IOD DE FME UPC

Tema 4

l'Algorisme del símplex
i
Anàlisi de sensibilitat

4-1

IOD DE FME UPC

Índex

- Objectius del tema.
- l'Algorisme del símplex.
- Anàlisi de sensibilitat.

Mètode del símplex i anàlisi de sensibilitat

Objectius específics del tema 4

Algorisme del símplex	
4.1	Saber transformar un problema de (PL) qualsevol a la *forma estàndard*.
4.2	Donat un problema de (PL) de fins a 3 variables, saber calcular les seves *solucions bàsiques* i *solucions bàsiques factibles*, tot relacionant-les amb els punts extrems del políedre factible.
4.3	Conèixer la relació entre solucions bàsiques factibles i punts extrems, i les implicacions d'aquesta relació amb el teorema fonamental de la programació lineal.
4.4	Saber *resoldre problemes de (PL)* de fins a 3 constriccions *mitjançant l'algorisme del símplex*. Comprendre la justificació de les passes de l'algorisme del símplex i de la seva convergència.

Anàlisi de sensibilitat	
4.5	Conèixer els fonaments de l'*anàlisi de sensibilitat* per modificacions dels vectors *c*, *b*, de la matriu *A* i per addició de noves variables.
4.6	Calcular manualment els *preus ombra* i els *intervals d'estabilitat* dels vectors *c* i *b* de problemes de (PL) de fins a 3 constriccions.
4.7	Usar els *informes de Solver* per a identificar: (a) les variables bàsiques i no bàsiques, (b) el vector de costos reduïts, (c) els intervals d'estabilitat de *c* i *b* i (d) els preus ombra.
4.8	Usar els informes de Solver per a resoldre problemes pràctics d'anàlisi de sensibilitat per modificació de *c, b, A* i per addició d'una nova variable.

l'Algorisme del símplex

- El nostre propòsit ara és mostrar com funciona l'algorisme del símplex, que és el procediment matemàtic usat per *Solver* en la resolució de problemes de PL
- Seguirem el capítol 4 del text de Ragsdale i el capítol 3 del text de Bertsimas i Tsitsikis (veure bibliografia del curs)
- Per a comprendre com funciona aquest algorisme cal abans introduir els conceptes de :
  - A : Forma estàndar d'un problema PL
  - B : Solucions Bàsiques Factibles

A: Forma estàndar d'un problema PL

- Forma estàndar d'un problema de PL: $(\text{PL})\begin{cases}\min & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{cases}$
- $max\ c'x \longrightarrow min\ (-c)'x$
- $a^j x \leq b_j \longrightarrow a^j x + s_j = b_j\ ,\ s_j \geq 0$

  s_j : variable de folga ("holgura", "slack")
- $a^j x \geq b_j \longrightarrow a^j x - s_j = b_j\ ,\ s_j \geq 0$

  s_j : variable d'escreix ("exceso", "surplus")
- $x_i \leq 0 \longrightarrow y_i = -x_i\ ,\ y_i \geq 0$
- $x_i\ lliure \longrightarrow x_i = u_i - v_i\ ,\ u_i, v_i \geq 0$

F. Javier Heredia. Dept. d'Estadística i Investigació Operativa. Universitat Politècnica de Catalunya.

Exemple de pas a la forma estàndar

$$
\begin{array}{llr}
\min z = -350x_1 - 300x_2 & & \} \text{ benefici} \\
\text{s.a.:}\quad 1x_1 + 1x_2 + s_1 & = 200 & \} \text{ bombes} \\
\qquad 9x_1 + 6x_2 \quad + s_2 & = 1566 & \} \text{ mà obra} \\
\qquad 12x_1 + 16x_2 \quad\quad + s_3 & = 2880 & \} \text{ canonades} \\
\qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & \} \text{ no negativitat}
\end{array}
$$

Problema 1 test 1

F. Javier Heredia. Dept. d'Estadística i Investigació Operativa. Universitat Politècnica de Catalunya.

B: Solucions Bàsiques Factibles (SBF)

- Considereu el problema PL en la forma estàndar:

$$(\text{PL})\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a.}: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- Solució Bàsica: solució del sistema $Ax=b$ $(A \in \Re^{n\times m}$, $n \geq m$, A de rang complet), que s'obté fixant $n\text{-}m$ variables a zero (*variables no bàsiques*, x_N) i resolent per a les restants m variables (*variables bàsiques*, x_B)

$$Ax = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \;;\; Bx_B + Nx_N = b$$

$$\left.\begin{aligned} Bx_B &= b - Nx_N \\ x_N &= [0] \end{aligned}\right\} Bx_B = b \rightarrow \text{si } B \text{ no singular}: \quad x_B = B^{-1}b$$

- Solució Bàsica Factible: solució bàsica que és factible ($x \geq 0$).

Exemple : càlcul d'una solució bàsica

Min z = -350x_1 - 300x_2

s.a.:

$$\begin{array}{lllllll} 1x_1 & + & 1x_2 & + s_1 & & & = 200 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & & + s_2 & & = 1566 \\ 12x_1 & + & 16x_2 & & & + s_3 & = 2880 \end{array}$$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

- Calculem la s.b. associada a $x_B = [\,x_1, x_2, s_1]'$:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{bmatrix} ; \det(B) = 72 \Rightarrow \text{no singular}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left.\begin{array}{lllll} x_1 & + x_2 & + s_1 & = & 200 \\ 9x_1 & + 6x_2 & & = & 1566 \\ 12x_1 & + 16x_2 & & = & 2880 \end{array}\right\} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 108 \\ 99 \\ \boxed{-7} \end{bmatrix}$$

No és factible

Solucions Bàsiques i Bàsiques Factibles

	x_B	x_N	x	z
1	s_1, s_2, s_3	x_1, x_2	$x_1=0, x_2=0, s_1=200, s_2=1566, s_3=2880$	0
2	x_1, s_1, s_3	x_2, s_2	$x_1=174, x_2=0, s_1=26, s_2=0, s_3=792$	60900
3	x_1, x_2, s_3	s_1, s_2	$x_1=122, x_2=78, s_1=0, s_2=0, s_3=168$	66100
4	x_1, x_2, s_2	s_1, s_3	$x_1=80, x_2=120, s_1=0, s_2=126, s_3=0$	64000
5	x_2, s_1, s_2	x_1, s_3	$x_1=0, x_2=180, s_1=20, s_2=486, s_3=0$	54000
6	x_1, x_2, s_1	s_2, s_3	$x_1=108, x_2=99, s_1= -7, s_2=0, s_3=0$	67500
7	x_1, s_1, s_2	x_2, s_3	$x_1=240, x_2=0, s_1= -40, s_2= -594, s_3=0$	84000
8	x_1, s_2, s_3	x_2, s_1	$x_1=200$, x2=0, $s_1=0, s_2= -234, s_3=480$	70000
9	x_2, s_2, s_3	x_1, s_1	$x_1=0, x_2=200, s_1=0, s_2=366, s_3= -320$	60000
10	x_2, s_1, s_3	x_1, s2	$x_1=0, x_2=261, s_1= -61, s_2=0, s_3= -1296$	78300

Solucións bàsiques factibles	solució bàsica factible òptima	solucions bàsiques infactibles

Solucions Bàsiques Factibles i punts extrems

Solucions Bàsiques Factibles

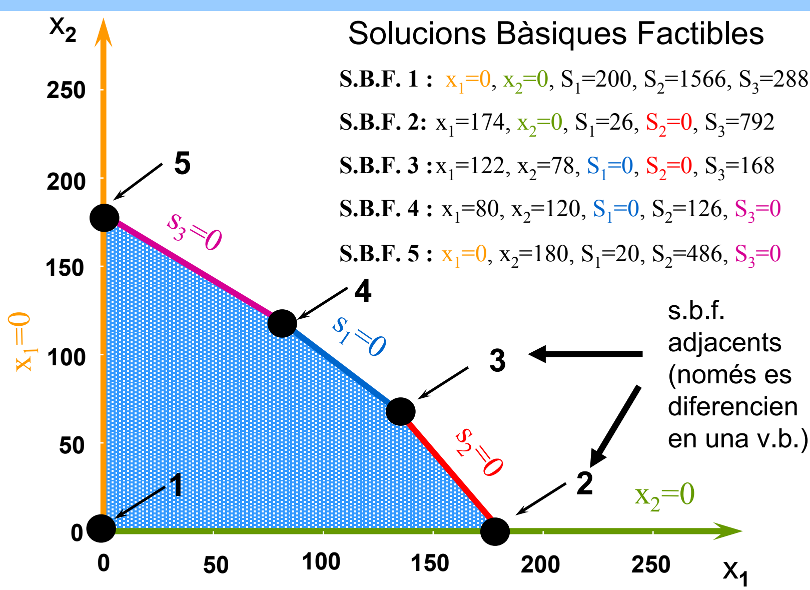
S.B.F. 1 : $x_1=0$, $x_2=0$, $S_1=200$, $S_2=1566$, $S_3=2880$

S.B.F. 2: $x_1=174$, $x_2=0$, $S_1=26$, $S_2=0$, $S_3=792$

S.B.F. 3 : $x_1=122$, $x_2=78$, $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=168$

S.B.F. 4 : $x_1=80$, $x_2=120$, $S_1=0$, $S_2=126$, $S_3=0$

S.B.F. 5 : $x_1=0$, $x_2=180$, $S_1=20$, $S_2=486$, $S_3=0$



Recordem la relació punts extrems-sol. optimes

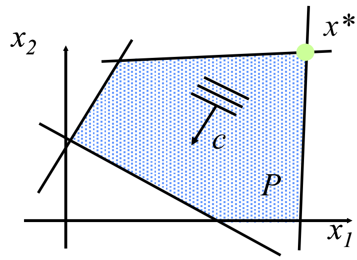
Teorema (2.7 Bertsimas):

"*Sigui* $(PL)\ min\{c'x : x \in P\}$

Suposem que

(a) P *té, com a mínim, un punt extrem.*

(b) (PL) té solució òptima.



Llavors,

existeix una solució òptima que és punt extrem de P"

IOD DE FME UPC

Punts extrems-solucions òptimes

- Problema: el teorema anterior permet caracteritzar les solucions òptimes geomètricament (punts extrems) : com les podem caracteritzar numèricament?
- Resposta: Solucions Bàsiques Factibles

Teorema (2.3 Bertsimas):

"*Sigui* P *un políedre no buit, i sigui* $x^* \in P$. *Llavors, el que segueix és equivalent:*

- x^* *és un punt extrem*
- x^* *és un vèrtex.*
- x^* *és una solució bàsica factible.*"

Problema 2 test 1

Mètode del simplex i anàlisi de sensibilitat

C: El mètode del Simplex

- El mètode del simplex és un algorisme que permet resoldre problemes de PL en forma estàndar basant-se en la següent estratègia:

1. Es troba una solució bàsica factible inicial (s.b.f. actual).

2. Es determina si la s.b.f. actual correspón a la solució òptima. Si és així, hem resolt el problema.

3. Si la s.b.f. actual no és la solució òptima, es troba, si existeix, una s.b.f. adjacent a l'actual que millori el valor de la f.o., i es pren aquesta com a nova s.b.f. actual.

- El simplex es pot interpretar geomètricament com un recorregut incomplet dels vèrtexs del politop factible.

Una iteració del mètode del Simplex (I)

*"**1**. Es troba una solució bàsica factible inicial."*

$$
(\mathrm{PL})\begin{cases}
\min & -350x_1 & -300x_2 & & & & \\
\text{s.a.}: & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & =200 \\
 & 9x_1 & +6x_2 & & +x_4 & & =1566 \\
 & 12x_1 & +16x_2 & & & +x_5 & =2880 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geq 0
\end{cases}
$$

$$
x_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{B(1)}\\x_{B(2)}\\x_{B(3)}\end{bmatrix} \; ; \quad \begin{matrix}VB=\{B(1),B(2),B(3)\}=\{3,4,5\}\\ VNB=\{1,2\}\end{matrix} \; ; \; \mathrm{c_B}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

$$
Bx_B=b \;,\; \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{B(1)}\\x_{B(2)}\\x_{B(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200\\1566\\2880\end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix}x_{B(1)}\\x_{B(2)}\\x_{B(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200\\1566\\2880\end{bmatrix}
$$

Una iteració del mètode del Simplex (II)

*"**2**. Es determina si la s.b.f. actual correspón a la solució òptima. Si és així, hem resolt el problema."*

2.1. Es calculen els costos reduits per a totes les variables j no bàsiques: $r_j = c_j - c'_B B^{-1} A_j$

$$r_1 = c_1 - c'_B B^{-1} A_1 = -350 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = -350$$

$$r_2 = c_2 - c'_B B^{-1} A_2 = -300 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix} = -300$$

q=1

(v.n.b. entrant)

2.2. Si $r \geq [0]$ llavors la s.b.f. actual és òptima.

Altrament, es selecciona una v.n.b. q amb $r_q < 0$

Una iteració del mètode del Simplex (III)

*"**3**. Si la s.b.f. actual no és la solució òptima, es troba, si existeix, una s.b.f. adjacent a l'actual que millori el valor de la f.o., i es pren aquesta com a nova s.b.f. actual."*

3.1. Es calcula $u = B^{-1} A_q$ sent q la v.n.b seleccionada a la passa 2

$$u = B^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

3.2. Si $u \leq [0]$ llavors $z^*=-\infty$ (problema il.limitat): **STOP**

Una iteració del mètode del Simplex (IV)

*"**3**. Si la s.b.f. actual no és la solució òptima, es troba, si existeix, una s.b.f. adjacent a l'actual que millori el valor de la f.o., i es pren aquesta com a nova s.b.f. actual."*

4. Alguna component de u és >0. Es calcula:

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m|u_i>0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$$

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,3|u_i>0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i} = \min\left\{\frac{x_{B(1)}}{u_1}, \frac{x_{B(2)}}{u_2}, \frac{x_{B(3)}}{u_3}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{200}{1}, \frac{1556}{9}, \frac{2880}{12}\right\} = \min\{200,174,240\} = 174$$

$$\theta^* = \frac{x_{B(2)}}{u_2} \quad \rightarrow \text{v.b. sortint} : p = 2 \text{ (correspon a la variable } B(2) = 4)$$

Una iteració del mètode del Simplex (V)

"3. Si la s.b.f. actual no és la solució òptima, es troba, si existeix, una s.b.f. adjacent a l'actual que millori el valor de la f.o., i es pren aquesta com a nova s.b.f. actual."

5. Canvi de base:

5.1. Sigui p la v.b. sortint seleccionada a la passa 4. Es forma una nova base substituint $A_{B(p)}$ per A_q ,(canvi de base), és a dir:

$$B = \begin{bmatrix} A_{B(1)} & \cdots & A_{B(p-1)} & A_{B(p)} & A_{B(p-1)} & \cdots & A_{B(m)} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} A_{B(1)} & \cdots & A_{B(p-1)} & A_{\overline{B}(p)=q} & A_{B(p-1)} & \cdots & A_{B(m)} \end{bmatrix}$$

Una iteració del mètode del Simplex (VI)

5.2. Actualitzacions associades al canvi de base:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \bar{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$VB = \{B(1)=3, B(2)=4, B(3)=5\} \rightarrow \overline{VB} = \{\bar{B}(1)=3, \bar{B}(2)=1, \bar{B}(3)=5\}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)=3} \\ x_{B(2)=4} \\ x_{B(3)=5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{bmatrix} \rightarrow x_{\bar{B}} = \begin{bmatrix} x_{\bar{B}(1)=3} \\ x_{\bar{B}(2)=1} \\ x_{\bar{B}(3)=5} \end{bmatrix} = \bar{B}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 174 \\ 792 \end{bmatrix}$$

$$z = c_B x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \bar{z} = c_{\bar{B}} x_{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -350 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 174 \\ 792 \end{bmatrix} = -60900$$

El mètode del Simplex (I)

1. Es troba una s.b.f. Inicial *VB*

2. Identificació de s.b.f. òptima:

2.1 Es calculen els costos reduits per a totes les variables no bàsiques: $r_j = c_j - c'_B B^{-1} A_j$

2.2. Si $r \geq [0]$ llavors la s.b.f. actual és òptima: **STOP**.

Altrament, es selecciona una v.n.b. q amb $r_q < 0$

3. Identificació de problema il.limitat:

3.1. Es calcula $u = B^{-1} A_q$

3.2. Si $u \leq [0]$ llavors z*=-∞ (problema il.limitat): **STOP**

El mètode del Simplex (II)

4. Selecció de la variable bàsica sortint p:

Si alguna component de u és >0, es calcula:

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid u_i>0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$$

Sigui p la v.b. associada a θ* (v.b. sortint)

5. Canvi de base :

5.1. Es forma una nova matriu bàsica $\overline{B}$ substituint $A_{B(p)}$ per A_q

5.2 S'actualitzen $x_{\overline{B}} = \overline{B}^{-1} b$, $\overline{z} = c'_{\overline{B}} x_{\overline{B}}$, $\overline{VB}$ i $\overline{VNB}$.

6. Es considera com a s.b.f. actual l'associada a $\overline{VB}$. Anada a 2.

Interpretació geomètrica

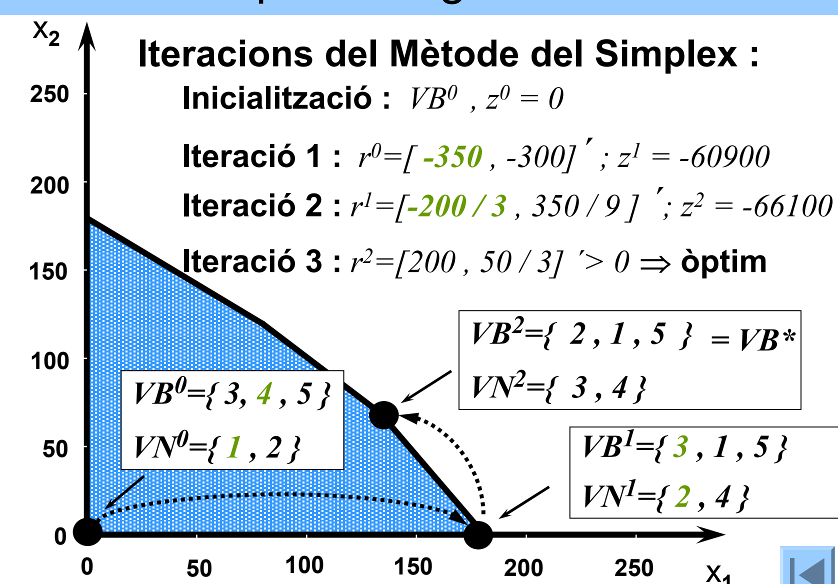
Iteracions del Mètode del Simplex :

Inicialització : VB^0 , $z^0 = 0$

Iteració 1 : $r^0=[\,-350\,, -300]'$; $z^1 = -60900$

Iteració 2 : $r^1=[-200/3\,, 350/9\,]'$; $z^2 = -66100$

Iteració 3 : $r^2=[200\,, 50/3]' > 0 \Rightarrow$ **òptim**



Problemes 3,4,5 test (10 minuts)

Anàlisi de sensibilitat: introducció

- Sigui el problema de programació lineal (PL) en forma estàndard:

$$
(\mathrm{PL})\begin{cases}\text{min} & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{cases}
$$

- L'anàlisi de sensibilitat consisteix en l'estudi de com afecta al valor de la solució òptima x^* de (PL) i al seu cost z^* un canvi en c, A o b

l'Anàlisi de sensibilitat

- Aproximació *naif* : canviar les dades i tornar a resoldre el model!!!
- **Aproximació exacta**: usar la teoria de la programació lineal
- Veurem com usar els informes de sensibilitat de Solver per a respondre preguntes del tipus:
  - Com canvia el valor òptim de la funció objectiu si canvio els coeficients de la f.o. c_i?
  - Com canvia el valor òptim de la funció objectiu si canvio els termes independents de les constriccions b_i (RHS)?
  - Com canvia el valor òptim de la funció objectiu si afegeixo més variables de decisió x_i?
  - Com canvia el valor òptim de la funció objectiu si canvio els coeficients de les constriccions a_{ji}?

L'anàlisi de sensibilitat segons la teoria de la Programació Lineal

- Sigui el problema de programació lineal (PL) en forma estàndard, i siguin B i x^* respectivament la base i solució òptimes. Llavors es satisfan les dues **condicions d'optimalitat:**

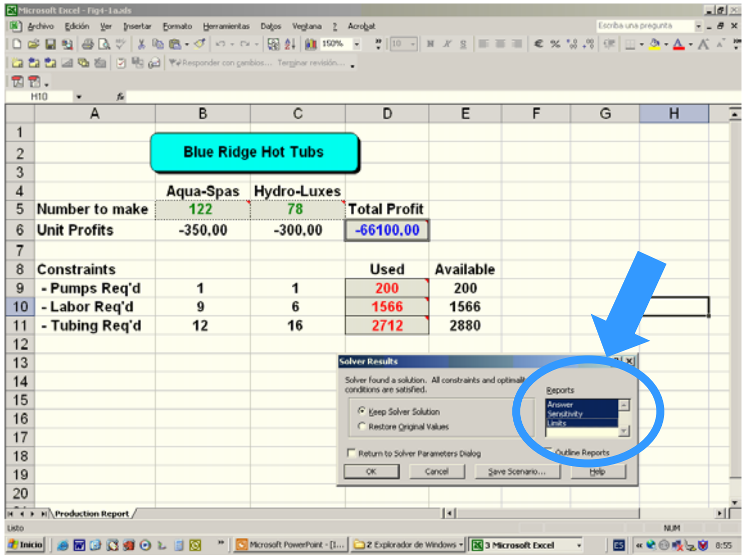
Factibilitat:	$x_B = B^{-1}b \geq 0$
Optimalitat:	$r' = c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0$

- Suposem que algun element de A, b o c de (PL) ha estat modificat, o que s'introdueix una nova variable, o una nova constricció, definint d'aquesta forma un nou problema (PL')
- Imposant les condicions d'optimalitat al nou problema (PL') s'obtenen les condicions sota les quals la base B roman òptima (**interval d'estabilitat**).

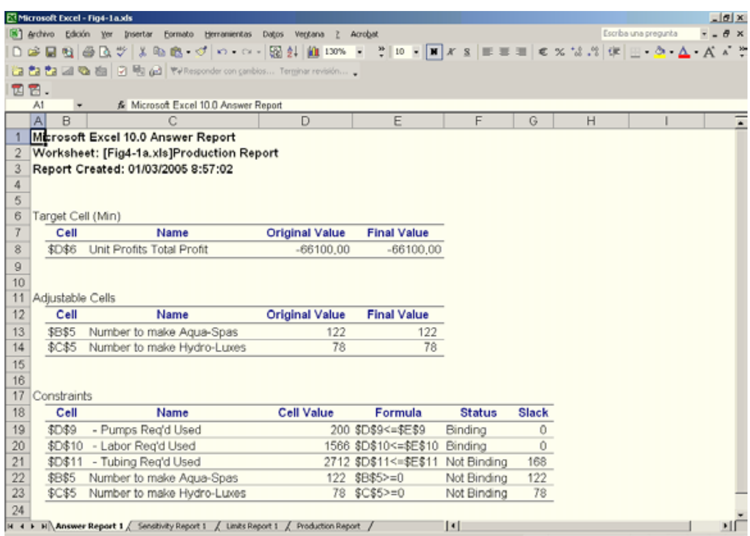
Exemple de petició d'informes: "Jacuzzis Blue Ridge"

Min	$-350x_1 - 300x_2$	} benefici
s.a.:	$1x_1 + 1x_2 \leq 200$	} bombes
	$9x_1 + 6x_2 \leq 1566$	} mà d'obra
	$12x_1 + 16x_2 \leq 2880$	} canonades
	$x_1, x_2 \geq 0$	} no negativitat

Petició d'Informes



Informe de solució



Microsoft Excel 10.0 Answer Report
Worksheet: [Fig4-1a.xls]Production Report
Report Created: 01/03/2005 8:57:02

Target Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$6	Unit Profits Total Profit	-66100,00	-66100,00

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	122
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	78

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	$D$9<=$E$9	Binding	0
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	$D$10<=$E$10	Binding	0
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	$D$11<=$E$11	Not Binding	168
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	$B$5>=0	Not Binding	122
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	$C$5>=0	Not Binding	78

Informe de sensibilitat

Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Fig4-1a.xls]Production Report
Report Created: 01/03/2005 8:57:03

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	0	-350	50	100
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	0	-300	66,6666667	50

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	-200	200	7	26
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	-17	1566	234	126
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	0	2880	1E+30	168

Identificació dels conjunts VB* i VNB* (en absència de degeneració)

Microsoft Excel 8.0 Answer Report
Worksheet: [Fig4-1.xls]Production Report
Report Created: 19/02/01 17:31:08

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$6	Unit Profits Total Profit	$0	$66.100

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$5	Number to make Aqua-Spas	0	122
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	0	78

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	$D$9<=$E$9	Binding	0
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	$D$10<=$E$10	Binding	0
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	$D$11<=$E$11	Not Binding	168
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	$B$5>=0	Not Binding	122
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	$C$5>=0	Not Binding	78

$VB^*: m=3$
variables $x_i > 0$

$VN^*: n-m=2$
variables $x_i = 0$

Identificació del vector de costos reduits r

Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Fig4-1a.xls]Production Report
Report Created: 01/03/2005 8:57:03

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	0	-350	50	100
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	0	-300	66,6666667	50

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	-200	200	7	26
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	-17	1566	234	126
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	0	2880	1E+30	168

$VN^*=\{ 3, 4 \}$

$r=[-200, -50/3]'$

Identificació del vector de costos reduits r (cas $max\ z$)

Microsoft Excel 8.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Fig4-1.xls]Production Report
Report Created: 19/02/01 17:31:09

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	0	350	100	50
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	0	300	50	66,6667

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	200	200	7	26
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	17	1566	234	126
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	0	2880	1E+30	168

$VN^*=\{ 3, 4 \}$

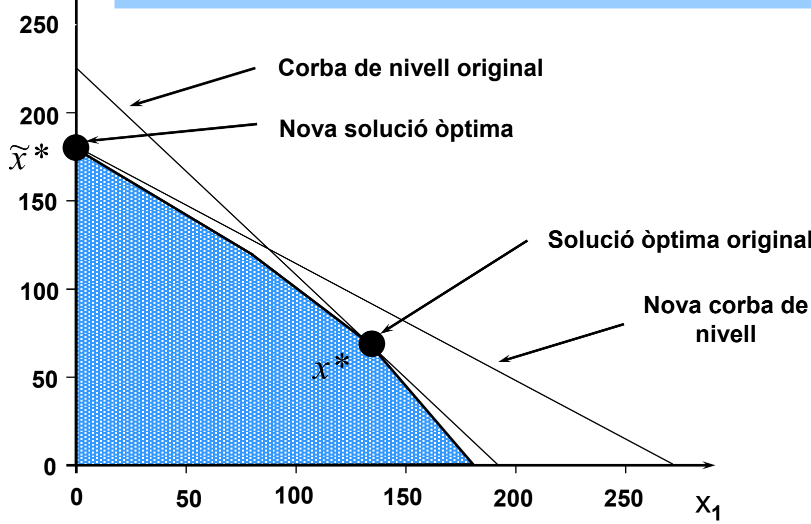
$r=[200, 50/13]'$

Signe dels costos reduits a l'òptim

Tipus de Problema	x_i	r_i
Minimització	$i \in VB^*$	$=0$
	$i \in VNB^*$	≤ 0
Maximització	$i \in VB^*$	$=0$
	$i \in VNB^*$	≥ 0

Problemes 6,7 test (5 minuts)

Canvi en x* provocat per un canvi en un coeficient de la f.o.



Anàlisi de sensibilitat en *c*

- S'introdueix el canvi: $c_i \rightarrow c_i + \Delta c_i$
- Condicions d'optimalitat :

Factibilitat: $x_B = B^{-1} b \geq 0 \quad \rightarrow$ no li afecta

Optimalitat: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0 \quad \rightarrow$ li afecta

- En l'anàlisi s'han de diferenciar el casos

$$i \in VB^*$$
$$i \in VNB^*$$

Interval d'estabilitat de c_i, $i \in VNB^*$

- En aquest cas, només ens hem de preocupar del possible canvi de signe del nou cost reduït de la v.n.b. x_i:

$$\tilde{r}_i = \left(c_i + \Delta c_i\right) + c'_B B^{-1} N_i = \Delta c_i + r_i \geq 0$$
$$\Delta c_i \geq -r_i$$

- Si aquesta condició es satisfà, la base actual B roman òptima. Altrament el conjunt VB actual no és òptim (la v.n.b. x_i té cost reduit negatiu, i pot entrar a la base, millorant la solució actual).
- **Interval d'estabilitat de c_i, $i \in VNB^*$** : interval de valors de Δci que conserva l'optimalitat de *B:*

$$\Delta c_i \in \left[\Delta c_i^-, \Delta c_i^+\right] = \left[-r_i, +\infty\right]$$

Interval d'estabilitat de c_i, $i \in VB^*$

- Sigui x_i la l-èssima v.b. ($i=B(l)$). Llavors $c_B \to c_B + \Delta c_i e_l$
- Aquest canvi afecta als costos reduïts de totes les variables no bàsiques $j \in VNB^*$:

$$\tilde{r}_j = c_j - \left(c_B + \Delta c_i e_l\right)' B^{-1} N_j = -\Delta c_i \overbrace{e_l' B^{-1} N_j}^{q_{lj}} + r_j = -\Delta c_i q_{lj} + r_j \geq 0$$

$$\Delta c_i q_{lj} \leq r_j \quad , \quad \forall j \in VNB^*$$

- Si aquesta condició es satisfà, la base actual B roman òptima. Altrament el conjunt VB actual no és òptim (la v.n.b. x_j té cost reduit negatiu, i pot entrar a la base, millorant la solució actual).
- **Interval d'estabilitat de c_i, $i \in VB^*$** :

$$\Delta c_i \in \left[\Delta c_i^-, \Delta c_i^+\right] = \left[\max_{\{j \in VNB^* | q_{lj} < 0\}} \left(r_j / q_{lj}\right), \min_{\{j \in VNB^* | q_{lj} > 0\}} \left(r_j / q_{lj}\right)\right]$$

Interval d'estabilitat de c_i, exemple

- A la solució òptima del problema de Jacuzzis "Blue Ridge" teniem:

$$VB^* = \{2,1,5\},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 16 & 12 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix},\ x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 78 \\ 128 \\ 168 \end{bmatrix},\ z^* = c_B' x_B = -66100$$

$$VNB^* = \{3,4\},\ r' = \begin{bmatrix} 200 & 50/3 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B^{-1} N = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 \\ -2 & 1/3 \\ -24 & 4/3 \end{bmatrix}$$

- Interval d'estabilitat de c_i, $i \in VNB^*$: $\Delta c_i \in \left[\Delta c_i^-, \Delta c_i^+\right] = \left[-r_i, +\infty\right]$

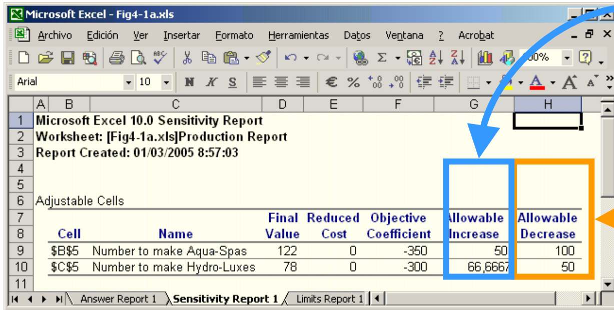
$$\Delta c_3 \in [-200, +\infty] \quad , \quad \Delta c_4 \in [-50/3, +\infty]$$

- Interval d'estabilitat de c_i, $i \in VB^*$:

$$\begin{cases} \Delta c_i^- = \max_{\{j \in VNB^* | q_{lj} < 0\}} \left(r_j / q_{lj}\right) \\ \Delta c_i^+ = \min_{\{j \in VNB^* | q_{lj} > 0\}} \left(r_j / q_{lj}\right) \end{cases}$$

$$i = 2 \to l = 1,\ \Delta c_2 \in [-50, 200/3]$$
$$i = 1 \to l = 2,\ \Delta c_1 \in [-100, 50]$$
$$i = 5 \to l = 3,\ \Delta c_1 \in [-25/3, 25/2]$$

Anal. de sensib. de c_i amb Solver



Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Fig4-1a.xls]Production Report
Report Created: 01/03/2005 8:57:03

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	Number to make Aqua-Spas	122	0	-350	50	100
$C$5	Number to make Hydro-Luxes	78	0	-300	66,6667	50

Δc_i^+

$-\Delta c_i^-$

- *"Allowable Increase"*: en quant podem incrementar...
- "*Allowable Decrease*": en quant podem disminuir...

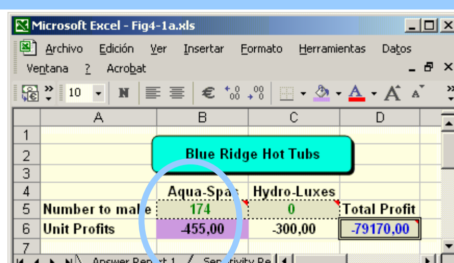
… el cost de la variable sense que la solució òptima x^* canviï, *supossant que la resta de coeficients romanen constants*.

Preguntes 8,9 test (10 minuts)

Exemple: violació interval d'estabilitat

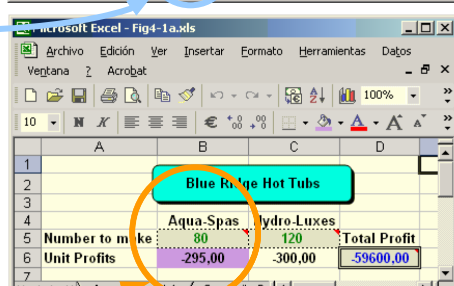
- Cas $\Delta c_i < \Delta c_i^-$

$$\begin{cases} \Delta c_1 = -105 < \Delta c_i^- = -100 \\ \hat{c}_1 := c_1 + \Delta c_1 = -350 - 105 \\ \hat{c}_1 = -455 \end{cases}$$

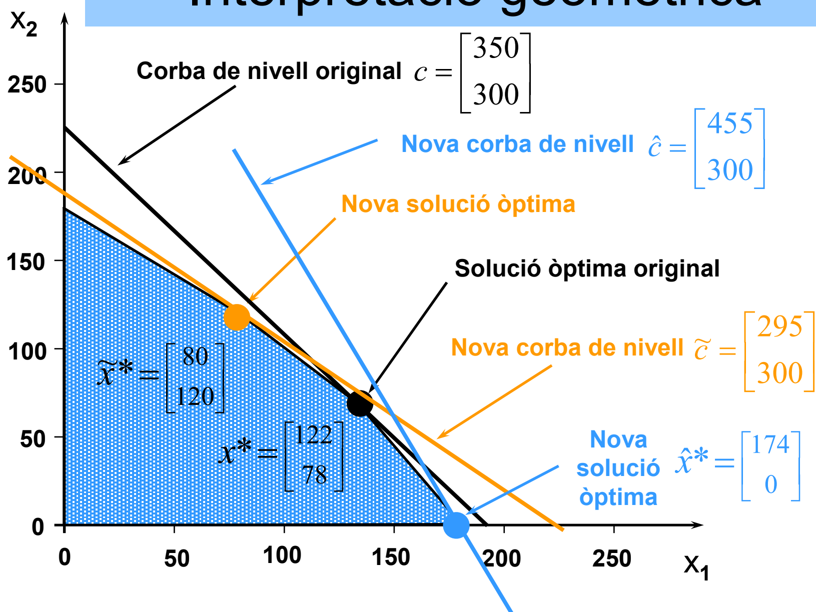


- Cas $\Delta c_i > \Delta c_i^+$

$$\begin{cases} \Delta c_1 = 55 > \Delta c_i^+ = 50 \\ \tilde{c}_1 := c_1 + \Delta c_1 = -350 + 55 \\ \tilde{c}_1 = -295 \end{cases}$$



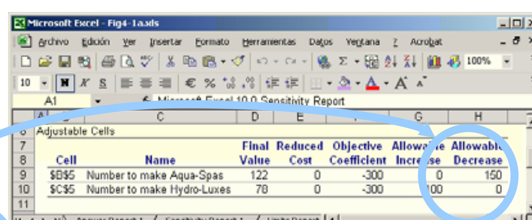
Interpretació geomètrica



Què passa si $\Delta c_i = \Delta c_i^+$?

- Fem $\Delta c_1 = \Delta c_1^+$

$$\hat{c}_1 := c_1 + \Delta c_1^+ = -300$$

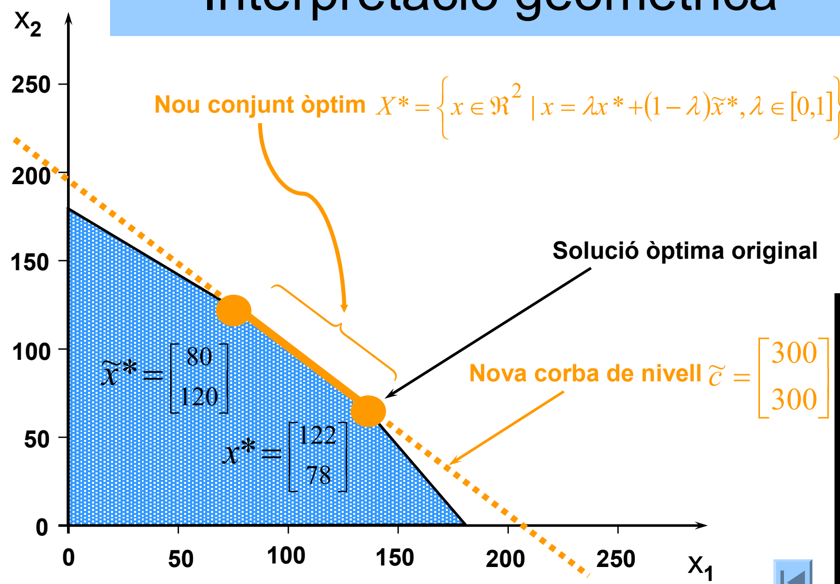


Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$5	Number to make Aqua-Spas	122	0	-300	0	150
\$C\$5	Number to make Hydro-Luxes	78	0	-300	00	0

- Obtenim $\Delta c_1^+ = 0$
  - Un valor (0) a la columna "Allowable Increase" o "Allowable Decrease" corresponent a les variables de decisió indica **l'existència d'òptims alternatius**.

Interpretació geomètrica



Anàlisi de sensibilitat en *b*

- S'introdueix el canvi: $b_i \rightarrow b_i + \Delta b_i$
- Condicions d'optimalitat :

Factibilitat: $x_B = B^{-1} b \geq 0 \quad \rightarrow$ li afecta

Optimalitat: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0 \quad \rightarrow$ no li afecta

- Volem trobar l'interval de valors de Δb_i pels quals la base actual es manté òptima

Interval d'estabilitat de b_j

- Imposem la condició de factibilitat $B^{-1}\left(b+\Delta b_j e_j\right)\geq 0$ on e_j és el vector unitari j-èssim.
- Sigui $\beta_j=\left[\beta_{1j},\beta_{2j},\ldots,\beta_{mj}\right]'$ la columna j-èssima de B^{-1}. Llavors, la condició de factibilitat queda:

$$x_B+\Delta b_j\beta_j\geq 0\rightarrow x_{B(k)}+\Delta b_j\beta_{kj}\geq 0\,,\,k=1,\ldots,m$$

i d'ací es pot calcular l'**interval d'estabilitat de b_j**

$$\Delta b_j\in\left[\Delta b_j^-,\Delta b_j^+\right]=\left[\max_{\{k\mid\beta_{kj}>0\}}\left(-\frac{x_{B(k)}}{\beta_{kj}}\right),\min_{\{k\mid\beta_{kj}<0\}}\left(-\frac{x_{B(k)}}{\beta_{kj}}\right)\right]$$

Interval d'estabilitat de b_j, exemple

- A la solució òptima del problema de Jacuzzis "Blue Ridge" teniem:

$$VB^*=\{2,1,5\}\,,\,B=\begin{bmatrix}1&1&0\\6&9&0\\16&12&1\end{bmatrix},\,B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1/3&0\\-2&1/3&0\\-24&4/3&1\end{bmatrix},\,x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}78\\128\\168\end{bmatrix},\,z^*=c_B'x_B=-66100$$

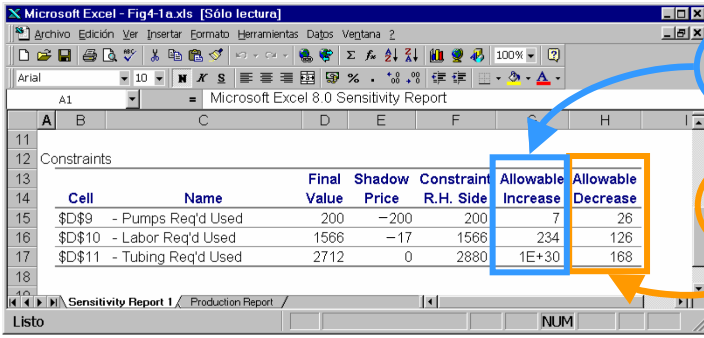
- Interval d'estabilitat de b_2:

$$x_B=\left[78\quad 128\quad 168\right]'\,,\,\beta_2=\left[-\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{4}{3}\right]'$$

$$\Delta b_2^-=\max_{\{k\mid\beta_{k2}>0\}}\left(-\frac{x_{B(k)}}{\beta_{k2}}\right)=\max\left\{-\frac{128}{1/3},-\frac{168}{4/3}\right\}=\{-384\,,-126\}=-126$$

$$\Delta b_2^+=\min_{\{k\mid\beta_{k2}<0\}}\left(-\frac{x_{B(k)}}{\beta_{k2}}\right)=\min\left\{-\frac{78}{-1/3}\right\}=234$$

Canvi en els termes independents (I)



Microsoft Excel - Fig4-1a.xls [Sólo lectura]

Microsoft Excel 8.0 Sensitivity Report

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	−200	200	7	26
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	−17	1566	234	126
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	0	2880	1E+30	168

Δb_j^+

$-\Delta b_j^-$

- *"Allowable Increase"*: en quant podem incrementar...
- *"Allowable Decrease"*: en quant podem disminuir...

… el terme independent sense que la base òptima actual VB^* canviï, *supossant que la resta de termes independents romanen constants*.

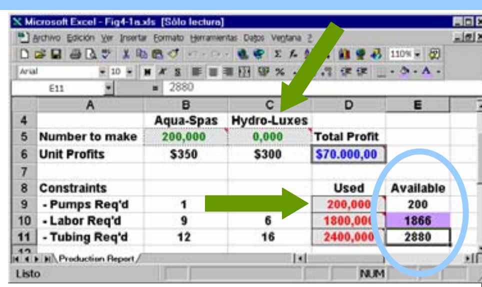
Preguntes 10, 11 test (10 minuts)

Exemple: violació de l'interval d'estabilitat.

- Cas $\Delta b_j > \Delta b_j^+$

$$\begin{cases} \Delta b_2 = 250 > \Delta b_2^+ = 234 \\ \hat{b}_2 = 1566 + 250 = 1816 \end{cases}$$

Variables no bàsiques

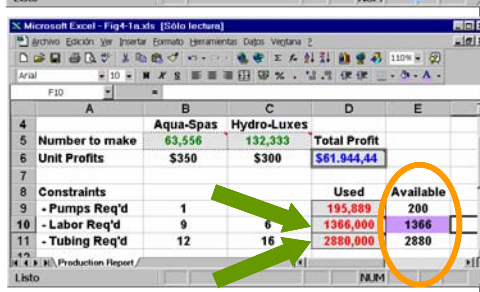


	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
Number to make	200,000	0,000	Total Profit	
Unit Profits	$350	$300	$70.000,00	
Constraints			Used	Available
- Pumps Req'd	1		200,000	200
- Labor Req'd	9	6	1800,000	1866
- Tubing Req'd	12	16	2400,000	2880

- Cas $\Delta b_j < \Delta b_j^-$

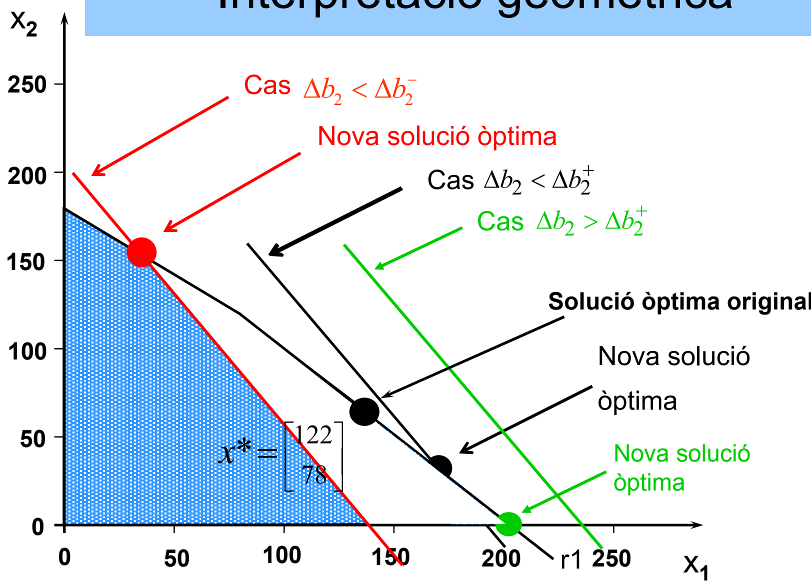
$$\begin{cases} \Delta b_2 = -200 < \Delta b_2^- = -126 \\ \tilde{b}_2 = 1566 - 200 = 1336 \end{cases}$$

Variables no bàsiques



	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
Number to make	63,556	132,333	Total Profit	
Unit Profits	$350	$300	$61.944,44	
Constraints			Used	Available
- Pumps Req'd	1		195,889	200
- Labor Req'd	9	6	1366,000	1366
- Tubing Req'd	12	16	2880,000	2880

Interpretació geomètrica



Cost òptim en funció de Δb_j: preus ombra

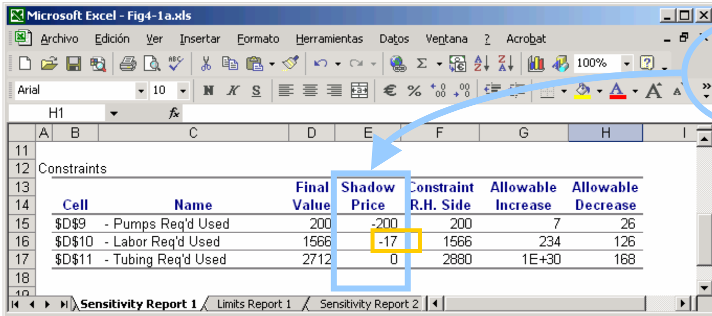
- Per a tot valor $\Delta b_j \in \left[\Delta b_j^-, \Delta b_j^+\right]$ la funció objectiu es pot expressar com:

$$z(\Delta b) = c_B' B^{-1}\left(b + \Delta b\right) =$$
$$= c_B' B^{-1} b + c_B' B^{-1} \Delta b = z^* + \pi' \Delta b$$

- El vector $\pi' = c_B' B^{-1}$ es coneix com el vector de **preus ombra**, i en el nostre exemple és

$$\pi' = c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} -300 & -350 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & -\frac{50}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Preus ombra ("*shadow price*")



Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$9	- Pumps Req'd Used	200	-200	200	7	26
$D$10	- Labor Req'd Used	1566	-17	1566	234	126
$D$11	- Tubing Req'd Used	2712	0	2880	1E+30	168

π_j

◆ *"Shadow Price": el preu ombra* d'una constricció indica el canvi del valor de la f.o. provocat per ***un increment unitat*** del terme independent de la constricció, suposant que la resta de RHS romanen constants.

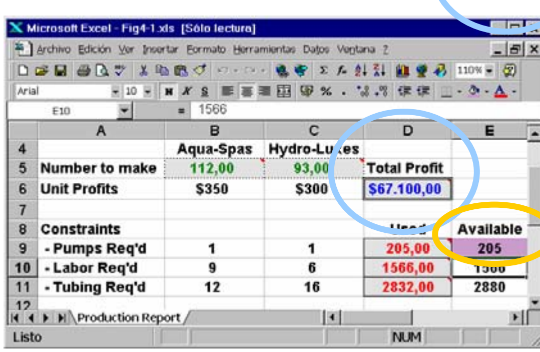
$$\Delta z = \Delta b_j \pi_j = \begin{cases} -200 * \Delta b_1 & \text{ó} \\ \boxed{-16,67} * \Delta b_2 & \text{ó} \\ 0 * \Delta b_3 & \end{cases}$$

Vigileu amb el format de les cel·les de Excel

Exemple d'ús dels preus ombra.

◆ Cas $\Delta b_1 = 5 < \Delta b_1^+ = 7;\ \Delta b_2 = 0;\ \Delta b_3 = 0$

$$\begin{cases} \Delta z = \Delta b_1 \pi_1 = 5 * 200 = 1000 \\ \tilde{z} = z + \Delta z = 66100 + 1000 = 67100 \end{cases}$$



	A	B	C	D	E
4		Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Number to make	112,00	93,00	Total Profit	
6	Unit Profits	$350	$300	$67.100,00	
7					
8	Constraints			Used	Available
9	- Pumps Req'd	1	1	205,00	205
10	- Labor Req'd	9	6	1566,00	1566
11	- Tubing Req'd	12	16	2832,00	2880

Preguntes 12,13,14 test (5 minuts)

IOD DE FME UPC

Addició d'una nova variable

- Considereu la fabricació d'un nou tipus d'hidromassatge (Typhoon-Lagoon).
- Typhoon-Lagoon genera un benefici unitari de 320€ i consumeix:
  - 1 bomba (preu ombra = 200 €)
  - 8 hores de mà d'obra (preu ombra = 16,67 €)
  - 13 peus de canonades (preu ombra = 0 €)
- Interessa produir el nou jacuzzi?
- Considerem la nova variable com a **no bàsica** i calculem el seu **cost reduit**:

$$r_6 = c_6 - \pi' A_6 = -320 - \begin{bmatrix}-200 & -16,67 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\8\\13\end{bmatrix} = 13,33 > 0$$

- r_6>0 => la introducció de x_6 a la base no pot millorar la solució actual=> **NO INTERESSA FABRICAR**.

Mètode del simplex i anàlisi de sensibilitat

IOD DE FME UPC

Anàlisi de canvis en els coeficients de les constriccions

P: Considereu que el model Typhoon-Lagoon necessita només a_{26}=7 hores de mà d'obra en lloc de 8. És ara convenient produir-ho?

R: r_6=-320 – (-200*1 – 16,67*7 - 0*13) = 3,31 => ***SI!***

P: Quína és la màxima quantitat de mà d'obra que el model Typhoon-Lagoons pot consumir per a ser rendible?

R: Cal que

r_6=- 320 – (-200*1 – 16,67* a_{26} - 0*13) $\geq$ 0

L'anterior és cert si $a_{26} \leq$ 120/16,67 = ***7.20***

Pregunta 15 test

Mètode del simplex i anàlisi de sensibilitat