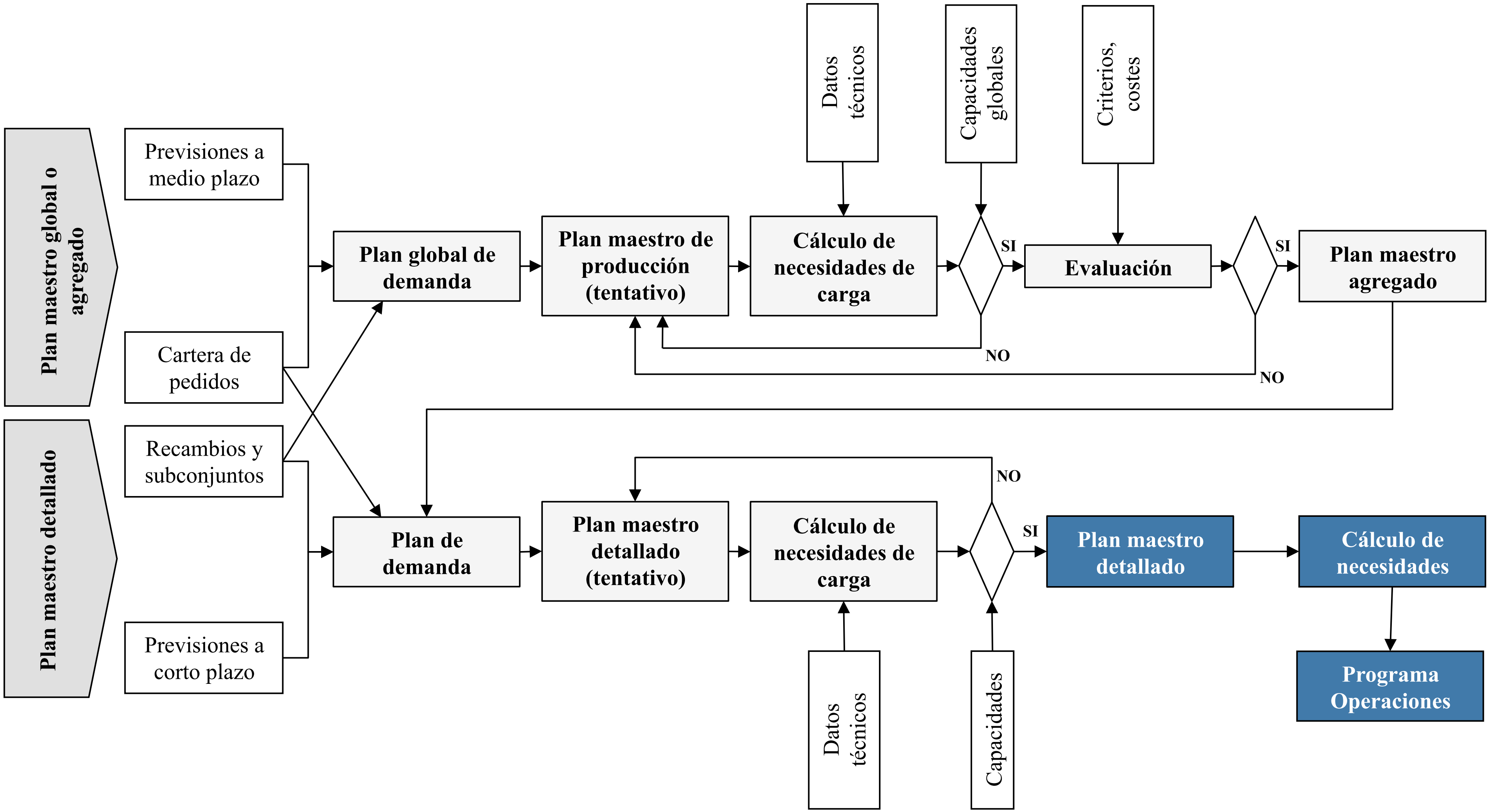
- Plan. Concepto y Tipología
- Planificación. Esquema y contexto
- Programación de operaciones. Concepto y funciones
- Programación. Modelos y técnicas
- Modelo Secuencias 1-m · Mínimo retraso máximo. Ejemplo 1
- Modelo Secuencias 1-m · Mínima tardanza ponderada. Ejemplo 2
- Modelo Secuencias 1-m · Mínimo tiempo de compleción medio. Ejemplo 2
- Modelo Secuencias 1-m · Mínimo tiempo de compleción ponderado. Ejemplo 2
- Ejemplos 1 y 2. Resumen
- Modelo Flujo regular 2-m · Mínimo tiempo de compleción máximo
- Ejemplo 3. Presentación y resolución algoritmo de Johnson
- Modelo Flujo regular *m*-m · Mínimo tiempo de compleción máximo. Ejemplos 4 y 5
- Modelo Flujo regular *m*-m · Cotas globales y dinámicas *C*max
- Ejemplo 6. Presentación y resolución Johnson MF y Branch and bound
- Modelo Fm/block/*C*max · Mínimo instante de liberación máximo. Cotas. Ejemplo 7

Plan. Concepto y tipología

Plan.- Camino que se traza desde un estado inicial hasta un estado final para alcanzar un objetivo productivo.

NOMBRE	MOTIVO	HORIZONTE	FRECUENCIA	INTERVALO	RIGIDEZ	NIVEL
Estratégico-Producto	Definir binomio producto-mercado	10 años	2 a 3 años	1 año	4 a 5 años	Modelo gran opción
Estratégico-Proceso	Nuevas plantas Nuevas filiales	5 a 7 años	1 a 2 años	trimestral (para 1 año)	2 a 3 años	Grandes líneas
Operativo-Táctico	Coordinar inversiones	3 a 5 años	anual	Trimestral (para 1 año)	1 año	Modelo global
Maestro global	Asignar recursos críticos	12 meses	mensual	1 mes	2 meses	Familias de producto
Maestro detallado	Tasas de producción. Aprovisionamiento	16 semanas	semanal	semana	3 semanas	Productos o Mezclas
Cálculo necesidades	Órdenes fabricación y aprovisionamiento	12 semanas	semanal	semana	2 semanas	Orden
Programa operaciones	Situar operaciones en tiempo y espacio	5 días	diaria	día	1 día	Operación

Planificación. Esquema



Planificación. Contexto

Características de un motor

1.- 747 piezas y 330 referencias en 6 versiones del motor diesel
2.- Nº de operaciones de Montaje: 378 (incluida la prueba rápida).
3.- Nº de operarios, para un turno de 301 motores: 79

Características de la fabricación

1.- Montaje: 9 tipos de motores de 3 familias: 4x4 (p1 a p3); furgonetas (p4, p5); camiones MT (p6 a p9).
2.- Nº de operaciones: 140. Atributos: temporales, espaciales y de riesgo
3.- Demanda diaria: 30 motores de cada tipo (instancia #1 Nissan-BCN), 2 turnos de 6h 45’ (8h): c=180 s.

Programación de operaciones. Concepto y funciones

Programación · Concepto: Acción para asignar recursos y establecer un calendario de operaciones.

NOMBRE	FUNCIÓN	CRITERIOS	HORIZONTE
Carga	Asignar las operaciones a los recursos productivos (máquina, taller, almacén, transporte, personas)	Equilibrar cargas · Asignación por eficiencia · Asignación por costes	semana
Secuenciación	Definir el orden de ejecución de las operaciones en cada recurso productivo siguiendo un criterio	Maximizar regularidad · Minimizar retrasos · Minimizar tiempo inerte · Minimizar tiempo de compleción	Día
Temporización	Establecer las fechas de inicio y finalización de cada operación en cada recurso productivo	Fechas mínimas · Fechas máximas · Fechas comprometidas	Día

OPERACIONES PRODUCTIVAS SOBRE NATURALEZAS (I)	OPERACIONES PRODUCTIVAS SOBRE NATURALEZAS (II)
1. Materias primas: Extracción, transporte	5. Productos acabados: Distribución, venta, atención
2. Componentes: Montaje, suministro a línea	6. Subproductos: Almacenamiento, venta
3. Obra en curso: Control de proceso, calidad del producto	7. Recambios: Limpieza, mantenimiento
4. Productos semielaborados: Almacenamiento	8. Envases: Compra, almacenamiento, suministro

Programación. Modelos y técnicas (1)

Programación de operaciones · Tipología de los modelos y técnicas de resolución:

Tipos de Modelos :
- Programación de proyectos
- Job Shop Scheduling
- Sistemas flexibles de ensamblado
- Lotificación y secuenciación
- Programación de horarios
- Programación de RRHH
- Secuenciación JIT

Técnicas de resolución:
- Programación matemática
- Exploración arborescente: Branch & bound · Beam search
- Programación dinámica
- Metaheurísticas

Cualidades adicionales:
- Incertidumbre y robustez
- Multiobjetivo
- Restriciones múltiples
- Factor de actividad variable

Programación. Modelos y técnicas (2)

Programación de operaciones · Propiedades, componentes y tipo de soluciones:

Propiedades de un modelo:

- Factores productivos:
  - Máquinas
  - Recursos
  - Orientación a producto o a proceso
  - Distribución en planta y nivel de automatización
- Terminología:
  - Máquina (m): aquí equivale a recursos principales
  - Trabajo (n): ente que requiere recursos (*job*)

Componentes de un modelo:

- Variables de decisión: Acciones sobre el sistema
- Parámetros: Entorno del sistema
- Función objetivo: Minimizar costes o maximizar medida de eficiencia
- Restricciones: Limitaciones sobre las variables de decisión

Tipo de solución:

- Secuencia: Permutación de trabajos (*jobs*)
- Programa: calendario y asignación de recursos
- Política de programación: acciones en función del estado

Programación. Modelos y técnicas (3)

Programación de operaciones · Modelos según máquinas, restricciones y métricas:

Según máquinas:
- Modelos 1-máquina
- Modelos máquinas paralelas
- Modelos de flujo regular (*flow shop*)
- Modelos de flujo general (*job shop*)
- Modelos de flujo complejo

Según restricciones:
- Precedencias y rutas
- Disponibilidad de materias, stocks y esperas
- Selección de máquinas por prestaciones
- Limitación de recursos y limitación por horarios RRHH
- Otros: (1) Tiempos de preparación (*setup*), (2) Prioridades, (3) Para stock u orden

Según métricas:
- Rendimiento
- Tiempo de compleción total (*makespan*)
- Cumplimiento de plazos (*due date*)
- Obra en curso (*work-in-process* · WIP) y niveles de stock
- Plazo de entrega (*lead time*) y plazo de respuesta o reacción (*response time*)

Programación. Modelos y técnicas (4)

Programación de operaciones · Nomenclatura:

Parámetros:

I	Conjunto de trabajos (*jobs*): $i=1,..,n$ (emplearemos también el término *pieza*)
K	Conjunto de máquinas: $k=1,..,m$
$p_{k,i}$	Tiempo de proceso requerido por el trabajo $i\in I$ en la máquina $k\in K$
w_i	Peso (prioridad, ganancia) del trabajo $i\in I$
d_i	Fecha comprometida (*due date*) para la entrega del trabajo $i\in I$
r_i	Fecha lanzamiento del trabajo $i\in I$

Variables:

$\pi(k)$	Secuencia de trabajos en la máquina $k\in K$: $\pi(k)=(\pi_{k,1},..,\pi_{k,n})$
$\pi_{k,t}$	Trabajo que ocupa la posición $t-$ésima ($t=1,..,n$) en la secuencia $\pi(k)$ $k\in K$
$x_{k,i,t}$	Variable binaria que vale 1 si $i\in I$ ocupa la posición $t-$ésima en la secuencia $\pi(k)$ y 0 en caso contrario
$C_{k,i}$	Instante de finalización del trabajo $i\in I$ en la máquina $k\in K$
C_i	Instante de finalización del trabajo $i\in I$ en la última máquina: $C_i=\max_{k\in K}(C_{i,k})$
$C_{\max}$	Instante de finalización del último trabajo en la última máquina: $C_{\max}=\max_{i\in I}(C_i)$
$L_i,L_{\max}$	Retraso (*lateness*) del trabajo $i\in I$: $L_i=C_i-d_i$ · Retraso máximo: $L_{\max}=\max_{i\in I}(L_i)$
$T_i,T_{\max}$	Tardanza (*tardiness*) del trabajo $i\in I$: $T_i=\max\{0,C_i-d_i\}$ · Tardanza máxima: $T_{\max}=\max_{i\in I}(T_i)$

Modelo Secuencias 1-m · Mínimo retraso máximo

Modelo Secuencia 1-máquina mínimo retraso máximo · Formulación y resolución:

I, p_i, d_i	Conjunto de trabajos, tiempo de proceso y fecha de entrega comprometida del trabajo $i \in I$
$x_{i,t}$	Variable binaria que vale 1 si el trabajo $i \in I$ se lanza en $t-$ésima posición $(t=1,..,n)$
C_t, D_t	Instante de compleción y fecha comprometida del trabajo lanzado en $t-$ésima posición
$L_t, L_{\max}$	Retraso (*lateness*) del trabajo lanzado en $t-$ésima posición $(L_t = C_t - D_t)$ · Retraso máximo o retraso del trabajo que más se retrasa: $L_{\max} = \max_{1\le t\le n}(L_t)$

PM-S.1-m-1:

$$\min z = L_{\max} = \max_{1\le t\le n}\{L_t\} = \max_{1\le t\le n}\{C_t - D_t\} \qquad (0)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad \forall i = 1,..,n \qquad (2)$$

$$\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,\tau} = C_t \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{i,t} = D_t \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (4)$$

$$L_t = C_t - D_t \le L_{\max} \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (5)$$

$$x_{i,t} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1,..,n,\ \forall t = 1,..,n \qquad (6)$$

Resolución: Lanzar los trabajos en orden creciente de sus fechas comprometidas d_i $\forall i = 1,..,n$. Regla EDD

Ejemplo 1. Presentación

Ejemplo 1 · Secuencias 1 máquina · 9 pedidos en taller T-E1 · Enunciado:

El Taller T-E1 tiene pendiente la ejecución de 9 pedidos; los datos disponibles (Tabla 1) para cada uno de ellos son:

(1) las duraciones en días para completar cada pedido empleando todos los recursos del taller.

(2) las fechas comprometidas para la entrega de cada pedido.

TRABAJO	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA	15	20	22	27	30	33	35	39	42

Tabla 1. Duraciones (días) y fechas de entrega comprometidas de los 9 pedidos en T-E1.

Ejemplo 1. Resolución mínimo retraso máximo

Ejemplo 1 · Secuencia 1-máquina 9 pedidos en taller T-E1 · Resolución Regla EDD:

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	39	42

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	39	42
C_i	4	13	15	18	23	30	38	39	45
L_i=C_i - d_i	-11	-7	-7	-9	-7	-3	**3**	0	**3**

Retrasos $(L_i = C_i - d_i)$: $L_{\max} = 3$ $L_{med} = -4.\widehat{2}$ $L_{\min} = -11$

Ejemplo 1. Resolución con Regla mínimo margen

Ejemplo 1 · Secuencia 1-máquina 9 pedidos en taller T-E1 · Resolución Regla MS:

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	39	42
MARGEN (d_i-p_i)	11	11	20	24	25	26	27	38	36

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*9*	*8*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	6	1
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	42	39
C_i	4	13	15	18	23	30	38	44	45
L_i=C_i - d_i	-11	-7	-7	-9	-7	-3	**3**	**2**	**6**

Retrasos $(L_i = C_i - d_i)$: $L_{\max} = 6$ $L_{med} = -3.\widehat{6}$ $L_{\min} = -11$

Modelo Secuencias 1-m · Mínima tardanza ponderada

Modelo Secuencia 1-máquina mínima tardanza ponderada · Formulación y resolución:

p_i, d_i, w_i Tiempo de proceso, fecha de entrega comprometida y peso (coste tiempo retraso) del trabajo $i \in I$

$x_{i,t}$ Variable binaria que vale 1 si el trabajo $i \in I$ se lanza en $t-$ésima posición $(t = 1,..,n)$

$\hat{C}_t, \hat{D}_t$ Instante de compleción ponderado $(\hat{C}_t = w_t C_t)$ y fecha comprometida ponderada $(\hat{D}_t = w_t D_t)$ del trabajo lanzado en $t-$ésima posición

$T_t, \hat{T}_t$ Tardanza del trabajo en $t-$ésima posición: $T_t = \max\{0, C_t - D_t\}$ · Tardanza ponderada $\hat{T}_t = w_t T_t \ \forall t$

PM-S.1-m-2:

$$\min z = \sum_{t=1}^{n} \hat{T}_t \qquad (0)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad \forall i = 1,..,n \qquad (2)$$

$$\sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} w_i p_i x_{i,\tau} = \hat{C}_t \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i d_i x_{i,t} = \hat{D}_t \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (4)$$

$$\hat{C}_t - \hat{D}_t \le \hat{T}_t \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (5)$$

$$\hat{T}_t \ge 0 \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (6)$$

$$x_{i,t} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1,..,n, \ \forall t = 1,..,n \qquad (7)$$

Resolución: Lanzar los trabajos en orden creciente de sus fechas comprometidas $d_i \ \forall i = 1,..,n$. Regla EDD

Ejemplo 2. Presentación

Ejemplo 2 · Secuencias 1 máquina · 9 pedidos en taller T-E1 con prioridades · Enunciado:

El Taller T-E1 tiene pendiente la ejecución de 9 pedidos; los datos disponibles (Tabla 2) para cada uno de ellos son:

(1) las duraciones en días para completar cada pedido empleando todos los recursos del taller.

(2) las fechas comprometidas para la entrega de cada pedido.

(3) Los pesos de cada pedido (costes, prioridad) equivalente al coste por día de retraso.

TRABAJO	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA	15	20	22	27	30	33	35	39	42
PESO	2	2	2	2	3	1	1	1	1

Tabla 2. Duraciones (días), fechas de entrega comprometidas y prioridades de los 9 pedidos en T-E1.

Ejemplo 2. Resolución mínima tardanza ponderada

Ejemplo 2 · Secuencia 1-m 9 pedidos en taller T-E1 · Resolución Regla EDD:

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	39	42
PESO (w_i)	2	2	2	2	3	1	1	1	1

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	39	42
C_i	4	13	15	18	23	30	38	39	45
max ($0, C_i - d_i$)	0	0	0	0	0	0	**3**	0	**3**

Tardanzas $T_i = \max\{0, C_i - d_i\}$: $T_{\max} = 3$ $\quad T_{med} = 0.\widehat{6}$ $\quad T_{\min} = 0$

Modelo Secuencias 1-m · Mínimo tiempo de compleción medio

Modelo Secuencia 1-máquina mínimo tiempo de compleción medio · Formulación y resolución:

p_i, d_i, w_i Tiempo de proceso, fecha de entrega comprometida y peso (coste tiempo retraso) del trabajo $i \in I$

$x_{i,t}$ Variable binaria que vale 1 si el trabajo $i \in I$ se lanza en $t-$ésima posición $(t = 1,..,n)$

C_t Instante de compleción del trabajo lanzado en $t-$ésima posición

PM-S.1-m-3:

$$\min z = C_{med} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C_t \qquad (0)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad \forall i = 1,..,n \qquad (2)$$

$$\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,\tau} = C_t \qquad \forall t = 1,..,n \qquad (3)$$

$$x_{i,t} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1,..,n,\ \forall t = 1,..,n \qquad (4)$$

Resolución: Lanzar los trabajos en orden creciente de sus tiempos de proceso p_i $\forall i = 1,..,n$ · Regla SPT

Propiedad SPT:

- – Minimizar la obra en curso (WIP)
- – Minimizar WIP $\Rightarrow$ Minimizar promedio de plazos de entrega
- – Minimizar plazo de entrega $\mapsto$ Minimizar promedio de trabajos en el sistema
- – Minimizar el promedio y el total del tiempo de compleción

Ejemplo 2. Resolución mínimo tiempo de compleción medio

Ejemplo 2 · Secuencia 1-m 9 pedidos en taller T-E1 · Resolución Regla SPT:

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN (p_i)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
ENTREGA (d_i)	15	20	22	27	30	33	35	39	42
PESO (w_i)	2	2	2	2	3	1	1	1	1

TRABAJO (i)	*8*	*3*	*4*	*1*	*5*	*9*	*6*	*7*	*2*
DURACIÓN (p_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ENTREGA (d_i)	39	22	27	15	30	42	33	35	20
C_i	1	3	6	10	15	21	28	36	45
max $(0, C_i - d_i)$	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**25**

Tardanzas y tiempo de compleción medio: $T_{\max} = 25$ $T_{med} = 2.\widehat{8}$ $C_{med} = 18.\widehat{3}$

Modelo Secuencias 1-m · Mínimo tiempo de compleción ponderado

Modelo Secuencia 1-máquina mínimo tiempo de compleción ponderado · Formulación y resolución:

p_i, d_i, w_i Tiempo de proceso, fecha de entrega pactada y peso (coste tiempo retraso) del trabajo $i \in I$

$x_{i,t}$ Variable binaria que vale 1 si el trabajo $i \in I$ se lanza en $t-$ésima posición $(t = 1,..,n)$

$\hat{C}_t$ Instante de compleción ponderado $(\hat{C}_t = w_t C_t)$ del trabajo lanzado en $t-$ésima posición

PM-S.1-m-4: $\min z = \hat{C}_{med} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{C}_t$ (0)

s.a:

$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \quad \forall t = 1,..,n$ (1)

$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \quad \forall i = 1,..,n$ (2)

$\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} w_i p_i x_{i,\tau} = \hat{C}_t \quad \forall t = 1,..,n$ (3)

$x_{i,t} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,n, \ \forall t = 1,..,n$ (4)

Resolución: Lanzar los trabajos en orden creciente a sus índices $p_i / w_i \ \forall i = 1,..,n$ · Regla WSPT

Regla WSPT:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{– Minimizar el peso (coste) del stock de obra en curso (WIP)} \\ \text{– Minimizar WIP } \Rightarrow \text{ Minimizar promedio de plazos de entrega} \\ \text{– Minimizar plazo de entrega ponderado } \mapsto \text{ Minimizar peso de trabajos en el sistema} \\ \text{– Minimizar el promedio y el total del tiempo de compleción ponderado} \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2. Resolución mínimo tiempo de compleción ponderado

Ejemplo 2 · Secuencia 1-m 9 pedidos en taller T-E1 · Resolución regla WSPT:

TRABAJO (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
DURACIÓN p_i (w_i)	4 (2)	9 (2)	2 (2)	3 (2)	5 (3)	7 (1)	8 (1)	1 (1)	6 (1)
ENTREGA: d_i	15	20	22	27	30	33	35	39	42
WSPT: p_i/w_i	2	4.5	1	1.5	1.67	7	8	1	6

TRABAJO (i)	*8*	*3*	*4*	*5*	*1*	*2*	*9*	*6*	*7*
DURACIÓN p_i (w_i)	1 (1)	2 (2)	3 (2)	5 (3)	4 (1)	9 (1)	6 (1)	7 (1)	8 (1)
ENTREGA: d_i	39	22	27	30	15	20	42	33	35
C_i	1	3	6	11	15	24	30	37	45
max (0, $C_i - d_i$)	0	0	0	0	0	**4**	0	**4**	**10**

Tardanzas y tiempo de compleción medio: $T_{\max} = 10 \quad T_{med} = 2 \quad C_{med} = 19.\widehat{1} \quad \hat{C}_{med} = 26.\widehat{8}$

Ejemplos 1 y 2. Resumen

Ejemplos 1 y 2 · Secuencia 1-m 9 pedidos en taller T-E1 · Resumen: Criterios - Reglas

CRITERIO/REGLA (MINIMIZAR)	*EDD*	*MS*	*SPT*	*WSPT*
RETRASO MÁXIMO : MAX ($L_i=C_i-d_i$)	3	6	25	10
RETRASO MÍNIMO : MIN ($L_i=C_i-d_i$)	-11	-11	-38	-38
RETRASO MEDIO : MED ($L_i=C_i-d_i$)	-4.22	-3.66	-10.89	-10.11
TARDANZA MÁXIMA : MAX (MAX ($0, L_i$))	3	6	25	10
TARDANZA MEDIA : MED (MAX ($0, L_i$))	0.66	1.22	2.88	2
COMPLECIÓN MEDIA : C_{med}=MED (C_i)	25	25.55	18.33	19.11
COMPLECIÓN MEDIA PONDERADA : C_{med}= MED (w_iC_i)	35.66	36.22	28.77	26.88

Modelo Flujo regular 2-m · Mínimo tiempo de compleción máximo

Modelo Secuencia 2-máquinas mínimo tiempo de compleción máximo · Formulación y resolución:

$x_{i,t}$ Variable binaria que vale 1 si el trabajo $i \in I$ se lanza en $t-$ésima posición $(t = 1,..,n)$ y si no vale 0

$p_{k,i}, \rho_{k,t}$ Tiempo de proceso del trabajo $i \in I$ $(p_{k,i})$ y del $t-$ésimo trabajo $(\rho_{k,t})$ en la máquina $k \in K : K = \{1,2\}$

$C_{k,t}, C_{\max}$ Instante de compleción en la máquina $k \in K$ del $t-$ésimo trabajo lanzado (se fija $C_{k,0} = 0\ \forall k$) · Makespan: $C_{\max}$

PM-S.2-m-1:

$$\min z = C_{\max} = C_{2,n} \qquad (0)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad t = 1,..,n \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad i = 1,..,n \qquad (2)$$

$$\rho_{k,t} = \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} x_{i,t} \qquad k \in \{1,2\}; t = 1,..,n \qquad (3)$$

$$C_{1,t} = C_{1,t-1} + \rho_{1,t} \qquad t = 1,..,n \qquad (4)$$

$$C_{2,t} = \max\{C_{1,t}, C_{2,t-1}\} + \rho_{2,t} \qquad t = 1,..,n \qquad (5)$$

$$x_{i,t} \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,n; t = 1,..,n \qquad (6)$$

Resolución AJ: 0. Sea $\bar{I}$ el conjunto de trabajos no lanzados. Inicializar: $\bar{I} = I,\ t_{ini} = 1,\ t_{fin} = n$

1. Buscar máquina y trabajo sin lanzar con menor duración: $(k^*, i^*) = \underset{(k \in K) \wedge (i \in \bar{I})}{\operatorname{argmin}} \left(p_{k,i}\right)$

2. Fijar posición de i^* · Hacer: $\left\{\begin{matrix} \text{Si } k^* = 1 \Rightarrow pos(i^*) = t_{ini},\ \ t_{ini} \leftarrow t_{ini} + 1 \\ \text{Si } k^* = 2 \Rightarrow pos(i^*) = t_{fin},\ t_{fin} \leftarrow t_{fin} - 1 \end{matrix}\right\}$: i^* lanzado: $\bar{I} \leftarrow \bar{I} - \{i^*\}$

3. Test de finalización: Si $\bar{I} = \{\varnothing\}$ Fin, si no Ir a paso 1.

Ejemplo 3. Presentación

Ejemplo 3 · Secuencias 2 máquinas · 9 piezas en taller T-E2 · Enunciado:

El Taller T-E2 tiene pendiente la producción de 9 piezas. La fabricación de toda pieza requiere el tratamiento en serie por parte de dos máquinas (m1 y m2). Los tiempos de proceso en horas que necesita cada pieza en cada máquina se recogen en la Tabla 3. El primer objetivo en T-E2 es establecer una secuencia de piezas que minimice el tiempo de compleción máximo de las piezas (*makespan*).

PIEZA (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1	4	9	2	3	5	7	8	1	6
TIEMPO M2	4	2	5	8	6	1	7	3	9
TOTAL	8	11	7	11	11	8	15	4	15

Tabla 3. Tiempos de proceso (horas) en las máquinas m1 y m2 de las 9 piezas a fabricar en T-E2.

Ejemplo 3. Resolución algoritmo de Johnson

Ejemplo 3 · Secuencias 2 máquinas · 9 piezas en taller T-E2 · Resolución SPT(1)-LPT(2):

PIEZA (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1	4	9	2	3	5	7	8	1	6
TIEMPO M2	4	2	5	8	6	1	7	3	9
TOTAL	8	11	7	11	11	8	15	4	15

PIEZA (i)	*8*	*3*	*4*	*1*	*5*	*9*	*7*	*2*	*6*
TIEMPO M1	1	2	3	4	5	6	8	9	7
TIEMPO M2	3	5	8	4	6	9	7	2	1
$C_{1,i}$	1	3	6	10	15	21	29	38	45
$C_{2,i}$	4	9	17	21	27	36	43	45	**46**

Tiempos de compleción $C_{\max}$ (*makespan*) y C_{med} : $C_{\max} = 46 \quad C_{med} = 27.\widehat{5} \quad C_{med}(k=1) = 18.\widehat{6}$

Modelo Flujo regular *m*-m · Mínimo tiempo de compleción máximo

Modelo Fm/prmu/C_{max}:Secuencia m-mqn mínimo tiempo de compleción máximo · Formulación y resolución:

$C_{k,t}$ Instante de compleción en la máquina $k \in K$ del $t-$ésimo trabajo lanzado. Se fija $C_{k,0}=0 \ \forall k \in K$) ·

$C_{\max}$ Instante de finalización del último trabajo en la última máquina · Makespan: $C_{\max}$

$\hat{p}_{1,i}, \hat{p}_{2,i}$ Tiempos de proceso corregidos del trabajo $i \in I$ en las máquinas ficticias 1 y 2.

PM-S.*m*-m-1: $\min z = C_{\max} = C_{m,n}$ (0)

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad t=1,..,n \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad i=1,..,n \qquad (2)$$

$$\rho_{k,t} = \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} x_{i,t} \qquad k=1,..,m; t=1,..,n \qquad (3)$$

$$C_{1,t} = C_{1,t-1} + \rho_{1,t} \qquad t=1,..,n \qquad (4)$$

$$C_{k,t} = \max\left\{C_{k-1,t}, C_{k,t-1}\right\} + \rho_{k,t} \qquad k=2,..,m;\ t=1,..,n \qquad (5)$$

$$x_{i,t} \in \{0,1\} \qquad i=1,..,n; t=1,..,n \qquad (6)$$

Resolución H1: 1. Determinar tiempos de proceso corregidos ($\hat{p}_{1,i}$ y $\hat{p}_{2,i}$ $\forall i \in I$) para las máquinas ficticias 1 y 2:

- Maquina ficticia 1: $\hat{p}_{1,i} = \sum_{k=1}^{m-1} p_{k,i} \quad \forall i \in I$
- Máquina ficticia 2: $\hat{p}_{2,i} = \sum_{k=2}^{m} p_{k,i} \quad \forall i \in I$

2. Aplicar el Algoritmo de Jonhson (AJ) con los valores $\hat{p}_{1,i}$ y $\hat{p}_{2,i}$ $\forall i \in I$ (máquinas ficticias)

Ejemplo 4. Presentación

Ejemplo 4 · Secuencias 3 máquinas · 9 piezas en taller T-E3 · Enunciado:

El Taller T-E3 tiene pendiente la producción de 9 piezas. La fabricación de toda pieza requiere el tratamiento en serie por parte de tres máquinas (m1, m2 y m3). Los tiempos de proceso en horas que necesita cada pieza en cada máquina se recogen en la Tabla 4. El primer objetivo en T-E3 es establecer una secuencia de piezas que minimice el tiempo de compleción máximo de las piezas (*makespan*).

PIEZA (*i*)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1	4	9	2	3	5	7	8	1	6
TIEMPO M2	4	2	5	8	6	1	7	3	9
TIEMPO M3	6	1	8	7	5	3	2	9	4
TOTAL	14	12	15	18	16	11	17	13	19

Tabla 4. Tiempos de proceso (horas) en las máquinas m1, m2 y m3 de las 9 piezas a fabricar en T-E3.

Ejemplo 4. Resolución algoritmo de Johnson MF (1)

Ejemplo 4 · Secuencias 3 máquinas · 9 piezas en taller T-E3 · Resolución SPT(1)-LPT(2) MF:

PIEZA (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1	4	9	2	3	5	7	8	1	6
TIEMPO M2	4	2	5	8	6	1	7	3	9
TIEMPO M3	6	1	8	7	5	3	2	9	4
TOTAL	14	12	15	18	16	11	17	13	19

PIEZA (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1-V	8	11	7	11	11	8	15	4	15
TIEMPO M2-V	10	3	13	15	11	4	9	12	13
Ordenación	(3ª)	(9ª)	(2ª)	(4ª)	(6ª)	(8ª)	(7ª)	(1ª)	(5ª)

(1) Maquina ficticia 1: $\hat{p}_{1,i} = \sum_{k=1}^{m-1} p_{k,i} \quad \forall i \in I$ (2) Máquina ficticia 2: $\hat{p}_{2,i} = \sum_{k=2}^{m} p_{k,i} \quad \forall i \in I$

Ejemplo 4. Resolución algoritmo de Johnson MF (2)

Ejemplo 4 · Secuencias 3 máquinas · 9 piezas en taller T-E3 · Resolución SPT(1)-LPT(2) virtual:

PIEZA (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1	4	9	2	3	5	7	8	1	6
TIEMPO M2	4	2	5	8	6	1	7	3	9
TIEMPO M3	6	1	8	7	5	3	2	9	4
TIEMPO V-M1	8	11	7	11	11	8	15	4	15
TIEMPO V-M2	10	3	13	15	11	4	9	12	13

PIEZA (i)	8	3	1	4	9	5	7	6	2
TIEMPO M1	1	2	4	3	6	5	8	7	9
TIEMPO M2	3	5	4	8	9	6	7	1	2
TIEMPO M3	9	8	6	7	4	5	2	3	1
$C_{1,i}$	1	3	7	10	16	21	29	36	45
$C_{2,i}$	4	9	13	21	30	36	43	44	47
$C_{3,i}$	13	21	27	34	38	43	45	48	**49**

Tiempos de compleción $C_{\max}$ (*makespan*) y C_{med} : $C_{\max} = 49$ $\quad C_{med} = 35.\widehat{3}$ $\quad C_{med}(k=1) = 18.\widehat{6}$ $\quad C_{med}(k=2) = 27.\widehat{4}$

Ejemplo 5. Presentación

Ejemplo 5 · Secuencias 4 máquinas · 9 piezas en taller T-E4 · Enunciado:

El Taller T-E4 tiene pendiente la producción de 9 piezas. La fabricación de toda pieza requiere el tratamiento en serie por parte de cuatro máquinas (m1, m2, m3 y m4). Los tiempos de proceso en horas que necesita cada pieza en cada máquina se recogen en la Tabla 5. El primer objetivo en T-E4 es establecer una secuencia de piezas que minimice el tiempo de compleción máximo de las piezas (*makespan*).

PIEZA (*i*)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO M1	4	9	2	3	5	7	8	1	6
TIEMPO M2	4	2	5	8	6	1	7	3	9
TIEMPO M3	6	1	8	7	5	3	2	9	4
TIEMPO M4	9	3	7	1	6	8	5	2	4
TIEMPO V-M1	14	12	15	18	16	11	17	13	19
TIEMPO V-M2	19	6	20	16	17	12	14	14	17

Tabla 5. Tiempos de proceso (horas) en las máquinas m1, m2, m3 y m4 de las 9 piezas a fabricar en T-E4.

Ejemplo 5. Resolución algoritmo de Johnson MF

Ejemplo 5 · Secuencias 4 máquinas · 9 piezas en taller T-E4 · Resolución SPT(1)-LPT(2) virtual:

PIEZA (i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
TIEMPO V-M1	14	12	15	18	16	11	17	13	19
TIEMPO V-M2	19	6	20	16	17	12	14	14	17

PIEZA (i)	6	8	1	3	5	9	4	7	2
TIEMPO M1	7	1	4	2	5	6	3	8	9
TIEMPO M2	1	3	4	5	6	9	8	7	2
TIEMPO M3	3	9	6	8	5	4	7	2	1
TIEMPO M4	8	2	9	7	6	4	1	5	3
$C_{1,i}$	7	8	12	14	19	25	28	36	45
$C_{2,i}$	8	11	16	21	27	36	44	51	53
$C_{3,i}$	11	20	26	34	39	43	51	53	54
$C_{4,i}$	19	22	35	42	48	52	53	58	**61**

Tiempos de compleción: $C_{\max} = 61$ $\quad C_{med} = 43.\widehat{3}$ $\quad C_{med}(k=1) = 21.\widehat{5}$ $\quad C_{med}(k=2) = 29.\widehat{6}$ $\quad C_{med}(k=3) = 36.\widehat{7}$

Modelo Flujo regular *m*-m · Cotas globales y dinámicas $C_{\max}$

Modelo Fm/prmu/C_{max}: Secuencia m-mqn mínimo tiempo de compleción máximo · Cotas:

I, K	Conjunto de trabajos $(i=1,..,n)$ · Conjunto de máquinas $(k=1,..,m)$
$p_{k,i}, \rho_{k,t}$	Tiempo de proceso del trabajo $i \in I$ $(p_{k,i})$ y del $t-$ésimo trabajo $(\rho_{k,t})$ en la máquina $k \in K$
$\pi(t)$	Secuencia parcial de trabajos hasta la posición t $(t=1,..,n): \pi(t)=(\pi_1,..,\pi_t)$ ·
$\pi(n)$	Secuencia completa: $\pi(n)=(\pi_1,..,\pi_n)$
$C_{k,t}$	Instante de compleción en la máquina $k \in K$ del $t-$ésimo trabajo lanzado. Se fija $C_{k,0}=0 \ \forall k \in K$)
$C_{\max}$	Instante de finalización del último trabajo en la última máquina · Makespan: $C_{\max}=C_{m,n}$

Cotas globales:
$$\left\{\begin{array}{ll} \cdot \text{ Mqn 1 (primera):} & LB_1=\sum_{i=1}^{n} p_{1,i}+\min_{i\in I}\left\{\sum_{k=2}^{m} p_{k,i}\right\} \\ \cdot \text{ Mqn } m \text{ (última):} & LB_m=\sum_{i=1}^{n} p_{m,i}+\min_{i\in I}\left\{\sum_{k=1}^{m-1} p_{k,i}\right\} \\ \cdot \text{ Mqn } k\ (1<k<m): & LB_k=\sum_{i=1}^{n} p_{k,i}+\min_{i\in I}\left\{\sum_{k'=1}^{k-1} p_{k',i}\right\}+\min_{i\in I}\left\{\sum_{k'=k+1}^{m} p_{k',i}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow LB(K)=\max_{k\in K}\left\{LB_k\right\}$$

Instantes finales:
$$\left\{\begin{array}{ll} \cdot\ C_{k,0}=0\ \ \forall k\in K & \\ \cdot\ C_{1,t}=C_{1,t-1}+\rho_{1,t} & t=1,..,n \\ \cdot\ C_{k,t}=\max\left\{C_{k-1,t},C_{k,t-1}\right\}+\rho_{k,t} & k=2,..,m;\ t=1,..,n \end{array}\right\}$$

Cotas dinámicas:
$$\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{ Si } 1\le k<m: LB_k(\pi(t))=C_{k,t}+\sum_{i\in(I-\pi(t))} p_{k,i}+\min_{i\in(I-\pi(t))}\left\{\sum_{k'=k+1}^{m} p_{k',i}\right\} \\ \cdot \text{ Si } k=m: \quad LB_m(\pi(t))=C_{m,t}+\sum_{i\in(I-\pi(t))} p_{m,i} \end{array}\right\} \Rightarrow LB(\pi(t))=\max_{k\in K}\left\{LB_k(\pi(t))\right\}$$

Ejemplo 6. Presentación y resolución Johnson MF

Ejemplo 6: (Fm/prmu/C_{max}) · *Secuencias 3 máquinas · 3 piezas en taller T-E*(3x3) · *Enunciado:*

El Taller T-E(3x3) debe producir de 3 piezas. La fabricación de toda pieza requiere el tratamiento en serie por parte de tres máquinas (m1, m2 y m3) con suficiente espacio entre ellas para almacenar piezas. Los tiempos de proceso en horas que necesita cada pieza en cada máquina se recogen en la Tabla 6. El primer objetivo en T-E(3x3) es establecer una secuencia de piezas que minimice el tiempo de compleción máximo de las piezas (*makespan*).

PIEZA (i)	A	B	C
TIEMPO M1	4	3	8
TIEMPO M2	9	5	1
TIEMPO M3	2	7	6
TIEMPO V-M1	13	8	9
TIEMPO V-M2	11	12	7

Tabla 6. Tiempos de proceso (horas) en las máquinas m1, m2 y m3 de las piezas A, B y C a fabricar en T-E(3x3).

PIEZA (i)	B	A	C
TIEMPO M1	3	4	8
TIEMPO M2	5	9	1
TIEMPO M3	7	2	6
$C_{1,i}$	3	7	15
$C_{2,i}$	8	17	18
$C_{3,i}$	15	19	**25**

Tiempos de compleción: $C_{\max} = 25 \quad C_{med} = 19.\widehat{6}$

$C_{med}(1) = 8.\widehat{3}, \quad C_{med}(2) = 14.\widehat{3}$

Ejemplo 6. Cotas y resolución Branch and Bound

Ejemplo 6: (Fm/prmu/C_{max}) · *Secuencias 3 máquinas · 3 piezas en taller T-E*(3x3) · *Cotas y B&B:*

AJ MF :$\pi(3)$=(B,A,C)

$C_{\max} = 25 \quad C_{med} = 19.\widehat{6}$

PIEZA (i)	A	B	C
TIEMPO M1	4	3	8
TIEMPO M2	9	5	1
TIEMPO M3	2	7	6

$$LB_1 = \sum_{i=1}^{n} p_{1,i} + \min_{i \in I}\left\{\sum_{k=2}^{3} p_{k,i}\right\}$$

$$LB_3 = \sum_{i=1}^{n} p_{3,i} + \min_{i \in I}\left\{\sum_{k=1}^{2} p_{k,i}\right\}$$

$$LB_2 = \sum_{i=1}^{n} p_{2,i} + \min_{i \in I}\left\{p_{1,i}\right\} + \min_{i \in I}\left\{p_{3,i}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} LB_1 &= 15 + (1+6) = 22 \\ LB_3 &= 15 + (3+5) = 23 \\ LB_2 &= 15 + 3 + 2 = 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow LB(K) = 23$$

Cota mqn 3: $LB_3(\pi(t)) = C_{3,t} + \sum_{i \in (I-\pi(t))} p_{3,i}$

Nivel $t=1$

$\pi(1)=(A) \Rightarrow LB_3(\pi(1)) = 15+(7+6) = 28$ Eliminar

$\pi(1)=(B) \Rightarrow LB_3(\pi(1)) = 15+(2+6) = 23$

$\pi(1)=(C) \Rightarrow LB_3(\pi(1)) = 15+(2+7) = 24$

Nivel $t=2$: Desarrollar B (cota 23):

$\pi(2)=(B,C) \Rightarrow LB_3(\pi(2)) = 21+(2) = 23$

$\pi(2)=(B,A) \Rightarrow LB_3(\pi(2)) = 19+(6) = 25$ *Sol.* AJ MF

Nivel $t=3$: Desarrollar (B,C) (cota 23):

$\pi(3)=(B,C,A) \Rightarrow LB_3(\pi(3)) = 26$ Eliminar

Nivel $t=2$: Desarrollar C (cota 24):

$\pi(2)=(C,A) \Rightarrow LB_3(\pi(2)) = 23+(7) = 30$ Eliminar

$\pi(2)=(C,B) \Rightarrow LB_3(\pi(2)) = 23+(2) = 25$ *Sol.* AJ MF

Nivel $t=3$: Desarrollar (C,B) (cota 25):

$\pi(3)=(C,B,A) \Rightarrow LB_3(\pi(3)) = 27$ Eliminar

Nivel $t=3$: Desarrollar (B,A) (cota 25):

$\pi(3)=(B,A,C) \Rightarrow LB_3(\pi(3)) = 25$ Óptimo: $C_{\max} = 25$

Modelo Fm/block/$C_{\max}$ · Mínimo instante de liberación máximo

Modelo Secuencia m-máquinas-bloqueo, mínimo instante de liberación máximo · Formulación y resolución:

$C_{k,t}$ Instante de liberación en la máquina $k \in K$ del $t-$ésimo trabajo lanzado. Se fija $C_{k,0}=0\ \forall k \in K$) ·
$C_{\max}$ Instante de finalización del último trabajo en la última máquina · Makespan: $C_{\max}$
$\hat{p}_{1,i}, \hat{p}_{2,i}$ Tiempos de proceso corregidos del trabajo $i \in I$ en las máquinas ficticias 1 y 2.

PM-S.m-m-2: $\min z = C_{\max} = C_{m,n}$ (0)

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad t=1,..,n \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{i,t} = 1 \qquad i=1,..,n \qquad (2)$$

$$\rho_{k,t} = \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} x_{i,t} \qquad k=1,..,m; t=1,..,n \qquad (3)$$

$$C_{1,t} = \max\left\{C_{1,t-1}+\rho_{1,t}, C_{2,t-1}\right\} \qquad t=1,..,n \qquad (4)$$

$$C_{m,t} = \max\left\{C_{m-1,t}, C_{m,t-1}\right\}+\rho_{m,t} \qquad t=1,..,n \qquad (5)$$

$$C_{k,t} = \max\left\{\max\left\{C_{k-1,t}, C_{k,t-1}\right\}+\rho_{k,t}, C_{k+1,t-1}\right\} \qquad k=2,..,m-1;\ t=1,..,n \qquad (6)$$

$$x_{i,t} \in \{0,1\} \qquad i=1,..,n; t=1,..,n \qquad (7)$$

Resolución H1:1. Determinar tiempos de proceso corregidos ($\hat{p}_{1,i}$ y $\hat{p}_{2,i}$ $\forall i \in I$) para las máquinas ficticias 1 y 2:

- Maquina ficticia 1: $\hat{p}_{1,i} = \sum_{k=1}^{m-1} p_{k,i} \qquad \forall i \in I$
- Máquina ficticia 2: $\hat{p}_{2,i} = \sum_{k=2}^{m} p_{k,i} \qquad \forall i \in I$

2. Aplicar el Algoritmo de Jonhson (AJ) con los valores $\hat{p}_{1,i}$ y $\hat{p}_{2,i}$ $\forall i \in I$ (máquinas ficticias)

Modelo Fm/block/C_{max} · Cotas globales y dinámicas C_{max}

Modelo Secuencia m-máquinas mínimo tiempo de compleción máximo · Cotas globales y dinámicas:

I, K Conjunto de trabajos $(i = 1,..,n)$ · Conjunto de máquinas $(k = 1,..,m)$

$p_{k,i}, \rho_{k,t}$ Tiempo de proceso del trabajo $i \in I$ $(p_{k,i})$ y del $t-$ésimo trabajo $(\rho_{k,t})$ en la máquina $k \in K$

$\pi(t)$ Secuencia parcial de trabajos hasta la posición t $(t = 1,..,n) : \pi(t) = (\pi_1,..,\pi_t)$ ·

$\pi(n)$ Secuencia completa: $\pi(n) = (\pi_1,..,\pi_n)$

$C_{k,t}$ Instante de liberación en la máquina $k \in K$ del $t-$ésimo trabajo lanzado. Se fija $C_{k,0} = 0$ $\forall k \in K$)

$C_{\max}$ Instante de liberación del último trabajo en la última máquina · Makespan: $C_{\max} = C_{m,n}$

Cotas globales:

$$\left.\begin{cases} \cdot\ \text{Mqn 1 (primera):} & LB_1 = \sum_{i=1}^{n} p_{1,i} + \min\limits_{i\in I}\left\{\sum_{k=2}^{m} p_{k,i}\right\} \\ \cdot\ \text{Mqn } m \text{ (última):} & LB_m = \sum_{i=1}^{n} p_{m,i} + \min\limits_{i\in I}\left\{\sum_{k=1}^{m-1} p_{k,i}\right\} \\ \cdot\ \text{Mqn } k\ (1<k<m): & LB_k = \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} + \min\limits_{i\in I}\left\{\sum_{k'=1}^{k-1} p_{k',i}\right\} + \min\limits_{i\in I}\left\{\sum_{k'=k+1}^{m} p_{k',i}\right\} \end{cases}\right\} \Rightarrow LB(K) = \max_{k\in K}\{LB_k\}$$

Instantes finales:

$$\begin{cases} \cdot\ C_{k,0} = 0 & k = 1,..,m \\ \cdot\ C_{1,t} = \max\{C_{1,t-1} + \rho_{1,t}, C_{2,t-1}\} & t = 1,..,n \\ \cdot\ C_{m,t} = \max\{C_{m-1,t}, C_{m,t-1}\} + \rho_{m,t} & t = 1,..,n \\ \cdot\ C_{k,t} = \max\{\max\{C_{k-1,t}, C_{k,t-1}\} + \rho_{k,t}, C_{k+1,t-1}\} & t = 1,..,n;\ k = 2,..,m-1 \end{cases}$$

Cotas dinámicas:

$$\left.\begin{cases} \cdot\ \text{Si } 1 \le k < m : LB_k(\pi(t)) = C_{k,t} + \sum\limits_{i\in(I-\pi(t))} p_{k,i} + \min\limits_{i\in(I-\pi(t))}\left\{\sum_{k'=k+1}^{m} p_{k',i}\right\} \\ \cdot\ \text{Si } k = m : \quad LB_m(\pi(t)) = C_{m,t} + \sum\limits_{i\in(I-\pi(t))} p_{m,i} \end{cases}\right\} \Rightarrow LB(\pi(t)) = \max_{k\in K}\{LB_k(\pi(t))\}$$

Ejemplo 7. Presentación y resolución Johnson MF

Ejemplo 7: (Fm/block/C_{max}) *· Secuencias 3 máquinas · 3 piezas en taller T-E*(3x3) *· Enunciado:*

El Taller T-E(3x3) debe producir de 3 piezas. La fabricación de toda pieza requiere el tratamiento en serie por parte de tres máquinas (m1, m2 y m3) sin espacio entre ellas para almacenar piezas (0 buffers). Los tiempos de proceso en horas que necesita cada pieza en cada máquina se recogen en la Tabla 6. El primer objetivo en T-E(3x3) es establecer una secuencia de piezas que minimice el instante de liberación máximo de las piezas (*makespan*).

PIEZA (i)	A	B	C
TIEMPO M1	4	3	8
TIEMPO M2	9	5	1
TIEMPO M3	2	7	6
TIEMPO V-M1	13	8	9
TIEMPO V-M2	11	12	7

Tabla 6. Tiempos de proceso (horas) en las máquinas m1, m2 y m3 de las piezas A, B y C a fabricar en T-E(3x3).

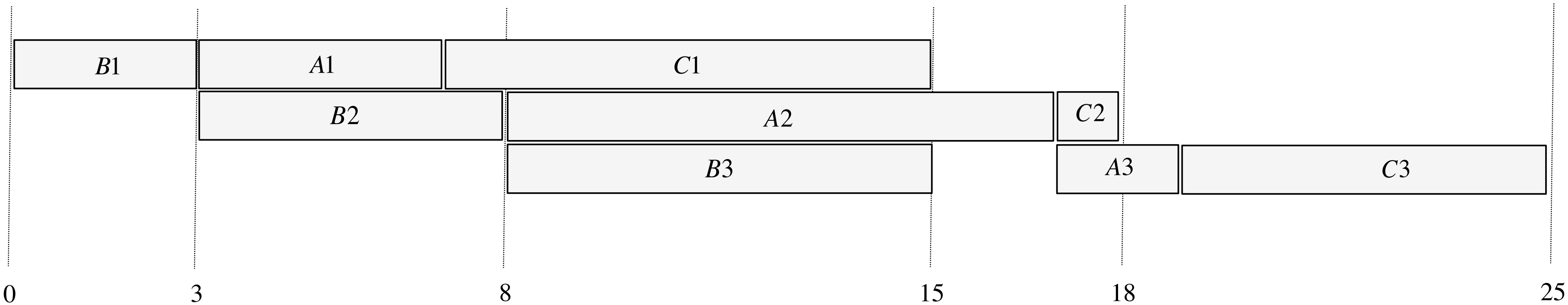
PIEZA (i)	B	A	C
TIEMPO M1	3	4	8
TIEMPO M2	5	9	1
TIEMPO M3	7	2	6
$C_{1,i}$	3	8	17
$C_{2,i}$	8	17	19
$C_{3,i}$	15	19	**25**

Instantes de liberación: $C_{\max} = 25 \quad C_{med} = 19.\widehat{6}$

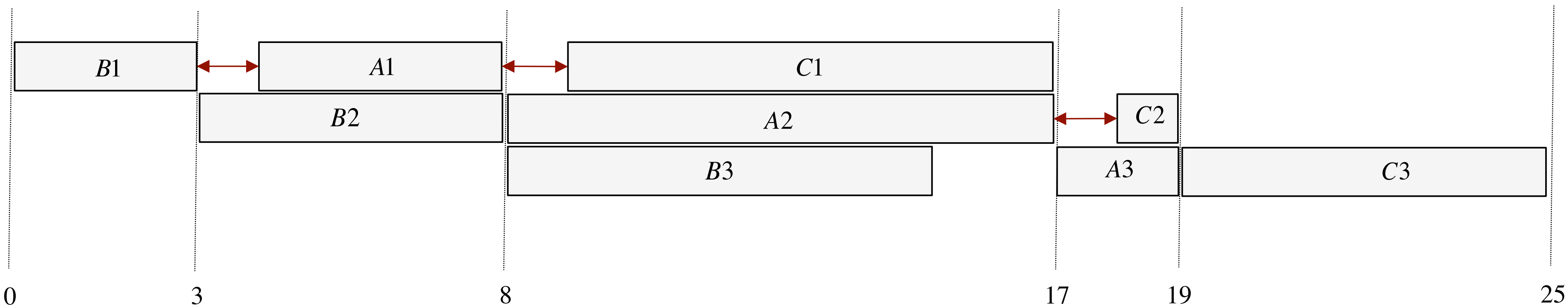
$C_{med}(1) = 9.\widehat{3}, \quad C_{med}(2) = 14.\widehat{6}$ (Óptimo)

Ejemplos 6 y 7. Gantt

Ejemplo 6: (Fm/prmu/C_{max}) · *Secuencias 3 máquinas · 3 piezas en taller T-E*(3x3) · *Gantt:*



Ejemplo 7: (Fm/block/C_{max}) · *Secuencias 3 máquinas · 3 piezas en taller T-E*(3x3) · *Gantt:*



“ Juntáronse los ratones,
para librarse del gato;
y después de un largo rato
de disputas y opiniones,
dijeron que acertarían
en ponerle un cascabel,
que, andando el gato con él,
guardarse mejor podrían.

Salió un ratón barbicano,
colilargo, hociquirromo,
y, encrespando el grueso lomo,
dijo al senado Romano,
después de hablar culto un rato:
“¿Quién de todos ha de ser
el que se atreva a poner
ese cascabel al gato? ”

LOPE DE VEGA (1562 - 1635)
– *El congreso de los ratones*