



# Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

## **Organización Industrial. Fiabilidad, renovación y mantenimiento.**

*Joaquín Bautista Valhondo*

D-21/2011  
(Rec. OP-BCC)

*Departamento de Organización de Empresas*

Universidad Politécnica de Cataluña

**Publica:**

Universitat Politècnica de Catalunya  
[www.upc.edu](http://www.upc.edu)



**Edita:**

Cátedra Nissan  
[www.nissanchair.com](http://www.nissanchair.com)  
director@nissanchair.com

# Fiabilidad de elementos y sistemas

---



**DOE**

Departament  
d'Organització  
d'Empreses

Ref.: Companys, R; Corominas, A. (1994) Organización de la Producción I. Diseño de sistemas productivos 3. Edicions UPC, Barcelona.

# Fiabilidad. Contenido

---

- *Introducción y conceptos generales*
- *Fiabilidad de elementos*
  - Ley de supervivencia
  - Función de distribución de fallos. Densidad de probabilidad de fallos (densidad de averías). Tasa de averías
  - Vida media de un elemento (MTBF: Tiempo medio entre fallos)
- *Leyes de supervivencia usuales*
  - Ley exponencial
  - Ley de Weibull
- *Fiabilidad de Sistemas*
  - Funciones de estructura
  - Redes de fiabilidad
  - Funciones de fiabilidad
  - Mejora de la fiabilidad: Reducción y canibalización

# Concepto de Fiabilidad

---

- Característica de un dispositivo expresada por la **probabilidad** de cumplir una **función** requerida bajo una serie de **condiciones** dadas y para una **duración** especificada (Comisión Electrotécnica Internacional).
- Los **resultados** corresponden a muestras de componentes o sistemas y por tanto sólo sirven para **procesos repetitivos** y **no singulares**.
- El cumplimiento de una **función** implica definir el **fallo**.
- Las **condiciones de funcionamiento** del elemento o sistema vienen definidas por el **entorno físico** (temperatura, presión, etc.) y el **factor humano**.
- La **duración** es una magnitud genérica asociada al cambio de estado que puede representar tiempo, número de ciclos, distancia recorrida, volumen de líquido, etc.



## Ley de supervivencia

---

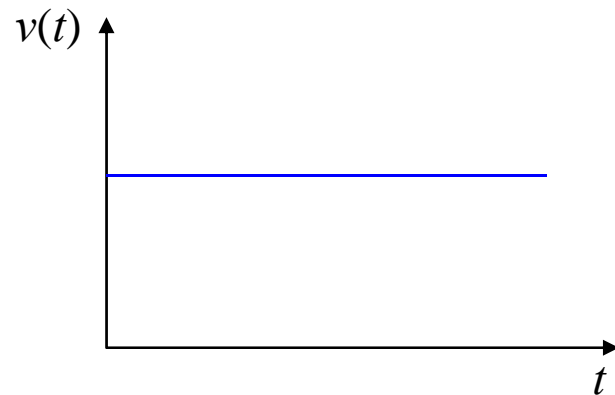
- Probabilidad de que en el instante  $t$  no se haya producido todavía la avería y por tanto el equipo esté funcionando.

$$v(t) = P(t < T_A): \left\{ \begin{array}{l} v(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \\ v(t) \geq v(t + \Delta t) \end{array} \right\}, T_A \equiv \text{Instante de avería}$$

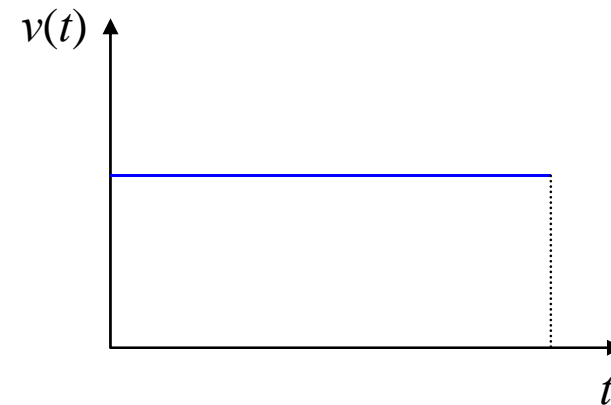
- *Generalización:* Magnitud de evolución de estado:  $t$ .
  - Tiempo
  - Ciclos
  - Distancia
  - Número de ensayos

# Ley de supervivencia. Tipología

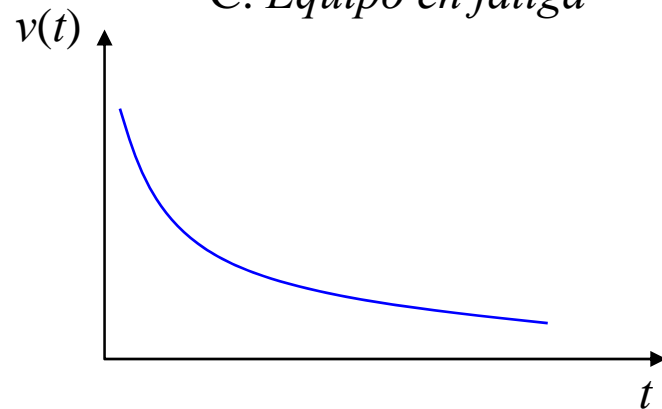
A: *Equipo eterno*



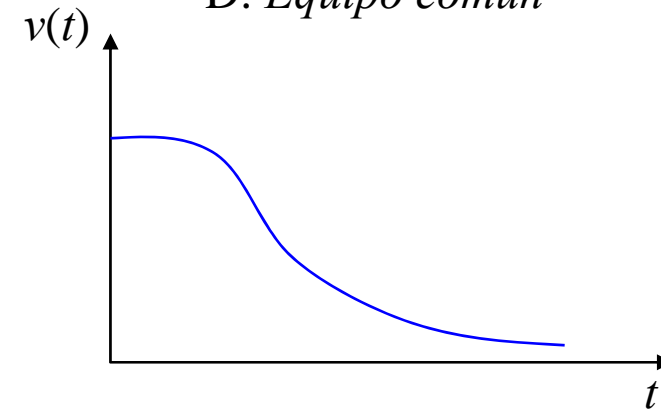
B: *Equipo homogéneo*



C: *Equipo en fatiga*



D: *Equipo común*



# Ley de supervivencia. Conceptos

---

- *Función de distribución de fallos (probabilidad acumulada de avería)*

$$F(t) = P(t \geq T_A) = 1 - v(t)$$

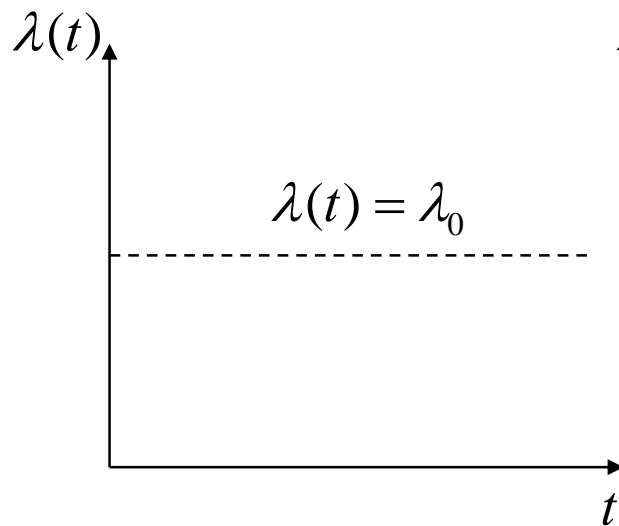
- *Densidad de avería*

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = -v'(t)$$

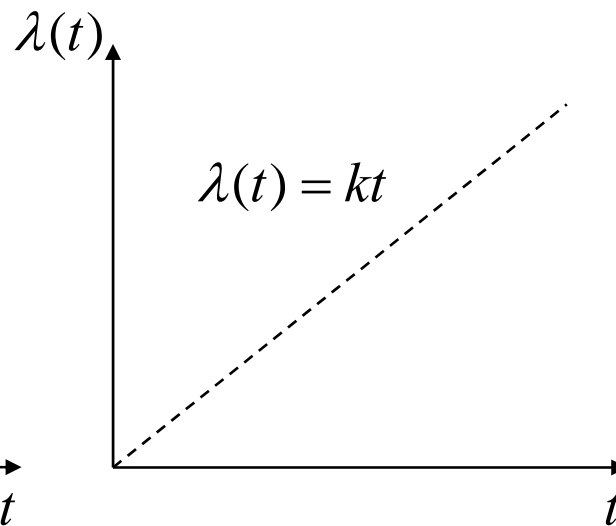
- *Tasa de averías*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{v(t)} = -\frac{v'(t)}{v(t)} \Rightarrow v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

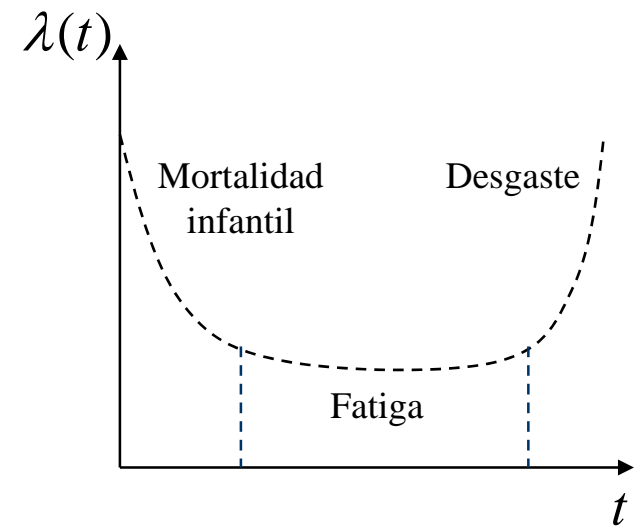
# Tasas de avería



Tasa de avería constante.  
Trabajo en fatiga



Tasa de avería creciente.  
Trabajo en desgaste



Tasa de avería en curva de  
bañera. Tres zonas.



## Funcionamiento promedio

---

- *Edad media de aparición de la avería MTBF*

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = -\int_0^{\infty} t v'(t) dt = \int_0^{\infty} v(t) dt$$

- *Vida media de un elemento con reposición en  $t_0$  o en el instante de fallar*

$$\bar{t}(t_0) = \int_0^{t_0} t f(t) dt + t_0 v(t_0) = \int_0^{t_0} v(t) dt$$

## Leyes de supervivencia. Ley exponencial

- *Condición:*  $\lambda(t) = \lambda_0$
- *Ley de supervivencia:*  $v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \Rightarrow v(t) = e^{-\lambda_0 t}$
- *Función de distribución de fallos:*  $F(t) = 1 - v(t) \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$
- *Densidad de avería:*  $f(t) = -v'(t) \Rightarrow f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$
- *MTBF:*  $\bar{t} = \int_0^{\infty} v(t) dt \Rightarrow \bar{t} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_0 t} dt \Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{\lambda_0}$
- *Vida media hasta  $t_0$ :*  $\bar{t}(t_0) = \int_0^{t_0} v(t) dt \Rightarrow \bar{t}(t_0) = \int_0^{t_0} e^{-\lambda_0 t} dt \Rightarrow \bar{t}(t_0) = \frac{1}{\lambda_0} (1 - e^{-\lambda_0 t_0})$

## Leyes de supervivencia. Ley de Weibull

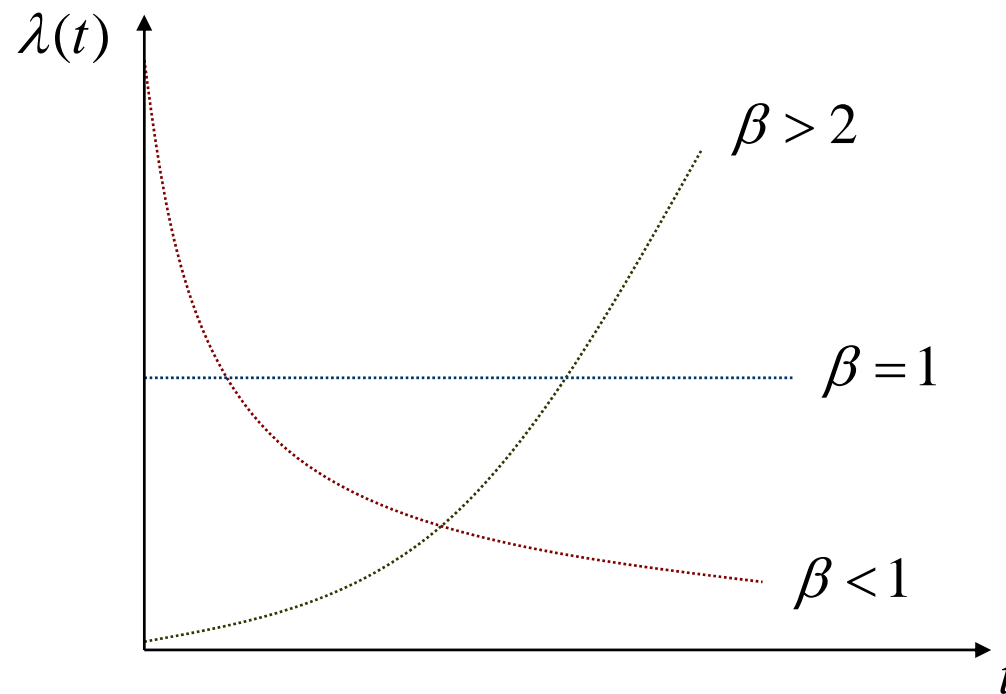
- *Condición:*  $\lambda(t) = \beta\alpha^\beta t^{\beta-1}$
- *Ley de supervivencia:*  $v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \Rightarrow v(t) = e^{-(\alpha t)^\beta}$
- *Función de distribución de fallos:*  $F(t) = 1 - v(t) \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-(\alpha t)^\beta}$
- *Densidad de avería:*  $f(t) = -v'(t) \Rightarrow f(t) = \beta\alpha^\beta t^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta}$
- *MTBF:*  $\bar{t} = \int_0^\infty v(t) dt \Rightarrow \bar{t} = \int_0^\infty e^{-(\alpha t)^\beta} dt \Rightarrow \bar{t} = \frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta\alpha}$ ;  $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \end{array} \right\}$

## Ley de Weibull. Tasa de averías

$\beta = 1 \Rightarrow \lambda(t) = \alpha$  (Ley exponencial : trabajo en fatiga)

$\beta < 1$  (mortalidad infantil)

$\beta > 2$  (trabajo en desgaste)



## Leyes de supervivencia. Ley de Erlang

*Hipótesis:* la avería se produce si y sólo si ocurren exactamente  $k$  fenómenos aleatorios que siguen una ley de Poisson de tasa  $\lambda$ . Proceso de Erlang de parámetro  $k$ .

Probabilidad de producirse  $n$  fenómenos en el instante  $t$  :

$$P_n = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Fiabilidad de no producirse  $k$  fenómenos o más hasta el instante  $t$  :

$$v(t) = p_0 + p_1 + \dots + p_{k-1} = \sum_{n=0}^{k-1} P_n = e^{-\lambda t} \left( 1 + \frac{(\lambda t)}{1!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \right) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Densidad de avería para  $k$  fenómenos en el instante  $t$  :

$$f(t) = -v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$$

$$\bar{t} = \frac{k}{\lambda} ; \quad \sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2}$$

## Fiabilidad de sistemas. Función de estructura

- *Función de estructura*: Función booleana que representa el funcionamiento o avería de un sistema en relación al funcionamiento o fallo de sus componentes.

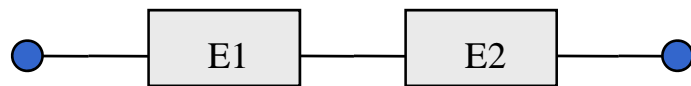
$$f=f(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \in \{0,1\} \forall i = 1, \dots, n ; \bar{x}_i = 1 - x_i \forall i = 1, \dots, n$$

$$x_i = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ funciona el elemento } i \\ 0, \text{ no funciona el elemento } i \end{array} \right\} \forall i = 1, \dots, n$$

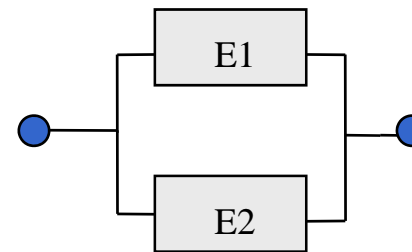
$$f(x_1, x_2) = 1 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

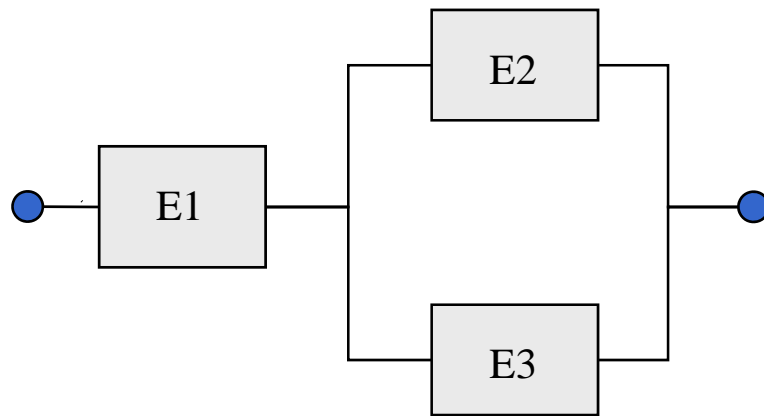


*Elementos en serie*



*Elementos en paralelo*

## Función de estructura. Ejemplo sistema serie-paralelo



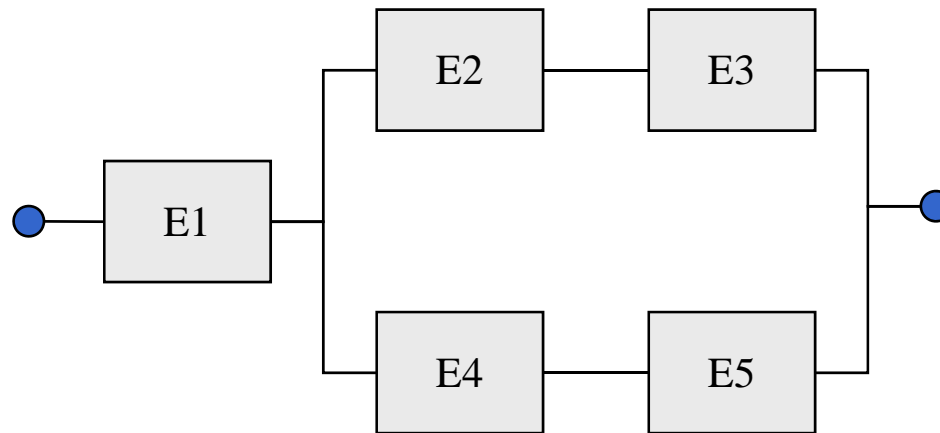
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|-------|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0     | 0   |
| 0     | 0     | 1     | 0   |
| 0     | 1     | 0     | 0   |
| 0     | 1     | 1     | 0   |
| 1     | 0     | 0     | 0   |
| 1     | 0     | 1     | 1   |
| 1     | 1     | 0     | 1   |
| 1     | 1     | 1     | 1   |

## Red de fiabilidad

- *Red de fiabilidad*: Representación gráfica de la función de estructura.



Conjunto-1: Serie-paralelo de 5 elementos

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 (f(x_2, x_3) + f(x_4, x_5) - f(x_2, x_3)f(x_4, x_5))$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$



# Caminos y Cortes

---

*Camino:* Conjunto de elementos tales que si todos funcionan el sistema funciona.

$$(x_1 = x_2 = \dots = x_p = 1) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 1$$

*Camino mínimo:* Camino que no contiene a cualquier otro camino.

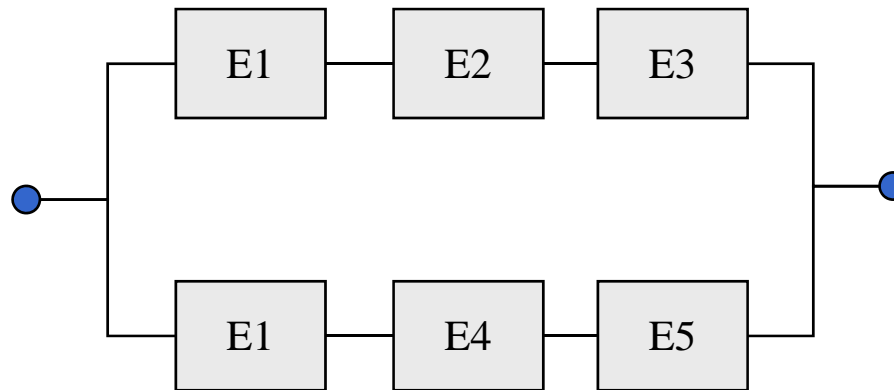
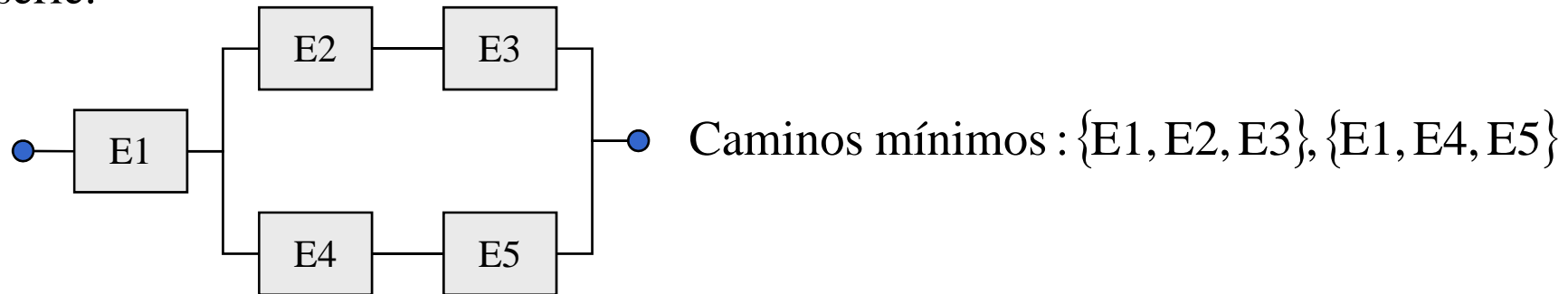
*Corte:* Conjunto de elementos tales que si ninguno funciona el sistema no funciona.

$$(x_1 = x_2 = \dots = x_c = 0) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_c) = 0$$

*Corte mínimo:* Corte que no contiene a cualquier otro corte.

## Redes de fiabilidad equivalentes (1/2)

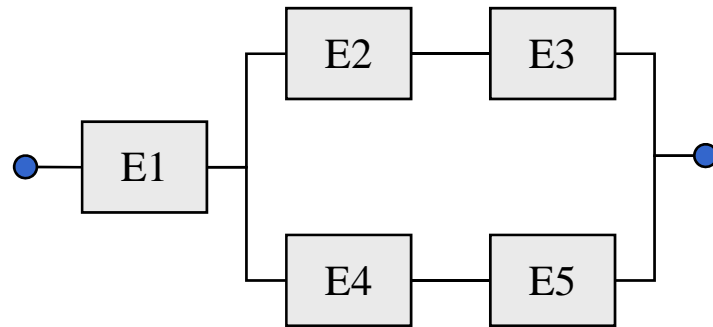
*Construcción-1:* Poner en paralelo todos los caminos mínimos con sus elementos en serie.



$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

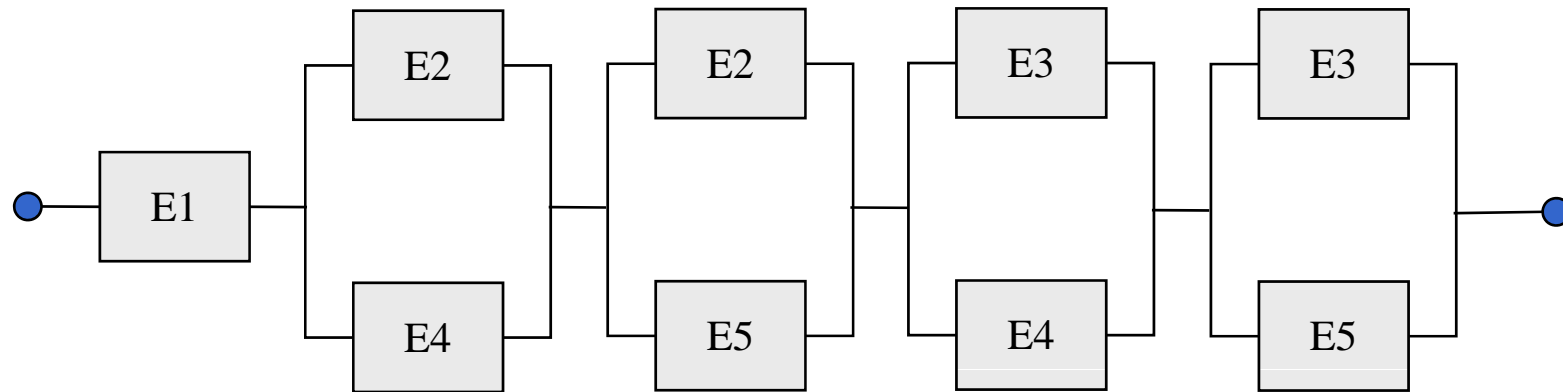
## Redes de fiabilidad equivalentes (2/2)

*Construcción-2:* Poner en serie todos los cortes mínimos con sus elementos en paralelo.



Cortes mínimos :

$\{E1\}, \{E2, E4\}, \{E2, E5\}, \{E3, E4\}, \{E3, E5\}$

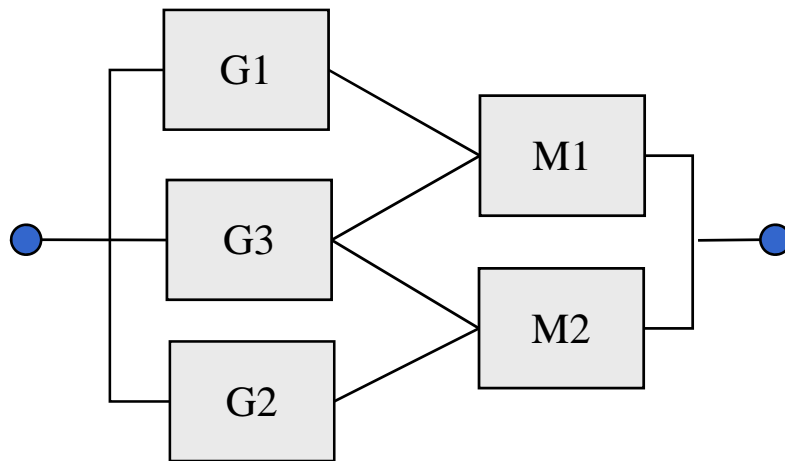


$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_2\bar{x}_4)(1 - \bar{x}_2\bar{x}_5)(1 - \bar{x}_3\bar{x}_4)(1 - \bar{x}_3\bar{x}_5)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1(x_2 + x_4 - x_2x_4)(x_2 + x_5 - x_2x_5)(x_3 + x_4 - x_3x_4)(x_3 + x_5 - x_3x_5)$$

## Red de fiabilidad. Ejemplo-conjunto-2 (caminos mínimos)

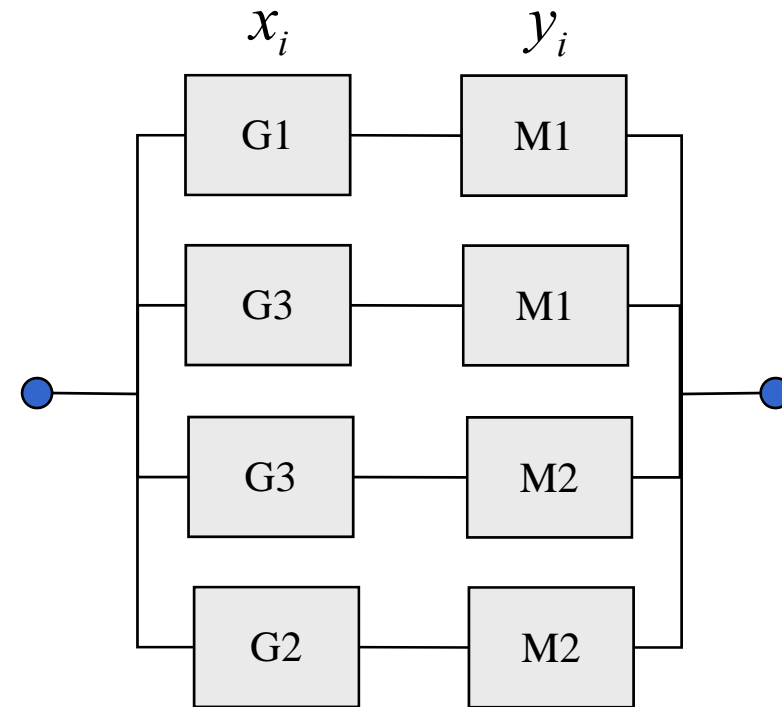
Conjunto-2: 3 generadores en serie con dos máquinas



Camino mínimos :

$\{G1, M1\}, \{G3, M1\}$

$\{G3, M2\}, \{G2, M2\}$



$$f = 1 - (1 - x_1 y_1)(1 - x_3 y_1)(1 - x_3 y_2)(1 - x_2 y_2)$$

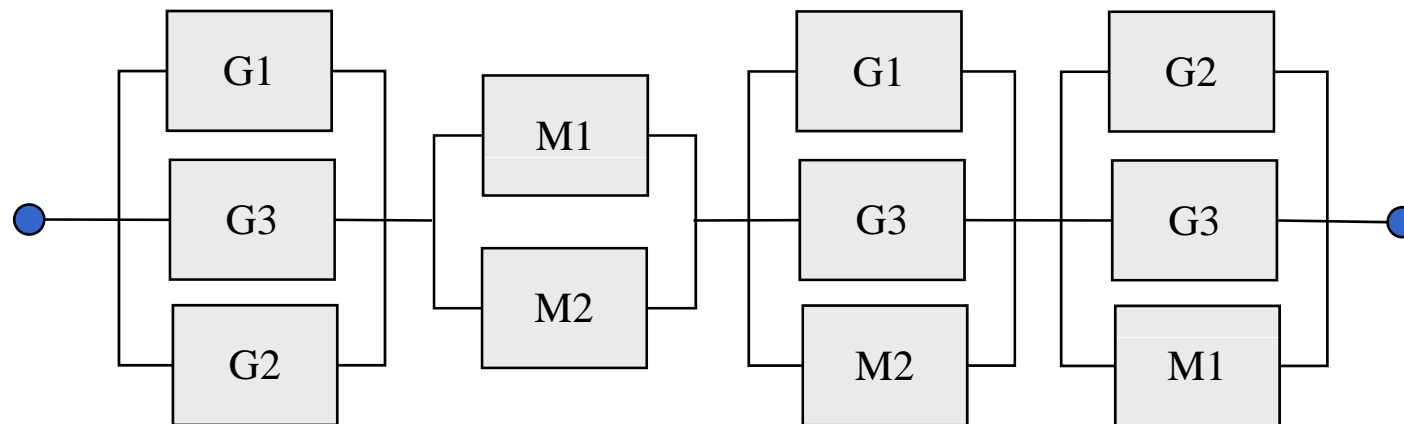
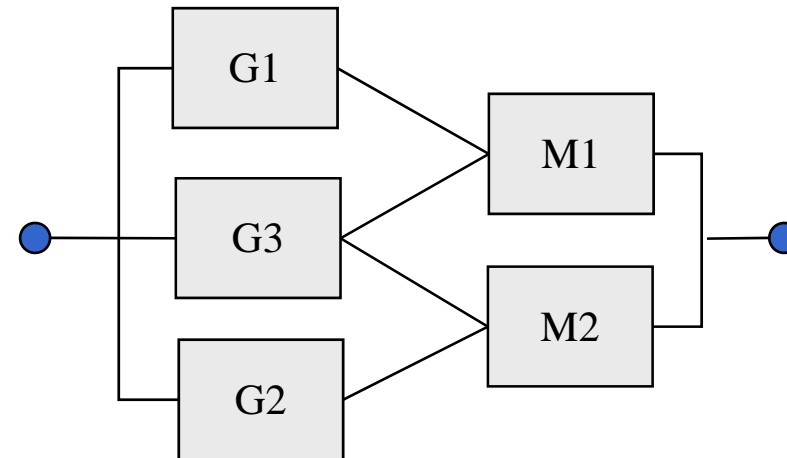
## Red de fiabilidad. Ejemplo-conjunto-2 (cortes mínimos)

Conjunto-2: 3 generadores en serie con dos máquinas.

Cortes mínimos :

$\{G1, G3, G2\}, \{M1, M2\}$

$\{G1, G3, M2\}, \{G2, G3, M1\}$



$$f = (1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_2)(1 - \bar{y}_1 \bar{y}_2)(1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{y}_2)(1 - \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{y}_1)$$

## Función de estructura en *forma simple*

Obtención de la forma simple  $\hat{f}$  :

1. Poner en paralelo los caminos mínimos (en serie los cortes mínimos).
2. Efectuar multiplicaciones, eliminar paréntesis, suprimir potencias y agrupar los términos semejantes.

Conjunto – 2

$$f = 1 - (1 - x_1 y_1)(1 - x_3 y_1)(1 - x_3 y_2)(1 - x_2 y_2)$$

$$\begin{aligned} f &= (x_1 y_1 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_2) - \\ &- (x_1 y_1 x_3 + x_1 y_1 x_3 y_2 + x_1 y_1 x_2 y_2 + x_3 y_1 y_2 + x_3 y_1 x_2 y_2 + x_3 y_2 x_2) + \\ &+ (x_1 y_1 x_3 y_2 + x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 y_2 x_2 + x_3 y_1 y_2 x_2) - \\ &- x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f} &= x_1 y_1 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 - \\ &- (x_1 y_1 x_3 + x_3 y_1 y_2 + x_3 y_2 x_2 + x_1 y_1 x_2 y_2) \end{aligned}$$

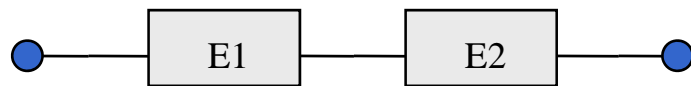
## Función de fiabilidad de un sistema (1/2)

- *Función de fiabilidad*: Función que representa la probabilidad de funcionamiento de un sistema en función de las probabilidades de funcionamiento de sus elementos componentes.

$$h = h(p_1, p_2, \dots, p_n) ; 0 \leq p_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n ; \bar{p}_i = 1 - p_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

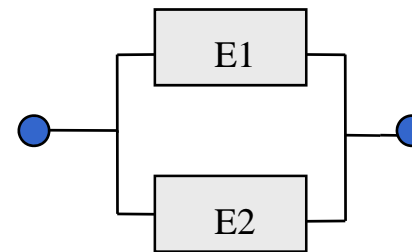
$p_i \equiv$  probabilidad de funcionamiento del elemento  $i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$

$$h(p_1, p_2) = p_1 p_2$$



*Elementos en serie*

$$h(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

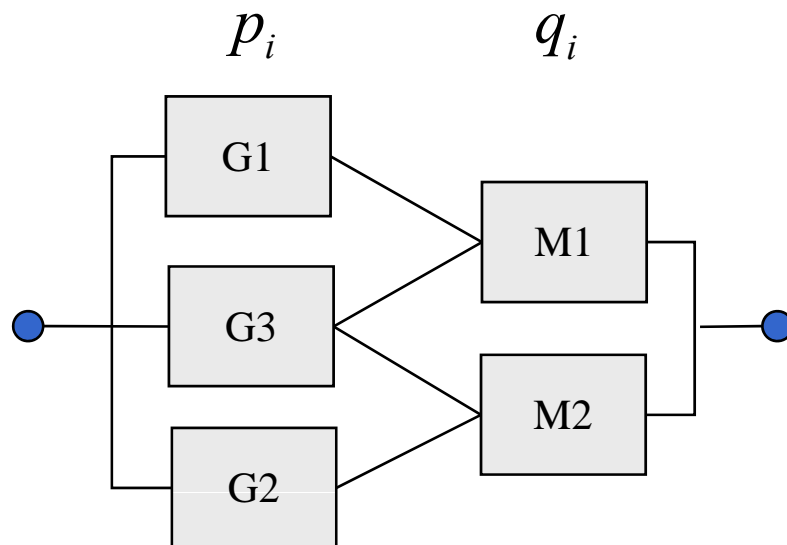


*Elementos en paralelo*

## Función de fiabilidad de un sistema (2/2)

*Obtención de la función de fiabilidad :*

1. Obtener la función de estructura en forma simple:  $\hat{f}$
2. El desarrollo de  $h$  coincide con el de  $\hat{f}$ , sustituyendo  $x_i$  por  $p_i$  (para todo  $i$ ).



Conjunto - 2

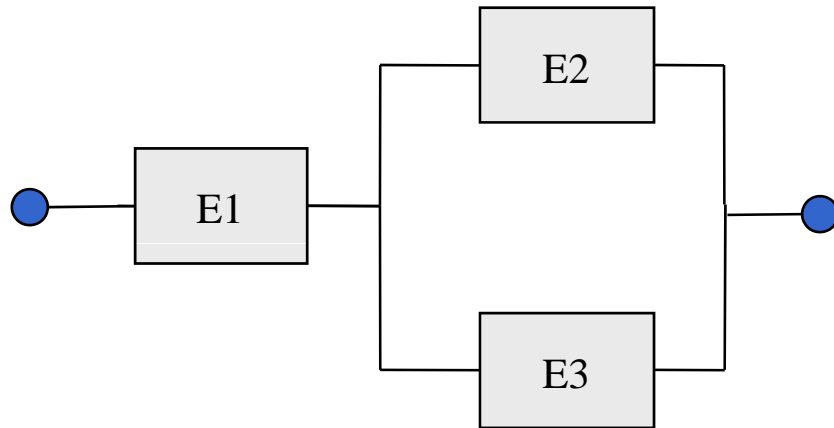
$$\hat{f} = x_1y_1 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_2y_2 + x_1y_1x_3x_2y_2 - (x_1y_1x_3 + x_3y_1y_2 + x_3y_2x_2 + x_1y_1x_2y_2)$$

$$h = p_1q_1 + p_3q_1 + p_3q_2 + p_2q_2 + p_1q_1p_3p_2q_2 - (p_1q_1p_3 + p_3q_1q_2 + p_3q_2p_2 + p_1q_1p_2q_2)$$

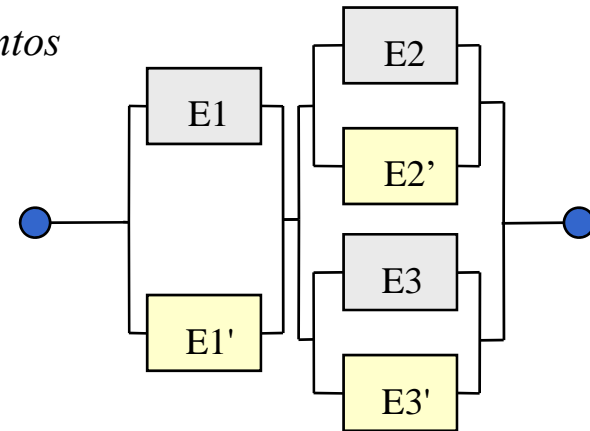


## Formas de incrementar la fiabilidad de un sistema (1/2)

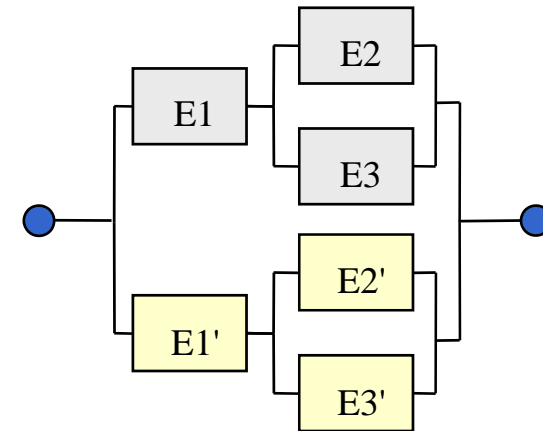
- *Redundancia*: Disponer varios ejemplares de un mismo elemento en paralelo y requerir que sólo uno de ellos esté en funcionamiento.



*Elementos*

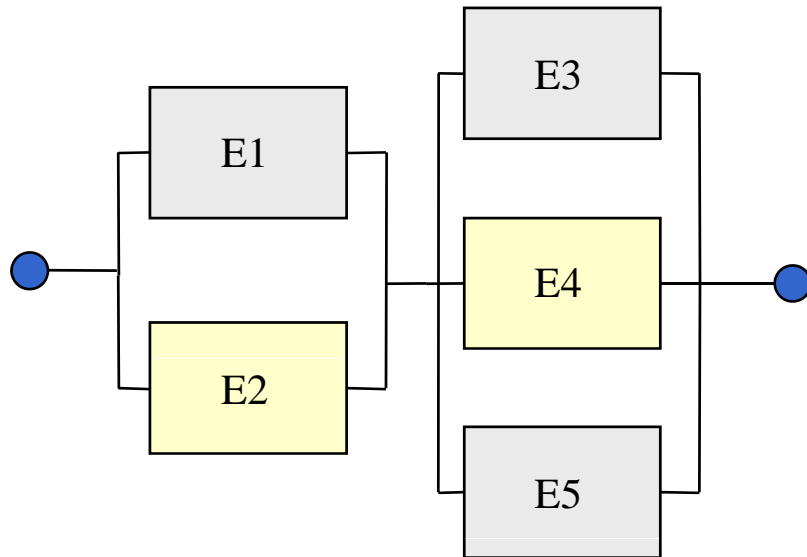


*Sistema*



## Formas de incrementar la fiabilidad de un sistema (2/2)

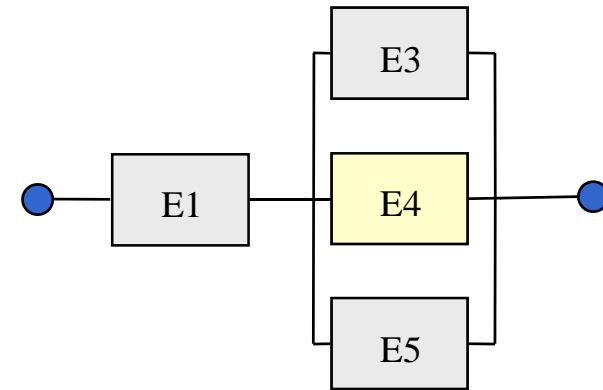
- *Canibalización*: Intercambiar elementos de un mismo tipo cuando uno de ellos falla.



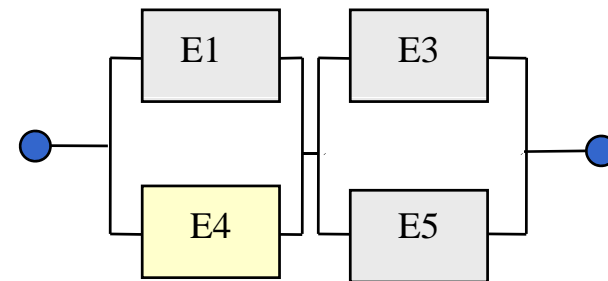
*Tipo I* : E1,E3,E5

*Tipo II* : E2,E4

No funciona E2



No funciona E2 y se substituye por E4



# Renovación y mantenimiento



Departament  
d'Organització  
d'Empreses

Ref.: Companys, R; Corominas, A. (1996) Organización de la Producción II. Dirección de operaciones 5. Edicions UPC, Barcelona.

# Contenido

---

- *Conceptos*
- *Renovación de equipos importantes*
  - Enfoque rendimientos
  - Enfoque costes
  - Explotación con horizonte limitado
- *Substitución antes de la avería*
  - Caso continuo
  - Caso discreto
- *Substitución en grupo*



# Conceptos

---

- *Renovación*: Consiste en substituir equipos o elementos de un sistema productivo con el propósito de conseguir un **incremento del rendimiento** del sistema o una **reducción de los costes** de explotación del mismo.
- *Casos*:
  - *Renovación de equipos importantes* : equipos utilizables indefinidamente pero que su eficacia (funcionamiento) se *degrada progresivamente con la edad*.
  - *Renovación preventiva antes de la avería*: substitución de equipos antes de que se produzca la avería con el propósito de *anticiparse al fallo del sistema*.
  - *Renovación preventiva en fechas preestablecidas* : substitución de equipos en bloque con el propósito de aprovechar las ventajas de la *substitución colectiva*.

## Renovación de equipos

---

- *Nomenclatura básica:*

$C$ : coste de adquisición del equipo.

$S_t$ : valor residual del equipo con edad  $t$ , recuperable al adquirir un nuevo equipo.

$r_t$ : rendimientos de funcionamiento para el período  $t$  comprendido entre los instantes  $t-1$  y  $t$ .

$\alpha$ : coeficiente de actualización por período en función de la tasa de actualización  $i$ :  $\alpha = (1+i)^{-1}$ .

$k$ : edad del equipo en la que se procede a la substitución por otro nuevo.

$a(k)$ : anualidad equivalente asociada a la edad  $k$  del equipo.

$R(k)$ : rendimiento neto actualizado de una sucesión indefinida de equipos.

## Renovación de equipos. Enfoque rendimientos

---

Sin actualizar ( $\alpha = 1$ )

$$k a(k) = \left( -C + S_k + \sum_{t=1}^k r_t \right)$$
$$a(k) = \frac{1}{k} \left( -C + S_k + \sum_{t=1}^k r_t \right)$$

Actualizar (imputar inversión al inicio de cada período)

$$\sum_{t=1}^k \alpha^{t-1} a(k) = \left( -C + \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t r_t \right)$$
$$R(k) = \frac{a(k)}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha^k} \left( -C + \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t r_t \right)$$

# Renovación de equipos. Enfoque rendimientos. Ejemplo-1 (1/2)

*Ejemplo-1: Renovación de equipos sin actualización (enfoque rendimientos).*

| edad $t$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S_t$    | 4.000 | 3.600 | 3.250 | 2.900 | 2.600 | 2.350 | 2.150 | 1.900 | 1.700 | 1.550 |
| $r_t$    | 3.000 | 2.850 | 2.710 | 2.570 | 2.440 | 2.320 | 2.210 | 2.010 | 1.990 | 1.890 |

El coste de adquisición de un equipo nuevo es 5000 *um*.

| (1) | (2)                | (3)        | (4)                                | (5)                 |
|-----|--------------------|------------|------------------------------------|---------------------|
| $k$ | $\sum_{t=1}^k r_t$ | $-C + S_k$ | rendimiento por ciclo<br>(2) + (3) | $a(k)$<br>(4) / (1) |
| 1   | 3.000              | -1.000     | 2.000                              | 2.000               |
| 2   | 5.850              | -1.400     | 4.450                              | 2.225               |
| 3   | 8.560              | -1.750     | 6.810                              | 2.270 *             |
| 4   | 11.130             | -2.100     | 9.030                              | 2.257,5             |
| 5   | 13.570             | -2.400     | 11.170                             | 2.234               |
| 6   | 15.890             | -2.650     | 13.240                             | 2.206,7             |
| 7   | 18.100             | -2.850     | 15.250                             | 2.178,6             |
| 8   | 20.110             | -3.100     | 17.010                             | 2.126,2             |
| 9   | 22.100             | -3.300     | 18.800                             | 2.088,9             |
| 10  | 23.990             | -3.450     | 20.540                             | 2.054               |



## Renovación de equipos. Enfoque rendimientos. Ejemplo-1 (2/2)

*Ejemplo-1: Renovación de equipos con actualización (enfoque rendimientos).*

| (1)   | (2)        | (3)                  | (4)                               | (5)                  | (6)                       | (7)       | (8)        |
|-------|------------|----------------------|-----------------------------------|----------------------|---------------------------|-----------|------------|
| $t/k$ | $\alpha^t$ | $\alpha^t \cdot r_k$ | $\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot r^i$ | $\alpha^k \cdot S_k$ | $-C + \alpha^k \cdot S_k$ | (4) + (6) | $R(k)$     |
| 1     | 0,8929     | 2.678,6              | 2.678,6                           | 3.571,4              | -1.428,6                  | 1.250,0   | 11.666,7   |
| 2     | 0,7972     | 2.272,0              | 4.950,6                           | 2.869,9              | -2.130,1                  | 2.820,5   | 13.907,8   |
| 3     | 0,7118     | 1.928,9              | 6.879,5                           | 2.313,3              | -2.686,7                  | 4.192,8   | 14.548,2   |
| 4     | 0,6355     | 1.633,3              | 8.512,8                           | 1.843,0              | -3.157,0                  | 5.355,8   | 14.693,6   |
| 5     | 0,5674     | 1.384,5              | 9.897,3                           | 1.475,3              | -3.524,7                  | 6.372,6   | 14.730,9 * |
| 6     | 0,5066     | 1.175,4              | 11.072,7                          | 1.190,6              | -3.809,4                  | 7.263,3   | 14.720,9   |
| 7     | 0,4523     | 999,7                | 12.072,4                          | 972,6                | -4.027,4                  | 8.045,0   | 14.688,7   |
| 8     | 0,4039     | 811,8                | 12.884,2                          | 767,4                | -4.232,6                  | 8.651,6   | 14.513,7   |
| 9     | 0,3606     | 717,6                | 13.601,8                          | 613,0                | -4.387,0                  | 9.214,8   | 14.411,6   |
| 10    | 0,3220     | 608,5                | 14.210,3                          | 499,1                | -4.500,9                  | 9.709,4   | 14.320,6   |

Tasa de actualización :  $i = 12\%$  (anual)  $\Rightarrow \alpha = 1.12^{-1} = 0.8929$

## Renovación de equipos. Enfoque costes

- *Nomenclatura adicional:*

$c_t$ : coste de mantenimiento del equipo con edad  $t$  (creciente con la edad).

$\Gamma(k)$ : coste neto actualizado de una sucesión indefinida de equipos.

Sin actualizar ( $\alpha = 1$ )

$$k a(k) = \left( C - S_k + \sum_{t=1}^k c_t \right)$$

$$a(k) = \frac{1}{k} \left( C - S_k + \sum_{t=1}^k c_t \right)$$

Actualizar (imputar inversión al inicio de cada período)

$$\sum_{t=1}^k \alpha^{t-1} a(k) = \left( C - \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t c_t \right)$$

$$\Gamma(k) = \frac{a(k)}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha^k} \left( C - \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t c_t \right)$$

## Renovación de equipos. Enfoque costes. Ejemplo-2 (1/2)

*Ejemplo-2: Renovación de equipos sin actualización (enfoque costes).*

| edad $t$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S_t$    | 4.000 | 3.600 | 3.250 | 2.900 | 2.600 | 2.350 | 2.150 | 1.900 | 1.700 | 1.550 |
| $c_t$    | 800   | 920   | 1.060 | 1.220 | 1.400 | 1.610 | 1.850 | 2.130 | 2.450 | 2.810 |

| (1) | (2)                | (3)       | (4)                          | (5)                 |
|-----|--------------------|-----------|------------------------------|---------------------|
| $k$ | $\sum_{t=1}^k c_t$ | $C - S_k$ | coste por ciclo<br>(2) + (3) | $a(k)$<br>(4) / (1) |
| 1   | 800                | 1.000     | 1.800                        | 1.800               |
| 2   | 1.720              | 1.400     | 3.120                        | 1.560               |
| 3   | 2.780              | 1.750     | 4.530                        | 1.510 *             |
| 4   | 4.000              | 2.100     | 6.100                        | 1.525               |
| 5   | 5.400              | 2.400     | 7.800                        | 1.560               |
| 6   | 7.010              | 2.650     | 9.660                        | 1.610               |
| 7   | 8.860              | 2.850     | 11.710                       | 1.672,9             |
| 8   | 10.990             | 3.100     | 14.090                       | 1.761,3             |
| 9   | 13.440             | 3.300     | 16.740                       | 1.860               |
| 10  | 16.250             | 3.450     | 19.700                       | 1.970               |

Coste de adquisición del equipo:  $C=5000 \text{ um}$ . Se adjuntan valores residuales y costes de funcionamiento en función de la edad.

## Renovación de equipos. Enfoque costes. Ejemplo-2 (2/2)

*Ejemplo-2: Renovación de equipos con actualización (enfoque costes).*

| (1)              | (2)        | (3)                  | (4)                               | (5)                  | (6)                      | (7)       | (8)         |
|------------------|------------|----------------------|-----------------------------------|----------------------|--------------------------|-----------|-------------|
| $t \backslash k$ | $\alpha^t$ | $\alpha^t \cdot c_t$ | $\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot c_i$ | $\alpha^k \cdot S_k$ | $C - \alpha^k \cdot S_k$ | (4) + (6) | $\Gamma(k)$ |
| 1                | 0,8929     | 714,3                | 714,3                             | 3.571,4              | 1.428,6                  | 2.142,9   | 20.000,4    |
| 2                | 0,7972     | 733,4                | 1.447,7                           | 2.869,9              | 2.130,1                  | 3.577,8   | 17.641,5    |
| 3                | 0,7118     | 754,5                | 2.202,2                           | 2.313,3              | 2.686,7                  | 4.888,9   | 16.962,4    |
| 4                | 0,6355     | 775,3                | 2.977,5                           | 1.843,0              | 3.157,0                  | 6.134,5   | 16.830,7 *  |
| 5                | 0,5674     | 794,4                | 3.771,9                           | 1.475,3              | 3.524,7                  | 7.296,6   | 16.867,9    |
| 6                | 0,5066     | 815,7                | 4.587,6                           | 1.190,6              | 3.809,4                  | 8.397,0   | 17.019,7    |
| 7                | 0,4523     | 836,8                | 5.424,4                           | 972,6                | 4.027,4                  | 9.451,8   | 17.258,8    |
| 8                | 0,4039     | 860,3                | 6.284,7                           | 767,4                | 4.232,6                  | 10.517,3  | 17.643,0    |
| 9                | 0,3606     | 883,5                | 7.168,2                           | 613,0                | 4.387,0                  | 11.555,2  | 18.072,2    |
| 10               | 0,3220     | 904,7                | 8.072,9                           | 499,1                | 4.500,9                  | 12.573,8  | 18.544,7    |

Tasa de actualización :  $i = 12\%$  (anual)  $\Rightarrow \alpha = 1.12^{-1} = 0.8929$

## Renovación de equipos. Explotación limitada

Hipótesis :

- Primer equipo con edad 1 – período .
- Explotación del sistema durante los próximos  $H$  períodos.
- Posible renovación del primer equipo en los próximos  $H-1$  períodos.
- A lo sumo se realiza una renovación durante la explotación.

Coste total sin actualizar ( $\alpha = 1$ ):

$$G(k) = \left( \sum_{t=2}^k c_t - S_k \right) + \left( C + \sum_{t=1}^{H-k+1} c_t - S_{H-k+1} \right) \forall k = 1, \dots, H + 1$$

Coste total actualizado ( $\alpha < 1$ ):

$$G(k) = \left( \sum_{t=2}^k \alpha^{t-1} c_t - \alpha^{k-1} S_k \right) + \left( C + \sum_{t=1}^{H-k+1} \alpha^t c_t - \alpha^{H-k+1} S_{H-k+1} \right) \forall k = 1, \dots, H + 1$$

## Renovación de equipos. Explotación limitada. Ejemplo-3 (1/3)

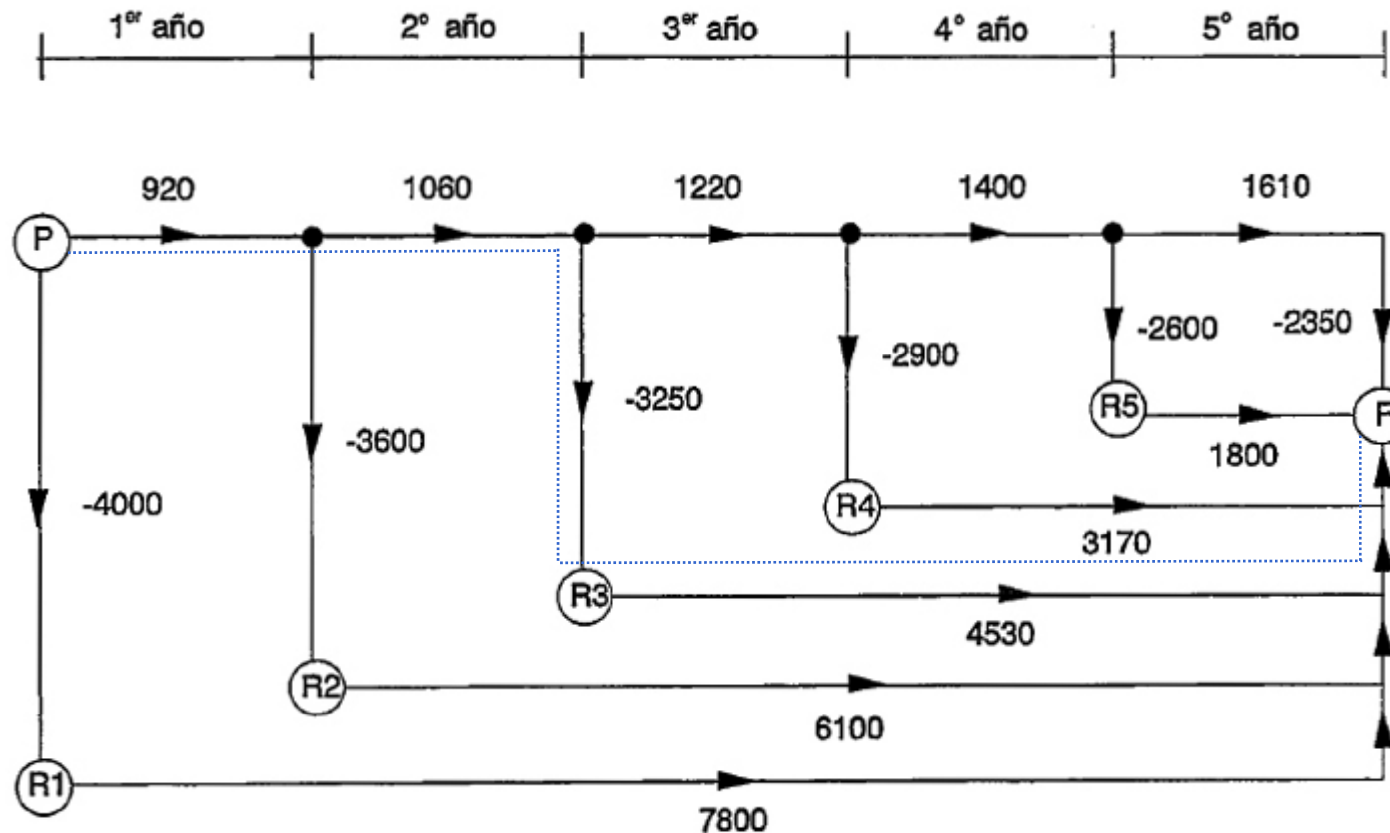
*Ejemplo-3: Renovación de un equipo con horizonte de explotación limitado sin actualización de costes.*

| (1)   | (2)   | (3)                | (4)   | (5)       | (6)                   | (7)            |
|-------|-------|--------------------|-------|-----------|-----------------------|----------------|
| $t/k$ | $c_k$ | $\sum_{t=2}^k c_t$ | $S_k$ | (3) - (4) | coste<br>2ª camioneta | coste<br>total |
| 1     | 800   | 0                  | 4.000 | -4.000    | 7.800                 | 3.800          |
| 2     | 920   | 920                | 3.600 | -2.680    | 6.100                 | 3.420          |
| 3     | 1.060 | 1.980              | 3.250 | -1.270    | 4.530                 | 3.260 *        |
| 4     | 1.220 | 3.200              | 2.900 | 300       | 3.120                 | 3.420          |
| 5     | 1.400 | 4.600              | 2.600 | 2.000     | 1.800                 | 3.800          |
| 6     | 1.610 | 6.210              | 2.350 | 3.860     | —                     | 3.860          |

Coste de adquisición del equipo:  $C=5000 \text{ um}$ . Se considera un primer equipo con edad 1; la explotación del sistema se hará durante los próximos 5 años.

## Renovación de equipos. Explotación limitada. Ejemplo-3 (2/3)

*Ejemplo-3: Renovación de un equipo con horizonte de explotación limitado sin actualización de costes.*



Grafo asociado al problema.

## Renovación de equipos. Explotación limitada. Ejemplo-3 (3/3)

*Ejemplo-3: Renovación de un equipo con horizonte de explotación limitado con actualización de costes.*

| (1)   | (2)            | (3)                      | (4)                                   | (5)                      | (6)       | (7)  | (8)                           |
|-------|----------------|--------------------------|---------------------------------------|--------------------------|-----------|--|-------------------------------|
| $t/k$ | $\alpha^{t-1}$ | $\alpha^{t-1} \cdot c_t$ | $\sum_{t=2}^k \alpha^{t-1} \cdot c_t$ | $\alpha^{k-1} \cdot S_k$ | (4) - (5) | coste 2 <sup>a</sup><br>camioneta<br>actualizado | coste<br>actualizado<br>total |
| 1     | 1              | 800                      | 0                                     | 4.000                    | -4.000    | 7.296,6  | 3.296,6                       |
| 2     | 0,8929         | 821,5                    | 821,5                                 | 3.214,4                  | -2.392,9  | 5.477,5  | 3.084,6                       |
| 3     | 0,7972         | 845,0                    | 1.666,5                               | 2.590,9                  | -924,4    | 3.897,4  | 2.973,0 *                     |
| 4     | 0,7118         | 868,4                    | 2.534,9                               | 2.064,2                  | 470,7     | 2.546,7  | 3.017,4                       |
| 5     | 0,6355         | 889,7                    | 3.424,6                               | 1.652,3                  | 1.772,3   | 1.361,8  | 3.134,1                       |
| 6     | 0,5674         | 913,5                    | 4.338,1                               | 1.333,4                  | 3.004,7   | —  | 3.004,7                       |

Tasa de actualización :  $i = 12\%$  (anual)  $\Rightarrow \alpha = 1.12^{-1} = 0.8929$   
 Coste de adquisición del equipo:  $C=5000 \text{ um}$ . Se considera un primer  
 equipo con edad 1; la explotación del sistema se hará durante los  
 próximos 5 años.



## Substitución antes de la avería. Conceptos básicos

---

- *Nomenclatura básica:*

$v(t)$ : ley de supervivencia del elemento.

$c_a$ : coste de la avería en pleno funcionamiento (paros, defectos,..).

$c_s$ : coste de reposición del elemento, averiado o no.

$\theta$ : edad de la renovación.

$\Gamma(\theta)$ : coste medio de la renovación por unidad de tiempo a la edad  $\theta$ .

- *En tales condiciones:*

$$\Gamma(\theta) = \frac{c_s v(\theta) + (c_s + c_a)(1 - v(\theta))}{\int_0^\theta v(t) dt} = \frac{c_s + (1 - v(\theta))c_a}{\bar{t}(\theta)}$$

## Substitución antes de la avería. Caso continuo (1/3)

- *Condición económica para sustitución preventiva:*

$$\exists \theta < \infty : \Gamma(\theta) < \Gamma(\infty)$$

$$\Gamma(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{c_s + (1 - v(x))c_a}{\bar{t}(x)} \right] = \frac{c_s + c_a}{\bar{t}}$$

- *Condición de óptimo para sustitución preventiva:*

$$\frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{dv(\theta)}{d\theta} c_a \bar{t}(\theta) - \frac{d\bar{t}(\theta)}{d\theta} [c_s + (1 - v(\theta))c_a] = 0$$

$$\text{como: } v'(\theta) = \frac{dv(\theta)}{d\theta} ; \lambda(\theta) = -\frac{v'(\theta)}{v(\theta)} ; v(\theta) = \frac{d\bar{t}(\theta)}{d\theta}$$

$$\text{hay renovación si: } \exists \theta^* : \phi(\theta^*) \equiv v(\theta^*) + \lambda(\theta^*) \bar{t}(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a}$$

## Substitución antes de la avería. Caso continuo (2/3)

- *Análisis de la función  $\Phi(\theta)$ :*

$$\text{Valores extremos para } \phi(\theta) = v(\theta) + \lambda(\theta)\bar{t}(\theta) : \left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \phi(\theta) = 1 \\ \phi(\infty) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi(\theta) = \lambda(\infty)\bar{t} \end{array} \right\}$$

$$\text{Condición de óptimo para } \phi(\theta) : \phi(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a} > 1$$

Conclusión :  $\phi(\theta)$  creciente  $\Rightarrow \phi'(\theta) = \lambda'(\theta)\bar{t}(\theta) > 0 \Rightarrow \lambda(\theta)$  creciente (desgaste)

$$\text{Casos : } \frac{c_s + c_a}{c_a} \left\{ \begin{array}{l} < \lambda(\infty)\bar{t} \Rightarrow \phi(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a} \Rightarrow \Gamma(\theta^*) = c_a \lambda(\theta^*) \\ \geq \lambda(\infty)\bar{t} \Rightarrow \text{no conviene renovar} \Rightarrow \forall \theta > 0 \text{ es } \Gamma(\theta) > \frac{c_s + c_a}{\bar{t}} \end{array} \right\}$$

## Substitución antes de la avería. Caso continuo (3/3)

- *Análisis de la función  $\Phi(\theta)$ . Ejemplo-1: ley exponencial:*

$$v(t) = e^{-\lambda t}, \lambda(t) = \lambda, \bar{t} = \frac{1}{\lambda}; \phi(\infty) = \lambda(\infty)\bar{t} = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1 < \frac{c_s + c_a}{c_a} \Rightarrow \text{no renovar}$$

- *Análisis de la función  $\Phi(\theta)$ . Ejemplo-2: ley lineal:*

$$v(t) = 1 - \alpha t \quad \forall t \in [0, \alpha^{-1}]; \lambda(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha t}; \bar{t}(t) = \frac{1}{2\alpha} [1 - (1 - \alpha t)^2]$$

$$\phi(t) = v(t) + \lambda(t)\bar{t}(t) = v(t) + \frac{1 - v(t)^2}{2v(t)}; \phi(\infty) \equiv \phi(\alpha^{-1}) \rightarrow \infty > \frac{c_s + c_a}{c_a} = \rho \Rightarrow \text{renovar}$$

$$\phi(\theta^*) = \rho \Rightarrow v + \frac{1 - v^2}{2v} = \rho \Rightarrow v^2 - 2\rho v + 1 = 0 \Rightarrow v = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}$$

$$v^* = \rho - \sqrt{(\rho + 1)(\rho - 1)} \Rightarrow \theta^* = \frac{1}{\alpha}(1 - v^*) \Rightarrow \theta^* = \frac{\sqrt{(\rho + 1)(\rho - 1)} - (\rho - 1)}{\alpha}$$

## Substitución antes de la avería. Caso discreto (1/2)

- *Nomenclatura básica:*

$k$  : instante (período) en que se produce la substitución preventiva.

$t$ : índice asociado al período.

$p_t$  : probabilidad de avería en el período  $t$ .

$v_t$  : fiabilidad en el período  $t$ .

$\lambda_t$  : tasa de avería en el período  $t$ .

$\bar{t}_k$  : tiempo medio hasta el fallo con substitución en el período  $k$ .

$\Gamma_k$  : coste medio de la renovación por período a la edad  $k$  – períodos .

- *Relaciones:*

$$v_{t+1} = v_t - p_t \quad (1) \quad p_t = \lambda_t v_t \quad (2)$$

$$\bar{t}_{k+1} = \bar{t}_k + v_k \quad (3) \quad \bar{t}_{k+1} = \sum_{t=0}^k v_t \quad (4) \quad \Gamma_k = \frac{c_s + (1 - v_k)c_a}{\bar{t}_k} \quad (5)$$

## Substitución antes de la avería. Caso discreto (2/2)

- *Ejemplo: Un sistema automático sufre averías de acuerdo con una tasa de averías dependiente del número de turnos ( $t \setminus k$ ) transcurridos desde la última substitución.*

$$c_s = 100 \text{ um}, c_a = 60 \text{ um}$$

| (1)<br>$t \setminus k$ | (2)<br>$v_t$ | (3)<br>$\lambda_t$ | (4)<br>$p_t$ | (5)<br>$t_k^{(2)}$ | (6)<br>$160 - 60 \cdot v_k$ | (7)<br>$\Gamma_k$ |
|------------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------------|-----------------------------|-------------------|
| 8                      | 1            | 0                  | 0            | 8                  | 100                         | 12,5              |
| 9                      | 1            | 0,02               | 0,02         | 9                  | 100                         | 11,11             |
| 10                     | 0,98         | 0,05               | 0,049        | 10                 | 101,2                       | 10,12             |
| 11                     | 0,931        | 0,08               | 0,0745       | 10,98              | 104,14                      | 9,48              |
| 12                     | 0,8565       | 0,12               | 0,1028       | 11,911             | 108,61                      | 9,12              |
| 13                     | 0,7537       | 0,17               | 0,1281       | 12,7675            | 114,778                     | 8,99 *            |
| 14                     | 0,6256       | 0,23               | 0,1439       | 13,5212            | 122,464                     | 9,06              |
| 15                     | 0,4817       | 0,30               | 0,1445       | 14,1468            | 131,098                     | 9,27              |
| 16                     | 0,3372       | 0,38               | 0,1281       | 14,6285            | 139,768                     | 9,55              |
| 17                     | 0,2091       | 0,47               | 0,0983       | 14,9657            | 147,454                     | 9,85              |
| 18                     | 0,1108       | 0,57               | 0,0632       | 15,1748            | 153,352                     | 10,11             |
| 19                     | 0,0476       | 0,68               | 0,0324       | 15,2856            | 157,144                     | 10,28             |
| 20                     | 0,0152       | 0,70               | 0,0106       | 15,3332            | 159,088                     | 10,38             |
| 21                     | 0,0046       | 0,80               | 0,0037       | 15,3484            | 159,724                     | 10,41             |
| 22                     | 0,0009       | 0,90               | 0,0008       | 15,3530            | 159,946                     | 10,42             |
| 23                     | 0,0001       | 1,00               | 0,0001       | 15,3539            | 159,994                     | 10,42             |
| 24                     | 0            | —                  | —            | 15,3540            | 160                         | 10,42             |

## Substitución en grupo (1/7)

---

- *Nomenclatura básica:*

$N$  : número de elementos nuevos que se instalan en el instante 0.

$t$  : índice asociado al instante (período) de tiempo.

$k$  : instante (período) en que se produce la substitución de todos los elementos.

$v_t$  : fiabilidad de un elemento en el instante  $t$  (ley de supervivencia).

$p_t$  : probabilidad incondicional de avería de un elemento en el período  $[t, t + 1)$ .

$\lambda_t$  : tasa de avería de un elemento en el período  $[t, t + 1)$ .

$c_i$  : coste de unitario de una substitución individual (*um/unidad*).

$c_g$  : coste unitario de una substitución en grupo (*um/unidad*).

$s_t$  : número de elementos substituidos individualmente en el instante  $t$ .

$\Gamma_k$  : coste por período cuando se renueva en grupo en el instante  $k$ .

Hipótesis :  $c_g < c_i$

## Substitución en grupo (2/7)

$$\text{Relaciones: } \left\{ \begin{array}{l} p_t = v_t - v_{t+1} \text{ ; con } v_0 = 1 \\ \lambda_t = \frac{p_t}{v_t} = \frac{v_t - v_{t+1}}{v_t} = -\frac{\Delta v_t}{v_t} \end{array} \right\} \forall t = 0, \dots, T$$

$$s_0 = N$$

$$s_1 = s_0 p_0 = s_0 (v_0 - v_1)$$

$$s_2 = s_0 p_1 + s_1 p_0 = s_0 (v_1 - v_2) + s_1 (v_0 - v_1)$$

$$s_3 = s_0 p_2 + s_1 p_1 + s_2 p_0 = s_0 (v_2 - v_3) + s_1 (v_1 - v_2) + s_2 (v_0 - v_1)$$

...

$$s_k = \sum_{t=0}^{k-1} s_t p_{k-t-1} = \sum_{t=0}^{k-1} s_t (v_{k-t-1} - v_{k-t})$$

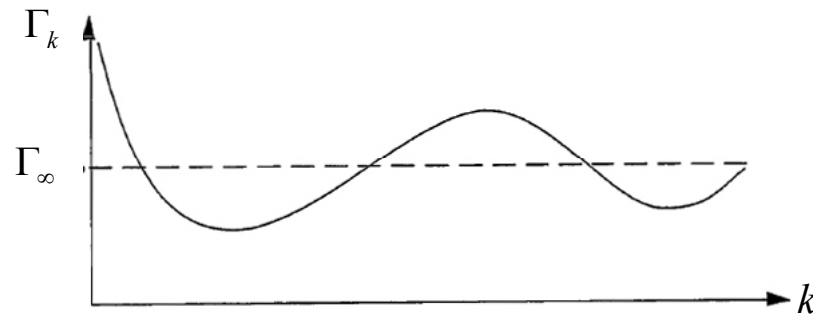
$$\text{Objetivo: } \min_k \Gamma_k = \frac{1}{k} \left[ s_0 c_g + c_i \sum_{t=1}^{k-1} s_t \right]$$



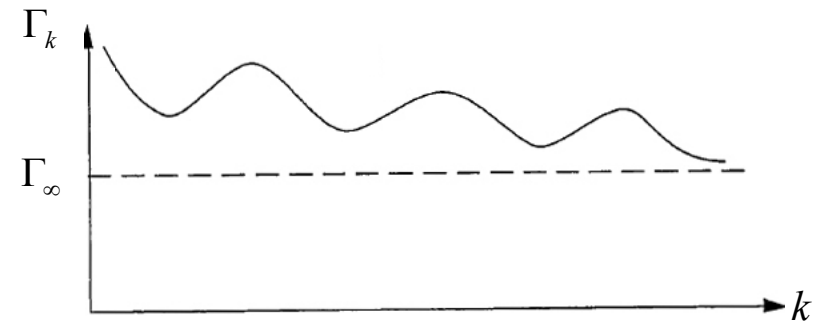


## Substitución en grupo (3/7)

- *Casos:*



Caso-1: Mínimo coste por período para el primer mínimo relativo.



Caso-2: Mínimo coste por período para un valor impario de  $k$ .

Obtención de  $\Gamma_\infty$  en régimen permanente :

$$N = s_0 = s(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = s \sum_{t=0}^{\infty} v_t = s\bar{t} \Rightarrow s = \frac{N}{\bar{t}} \Rightarrow \Gamma_\infty = c_i s$$

## Substitución en grupo (4/7)

- *Ejemplo: Determinar el coste mínimo por período para el caso  $N=1000$ ,  $c_i=1$  y  $c_g=0.8$  con la siguiente ley discreta de supervivencia.*

|         |   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |    |
|---------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| $t =$   | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10 |
| $v_t =$ | 1 | 0,98 | 0,93 | 0,87 | 0,77 | 0,66 | 0,44 | 0,23 | 0,11 | 0,04 | 0  |

Obtención de  $\Gamma_\infty$  en régimen permanente :

$$\bar{t} = \sum_{t=0}^{\infty} v_t = 1 + 0.98 + 0.93 + \dots + 0.04 + 0 = 6.03 \text{ ut}$$

$$s = \frac{N}{\bar{t}} = \frac{1000}{6.03} = 165.8 \text{ u / ut}$$

$$\Gamma_\infty = c_i s = 1 \times 165.8 = 165.8 \text{ um / ut}$$

## Substitución en grupo (5/7)

- *Ejemplo:*

Supervivientes en el instante  $t$  (1 de 2)

| $t$             | $s_t$ | 1   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
|-----------------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0               | 1.000 | 980 | 930   | 870   | 770   | 660   | 440   | 230   |
| 1               | 20    |     | 19,6  | 18,6  | 17,4  | 15,4  | 13,2  | 8,8   |
| 2               | 50,4  |     |       | 49,4  | 46,9  | 43,8  | 38,8  | 33,3  |
| 3               | 62,0  |     |       |       | 60,8  | 57,7  | 53,9  | 47,7  |
| 4               | 104,9 |     |       |       |       | 102,8 | 97,6  | 91,3  |
| 5               | 120,3 |     |       |       |       |       | 117,9 | 111,9 |
| 6               | 238,6 |     |       |       |       |       |       | 233,8 |
| 7               | 243,2 |     |       |       |       |       |       |       |
| 8               | 176,6 |     |       |       |       |       |       |       |
| 9               | 150,2 |     |       |       |       |       |       |       |
| 10              | 147,1 |     |       |       |       |       |       |       |
| 11              | 131,9 |     |       |       |       |       |       |       |
| 12              | 160,0 |     |       |       |       |       |       |       |
| total superviv. |       | 980 | 949,6 | 938,0 | 985,1 | 879,7 | 761,4 | 756,8 |
| averiados       |       | 20  | 50,4  | 62,0  | 104,9 | 120,3 | 238,6 | 243,2 |

## Substitución en grupo (6/7)

- *Ejemplo:*

Supervivientes en el instante  $t$  (2 de 2)

| $t$             | $s_t$ | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0               | 1.000 | 110   | 40    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 1               | 20    | 4,6   | 2,2   | 0,8   | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2               | 50,4  | 22,2  | 11,6  | 5,5   | 2,0   | 0     | 0     | 0     |
| 3               | 62,0  | 40,9  | 27,3  | 14,3  | 6,8   | 2,5   | 0     | 0     |
| 4               | 104,9 | 80,8  | 69,2  | 46,2  | 24,1  | 11,5  | 4,2   | 0     |
| 5               | 120,3 | 104,7 | 92,6  | 79,4  | 52,9  | 27,7  | 13,2  | 4,8   |
| 6               | 238,6 | 221,9 | 207,6 | 183,7 | 157,5 | 105,0 | 54,9  | 26,2  |
| 7               | 243,2 | 238,3 | 226,2 | 211,6 | 187,3 | 160,5 | 107,0 | 55,9  |
| 8               | 176,6 |       | 173,1 | 164,2 | 153,6 | 136,0 | 116,6 | 77,7  |
| 9               | 150,2 |       |       | 147,2 | 139,7 | 130,7 | 115,7 | 99,1  |
| 10              | 147,1 |       |       |       | 144,2 | 136,8 | 128,0 | 113,3 |
| 11              | 131,9 |       |       |       |       | 129,3 | 122,7 | 114,8 |
| 12              | 160,0 |       |       |       |       |       | 156,8 | 148,8 |
| total superviv. |       | 823,4 | 849,8 | 852,9 | 868,1 | 840,0 | 819,1 |       |
| averiados       |       | 176,6 | 150,2 | 147,1 | 131,9 | 160,0 | 180,9 |       |

## Substitución en grupo (7/7)

- Ejemplo:

Cálculo de costes por período

| $k$ | $s_t$ | $\sum_{t=1}^{k-1} s_t$ | coste total | $\Gamma_k$ |
|-----|-------|------------------------|-------------|------------|
| 1   | 20    | 0                      | 800         | 800        |
| 2   | 50,4  | 20                     | 820         | 410        |
| 3   | 62,0  | 70,4                   | 870,4       | 290,1      |
| 4   | 104,9 | 132,4                  | 932,4       | 233,1      |
| 5   | 120,3 | 237,3                  | 1037,3      | 207,5      |
| 6   | 238,6 | 357,6                  | 1157,6      | 192,9      |
| 7   | 243,2 | 596,2                  | 1396,2      | 199,5      |
| 8   | 176,6 | 839,4                  | 1639,4      | 204,9      |

Primer mínimo

$$\Gamma_{\infty} (= 165.8) < \Gamma_6 (= 192.9)$$

$$\text{Si } c_g = 0.5 \Rightarrow \Gamma_6 = \frac{1}{6} \left[ s_0 c_g + c_i \sum_{t=1}^{6-1} s_t \right] = \frac{500 + 357.6}{6} = 142.9 \text{ um / ut}$$