



CIRCUITS I COMPONENTS ELECTRONICS



Tema 6

REGIM PERMANENT SINUSOÏDAL



Índex



- **Introducció números complexos.**
- **Definició de fasor.**
- **Sumes d'ones sinusoidals d'igual freqüència mitjançant fasors.**
- **Resposta permanent sinusoidal d'un circuit.**
- **Impedància complexa.**
- **Transformador ideal.**
- **Potència.**
- **Anàlisi de circuits amb fonts de diferent freqüència.**



Introducció als números complexos.



- **Definició de número complex:**

- Es un numero de la forma :

- $z = x + j y.$

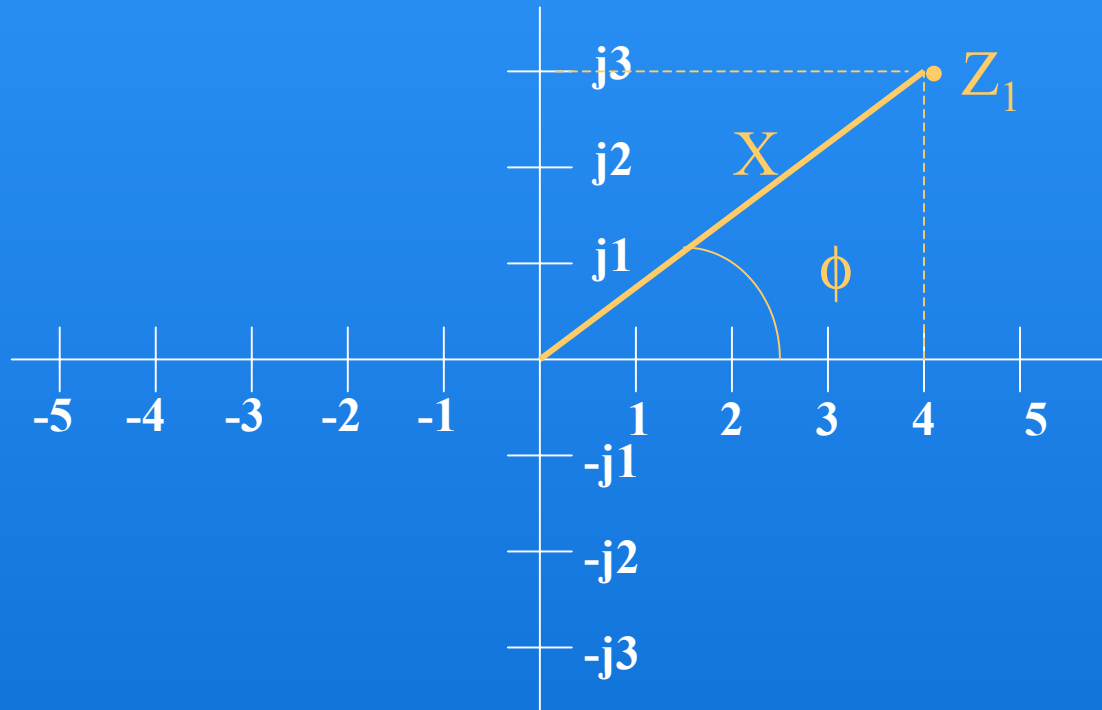
- x i y son números reals i $j = \sqrt{-1}$.

- $x = \text{part real de } z \text{ (Re } z\text{)}.$

- $y = \text{part Imaginaria de } z \text{ (Im } z\text{)}.$

- **Pla complex:**

- Es el pla on es representen els números complexos. En el eix horitzontal es representa la part Real i en el vertical la part Imaginaria.



$$Z_1 = 4 + j3 \text{ en forma rectangular}$$

$$Z_1 = X \angle \phi \text{ en forma polar}$$



Operacions amb números complexos



De coordenades rectangulars a polars

$$z_1 = a + jb \Rightarrow z_1 = X \angle \phi$$
$$X = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\phi = \arctg \frac{b}{a}$$

De coordenades polars a rectangulars

$$z_1 = X \angle \phi \Rightarrow z_1 = a + jb$$
$$a = X \cdot \cos \phi$$
$$b = X \cdot \sin \phi$$

Multiplicació en coordenades polars

$$z_1 = X_1 \angle \phi_1 \quad // \quad z_2 = X_2 \angle \phi_2$$
$$z_1 \cdot z_2 = (X_1 \cdot X_2) \angle (\phi_1 + \phi_2);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{X_1}{X_2} \angle (\phi_1 - \phi_2);$$

Divisió en coordenades rectangulars

$$z_1 = a + jb \quad // \quad z_2 = c + jd$$
$$z_2^* = c - jd = \text{Conjugat de } z_2$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} \right) + j \left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \right)$$

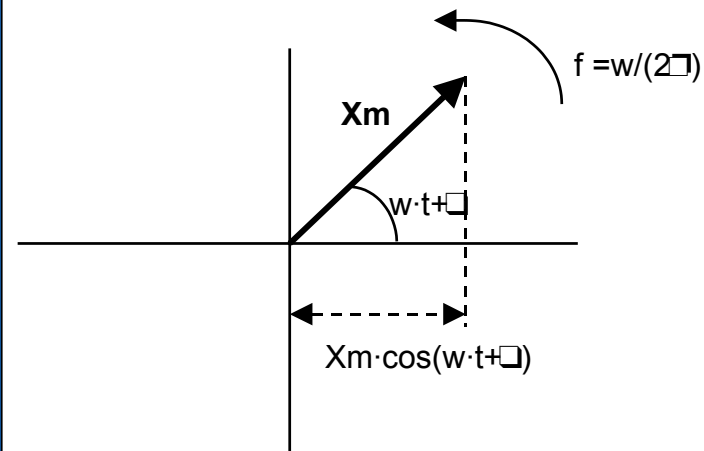
Suma en coordenades rectangulars

$$z_1 = a + jb \quad // \quad z_2 = c + jd$$
$$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$$

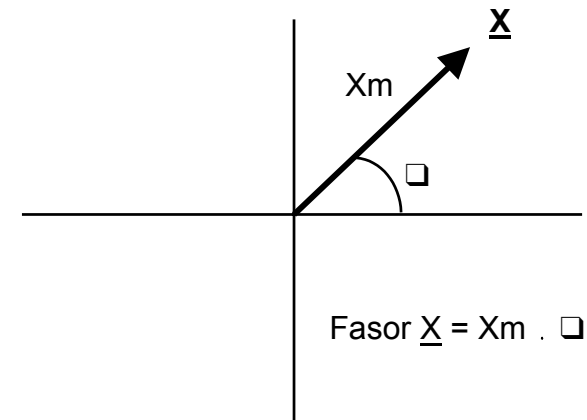
Multiplicació en coordenades rectangulars

$$z_1 = a + jb \quad // \quad z_2 = c + jd$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + j(a \cdot d + b \cdot c)$$

FASOR ROTATIU



FASOR NO ROTATIU



Qualsevol ona sinusoidal es pot representar com la projecció horitzontal d'un fasor rotatiu de velocitat angular w

Fotografia quan $t=0$.

Coneixen la freqüència, les variables necessàries per definir un senyal sinusoidal son: X_m i ϕ



Notes



- Qualsevol ona sinusoidal es pot representar per la formula:

$$X(t) = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

- $\sin(\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t - 90^\circ)$
- $-\sin(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t - 180^\circ)$
- $-\cos(\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t - 180^\circ)$

Adreçes web de interes:

[http://members.es.tripod.de/pefeco/fasores/cor alt indice.htm](http://members.es.tripod.de/pefeco/fasores/cor_alt_indice.htm)

<http://www.jhu.edu/~signals/phasorlecture2/indexphasorlect2.htm>

<http://www.electronicworkbench.com/>

Suma d'ones sinusoidals d'igual freqüència mitjançant fasors

$$V_1 = 5 \cdot \sin(\omega t) = 5 \cdot \cos(\omega t - 90) \quad // \quad V_2 = 8 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\overline{V}_1 = 5 \angle -90 \quad // \quad \overline{V}_2 = 8 \angle 0 \quad // \quad f = 1 \text{ Hz.}$$

$$\overline{V}_1 = a + jb \quad // \quad \overline{V}_2 = c + jd$$

$$a = 5 \cdot \cos(-90) = 0 \quad // \quad b = 5 \cdot \sin(-90) = -5$$

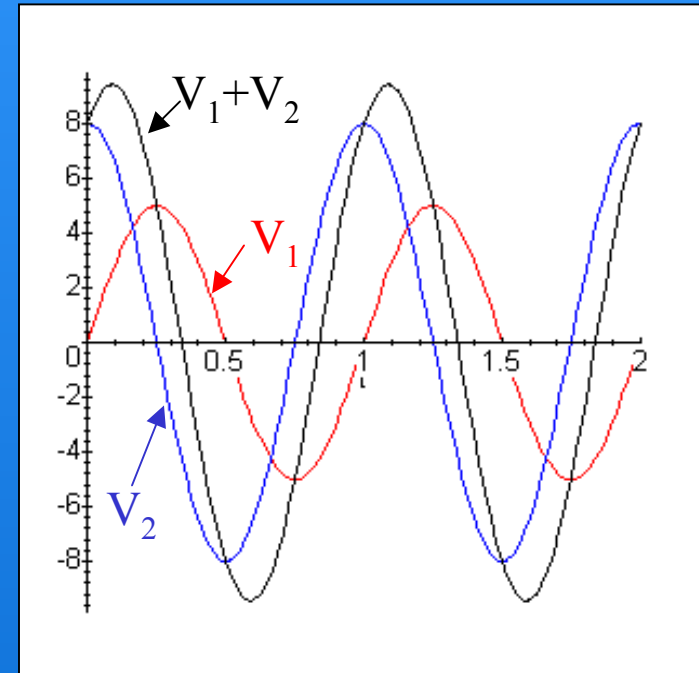
$$c = 8 \cdot \cos(0) = 8 \quad // \quad d = 8 \cdot \sin(0) = 0$$

$$\overline{V}_1 = 0 - j5 \quad // \quad \overline{V}_2 = 8 + j0$$

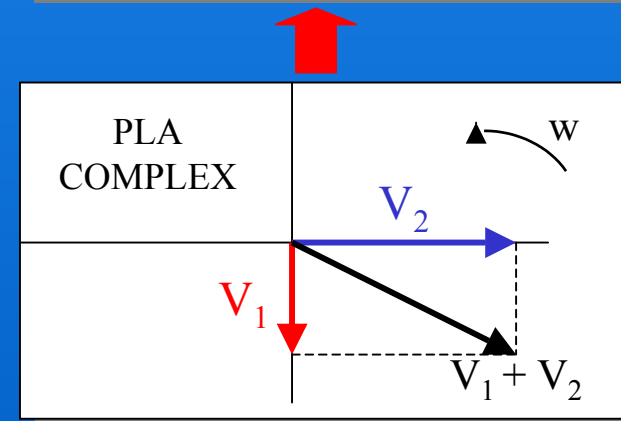
$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = (0 + 8) + j(-5 + 0) = 8 - j5 = \overline{V}_s$$

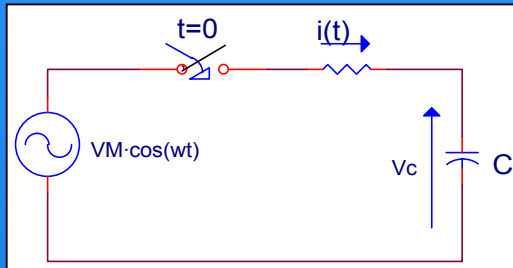
$$X_s = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \quad // \quad \phi_s = \arctg \frac{-5}{8} = -32^\circ$$

$$V_s = 9,43 \cdot \cos(\omega t - 32)$$



Representació fasorial





Apliquem kirchoff $\Rightarrow R \cdot C \cdot \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_M \cdot \cos(w \cdot t) \cdot u(t)$



$$V_C = \underbrace{\frac{V_M}{\sqrt{1 + w^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \cdot \cos(w \cdot t - \text{artg}(w \cdot R \cdot C))}_{\text{Resposta permanent}} - \underbrace{\frac{V_M}{1 + w^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}_{\text{Transitori}}$$

Resposta permanent

Transitori

Quan l'entrada és una ona sinusoidal la resposta permanent també és ona sinusoidal de la mateixa freqüència. Sols varia l'amplitud i la fase.

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$



CIRCUIT
LINEAL



$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_y)$$



REGIM PERMANENT

LA FREQUÈNCIA NO VARIA

- **SOLS HI HA 2 VARIABLES INCOGNITA :**
 - L'AMPLITUD(Y_M).
 - LA FASE(ϕ_Y).
- **DEFINICIÓ DE IMPEDANCIA:**
 - Relació entre el fador tensió i el fador intensitat d'un element o dipol passiu de dos terminal (és un n^o complex, però no és un fador).

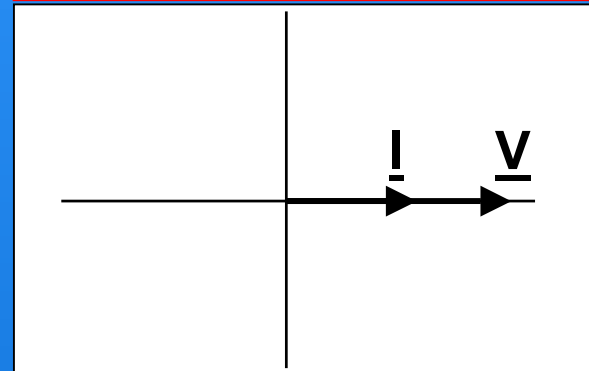
Equacions temporals

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

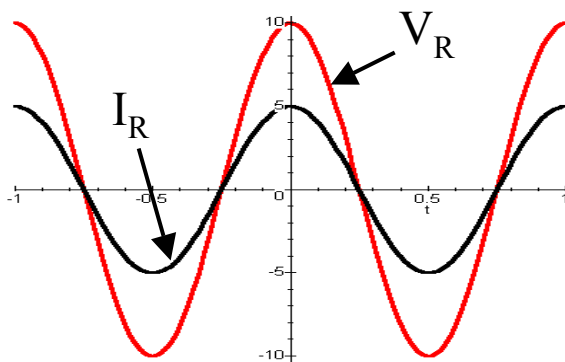
$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = \frac{V_m}{R} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Diagrama fasorial



Representació temporal



Impedància de la resistència

$$Z_R = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_M \angle 0^\circ}{(V_M / R) \angle 0^\circ} = R$$

tensió i intensitat estan en fase

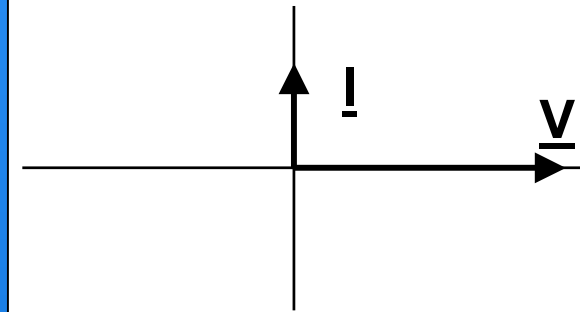
Equacions temporals

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

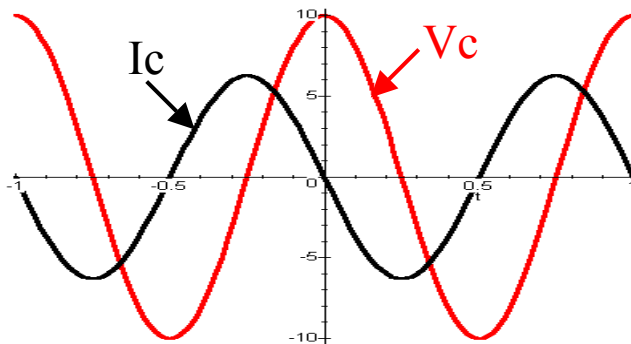
$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ)$$

Diagrama fasorial



Representació temporal.



Impedància del condensador.

$$Z_C = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_M \angle 0^\circ}{V_M \cdot \omega \cdot C \angle 90^\circ} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

La intensitat avança 90° la tensió.

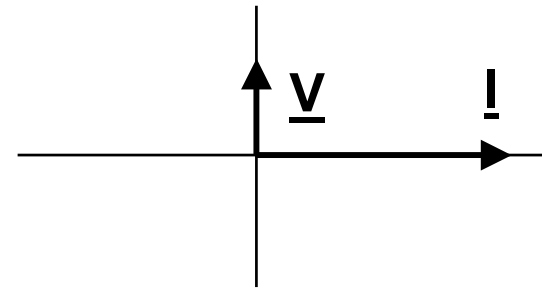
Equacions temporals

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

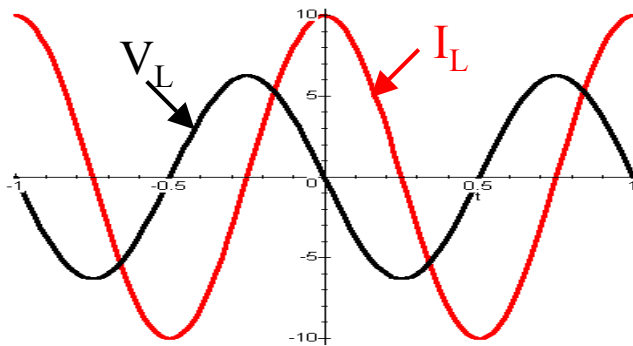
$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ)$$

Diagrama fasorial



Representació temporal.



Impedància de la bobina

$$Z_L = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{L \cdot \omega \cdot I_M \angle 90^\circ}{I_M \angle 0^\circ} = j \cdot \omega \cdot L$$

La tensió avança 90° la intensitat



Llei de Ohm en R.P.S.



- $\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \iff$ Relació lineal.
- Impedàncies en sèrie :
 - $Z_{eq} = \sum Z.$
- Admitàncies en paral·lel :
 - $Y_{eq} = \sum Y.$
- Tots els teoremes i sistemes per resoldre circuits amb resistències son vàlids per resoldre circuits amb impedàncies.

CIRCUIT EN (R.P.S.) .

Domini temporal

$$x(t) = X_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_x)$$



SENYALS \Rightarrow FASORS

IMPEDANCIES \Rightarrow N^o
COMPLEXES



FASOR RESPOSTA :

AMPLITUD I FASE



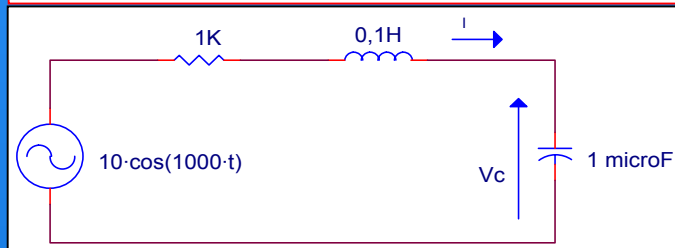
SOLUCIO PER
METODES
ALGEBRAICS



RESPOSTA TEMPORAL
SINUSOÏDAL:

$$y(t) = Y_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_y)$$

Circuit



Resolució

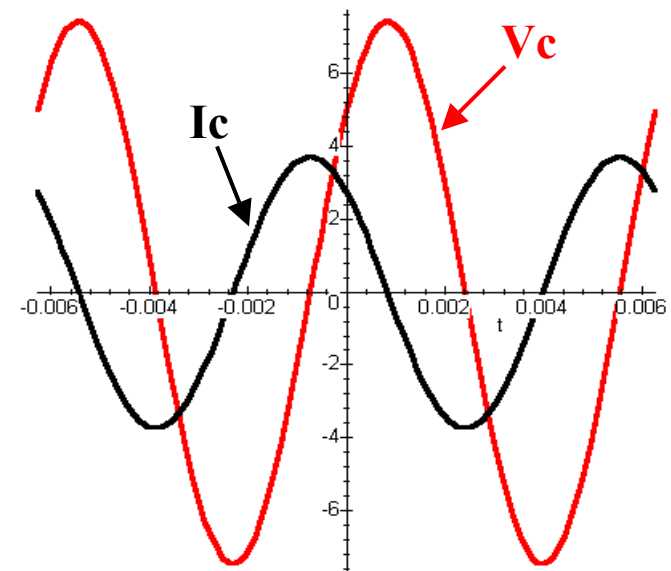
$$X_L = j\omega \cdot L = j1000 \cdot 0,1 = j100\Omega$$

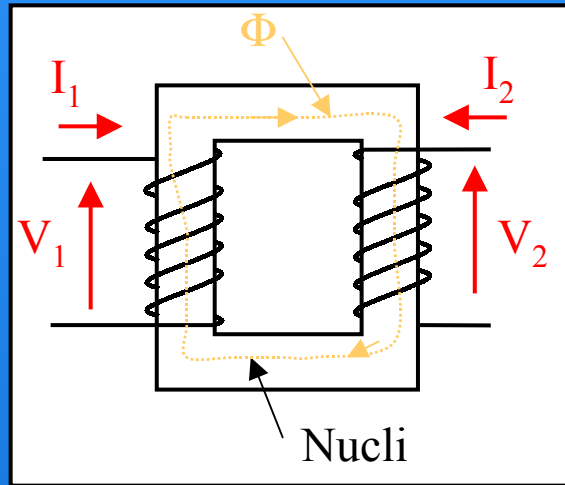
$$X_C = \frac{1}{j\omega \cdot C} = \frac{1}{j1000 \cdot 10^{-6}} = -j1000\Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + Z_L + Z_C} = \frac{10\angle 0}{1345\angle -41,9^\circ} = 7,4mA\angle 41,9^\circ$$

$$\bar{V}_C = \bar{I} \cdot Z_C = 7,4mA\angle 41,9^\circ \cdot 1K\angle -90^\circ = 7,4V\angle -48,1^\circ$$

Representació temporal





$N_1 = n^\circ$. Espires primari.

$N_2 = n^\circ$. Espires secundari.

$N = N_1 / N_2 =$ relació de transformació.

Potència primari = Potència secundari:

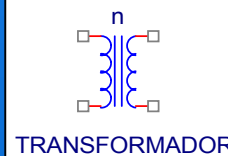
$$V_1 \cdot I_1 = V_2 \cdot I_2$$

Formules

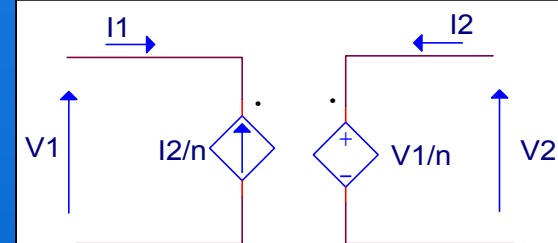
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \Rightarrow V_2 = \frac{1}{n} \cdot V_1$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{n} \cdot I_2$$

Símbol



Esquema equivalent



Només funciona amb corrent alterna.
Aïllament elèctric entre primari i secundari.



Característiques i tipus de transformadors.



- **Característiques tècniques :**
 - Tensions primari.
 - Tensions secundari.
 - Intensitat secundari (Potència útil).
- **Una classificació :**
 - De mesura.
 - Elevadors/reductors (de baixa freqüència, nucli de xapes de material ferromagnètic).
 - Aïlladors ($n = 1$):
 - De Mitja, Alta freqüència (nucli de ferrita).

$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_V)$$

$$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_I)$$

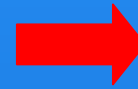
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_V) \cdot I_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_I)$$

$$p(t) = V_M \cdot I_M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_V) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_I)$$

FORMULA MATEMATICA :

$$2 \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$p(t) = \frac{V_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{V_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \phi_V + \phi_I)$$



La potència consta d'un terme constant i un terme sinusoidal de freqüència doble.

El terme constant és la **potència mitja** o **activa** i és la potència que es dissipa en el circuit

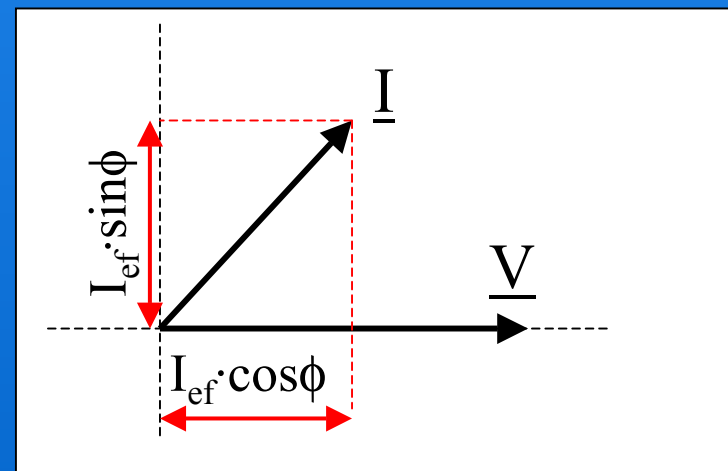
P_m = terme constant = Potència mitja

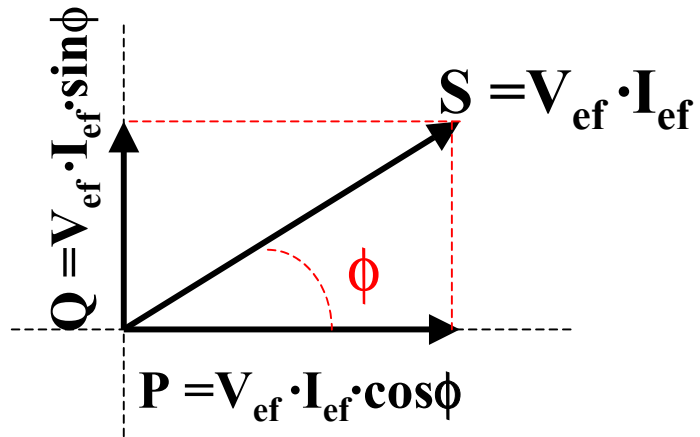
$$P_m = \frac{V_M \cdot I_M}{2} \cdot \cos(\phi_V - \phi_I)$$

$\phi = \phi_V - \phi_I$ = ANGLE ENTRE EL FASOR \bar{V} i EL FASOR \bar{I}

$$\frac{V_M \cdot I_M}{2} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_M}{\sqrt{2}} = V_{ef} \cdot I_{ef}$$

$$P_m = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \text{Factor de potència}$$





S = Potència aparent. Potència total del circuit (VA).

P = Potència activa. Potència que es dissipa en el circuit (W).

Q = Potència reactiva. Potència de intercanvi. Potència que circula però no es dissipa (VA).



Anàlisi de circuits amb fonts de diferent freqüència



- Es resol aplicant superposició.
- S'eliminen totes les fonts menys una i primer es calcula la impedància de cada element per la freqüència de la font que queda. Després es resol el circuit amb fasors i es passa a forma temporal. Es guarda el resultat.
- Es repeteix el procés per totes les fonts.
- El resultat total és la suma de tots els resultats temporals.

NO ES PODEN SUMAR FASORS DE DIFERENT FREQUÈNCIA.