UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Sistemas Avanzados de Producción. Planificación mediante programación matemática I

SISTEMAS AVANZADOS DE PRODUCCIÓN 240EO316 – Máster Universitario en: Ingeniería de Organización (240MUEO) e Ingeniería de Automoción (240MEAUT) - ETSEIB

Joaquín Bautista Valhondo

OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2017/28 240EO316 (20170215) - http://futur.upc.edu/OPE - www.prothius.com -
Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Contenido

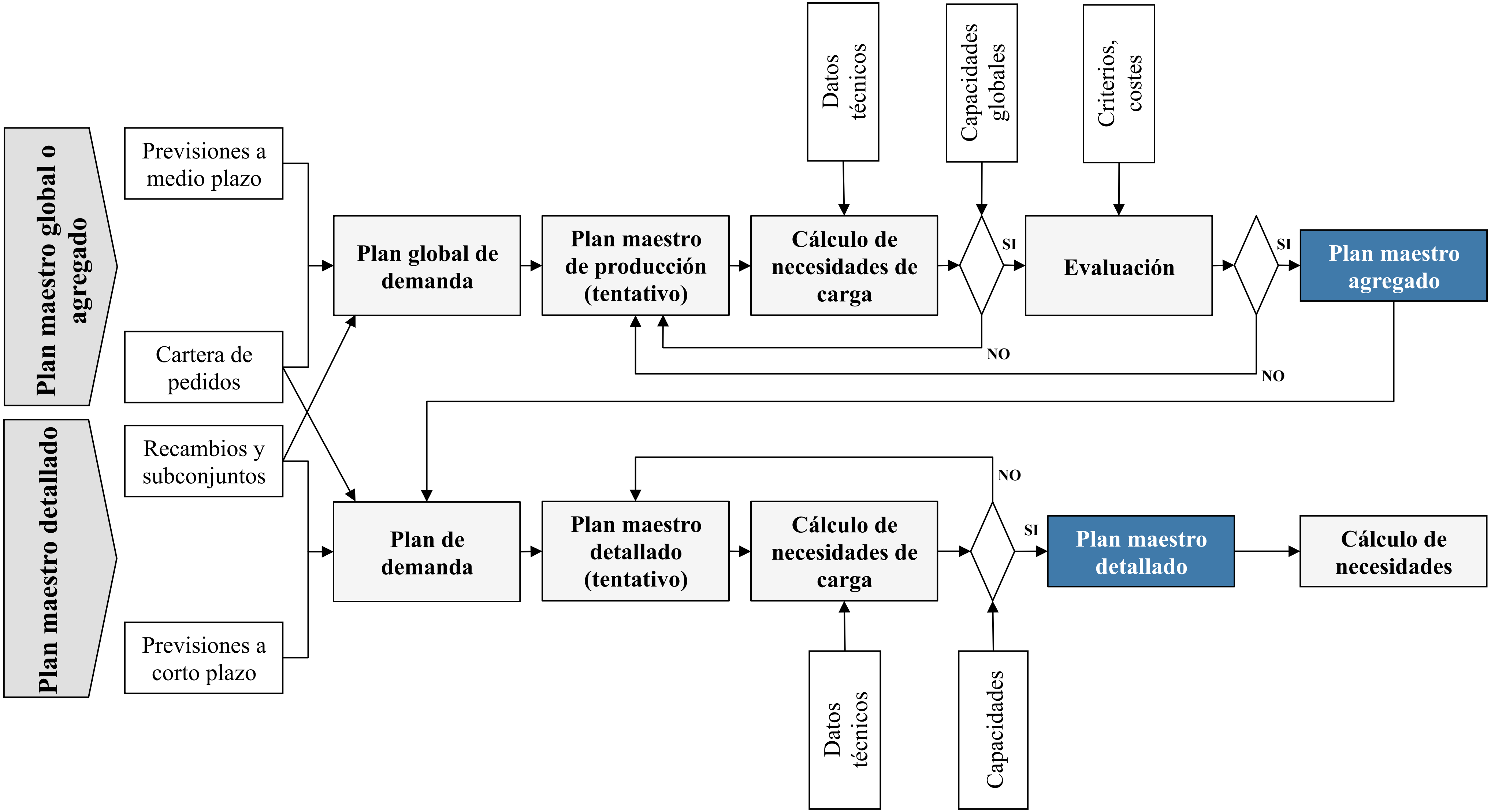
- Plan. Concepto y tipología
- Planificación. Proceso
- Planificación agregada. Hipótesis
- Planificación agregada. Nomenclatura
- Ejemplo 1. Datos y Tasas de producción ajustada
- Planificación agregada. Modelos de optimización: Bowman
- Ejemplo 1. Resolución
- Ejemplo 1. Resumen de planes
- Planificación detallada. Hipótesis
- Planificación detallada. Modelos de optimización
- Características de los modelos de planificación
- Modelo con RRHH variable y demanda diferida

Plan. Concepto y tipología

Plan.- Camino que se traza desde un estado inicial hasta un estado final para alcanzar un objetivo productivo.

NOMBRE	MOTIVO	HORIZONTE	FRECUENCIA	INTERVALO	RIGIDEZ	NIVEL
Estratégico-Producto	Definir binomio producto-mercado	10 años	2 a 3 años	1 año	4 a 5 años	Modelo gran opción
Estratégico-Proceso	Nuevas plantas Nuevas filiales	5 a 7 años	1 a 2 años	trimestral (para 1 año)	2 a 3 años	Grandes líneas
Operativo-Táctico	Coordinar inversiones	3 a 5 años	anual	Trimestral (para 1 año)	1 año	Modelo global
Maestro global	Asignar recursos críticos	12 meses	mensual	1 mes	2 meses	Familias de producto
Maestro detallado	Tasas de producción. Aprovisionamiento	16 semanas	semanal	semana	3 semanas	Productos o Mezclas
Cálculo necesidades	Órdenes fabricación y aprovisionamiento	12 semanas	semanal	semana	2 semanas	Orden
Programa operaciones	Situar operaciones en tiempo y espacio	5 días	diaria	día	1 día	Operación

Planificación. Proceso



Planificación agregada. Hipótesis

1. Una sola familia de productos y una sola etapa global productiva.
2. Se tiene un conjunto S de modalidades o fuentes de producción que representa las formas de obtener el producto; cada modalidad tiene su capacidad limitada.
3. Los costes variables de producción dependen de la modalidad empleada.
4. No hay coste fijo ni coste de cambio de nivel de producción en las modalidades.
5. Se considera un horizonte de planificación T dividido en periodos mensuales.
6. La producción de un mes puede utilizarse para atender la demanda de ese mes.
7. La tasa diaria de producción es constante durante el mes, admitiendo la posibilidad de variar dicha tasa de un mes a otro. La demanda global debe ser satisfecha.
8. El producto puede almacenarse con un coste por unidad de producto y mes.
9. La demanda puede diferirse con un coste por unidad de producto y mes.
10. El coste global de un plan es la suma de: (1) costes variables de producción, (2) costes de posesión de stock, y (3) costes por diferir la demanda.

Planificación agregada. Nomenclatura

Parámetros:

T, S	Horizonte del plan · Conjunto de modalidades o fuentes de producción (turno, planta, máquina)
$t,\ \lambda_t$	Índice de periodo $t = 0,..,T$ (mes) · Días laborables del mes $t\,(t = 1,..,T)$
$\alpha,\ I_t^*$	Factor de stock de seguridad · Stock ideal al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$
$d_t, \hat{d}_t$	Demanda del mes $t\,(t = 1,..,T)$ · Demanda corregida del mes $t\,(t = 1,..,T)$
$r_s^{\max}$	Tasa máxima de producción diaria en modalidad $s \in S$ (unidades / día)
$x_{t,s}^{\max}$	Produccion máxima con modalidad $s \in S$ en el mes t $(t = 1,..,T)$: $x_{t,s}^{\max} = \lambda_t \cdot r_s^{\max} \quad \forall t \forall s$
c_{u_s}	Coste de producción unitario en modalidad $s \in S$ (um / unidad)
c_h, c_b	Coste de posesión de stock · Coste de diferir la demanda (um / unidad_ mes)

Variables:

$x_{t,s}, X_t$	Produccion parcial con modalidad $s \in S$ y total en el mes $t\,(t = 1,..,T)$
$r_{t,s}, R_t$	Tasa parcial de producción diaria con modalidad $s \in S$ y total en el mes $t\,(t = 1,..,T)$
I_t	Stock neto al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$. $I_0 = I_0^*$ (stock inicial)
I_t^+, I_t^-	Exceso (I_t^+) y Defecto (I_t^-) de stock al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$

Ejemplo 1. Presentación (1)

Datos:

t (mes)	λ_t (días)	d_t (unidades)
1	20	1000
2	20	1200
3	22	1400
4	21	1800
5	21	1200
6	21	1000
	125	7600

$S = \{1,2,3\}$

$r_1^{\max} = 50\,\text{u/día}$ $\quad r_2^{\max} = 40\,\text{u/día}$ $\quad r_3^{\max} = 40\,\text{u/día}$

$c_{u_1} = 200\,\text{um}$ $\quad c_{u_2} = 300\,\text{um}$ $\quad c_{u_3} = 500\,\text{um}$

$c_h = 30$ um/u_mes $\quad c_b = 90$ um/u_mes $\quad \alpha = 0.1,\ I_0 = 200\,\text{u}$

Ejemplo 1. Presentación (2)

Tasas:

t (mes)	λ_t (días)	Λ_t (días)	d_t (u)	I_t^* (u)	$\hat{d}_t$ (u)	$\hat{D}_t$ (u)	$\hat{D}_t/\Lambda_t$	$\hat{d}_t/\lambda_t$
		0		200		0		
1	20	20	1000	100	900	900	45.00	45.00
2	20	40	1200	120	1220	2120	53.00	61.00
3	22	62	1400	140	1420	3540	57.10	64.55
4	21	83	1800	180	1840	5380	64.82	87.62
5	21	104	1200	120	1140	6520	62.69	54.29
6	21	125	1000	100	980	7500	60.00	46.67
	125		7600	$\alpha = 0.1$	7500			

Planificación agregada. Modelos de optimización (1)

LP-1: *Modelo de Bowman básico*

$$\text{LP-1: } \min C_T = \sum_{s\in S}\left(c_{u_s}\sum_{t=1}^{T} x_{t,s}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(c_h I_t^+ + c_b I_t^-\right) \qquad (0)$$

s.a:

$$X_t - \sum_{s\in S} x_{t,s} = 0 \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (1)$$

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (2)$$

$$I_t - I_t^+ + I_t^- = I_t^* \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (3)$$

$$r_{t,s} \le r_s^{\max} \qquad \forall t = 1,..,T,\ \forall s \in S \qquad (4)$$

$$x_{t,s} \le x_{t,s}^{\max} \qquad \forall t = 1,..,T,\ \forall s \in S \qquad (5)$$

$$x_{t,s} - \lambda_t \cdot r_{t,s} = 0 \qquad \forall t = 1,..,T,\ \forall s \in S \qquad (6)$$

$$(x_{t,s}, r_{t,s}) \ge \vec{0} \qquad \forall t = 1,..,T,\ \forall s \in S \qquad (7)$$

$$(X_t, I_t^+, I_t^-) \ge \vec{0} \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (8)$$

$$\text{Condiciones LP-1:}\begin{cases} \text{Plan sin demanda diferida } \Rightarrow I_t^- = 0 \ \ \forall t = 1,..,T \\ \text{Plan tasas JIT} \cdot \text{DS} \Rightarrow I_t^- = I_t^+ = 0 \ \ \forall t = 1,..,T \end{cases}$$

Planificación agregada. Modelos de optimización (2)

LP-2: *Modelo de Bowman modificado*

Sean: $\left\{\begin{array}{ll} \hat{x}_{t,\hat{t},s} & \text{Producción con modalidad } s \in S, \text{ en el mes } \hat{t}\ (\forall \hat{t}), \text{ para cubrir la demanda del mes } t\ (\forall t) \\ c_{t,\hat{t},s} & \text{Coste unitario de produción asociado a } \hat{x}_{t,\hat{t},s}\ (\forall t\ \forall \hat{t}\ \forall s) \end{array}\right\}$

$$\text{LP-2}: \min C_T = \sum_{t=1}^{T} \sum_{\hat{t}=1}^{T} \sum_{s=1}^{|S|} c_{t,\hat{t},s} \cdot \hat{x}_{t,\hat{t},s} \qquad (0)$$

s.a:

$$\sum_{\hat{t}=1}^{T} \sum_{s=1}^{|S|} \hat{x}_{t,\hat{t},s} = \hat{d}_t \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{x}_{t,\hat{t},s} \le x_{\hat{t},s}^{\max} \qquad \forall \hat{t} = 1,..,T; \forall s \in S \qquad (2)$$

$$\hat{x}_{t,\hat{t},s} \ge 0 \qquad \forall t = 1,..,T;\ \forall \hat{t} = 1,..,T;\ \forall s \in S \qquad (3)$$

Relaciones LP-1 · LP2: $x_{\hat{t},s} = \sum_{t=1}^{T} \hat{x}_{t,\hat{t},s}\ (\forall \hat{t}\ \forall s);\ c_{t,\hat{t},s} = \left\{\begin{array}{ll} c_{u_s} + (t-\hat{t}) \cdot c_h, & \text{si } \hat{t} \le t \\ c_{u_s} + (\hat{t}-t) \cdot c_b, & \text{si } \hat{t} > t \end{array}\right\}\ (\forall t\ \forall \hat{t}\ \forall s)$

Condiciones LP-2: $\left\{\begin{array}{l} \text{Plan sin demanda diferida: } \hat{x}_{t,\hat{t},s} = 0\ \forall \hat{t} > t\ \ (t = 1,..,T-1) \\ \text{Plan tasas JIT} \cdot \text{DS}: \hat{x}_{t,\hat{t},s} = 0\ \forall \hat{t} \ne t\ \ (t = 1,..,T) \end{array}\right\}\ (\forall s)$

Ejemplo 1. Optimización sin demanda diferida

	Mes 1		Mes 2		Mes 3		Mes 4		Mes 5		Mes 6	
$x_{\hat{\imath},s}^{\max}$	1000	800	1000	800	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
Mes 1	1000	800	1000	800	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
	200	300										
900	900											
Mes 2	100	800	1000	800	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
	230	330	200	300								
1220	100		1000	120								
Mes 3	0	800	0	680	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
	260	360	230	330	200	300						
1420					1100	320						
Mes 4	0	800	0	680	0	560	1050	840	1050	840	1050	840
	290	390	260	360	230	330	200	300				
1840							1050	790				
Mes 5	0	800	0	680	0	560	0	50	1050	840	1050	840
	320	420	290	390	260	360	230	330	200	300		
1140									1050	90		
Mes 6	0	800	0	680	0	560	0	50	0	750	1050	840
	350	450	320	420	290	390	260	360	230	330	200	300
980											980	
$x_{\hat{\imath},s}$	1000	0	1000	120	1100	320	1050	790	1050	90	980	0
	0	800	0	680	0	560	0	50	0	750	70	840
$r_{\hat{\imath},s}$	50	0	50	6	50	14.55	50	37.62	50	4.29	46.67	0

$r_1^{\max} = 50\,\text{u/día} \quad c_{u_1} = 200\,\text{um} \quad c_h = 30\ \text{um/u\_mes}$

$r_2^{\max} = 40\,\text{u/día} \quad c_{u_2} = 300\,\text{um} \quad c_b = 90\ \text{um/u\_mes}$

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Ejemplo 1. Optimización con demanda diferida

	Mes 1		Mes 2		Mes 3		Mes 4		Mes 5		Mes 6	
$x_{\hat{\imath},s}^{\max}$	1000	800	1000	800	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
Mes 1	1000	800	1000	800	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
	200	300	290	390	380	480	470	570	560	660	650	750
900	900											
Mes 2	100	800	1000	800	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
	230	330	200	300	290	390	380	480	470	570	560	660
1220	100		1000	120								
Mes 3	0	800	0	680	1100	880	1050	840	1050	840	1050	840
	260	360	230	330	200	300	290	390	380	480	470	570
1420					1100	320						
Mes 4	0	800	0	680	0	560	1050	840	1050	840	1050	840
	290	390	260	360	230	330	200	300	290	390	380	480
1840							1050	790				
Mes 5	0	800	0	680	0	560	0	50	1050	840	1050	840
	320	420	290	390	260	360	230	330	200	300	290	390
1140									1050	20	70	
Mes 6	0	800	0	680	0	560	0	50	0	820	980	840
	350	450	320	420	290	390	260	360	230	330	200	300
980											980	
$x_{\hat{\imath},s}$	1000	0	1000	120	1100	320	1050	790	1050	20	1050	0
	0	800	0	680	0	560	0	50	0	820	0	840
$r_{\hat{\imath},s}$	50	0	50	6	50	14.55	50	37.62	50	0.95	50	0

$r_1^{\max} = 50$ u/día $\quad c_{u_1} = 200$ um $\quad c_h = 30$ um/u_mes

$r_2^{\max} = 40$ u/día $\quad c_{u_2} = 300$ um $\quad c_b = 90$ um/u_mes

Ejemplo 1. Plan 6

Plan 6 · Optimización sin demanda diferida: $\vec{R} = (50.00, 56.00, 64.55, 87.62, 54.29, 46.67)$ u/día

t (mes)	λ_t (días)	d_t (u)	I_t^* (u)	$x_{t,1}$ (u)	$x_{t,2}$ (u)	X_t (u)	I_t (u)	I_t^+ (u)	I_t^- (u)
			200	$R_t = r_{t,1} + r_{t,2}$			200		
1	20	1000	100	1000	0	1000	200	100	0
2	20	1200	120	1000	120	1120	120	0	0
3	22	1400	140	1100	320	1420	140	0	0
4	21	1800	180	1050	790	1840	180	0	0
5	21	1200	120	1050	90	1140	120	0	0
6	21	1000	100	980	0	980	100	0	0
	125	7600	$\alpha = 0.1$	6180	1320	7500		100	0

$$C_T = \sum_{s\in S} c_{u_s}\left(\sum_{t=1}^{T} x_{t,s}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(c_h I_t^+ + c_b I_t^-\right)$$

COSTES	um/unidad	unidades	um
Producción modalidad 1	200	6180	1.236.000
Producción modalidad 2	300	1320	396.000
Exceso de Stock	30	100	3.000
Defecto de Stock	90	0	0
COSTE TOTAL			1.635.000

Ejemplo 1. Plan 7

Plan 7 · Optimización con demanda diferida: $\vec{R} = (50.00, 56.00, 64.55, 87.62, 50.95, 50.00)$ u/día

t (mes)	λ_t (días)	d_t (u)	I_t^* (u)	$x_{t,1}$ (u)	$x_{t,2}$ (u)	X_t (u)	I_t (u)	I_t^+ (u)	I_t^- (u)
			200	$R_t = r_{t,1} + r_{t,2}$			200		
1	20	1000	100	1000	0	1000	200	100	0
2	20	1200	120	1000	120	1120	120	0	0
3	22	1400	140	1100	320	1420	140	0	0
4	21	1800	180	1050	790	1840	180	0	0
5	21	1200	120	1050	20	1070	50	0	70
6	21	1000	100	1050	0	1050	100	0	0
	125	7600	$\alpha = 0.1$	6250	1250	7500		100	70

$$C_T = \sum_{s \in S} c_{u_s} \left(\sum_{t=1}^{T} x_{t,s} \right) + \sum_{t=1}^{T} \left(c_h I_t^+ + c_b I_t^- \right)$$

COSTES	um/unidad	unidades	um
Producción modalidad 1	200	6250	1.250.000
Producción modalidad 2	300	1250	375.000
Exceso de Stock	30	100	3.000
Defecto de Stock	90	70	6.300
COSTE TOTAL			1.634.300

Ejemplo 1. Resumen · Tasas de producción

Plan 1 · Tasa constante mínima con demanda diferida: $R_t = \hat{D}_6 / \Lambda_6 = 60.00$ u/día $\forall t$

Plan 2 · Tasa constante mínima sin demanda diferida: $R_t = \max_{1 \le \tau \le 6} \left\{ \hat{D}_\tau / \Lambda_\tau \right\} = 64.82$ u/día $\forall t$

Plan 3 · Dos tasas de producción sin demanda diferida:

$$R_t = \begin{cases} \max_{1 \le \tau \le 6} \left\{ \hat{D}_\tau / \Lambda_\tau \right\} = 64.82 \text{ u/día, si } 1 \le t \le 4 \\ \max_{5 \le \tau \le 6} \left\{ (\hat{D}_\tau - \hat{D}_4) / (\Lambda_\tau - \Lambda_4) \right\} = 54.29 \text{ u/día, si } t \ge 5 \end{cases}$$

Plan 4 · Tasas variables JIT - DS: $\vec{R} = (45.00, 61.00, 64.55, 87.62, 54.29, 46.67)$ u/día

Plan 5 · Tasas producción ajustada ($r_{t,1} = r_1^{max}$): $\vec{R} = (50.00, 56.00, 64.55, 87.62, 54.29, 50.00)$ u/día

$$\vec{R} = \begin{cases} r_{t,1} = 50.00 \text{ u/día } \forall t \\ \vec{r}_2 = (0.00, 6.00, 14.55, 37.62, 4.29, 0.00) \text{ u/día} \end{cases}$$

Plan 6 · Optimización sin demanda diferida (LP-2): $\vec{R} = (50.00, 56.00, 64.55, 87.62, 54.29, 46.67)$ u/día

Plan 7 · Optimización con demanda diferida (LP-2): $\vec{R} = (50.00, 56.00, 64.55, 87.62, 50.95, 50.00)$ u/día

Ejemplo 1. Resumen · Producción y costes

UNIDADES (u)	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3	PLAN 4	PLAN 5	PLAN 6	PLAN 7
Producción modalidad 1	6250	6250	6250	6080	6250	6180	6250
Producción modalidad 2	1250	1852	1410	1420	1320	1320	1250
Exceso de Stock	760	2172	1508	0	170	100	100
Defecto de Stock	680	0	0	0	0	0	70
PRODUCCIÓN TOTAL	7500	8102	7660	7500	7570	7500	7500

COSTES (um)	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3	PLAN 4	PLAN 5	PLAN 6	PLAN 7
Producción modalidad 1	1.250.000	1.250.000	1.250.000	1.216.000	1.250.000	1.236.000	1.250.000
Producción modalidad 2	375.000	555.723	423.000	426.000	396.000	396.000	375.000
Exceso de Stock	22.800	65.147	45.239	0	5.100	3.000	3.000
Defecto de Stock	61.200	0	0	0	0	0	6.300
COSTE TOTAL	1.709.000	1.870.870	1.718.239	1.642.000	1.651.100	1.635.000	1.634.300

Plan 1 · Tasa constante con demanda diferida

Plan 2 · Tasa constante sin demanda diferida

Plan 3 · Dos tasas de producción sin demanda diferida

Plan 4 · Tasas variables JIT - DS

Plan 5 · Tasas variables ajustadas ($r_{t,1} = r_1^{\max}$)

Plan 6 · Optimización sin demanda diferida

Plan 7 · Optimización con demanda diferida

Planificación detallada. Hipótesis

1. Se considera un horizonte de planificación T dividido en periodos mensuales.
2. Se tiene un conjunto P de tipos de producto.
3. Se tiene un conjunto S de fuentes de producción que representa las formas de obtener los productos. Toda fuente tiene su capacidad de producción limitada mensualmente.
4. Todo tipo de producto emplea parte de la capacidad de las fuentes para su fabricación.
5. Los costes variables de producción dependen del producto y la modalidad empleada.
6. No hay coste fijo ni coste de cambio de nivel de producción en las modalidades.
7. La producción de un mes puede utilizarse para atender la demanda de ese mes.
8. La demanda global de todos los productos debe ser satisfecha.
9. Todo producto puede almacenarse con un coste por unidad de producto y mes.
10. Las demandas pueden diferirse con unos coste por unidad de producto y mes.
11. El coste global de un plan es la suma de: (1) costes variables de producción, (2) costes de posesión de stock, y (3) costes por diferir la demanda.

Planificación detallada. Modelos de optimización (1)

Nomenclatura:

Parámetros:

T, t Horizonte del plan · Índice de periodo: $t = 1,..,T$

P, S Conjunto de tipos de productos · Conjunto de fuentes de producción

i, s Índice de producto $(i \in P)$ · Índice de fuente de producción $(s \in S)$

$d_{i,t}, I^*_{i,t}$ Demanda del producto $i \in P$ en el mes $t\,(t = 1,..,T)$ · Stock ideal de $i \in P$ al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$

$A_{t,s}$ Capacidad máxima de producción de la fuente $s \in S$ en el mes t $(t = 1,..,T)$. v.g.- horas/mes.

$a_{i,s}$ Capacidad requerida a la fuente $s \in S$ para fabricar una unidad de $i \in P$. v.g.- tiempo de proceso.

$c_{u_{i,s}}$ Coste unitario de producción de $i \in P$ en modalidad $s \in S$ (um / unidad)

c_{h_i}, c_{b_i} Coste de posesión de stock de $i \in P$ · Coste de diferir la demanda de $i \in P$ (um / unidad_ mes)

Variables:

$x_{i,t,s}$ Produccion parcial del producto $i \in P$ con modalidad $s \in S$ durante el mes $t\,(t = 1,..,T)$

$X_{i,t}$ Produccion total del producto $i \in P$ durante el mes $t\,(t = 1,..,T)$

$I_{i,t}$ Stock neto del producto $i \in P$ al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$

$I^+_{i,t}, I^-_{i,t}$ Exceso $(I^+_{i,t})$ y Defecto $(I^-_{i,t})$ de stock del producto $i \in P$ al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$

Planificación detallada. Modelos de optimización (2)

Formulación:

$$\text{LP-3: } \min C_T = \sum_{i\in P}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s\in S} c_{u_{i,s}} x_{i,t,s} + \sum_{i\in P}\sum_{t=1}^{T}\left(c_{h_i} I^+_{i,t} + c_{b_i} I^-_{i,t}\right) \qquad (0)$$

s.a:

$$X_{i,t} - \sum_{s\in S} x_{i,t,s} = 0 \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T \qquad (1)$$

$$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = d_{i,t} \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T \qquad (2)$$

$$I_{i,t} - I^+_{i,t} + I^-_{i,t} = I^*_{i,t} \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in P} a_{i,s}\cdot x_{i,t,s} \le A_{t,s} \qquad \forall t = 1,..,T, \forall s\in S \qquad (4)$$

$$x_{i,t,s} \ge 0 \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T, \forall s\in S \qquad (5)$$

$$X_{i,t} \ge 0 \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T \qquad (6)$$

$$I^+_{i,t} \ge 0 \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T \qquad (7)$$

$$I^-_{i,t} \ge 0 \qquad \forall i\in P, \forall t = 1,..,T \qquad (8)$$

Condiciones LP-3:

- Stock inicial conocido: $I_{i,0} = I^*_{i,0} \;\; \forall i\in P$
- Plan sin demanda diferida: $I^-_{i,t} = 0 \;\; \forall i\in P, \forall t = 1,..,T$
- Plan tasas JIT · DS: $I^-_{i,t} = I^+_{i,t} = 0 \;\; \forall i\in P, \forall t = 1,..,T$

Características de los modelos de planificación (1)

Atributos y valores:

01 - *Horizonte*	mono-periodo	multi-periodo
02 - *Productos-Familias*	mono-producto	multi-producto
03 - *Recursos críticos*	uno	varios
04 - *Etapas de fabricación*	mono-etapa	multi-etapa
05 - *Rupturas*	no permitidas	penalizadas
06 - *Demanda*	determinista	aleatoria
07 - *RRHH*	fijo	variable
08 - *Instalaciones*	definidas	alternativas
09 - *Nivel productivo*	uno	varios
10 - *Procesos*	definidos	alternativos

Características de los modelos de planificación (2)

Formatos:

1. Multiperiodo: Introduce el índice temporal y las restricciones correspondientes a la conservación del flujo

$$X_{i,t} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = d_{i,t} \qquad \forall i \in P, \forall t = 1,..,T$$

2. Multiproducto: La utilización conjunta de un recurso o fuente por varios productos conduce a restricciones de limitación de la capacidad

$$\sum_{i \in P} a_{i,s} \cdot x_{i,t,s} \leq A_{t,s} \qquad \forall t = 1,..,T, \forall s \in S$$

3. Roturas: El stock de las expresiones de flujo corresponden al stock neto por lo que hay que tener en cuenta el exceso (+) y el defecto (-) de stock.

$$I_{i,t} - I^{+}_{i,t} + I^{-}_{i,t} = I^{*}_{i,t} \qquad \forall i \in P, \forall t = 1,..,T$$

5. RRHH variable: La variación de RRHH impacta sobre la capacidad productiva en cada periodo y en los costes de personal

$$W_t = W_{t-1} + w^{+}_t - w^{-}_t \qquad \forall t = 1,..,T \qquad A_t = f\left(W_t\right) \qquad \forall t = 1,..,T$$

Modelo con RRHH variable y demanda diferida (1)

Hipótesis:

1. Una sola familia de productos y una sola etapa global productiva y una sola modalidad.
2. No hay coste fijo ni coste de cambio de nivel de producción en la modalidad.
3. Se considera un horizonte de planificación T dividido en periodos mensuales.
4. La producción de un mes puede utilizarse para atender la demanda de ese mes.
5. La demanda global debe ser satisfecha.
6. El producto puede almacenarse con un coste por unidad de producto y mes.
7. La demanda puede diferirse con un coste por unidad de producto y mes.
8. La capacidad productiva de un mes depende de los RRHH homogéneos disponibles en dicho mes. Hay un coste de personal por variar los RRHH disponibles.
9. El coste global de un plan es la suma de: (1) costes variables de producción, (2) costes de posesión de stock, (3) costes por diferir la demanda y (4) costes de personal.

Modelo con RRHH variable y demanda diferida (2)

Nomenclatura:

Parámetros:

T, t	Horizonte del plan · Índice de periodo $t = 0,..,T$ (mes)
α, I_t^*	Factor de stock de seguridad · Stock ideal al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$
$d_t, \hat{d}_t$	Demanda del mes $t\,(t = 1,..,T)$ · Demanda corregida del mes $t\,(t = 1,..,T)$
r_H, W^∞	Tasa de producción mensual por unidad de RRHH (unidades / RRHH_mes) · Límite superior RRHH
c_{u_t}	Coste de producción unitario (um / unidad) durante el mes $t\,(t = 1,..,T)$
c_{h_t}, c_{b_t}	Coste de posesión de stock · Coste de diferir la demanda (um / unidad_ mes) en $t\,(t = 1,..,T)$
$c_{w_t}^+, c_{w_t}^-$	Costes de contratación (c_w^+) y de despido (c_w^-) de RRHH (um / RRHH) en $t\,(t = 1,..,T)$

Variables:

X_t, W_t	Produccion total en el mes $t\,(t = 1,..,T)$ · RRHH disponibles durante el mes $t\,(t = 1,..,T)$
w_t^+, w_t^-	Incremento (w_t^+) y decremento (w_t^-) de RRHH en el mes $t\,(t = 1,..,T)$
R_t	Tasa de producción del mes $t\,(t = 1,..,T)$: $R_t = r_{RH}^{\max} W_t$
I_t	Stock neto al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$. $I_0 = I_0^*$ (stock inicial)
I_t^+, I_t^-	Exceso (I_t^+) y Defecto (I_t^-) de stock al final del mes $t\,(t = 0,..,T)$

Modelo con RRHH variable y demanda diferida (3)

LP-4: *Modelo de Bowman básico con RRHH y una sola fuente*

$$\text{LP-4: } \min C_T = \sum_{t=1}^{T} c_{u_t} X_t + \sum_{t=1}^{T} c_{h_t} I_t^+ + \sum_{t=1}^{T} c_{b_t} I_t^- + $$

$$+ \sum_{t=1}^{T} c_{w_t}^+ w_t^+ + \sum_{t=1}^{T} c_{w_t}^- w_t^- \qquad (0)$$

s.a:

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (1)$$

$$I_t - I_t^+ + I_t^- = I_t^* \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (2)$$

$$X_t - r_H W_t \le 0 \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (3)$$

$$W_t \le W^\infty \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (4)$$

$$W_t - W_{t-1} - w_t^+ + w_t^- = 0 \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (5)$$

$$(X_t, I_t^+, I_t^-, w_t^+, w_t^-) \ge \vec{0} \qquad \forall t = 1,..,T \qquad (6)$$

$$\text{Condiciones LP-4:} \begin{cases} \text{Plan sin demanda diferida } \Rightarrow I_t^- = 0 \;\; \forall t = 1,..,T \\ \text{Plan tasas JIT} \cdot \text{DS} \Rightarrow I_t^- = I_t^+ = 0 \;\; \forall t = 1,..,T \end{cases}$$

Modelo con RRHH variable y demanda diferida (4)

LP-4: *Modelo de Bowman básico con RRHH y una sola fuente · Restricciones adicionales*

1. Restricciones de regulación stocks: $\begin{Bmatrix} I_t^+ \le I_{\max}^+ & \forall t = 1,..,T \\ I_t^- \le I_{\max}^- & \forall t = 1,..,T \end{Bmatrix}$

2. Restricciones de regulación de RRHH : $\begin{Bmatrix} W_t \ge W^0 & \forall t = 1,..,T \\ W_t \le W^\infty & \forall t = 1,..,T \end{Bmatrix}$

3. Producción extra sin variar RRHH: $\begin{Bmatrix} \hat{X}_t - \hat{r}_H W_t \le 0 & \forall t = 1,..,T \\ X_t + \hat{X}_t + I_{t-1} - I_t = d_t & \forall t = 1,..,T \\ C'_T = C_T + \sum_{t=1}^{T} \hat{c}_{u_t} \hat{X}_t & (0) \end{Bmatrix}$

Causas: Espacio disponible, compromisos con clientes, pacto entre agentes etc.