Tema 7

RESPOSTA FREQÜÈNCIAL D'UN CIRCUIT

Índex

- Funció de transferència en R.P.S.
- Definició de la variable s.
- Descomposició de H(s) en termes de 1º i 2º grau.
- Representació del mòdul en Decibels.
- Representació de BODE.
- Problemes.

Funció de transferència en R.P.S.

- **DEFINICIÓ :**
  - Es la relació, en funció de la freqüència, entre el fasor de la variable de sortida i el fasor de la variable d'entrada.

variable entrada

$$x(t) = X_M \cdot \cos(w \cdot t + \phi_x)$$
$$Fasor \Rightarrow X_M \angle \phi_x$$

CIRCUIT LINEAL

variable sortida

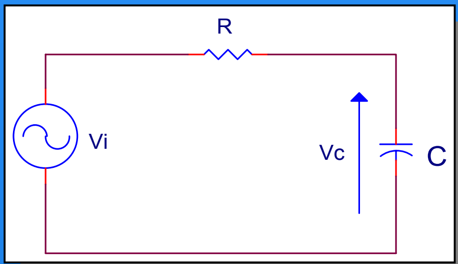
$$y(t) = Y_M \cdot \cos(w \cdot t + \phi_y)$$
$$Fasor \Rightarrow Y_M \angle \phi_y$$

$$\mathrm{H(jw)} = \frac{\text{Fasor de la variable de sortida (jw)}}{\text{Fasor de la variable d'entrada(jw)}} = \text{Funció de transferència}$$

$$\mathrm{H(jw)} = \frac{(\mathrm{Y_M} \angle \phi_y)(jw)}{(\mathrm{X_M} \angle \phi_x)(jw)} = |\mathrm{H(jw)}| \angle \varphi[H(jw)]$$

$$\overline{Y}(jw) = H(jw) \cdot \overline{X}(jw) \Rightarrow |\mathrm{H(jw)}| \cdot X_M \angle(\varphi[H(jw)] + \phi_x(jw))$$

Un exemple de funció de transferència d'un circuit



variable d'entrada = Vi
variable de sortida = Vc

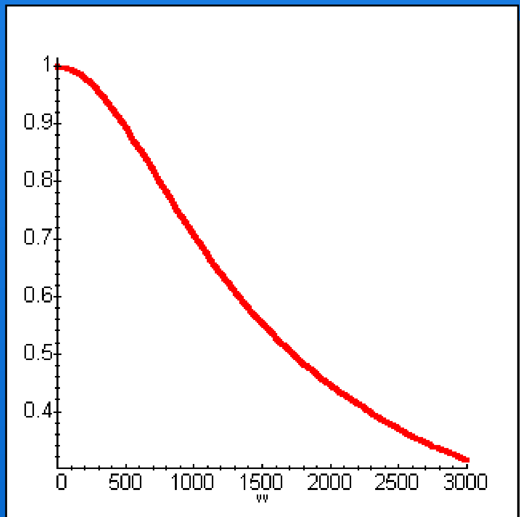
$$\frac{V_c}{V_i}(jw) = \frac{1}{1 + jw \cdot R \cdot C}$$

$$\left|\frac{V_c}{V_i}(jw)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2 \cdot R^2 \cdot C^2}}$$

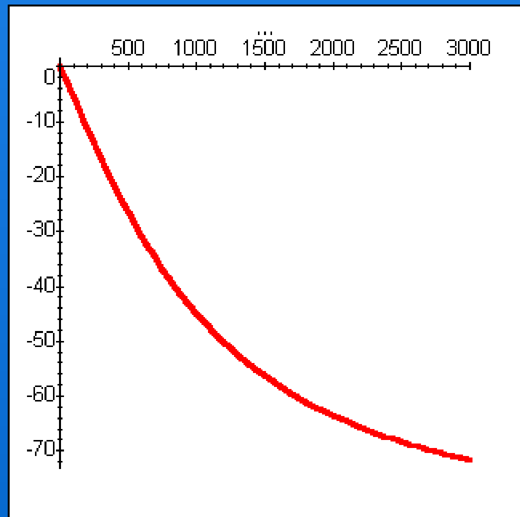
$$\varphi\left[\frac{V_c}{V_i}(jw)\right] = -artg(w \cdot R \cdot C)$$

Exemple: R=1K i C = 1μF :

$$\left|\frac{V_c}{V_i}(jw)\right|$$



$$\varphi\left[\frac{V_c}{V_i}(jw)\right]$$



Definició de la variable s

Definició :
s = jw

Impedància de la resistència

$$Z_R = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = R = R$$

Impedància del condensador.

$$Z_C = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{1}{j \cdot w \cdot C} = \frac{1}{s \cdot C}$$

Impedància de la bobina

$$Z_L = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = j \cdot w \cdot L = s \cdot L$$

Arribem a la mateixa expressió que fent servir la Transformada de Laplace per resoldre circuits elèctrics en R.P.S.
s = jw

Descomposició de H(s) en factors

Forma general de H(s)

$$H(s)=\frac{a_n\cdot s^n+\ldots+a_2\cdot s^2+a_1\cdot s+a_o}{b_n\cdot s^n+\ldots+b_2\cdot s^2+b_1\cdot s+b_o}$$

- **Si descomponem els polinomis en les seves arrels podem tenir :**
  - Arrels igual a zero.
  - Arrels reals.
  - Arrels imaginaries.
  - Arrels múltiples.

Factors bàsics:

$$[s];\quad \left[\frac{1}{s}\right];\quad [s+w_0]\ ;\quad \left[\frac{1}{s+w_0}\right];\quad \left[s^2+b\cdot s+w_0^2\right];\quad \left[\frac{1}{s^2+b\cdot s+w_0^2}\right]$$

Descomposició de H(s) en factors

H(s) es pot descomposar en la multiplicació de factors bàsics

$$\mathrm{H(s)} = \mathrm{H(0)} \cdot \mathrm{s} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} \cdots\cdots (s + w_0) \cdots \frac{1}{(s^2 + b \cdot s + w_0^2)} \cdots$$

El mòdul de H(s) és la multiplicació dels mòduls individuals

$$|\mathrm{H(s)}| = |\mathrm{H(0)}| \cdot |\mathrm{s}| \cdots \left|\frac{1}{\mathrm{s}}\right| \cdot |(s + w_0)| \cdot | \quad | \cdots \left|\frac{1}{(s^2 + b \cdot s + w_0^2)}\right| \cdots$$

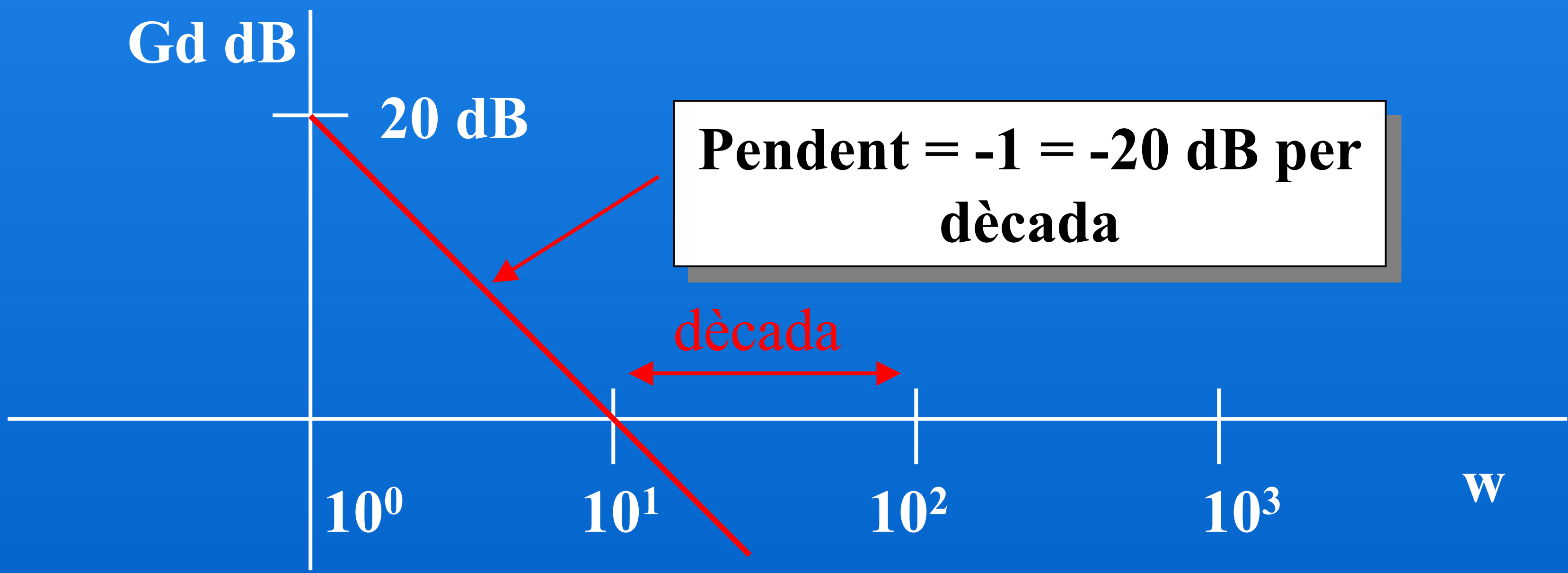
La fase de H(s) és la suma de les fases dels mòduls individuals

$$\varphi[\mathrm{H(s)}] = \varphi[\mathrm{H(0)}] + \varphi[s] + \varphi\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] + \cdots + \varphi[(s + w_0)] + \cdots + \varphi\left[\frac{1}{(s^2 + b \cdot s + w_0^2)}\right]$$

Representació del mòdul en decibels

El mòdul es representa en dB en l'eix vertical i la pulsació (w) en l'eix horitzontal però logarítmic

$$\left|\frac{V_c}{V_i}(jw)\right| = \left|H(jw)\right| \Rightarrow Gd = 20 \cdot \log(\left|H(jw)\right|)dB$$



Característiques de la representació en decibels

$$w = 0 \Rightarrow |H(0)| = \text{Guany en continua}$$

$$|\mathrm{H(jw)}| = 1 \Rightarrow 20 \cdot \log 1 = 0dB$$

$$|\mathrm{H(jw)}| = 10 \Rightarrow 20 \cdot \log 10 = 20dB$$

$$|\mathrm{H(jw)}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3dB$$

$$w = 0 \Rightarrow |H(0)| = \text{Guany en continua}$$

$$|\mathrm{H(jw)}| = h(0) \cdot h_1(jw) \cdot h_2(jw) \cdots h_n(jw)$$

$$Gd = 20 \cdot \log(|\mathrm{H(jw)}|) = 20 \cdot \log(h(0) \cdot h_1(jw) \cdot h_2(jw) \cdots h_n(jw))$$

$$Gd = 20 \cdot [\log(h(0)) + \log(h_1(jw)) + \log(h_2(jw)) + \cdots + \log(h_n(jw))]$$

La multiplicació es converteix en suma

Factor s

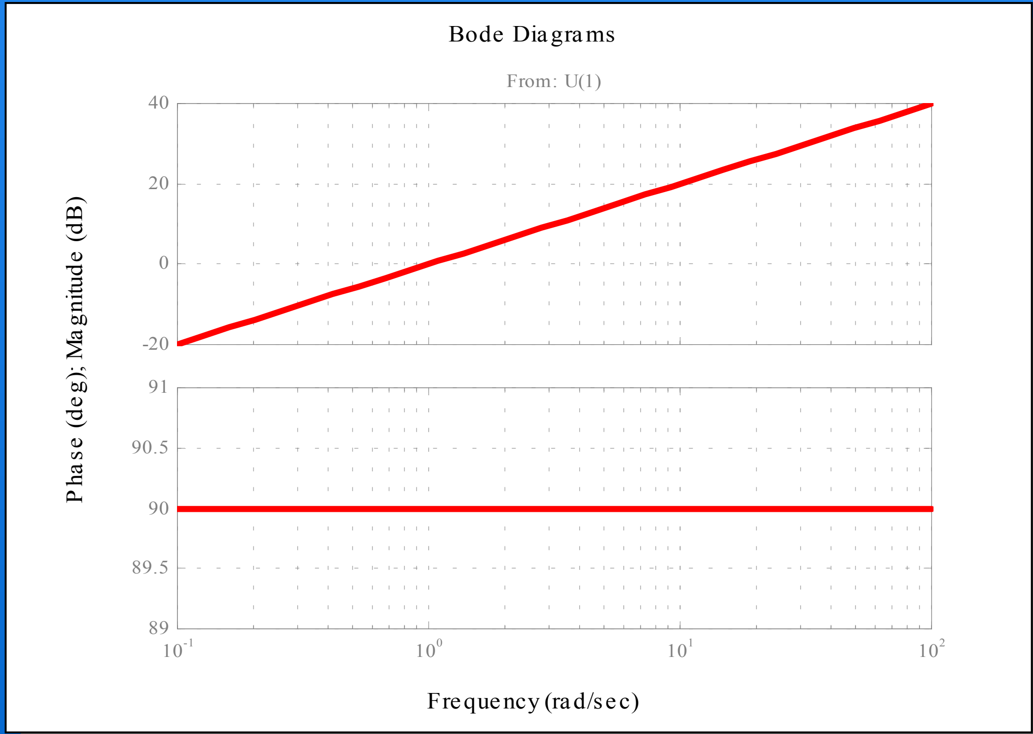
S

$$\left|H(s)\right| = w \Rightarrow Gd_s = 20\cdot\log(w) \Rightarrow 20\cdot dB/decada$$

$$\mathrm{x} = \log(\mathrm{w}) \Leftarrow \text{eix horitzontal logaritmic}$$

$$\mathrm{x} = 1 = \text{decada}$$

$$\varphi\left|H(s)\right| = 90^{\circ}$$

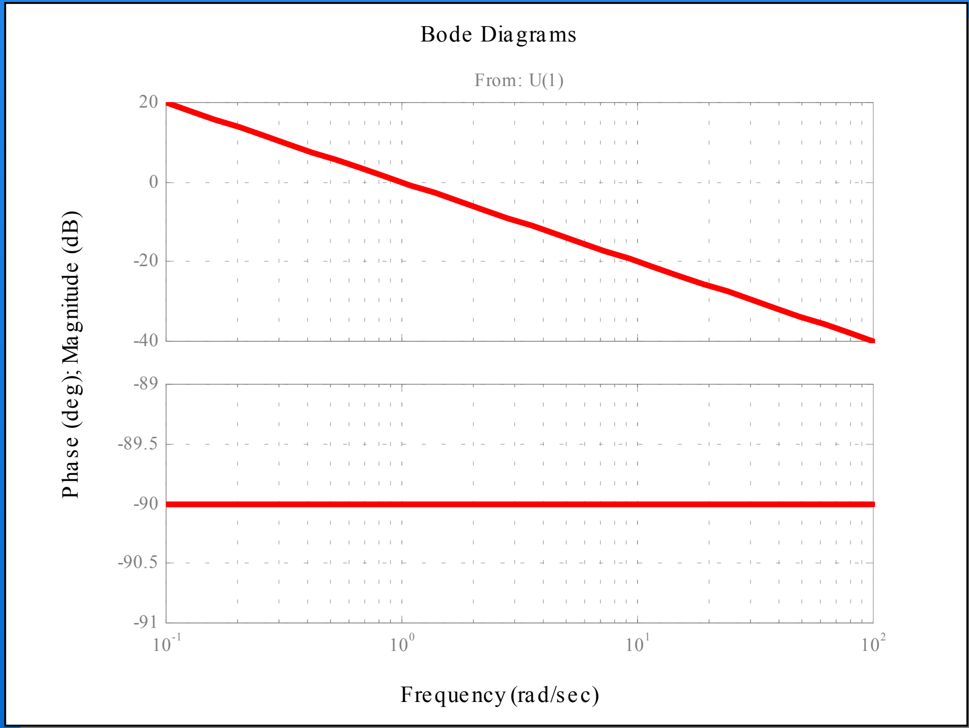


Factor 1/s

$$\frac{1}{s}$$

$$\left|H(jw)\right| = \frac{1}{w} \Rightarrow Gd_s = 20\cdot\log\left(\frac{1}{w}\right) \Rightarrow -20\cdot\log(w) = -20dB/decada$$

$$\varphi\left[H(jw)\right] = -90^o$$

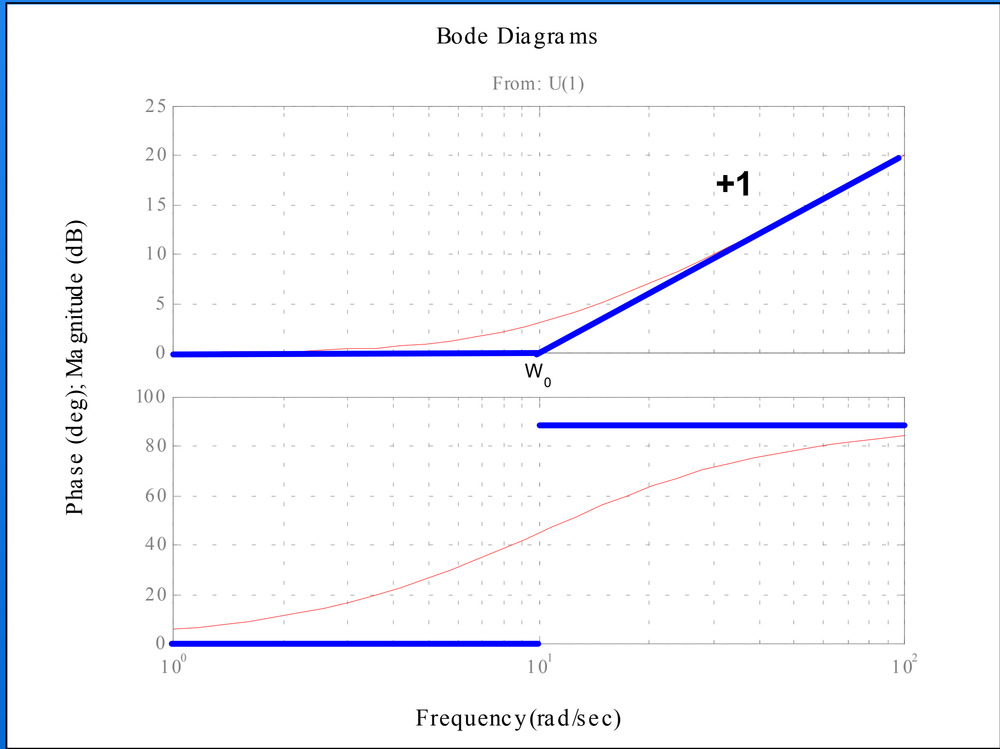


Factor $(s+w_0)/w_0$

$$\frac{1}{w_0}\cdot(s+w_0)$$

$$|H(jw)| = \frac{\sqrt{w^2+w_0^2}}{w_0}\left|\begin{array}{l} w \ll w_0 \Rightarrow Gd|H(jw)| = 0 \\ w \gg w_0 \Rightarrow Gd|H(jw)| = +20dB/decada \\ w = w_0 \Rightarrow Gd|H(jw_0)| = +3dB \end{array}\right.$$

$$\varphi[H(jw)]\left|\begin{array}{l} w \ll w_0 \Rightarrow \varphi[H(jw)] = 0^{o} \\ w \gg w_0 \Rightarrow \varphi[H(jw)] = +90^{o} \end{array}\right.$$



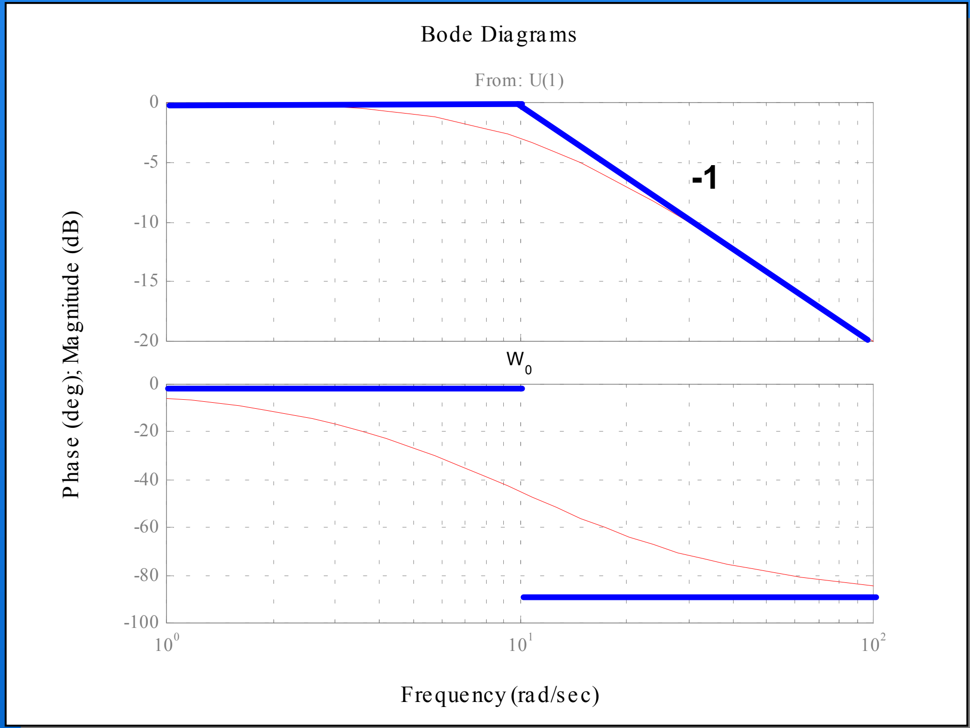
Factor $w_0 / (s+w_0)$

$$\frac{w_0}{1} \cdot \frac{1}{(s + w_0)}$$

$$|H(jw)| = \frac{w_0}{\sqrt{w^2 + w_0^2}} \quad \begin{cases} w << w_0 \Rightarrow Gd|H(jw)| = 0 \\ w >> w_0 \Rightarrow Gd|H(jw)| = -20dB/decada \\ w = w_0 \Rightarrow Gd|H(jw_0)| = -3dB \end{cases}$$

$$\varphi[H(jw)]$$

$$\begin{cases} w << w_0 \Rightarrow \varphi[H(jw)] = 0^o \\ w >> w_0 \Rightarrow \varphi[H(jw)] = -90^o \end{cases}$$



Factor $(s^2+b\cdot s+w_0^2)/w_0^2$

$$\frac{1}{w_0^2}\cdot\left(s^2+b\cdot s+w_0^2\right)$$

MODUL

$$b=2\cdot\xi\cdot w_0 \Rightarrow arrels\ \text{complexes} \Rightarrow \xi<1$$

$$H(jw)=\frac{1}{w_0^2}\cdot\left(j^2\cdot w^2+j\cdot w\cdot b+w_0^2\right)=\frac{1}{w_0^2}\cdot\left[\left(w_0^2-w^2\right)+jw\cdot b\right]$$

$$\left|H(jw)\right|=\frac{1}{w_0^2}\cdot\sqrt{\left(w_0^2-w^2\right)^2+w^2\cdot b^2}$$

$$w<<w_0 \Rightarrow \left|H(jw)\right|=\frac{w_0^2}{w_0^2}=1 \Rightarrow Gd=0dB$$

$$w=w_0 \Rightarrow \left|H(jw)\right|=\frac{w_0\cdot b}{w_0^2}=\frac{w_0^2\cdot 2\cdot\xi}{w_0^2}=2\cdot\xi \Rightarrow Gd=20\cdot\log(2\cdot\xi)$$

$$w<<w_0 \Rightarrow \left|H(jw)\right|=\sqrt{w^4+w^2\cdot b^2}\approx\sqrt{w^4}=w^2 \Rightarrow Gd=20\cdot\log(w^2)=40dB/decada$$

Factor $(s^2+b\cdot s+w_0^2)/w_0^2$

$$\frac{1}{w_0^2}\cdot\left(s^2+b\cdot s+w_0^2\right)$$

FASE

$$b=2\cdot\xi\cdot w_0 \Rightarrow arrels\ \text{complexes} \Rightarrow \xi<1$$

$$H(jw)=\frac{1}{w_0^2}\cdot\left(j^2\cdot w^2+j\cdot w\cdot b+w_0^2\right)=\frac{1}{w_0^2}\cdot\left[\left(w_0^2-w^2\right)+jw\cdot b\right]$$

$$\varphi\left[H(jw)\right]=artg\left(\frac{w\cdot 2\cdot\xi\cdot w_0}{w_0^2-w^2}\right)$$

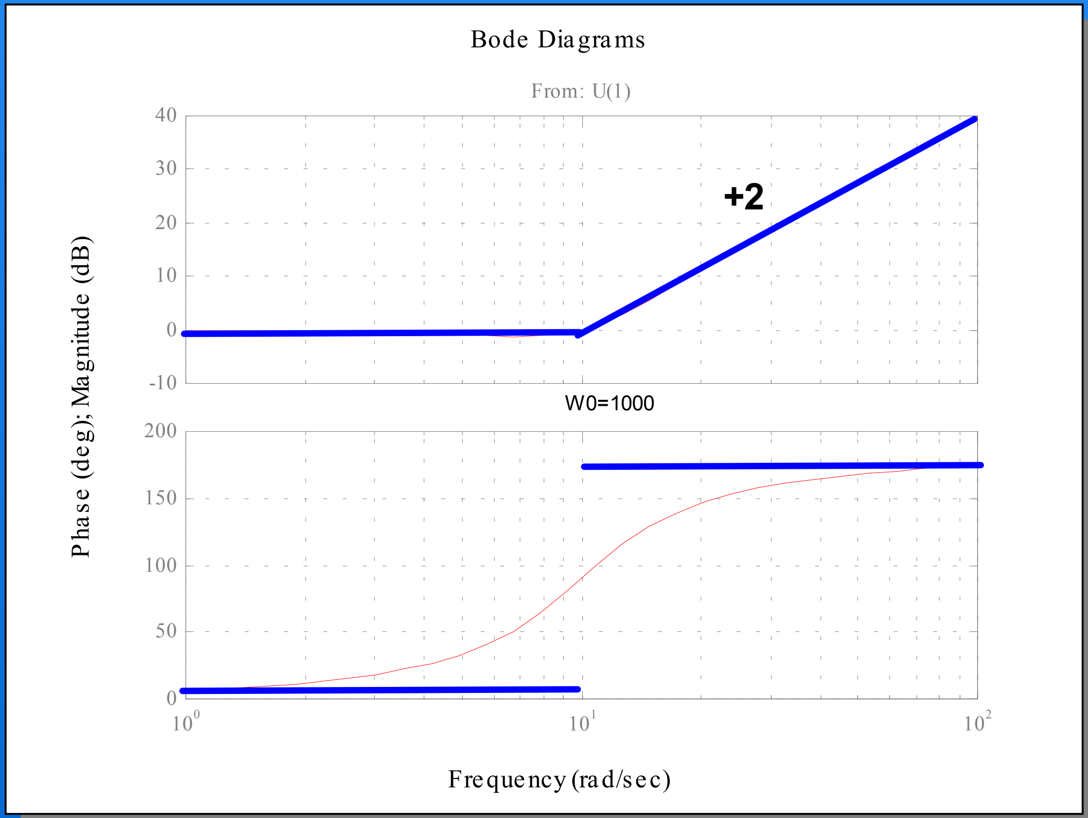
$$w<<w_0 \Rightarrow \varphi\left[H(jw)\right]=artg\left(\frac{0}{w_0^2}\right)=0^{\circ}$$

$$w=w_0 \Rightarrow \varphi\left[H(jw)\right]=artg\left(\frac{w_0^2\cdot 2\cdot\xi}{0}\right)=90^{\circ}$$

$$w<<w_0 \Rightarrow \varphi\left[H(jw)\right]=artg\left(\frac{1}{-w^2}\right)=180^{\circ}$$

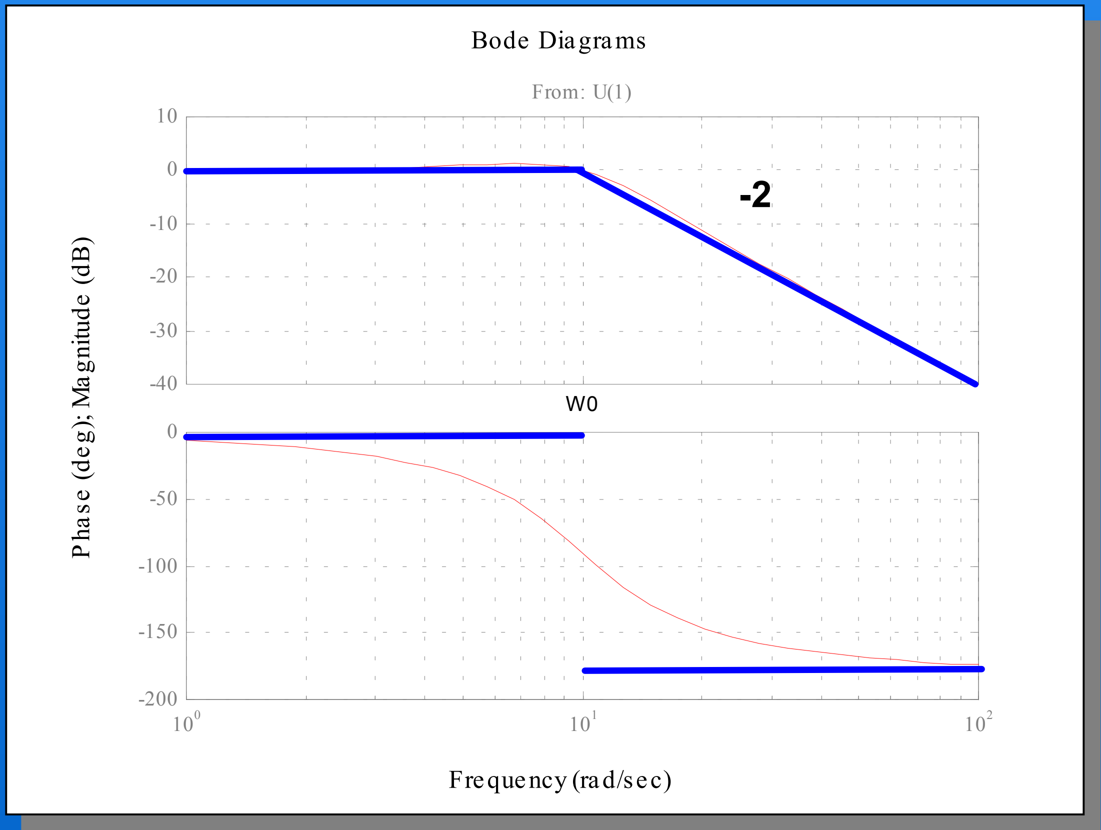
Exemple de factor quadratic(1)

$$\frac{1}{100}\cdot\left(s^2+10\cdot s+100\right)$$



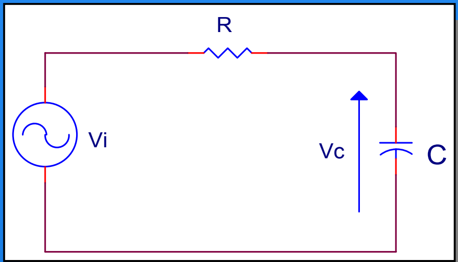
Exemple de factor quadratic(2)

$$\frac{100}{s^2 + 10 \cdot s + 100}$$



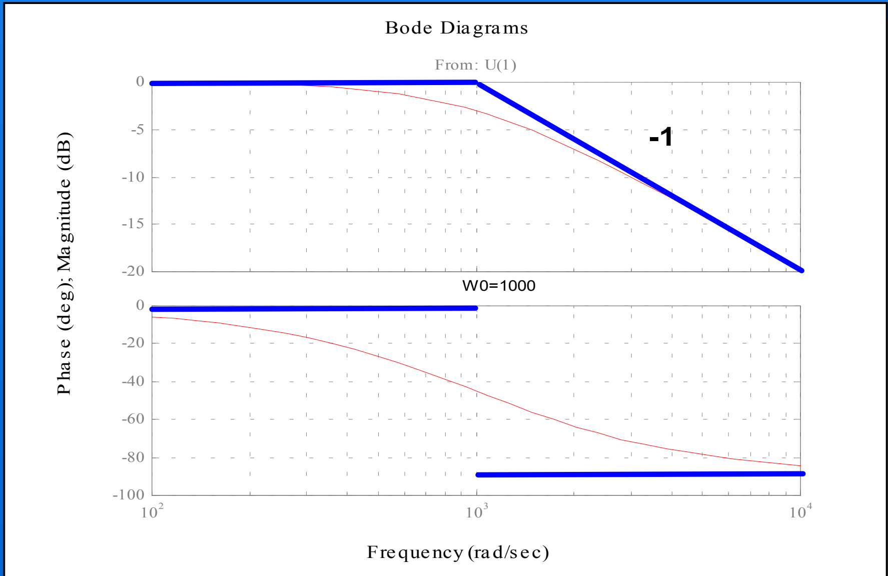
Problema nº1

Dibuixar el diagrama de BODE del circuit de la figura : H(s) = Vo(s)/Vi(s)



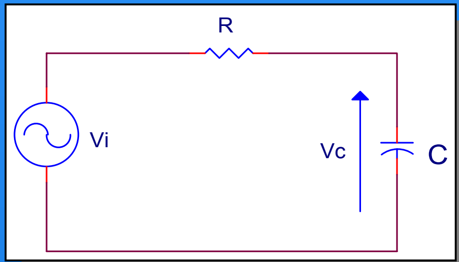
$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{R\cdot C\cdot s+1}=\frac{1/R\cdot C}{s+1/R\cdot C}\Rightarrow w_0=\frac{1}{R\cdot C}$$

$$R=1K\Omega\,//\,C=1\mu F\Rightarrow=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1000}{s+1000}$$



Ll. Ferrer

Comparació amb fer-ho amb eixos normals



variable d'entrada = Vi
variable de sortida = Vc

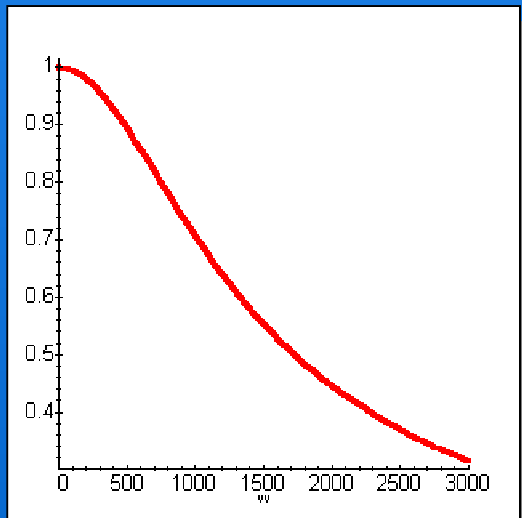
$$\frac{V_c}{V_i}(jw) = \frac{1}{1 + jw \cdot R \cdot C}$$

$$\left|\frac{V_c}{V_i}(jw)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2 \cdot R^2 \cdot C^2}}$$

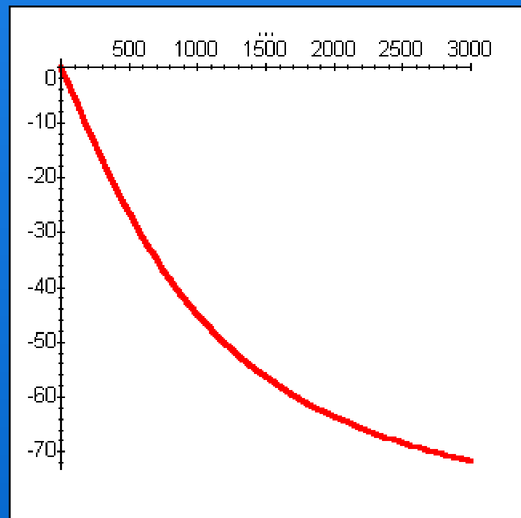
$$\varphi\left[\frac{V_c}{V_i}(jw)\right] = -artg(w \cdot R \cdot C)$$

Exemple: R=1K i C = 1µF :

$$\left|\frac{V_c}{V_i}(jw)\right| \Rightarrow$$

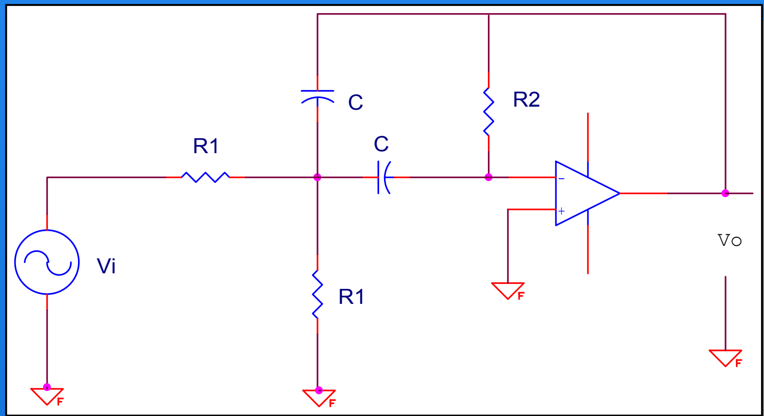


$$\varphi\left[\frac{V_c}{V_i}(jw)\right] \Rightarrow$$



Problema nº 2

Trobar la funció de transferència del circuit de la figura i dibuixar el diagrama de BODE :
H(s) = Vo(s)/Vi(s)



$$H(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=-s\cdot\frac{1/C\cdot R_1}{s^2+\frac{2}{C\cdot R_2}\cdot s+\frac{2}{C^2\cdot R_1\cdot R_2}}\cdot\frac{2/C\cdot R_2}{2/C\cdot R_2}$$

$$H(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=-\frac{C\cdot R_2}{2}\cdot s\cdot\frac{2/\left(C^2\cdot R_1\cdot R_2\right)}{s^2+\frac{2}{C\cdot R_2}\cdot s+\frac{2}{C^2\cdot R_1\cdot R_2}}$$

EXEMPLE :

$R_1 = 1 K\Omega$

$R_2 = 100\ K\Omega$

$C = 1 nF$

$$H(s) = -0{,}05\cdot 10^{-3}\cdot s\cdot\frac{2\cdot 10^{10}}{s^2\cdot + 2\cdot 10^4\cdot s + 2\cdot 10^{10}}$$

$w_0 = \sqrt{2\cdot 10^{10}} = 141421\ \ rad/s \Rightarrow f_0 = 22507\ \ Hz$.

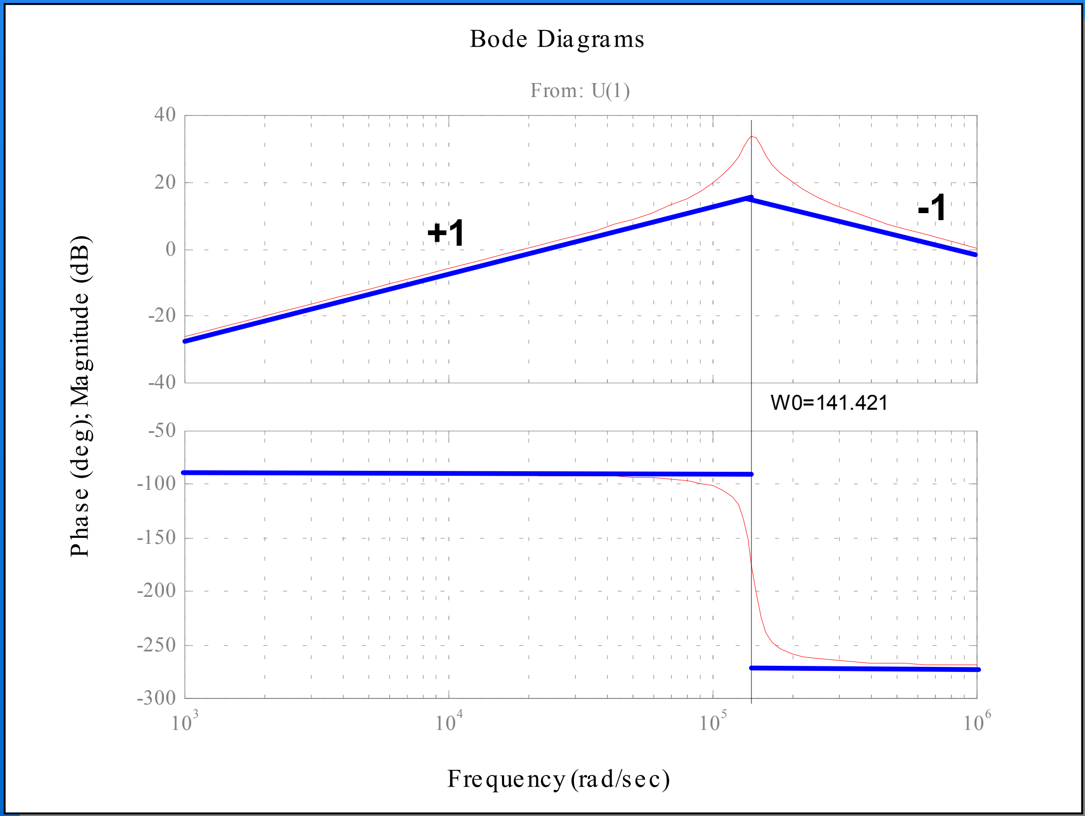
Problema nº 2

Diagrama de Bode

$$H(s) = -0{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot s \cdot \frac{2 \cdot 10^{10}}{s^2 \cdot + 2 \cdot 10^4 \cdot s + 2 \cdot 10^{10}}$$

$$H(0) = 0{,}05 \cdot 10^{-3} \Rightarrow Gd(0) = 20 \cdot \log(0{,}05 \cdot 10^{-3}) = -86\ dB$$

$$w = 10^3 \Leftrightarrow 3 \text{ decades} \Rightarrow \text{s} = \text{20dB/decada//20} \cdot 3 = \text{60dB}$$



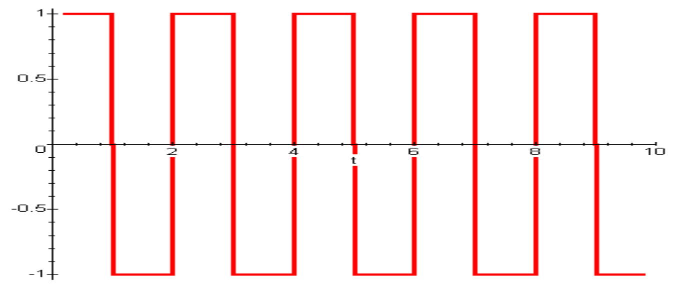
Problema nº 3

En el circuit del problema nº 2 l'excitem amb un senyal quadrat d'una freqüència de 7.502,6 Hz. i una amplitud de 1 V. El senyal quadrat l'aproximem als seus tres primers harmònics. Trobar la Vo

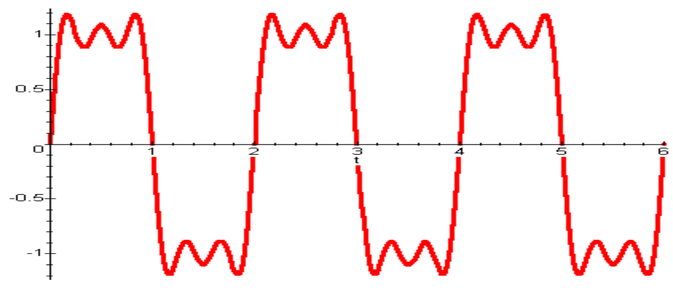
HARMÒNICS D'UN SENYAL QUADRAT

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\cdot(\cos(w_o t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\cdot\cos(3w_o t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5}\cdot\cos(5w_o t - \frac{\pi}{2}) + ...) \text{ // En el nostre cas } w_0 = 2\cdot\pi\cdot 7502{,}6$$

Senyal quadrat



Senyal aproximat



Problema nº 3

Formula general

$$|V_O| = |H(j47140)| \cdot |V_{S1}| = |H(j47140)| \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$\theta_O = \theta_H + \theta_{S1} = \theta_{H} - \frac{\pi}{2}$$

1º harmònic

$$|H(47140)| = 2{,}6$$

$$\theta_H = -1{,}6 rad.$$

$$|V_o| = 2{,}6 \cdot \frac{4}{\pi} = 3{,}3$$

$$\theta_o = -1{,}6 - 1{,}57 = -3{,}17 \cong \pi$$

$$v_{o1}(t) = 3{,}3 \cdot \cos(47140 \cdot t + \pi)$$

3º harmònic

$$|H(141421)| = 50$$

$$\theta_H = -\pi rad.$$

$$|V_o| = 50 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} = 21{,}22$$

$$\theta_o = -\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$v_{o3}(t) = 21{,}22 \cdot \cos(141421 \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

5º harmònic

$$|H(235701)| = 6{,}57$$

$$\theta_H = -1{,}43 rad.$$

$$|V_o| = 6{,}57 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{5} = 1{,}67$$

$$\theta_o = -1{,}43 - 1{,}57 = -3 \cong \pi$$

$$v_{o5}(t) = 1{,}67 \cdot \cos(235701 \cdot t + \pi)$$

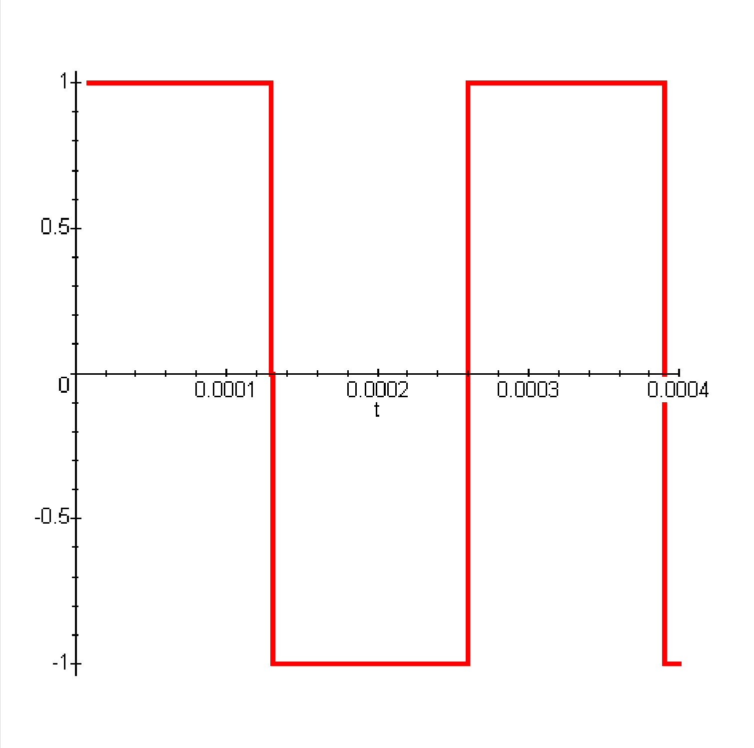
Solució final

$$v_o(t) = v_{o1}(t) + v_{o3}(t) + v_{o5}(t)$$

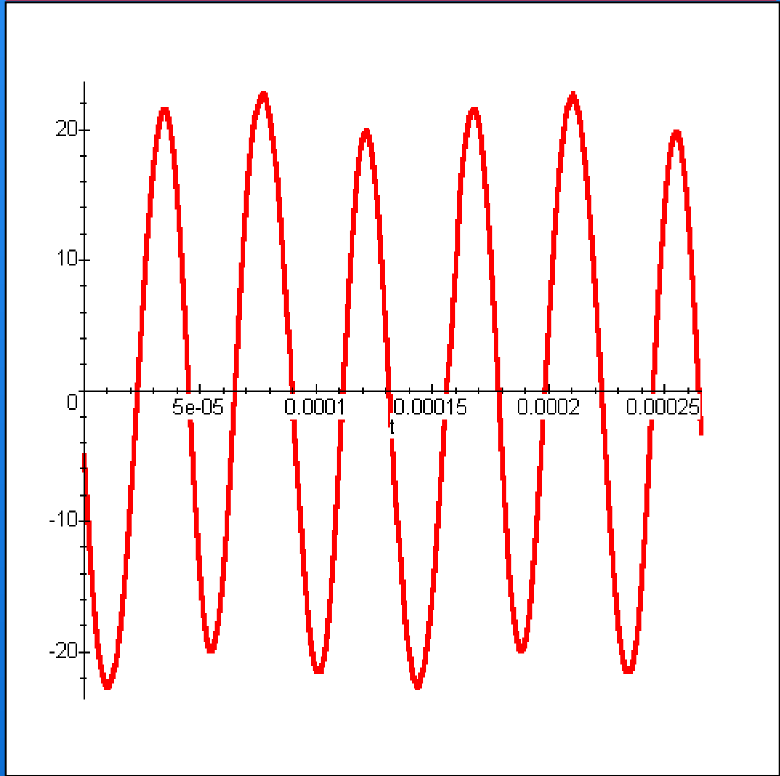
$$v_o(t) = 3{,}3 \cdot \cos(47140 t + \pi) + 21{,}22 \cdot \cos(141421 t + \frac{\pi}{2}) + 1{,}67 \cdot \cos(235701 t + \pi)$$

Problema nº 3

Senyal d'entrada



Senyal de sortida



La component principal de la sortida és una ona sinusoïdal de freqüència triple a l'entrada