

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS
Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Modelos y herramientas de decisión. Programación dinámica II

MODELOS Y HERRAMIENTAS DE DECISIÓN 240EO023 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización
(240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista-Valhondo

OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2018/23 240EO023 (20180416) - <http://futur.upc.edu/OPE-PROTHIUS> - www.prothius.com -
Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC



PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

MHD' 18 – Pro-Din (II): 0
J. Bautista

Contenido

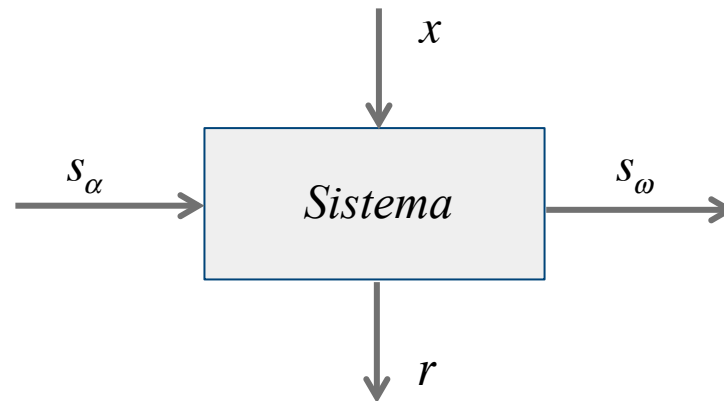
- Introducción
- Programación Dinámica. Características de los problemas
- Programación Dinámica. Tipología
- Programación Dinámica determinista. Nomenclatura
- Ejemplo 1: *El despertar de la Fuerza · El encuentro*. Recordatorio
- Ejemplo 4: *El despertar de la Fuerza · Los comerciantes*. PDD con (s,x) homogéneo en n . Presentación, formalización, resolución y trayectorias
- Ejemplo 5: *El despertar de la Fuerza · La rutina comercial*. PDD con (s,x) homogéneo en n ilimitada. Presentación, resolución y trayectorias
- Ejemplo 5. Ganancia media por viaje
- Programación Dinámica probabilística. Concepto, nomenclatura y esquema.
- Ejemplo 6: *El despertar de la Fuerza · Una rutina comercial arriesgada* Programación dinámica probabilística. Presentación



Introducción

Decisiones multietápicas

Una etapa:



$n = \text{etapa } (n = 1, 2, \dots, N)$

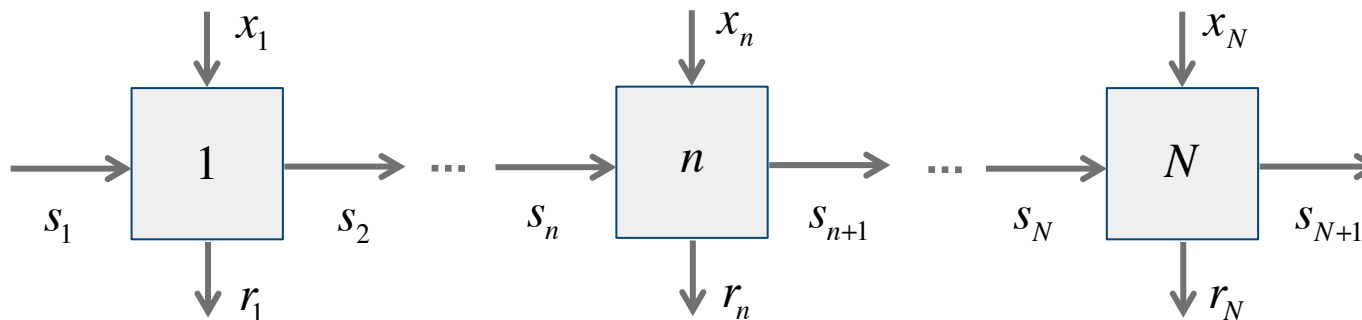
$x_n = \text{variable de decisi3n en la etapa } n$

$s_n = \text{estado al inicio de la etapa } n$

$s_{n+1} = \text{estado al final de la etapa } n$

$r_n(s_n, s_{n+1}, x_n) = \text{rendimiento en la etapa } n$

N etapas:



Programación Dinámica. Características de los problemas

Vocabulario y atributos:

- *División en etapas*: Agregación de *decisiones simples* para tomar una *decisión compleja*.
- *Etapas*: Se caracteriza por un conjunto de estados.
- *Decisión*: Transición de un estado a otro con *valor económico*. El efecto de la política de decisión es en cada etapa transformar el estado actual a otro del inicio de la etapa siguiente.
- *Valor Función económica*: Suma de valores económicos de las transiciones.
- *Política*: Secuencia de decisiones.
- *Política óptima*: Dado un estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores.
- *Principio de optimalidad*: La decisión inmediata óptima depende sólo del estado actual y no de cómo se llegó ahí.
- *Ecuación de recurrencia*: Permite establecer la *política óptima* a partir de cada estado posible.
- *Ecuación funcional*: Nombre de la *ecuación de recurrencia* cuando el número de etapas no está acotado.



Programación Dinámica. Tipología

Tipos de problemas y técnicas:

Según tipo de universo:

- Programación Dinámica Determinista (PDD).
- Programación Dinámica Probabilística (PDP).

Según horizonte (número de etapas):

- Finito determinado: número de etapas N fijado.
- Finito indeterminado: número de etapas N finito desconocido.
- Infinito: número de etapas N infinito.

Técnicas:

- Iteración en el espacio de los estados.
- Iteración en el espacio de las políticas.



Programación Dinámica determinista. Nomenclatura

Parámetros, variables y funciones:

N = número de etapas.

n = etiqueta de la etapa actual ($n = 1, 2, \dots, N$).

s_n = estado actual de la etapa n .

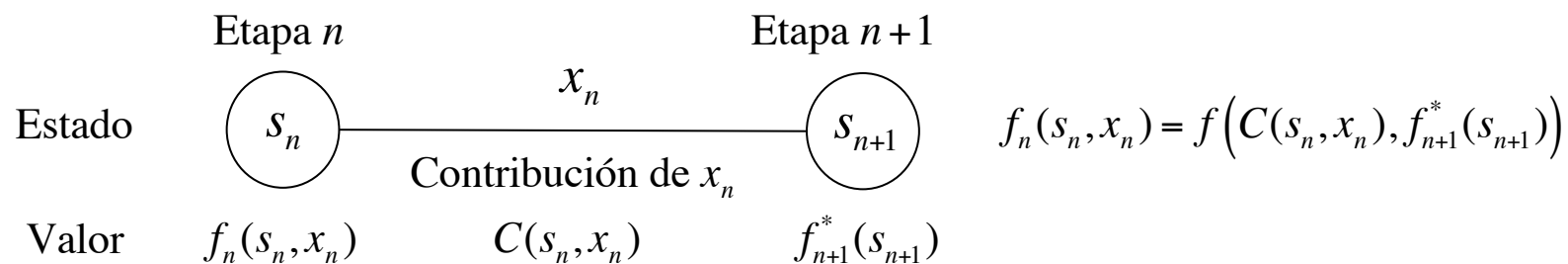
x_n = variable de decisión de la etapa n .

x_n^* = valor óptimo de x_n (dado s_n)

$f_n(s_n, x_n)$ = contribución a la función objetivo de las etapas $n, n+1, \dots, N$, desde s_n con decisión x_n .

$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$ = contribución óptima, desde s_n con la mejor decisión.

$f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$ o $f_n^*(s_n) = \max_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$



Ejemplo 1. Presentación (1)

Ejemplo 1 · El despertar de la Fuerza · El encuentro ⁽¹⁾ · Enunciado:

La joven REY (recolectora de chatarra en *Jakku*) está ahora al mando del HALCÓN MILENARIO. Junto a CHEWBACCA y R2-D2, REY parte hacia *Ahch-to* (J) para contactar con LUKE SKYWALKER. El viaje, programado desde *D'Qar* (A) en 4 etapas (figura 1), debe tener el menor riesgo posible.

(1) Basado en *el problema de la Diligencia* de HARVEY M. WAGNER (Stanford University)

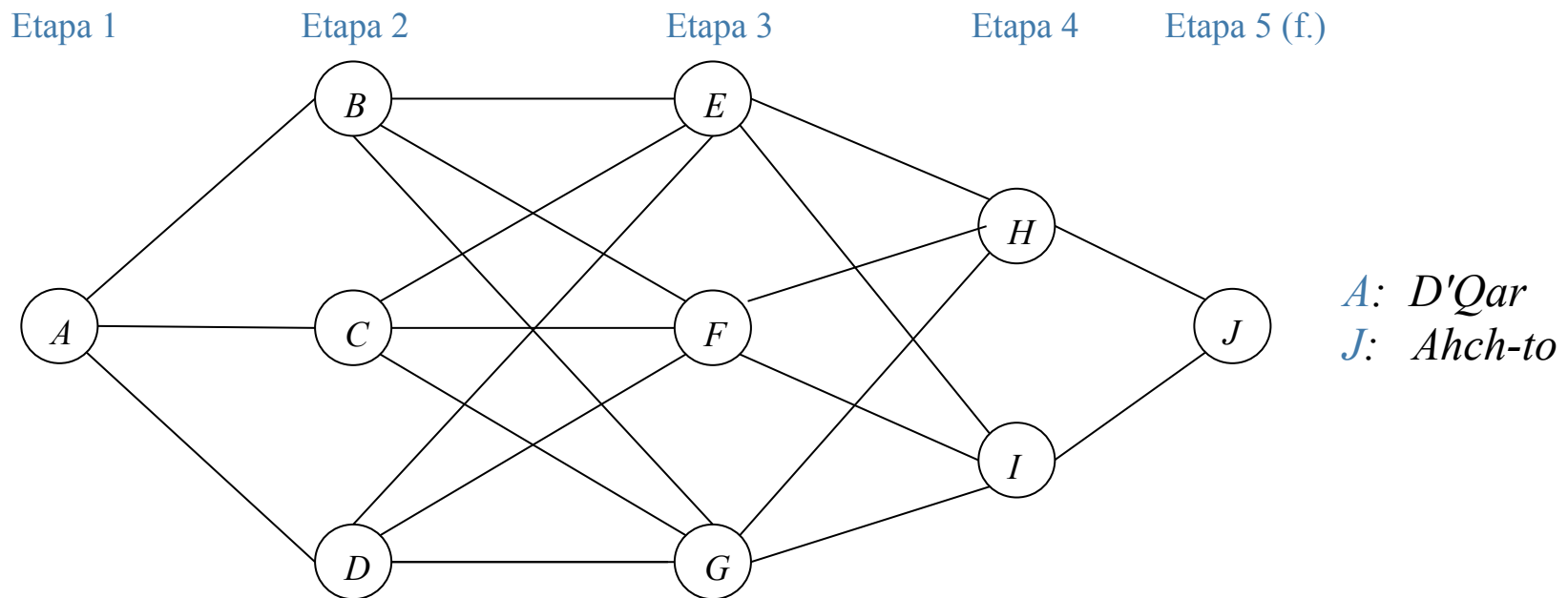


Figura 1: Esquema polietápico del viaje del *Halcón Milenario* desde D'Qar hasta Ahch-To.

Ejemplo 1. Presentación (2)

*Ejemplo 1 · El despertar de la Fuerza · El encuentro · Riesgo aditivo entre trayectos
(Valoración de 0 a 100):*

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	20	40	30

Riesgo Etapa 1

	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>B</i>	70	40	60
<i>C</i>	30	20	40
<i>D</i>	40	10	50

Riesgo Etapa 2

	<i>H</i>	<i>I</i>
<i>E</i>	10	40
<i>F</i>	60	30
<i>G</i>	30	30

Riesgo Etapa 3

	<i>J</i>
<i>H</i>	30
<i>I</i>	40

Riesgo Etapa 4

A – B – F – I – J

A – D – F – I – J

...

Rutas: $3 \times 3 \times 2 = 18$



Ejemplo 1. Formalización

Ejemplo 1 · El despertar de la Fuerza · El encuentro · Variables y costes:

Variables de decisión: Destino inmediato de la etapa n : n -ésimo viaje del *Halcón Milenario*.

$$x_n (n = 1, 2, 3, 4) \quad \text{Ruta : } A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4, \text{ donde } x_4 = J$$

Coste de la mejor política (s, x_n) : Coste (riesgo) al inicio de la etapa n (n -ésimo viaje), en función del estado de partida y de la decisión a tomar, para afrontar las etapas restantes.

$$f_n(s, x_n) \quad (n = 1, 2, 3, 4) \quad \text{Estado: } s, \text{ Decisión: } x_n$$

Coste mínimo estado-etapa : Coste mínimo (riesgo) al inicio de la etapa n (n -ésimo viaje), en función del estado de partida, tomando la mejor decisión para afrontar las etapas restantes.

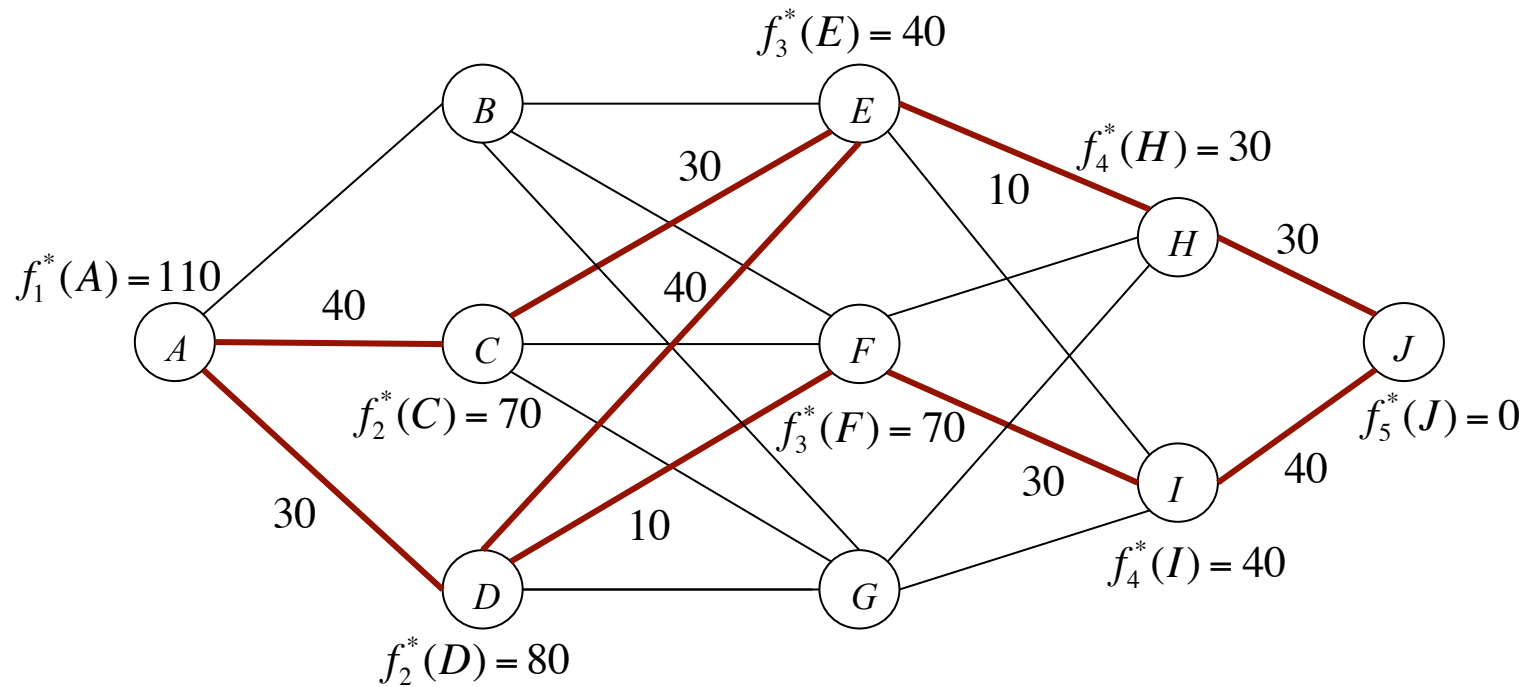
$$f_n^*(s) = \min_{x_n} f_n(s, x_n) = f_n(s, x_n^*) \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$f_n(s, x_n) = c_{s, x_n} + f_{n+1}^*(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$



Ejemplo 1. Resolución

Ejemplo 1 · El despertar de la Fuerza · El encuentro · Resolución Etapas 1 a 4 · Trayectorias:



A: D'Qar
J: Ahch-to

- Ruta 1: $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$
- Ruta 2: $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$
- Ruta 3: $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$



Ejemplo 4. PDD con (s,x) homogéneo en n . Presentación

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes ⁽¹⁾ · Enunciado:

La joven REY está ahora al mando del HALCÓN MILENARIO. Siguiendo las costumbres de *Han Solo* (contrabandista *corelliano*), REY compra, transporta y vende mercancías en 4 puntos del Imperio (*A, B, C y D*). Las ganancias netas obtenidas en cada viaje se muestran en la Tabla 1.

(1) Basado en *el problema del Contrabandista*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	-	7	10	11
<i>B</i>	7	-	8	12
<i>C</i>	4	5	-	4
<i>D</i>	2	1	6	-

Tabla 1: Ganancia (g) por operación del *Halcón Milenario* según origen-destino

$$\text{Rutas} : 4 \times 4 \times \dots \times 4 \dots = 2^{2N}$$

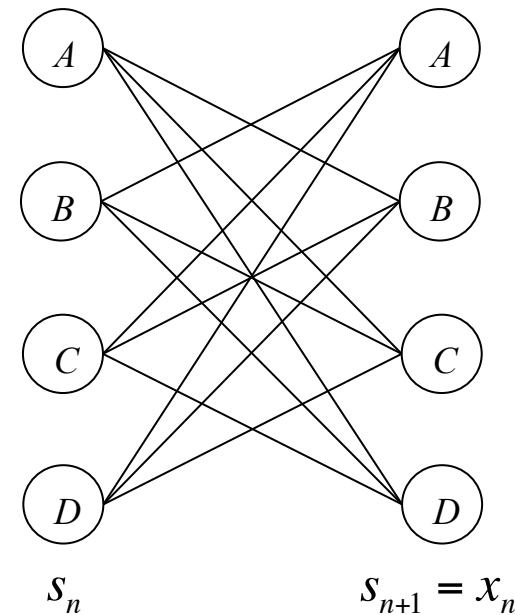


Figura 1: Esquema mono-etápico de los viajes del *Halcón Milenario*.

Ejemplo 4. Formalización

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes ⁽¹⁾ · Formulación:

N = número de viajes del Halcón Milenario.

n = etapa o viaje ($n = 1, 2, \dots, N$).

s_n = (estado) punto origen del viaje n

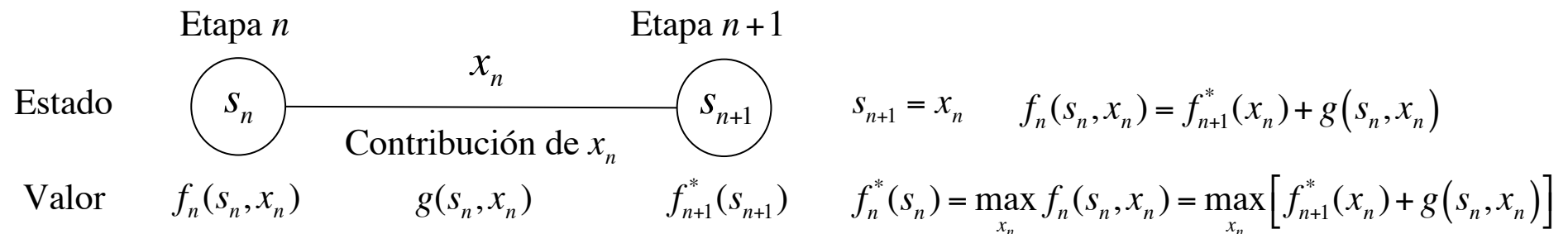
x_n = (decisión) punto destino del viaje n

x_n^* = valor óptimo de x_n (dado s_n)

$g(s_n, x_n)$ = ganancia elemental en un viaje desde s_n hasta x_n

$f_n(s_n, x_n)$ = ganancia máxima acumulada en las etapas $n, n+1, \dots, N$, a través de (s_n, x_n)

$f_n^*(s_n)$ = ganancia máxima acumulada en las etapas $n, n+1, \dots, N$, partiendo de s_n

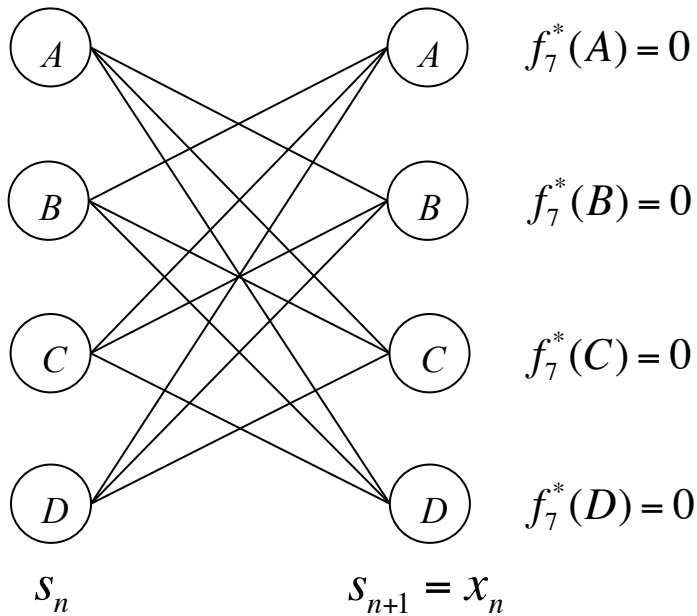


Ejemplo 4. Resolución (1)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Resolución 6ª Etapa:

$$n = 6 : s_6 \in \{A, B, C, D\}, x_6 \in \{A, B, C, D\}$$

$$f_6(s_6, x_6) = f_7^*(x_6) + g(s_6, x_6)$$



$$f_6^*(s_6) = \max_{x_6} f_6(s_6, x_6) = f_6(s_6, x_6^*)$$

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

	$f_6(s_6, x_6)$					
s_6 / x_6	A	B	C	D	$f_6^*(s)$	x_6^*
A	0	7	10	11	11	D
B	7	0	8	12	12	D
C	4	5	0	4	5	B
D	2	1	6	0	6	C

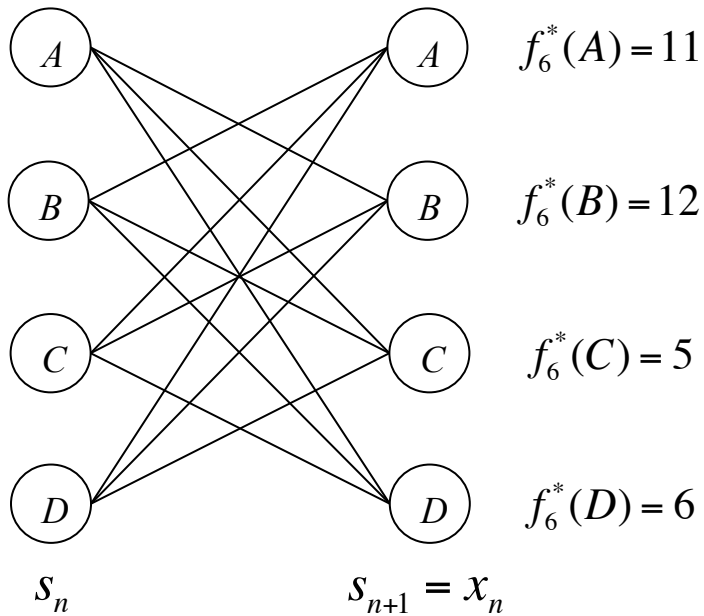


Ejemplo 4. Resolución (2)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Resolución 5ª Etapa:

$$n = 5: s_5 \in \{A, B, C, D\}, x_5 \in \{A, B, C, D\}$$

$$f_5(s_5, x_5) = f_6^*(x_5) + g(s_5, x_5)$$



$$f_5^*(s_5) = \max_{x_5} f_5(s_5, x_5) = f_5(s_5, x_5^*)$$

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

	$f_5(s_5, x_5)$					
s_5 / x_5	A	B	C	D	$f_5^*(s)$	x_5^*
A	11	19	15	17	19	B
B	18	12	13	18	18	A, D
C	15	17	5	10	17	B
D	13	13	11	6	13	A, B

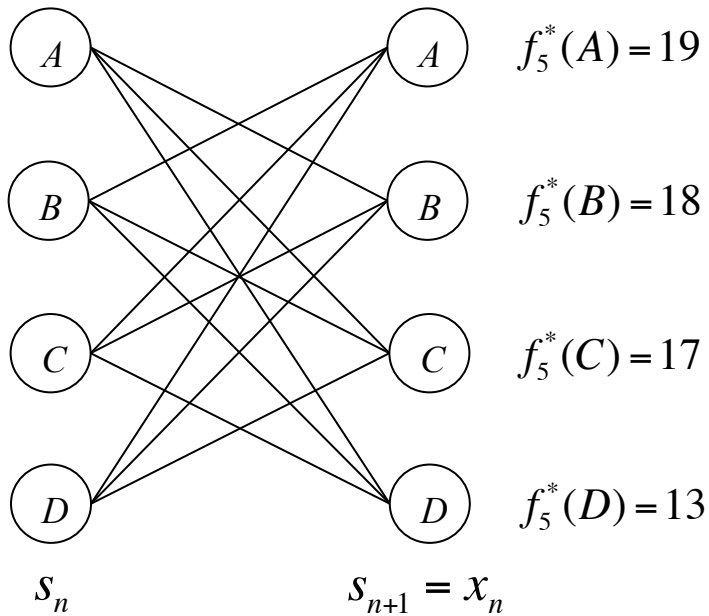


Ejemplo 4. Resolución (3)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Resolución 4ª Etapa:

$$n = 4: s_4 \in \{A, B, C, D\}, x_4 \in \{A, B, C, D\}$$

$$f_4(s_4, x_4) = f_5^*(x_4) + g(s_4, x_4)$$



$$f_4^*(s_4) = \max_{x_4} f_4(s_4, x_4) = f_4(s_4, x_4^*)$$

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

	$f_4(s_4, x_4)$					
s_4 / x_4	A	B	C	D	$f_4^*(s)$	x_4^*
A	19	25	27	24	27	C
B	26	18	25	25	26	A
C	23	23	17	17	23	A,B
D	21	19	23	13	23	C

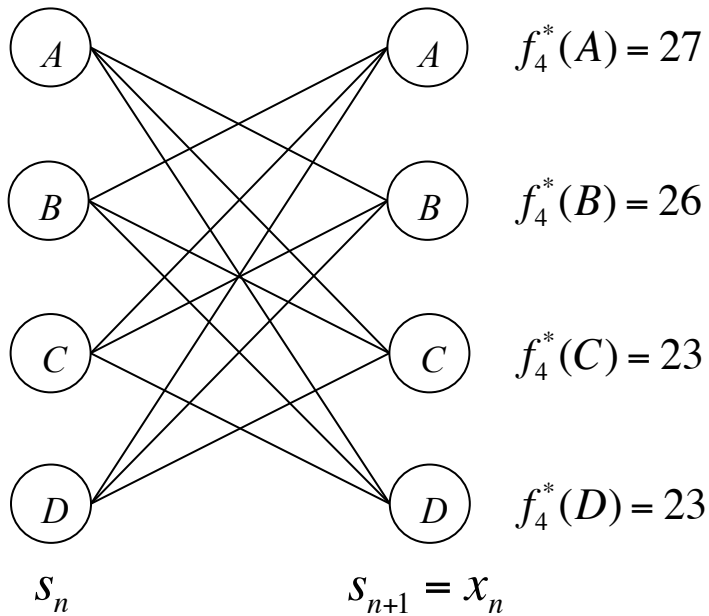


Ejemplo 4. Resolución (4)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Resolución 3ª Etapa:

$$n = 3: s_3 \in \{A, B, C, D\}, x_3 \in \{A, B, C, D\}$$

$$f_3(s_3, x_3) = f_4^*(x_3) + g(s_3, x_3)$$



$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3} f_3(s_3, x_3) = f_3(s_3, x_3^*)$$

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

	$f_3(s_3, x_3)$					
s_3 / x_3	A	B	C	D	$f_3^*(s)$	x_3^*
A	27	33	33	34	34	D
B	34	26	31	35	35	D
C	31	31	23	27	31	A, B
D	29	27	29	23	29	A, C

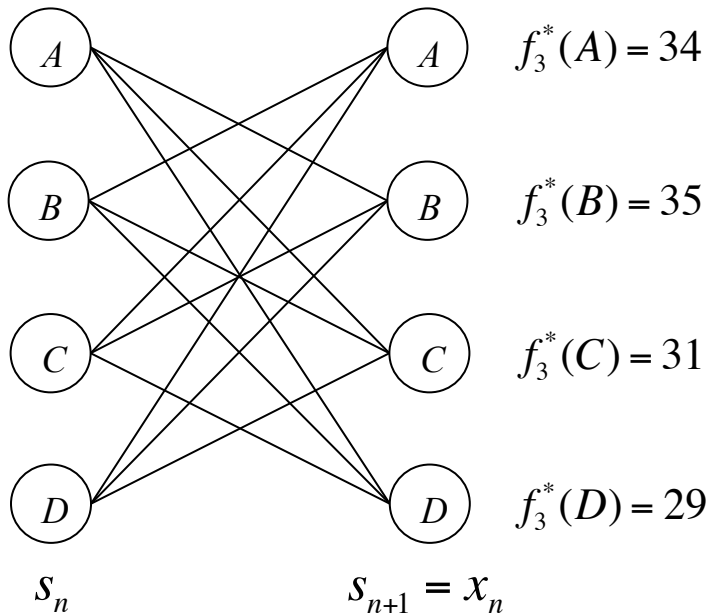


Ejemplo 4. Resolución (5)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Resolución 2ª Etapa:

$$n = 2 : s_2 \in \{A, B, C, D\}, x_2 \in \{A, B, C, D\}$$

$$f_2(s_2, x_2) = f_3^*(x_2) + g(s_2, x_2)$$



$$f_2^*(s_2) = \max_{x_2} f_2(s_2, x_2) = f_2(s_2, x_2^*)$$

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

	$f_2(s_2, x_2)$					
s_2 / x_2	A	B	C	D	$f_2^*(s)$	x_2^*
A	34	42	41	40	42	B
B	41	35	39	41	41	A, D
C	38	40	31	33	40	B
D	36	36	37	29	37	C

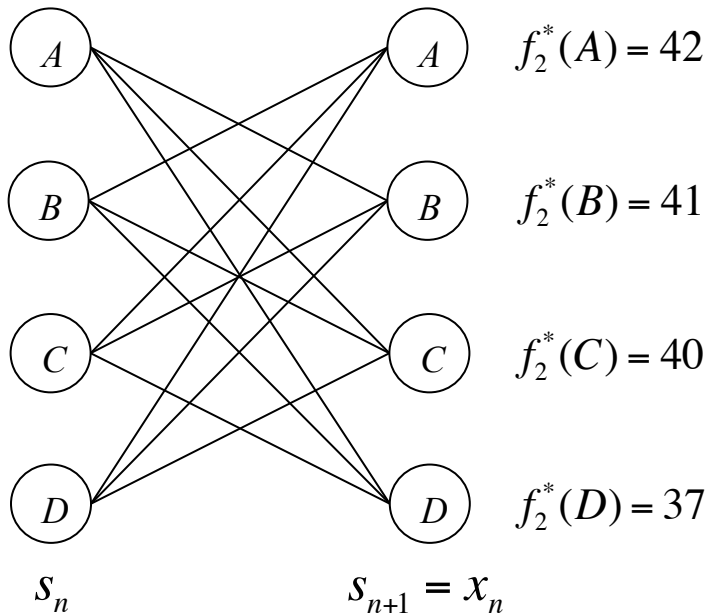


Ejemplo 4. Resolución (6)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Resolución 1ª Etapa:

$$n = 1: s_1 \in \{A, B, C, D\}, x_1 \in \{A, B, C, D\}$$

$$f_1(s_1, x_1) = f_2^*(x_1) + g(s_1, x_1)$$



$$f_1^*(s_1) = \max_{x_1} f_1(s_1, x_1) = f_1(s_1, x_1^*)$$

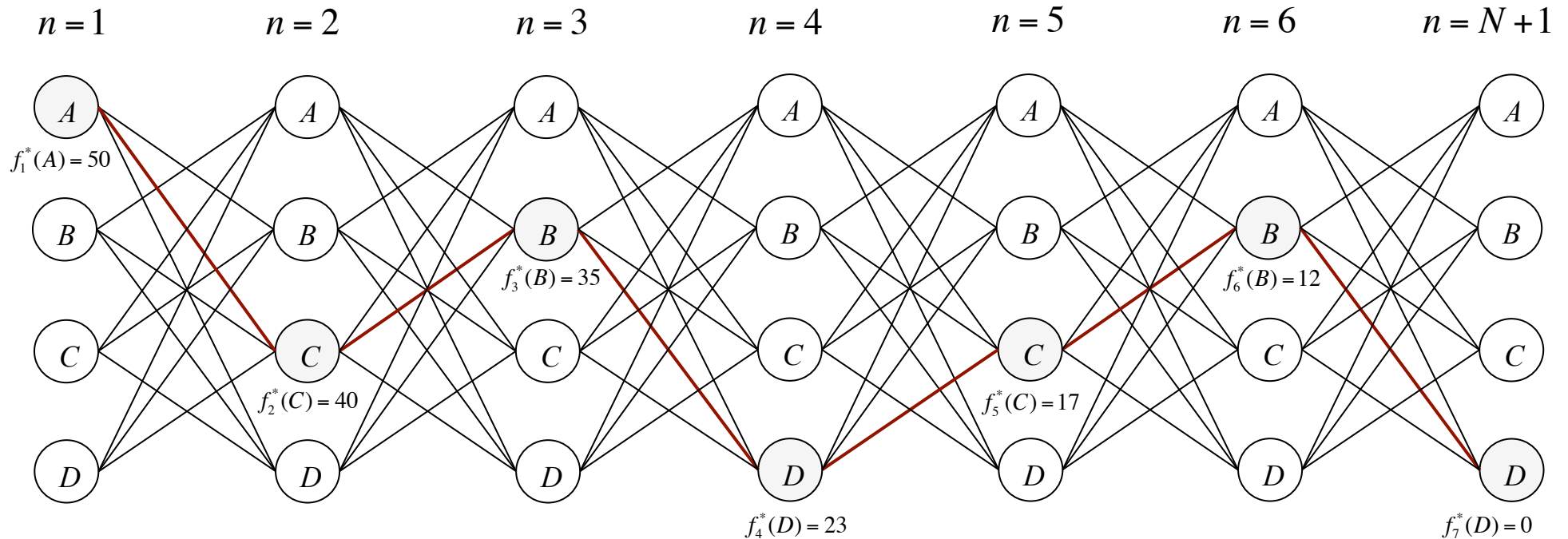
	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

	$f_1(s_1, x_1)$					
s_1 / x_1	A	B	C	D	$f_1^*(s)$	x_1^*
A	42	48	50	48	50	C
B	49	41	48	49	49	A, D
C	46	46	40	41	46	A, B
D	44	42	46	37	46	C



Ejemplo 4. Trayectorias (1)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Origen en A:

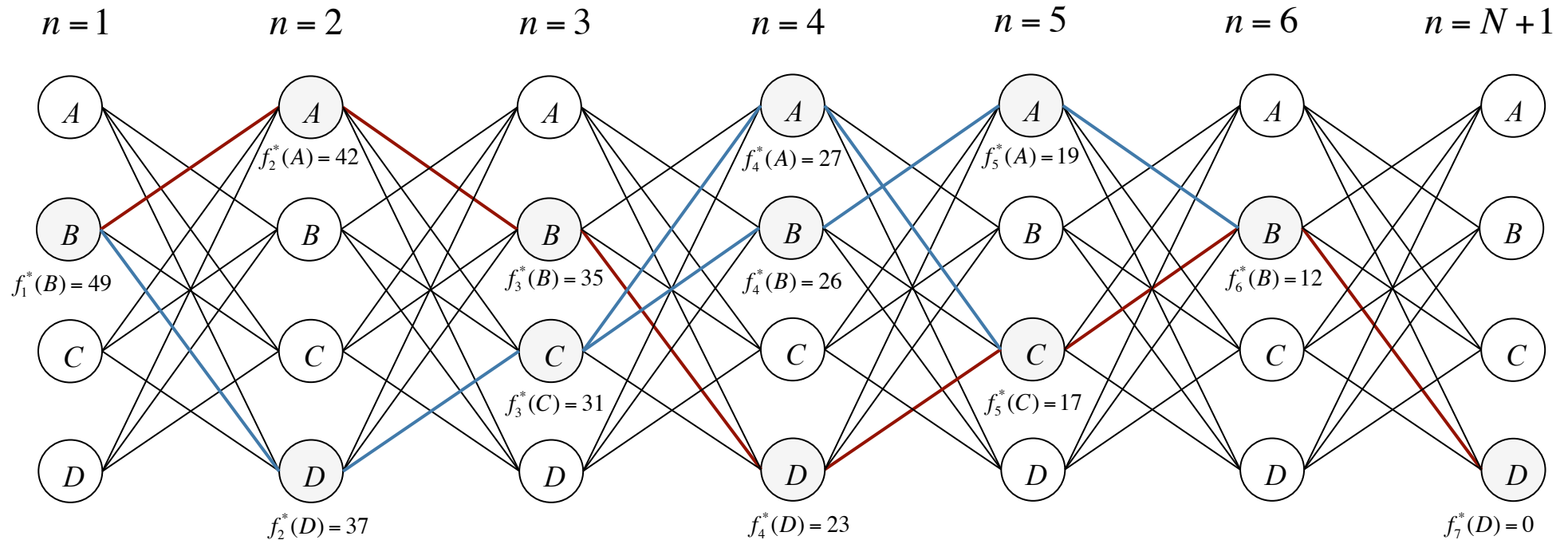


Ruta($s_1 = A$): $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$



Ejemplo 4. Trayectorias (2)

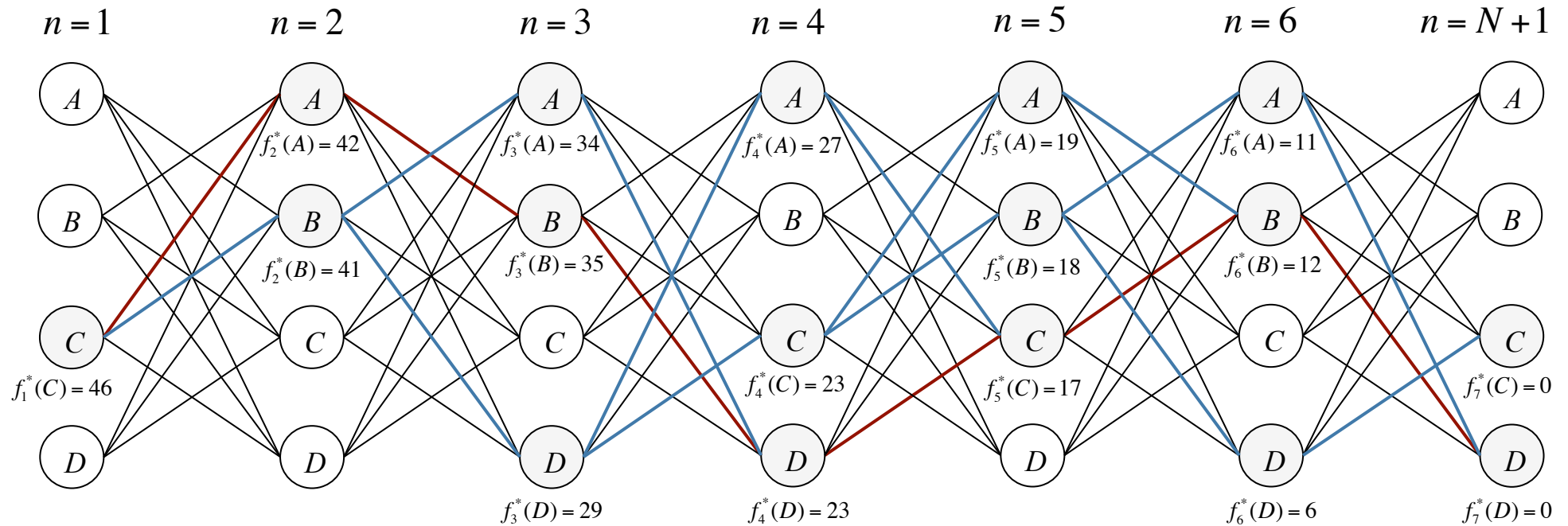
Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Origen en B:



$$\text{Ruta}(s_1 = B) : \left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \\ B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \\ B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \end{array} \right\}$$

Ejemplo 4. Trayectorias (3)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Origen en C:

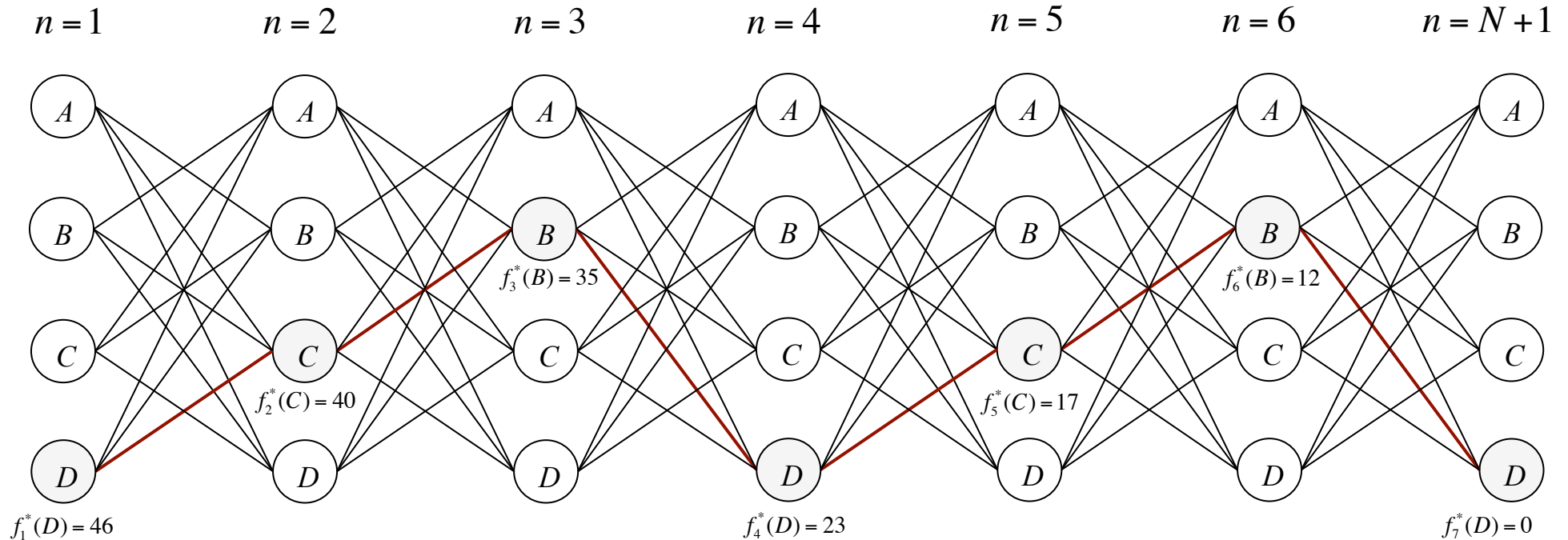


$$\text{Ruta}(s_1 = C) : \left\{ \begin{array}{l} (i) C \rightarrow \left(\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{array} \right) \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D; \\ (ii) C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow \left(\begin{array}{l} A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \\ C \rightarrow \left(\begin{array}{l} A \rightarrow B \rightarrow D \\ B \rightarrow \left(\begin{array}{l} A \rightarrow D \\ D \rightarrow C \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$



Ejemplo 4. Trayectorias (4)

Ejemplo 4 · El despertar de la Fuerza · Los comerciantes · Las 6 etapas · Origen en D:



Ruta ($s_1 = D$): $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$



Ejemplo 5. PDD con (s,x) homogéneo en n ilimitada. Presentación

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · Enunciado:

La joven REY, al mando del HALCÓN MILENARIO, quiere establecer una rutina para sus viajes de compra y venta de mercancías en 4 puntos del Imperio (A , B , C y D). La rutina debe contemplar al menos 20 transacciones. Las ganancias netas obtenidas en cada viaje se muestran en la Tabla 1.

(1) Basado en *el problema del Contrabandista*

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

Tabla 1: Ganancia (g) por operación del *Halcón Milenario* según origen-destino

$$\text{Rutas} : 4 \times 4 \times \dots \times 4 \dots = 2^{2N}$$

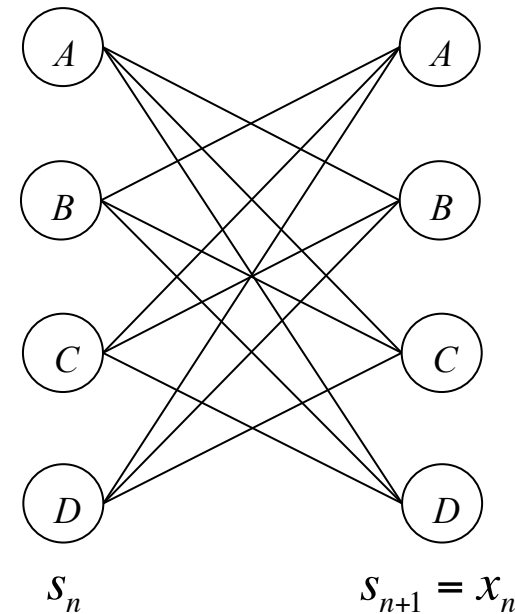


Figura 1: Esquema mono-etápico de los viajes del *Halcón Milenario*.

Ejemplo 5. Resolución

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · 20 etapas:

	A	B	C	D
A	-	7	10	11
B	7	-	8	12
C	4	5	-	4
D	2	1	6	-

<i>n</i>	20	19		18		17		16		15		14		13		12		11		
<i>s_n</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>
A	11	D	19	B	27	C	34	D	42	B	50	C	57	D	65	B	73	C	80	D
B	12	D	18	A	26	A	35	D	41	A	49	A	58	D	64	A	72	A	81	D
C	5	B	17	B	23	A	31	A	40	B	46	A	54	A	63	B	69	A	77	A
D	6	C	13	A	23	C	29	A	37	C	46	C	52	A	60	C	69	C	75	A

<i>n</i>	10	9		8		7		6		5		4		3		2		1		
<i>s_n</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>	<i>f</i>	<i>x</i>
A	88	B	96	C	103	D	111	B	119	C	126	D	134	B	142	C	149	D	157	B
B	87	A	95	A	104	D	110	A	118	A	127	D	133	A	141	A	150	D	156	A
C	86	B	92	A	100	A	109	B	115	A	123	A	132	B	138	A	146	A	155	B
D	83	C	92	C	98	A	106	C	115	C	121	A	129	C	138	C	144	A	152	C



Ejemplo 5. Trayectorias (1)

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · 20 etapas · Origen en A:

n	20		19		18		17		16		15		14		13		12		11	
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x
A	11	D	19	B	27	C	34	D	42	B	50	C	57	D	65	B	73	C	80	D
B	12	D	18	A	26	A	35	D	41	A	49	A	58	D	64	A	72	A	81	D
C	5	B	17	B	23	A	31	A	40	B	46	A	54	A	63	B	69	A	77	A
D	6	C	13	A	23	C	29	A	37	C	46	C	52	A	60	C	69	C	75	A

n	10		9		8		7		6		5		4		3		2		1	
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x
A	88	B	96	C	103	D	111	B	119	C	126	D	134	B	142	C	149	D	157	B
B	87	A	95	A	104	D	110	A	118	A	127	D	133	A	141	A	150	D	156	A
C	86	B	92	A	100	A	109	B	115	A	123	A	132	B	138	A	146	A	155	B
D	83	C	92	C	98	A	106	C	115	C	121	A	129	C	138	C	144	A	152	C

$$\text{Ruta}(s_1 = A): A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow \pi(C \rightarrow B \rightarrow D)$$



Ejemplo 5. Trayectorias (2)

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · 20 etapas · Origen en B:

n	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x
A	11	D	19	B	27	C	34	D	42	B
B	12	D	18	A	26	A	35	D	41	A
C	5	B	17	B	23	A	31	A	40	B
D	6	C	13	A	23	C	29	A	37	C

n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x
A	88	B	96	C	103	D	111	B	119	C
B	87	A	95	A	104	D	110	A	118	A
C	86	B	92	A	100	A	109	B	115	A
D	83	C	92	C	98	A	106	C	115	C

Ruta($s_1 = B$): $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow \pi(C \rightarrow B \rightarrow D)$



Ejemplo 5. Trayectorias (3)

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · 20 etapas · Origen en C:

n	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11										
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x										
A	11	D	19	B	27	C	34	D	42	B	50	C	57	D	65	B	73	C	80	D
B	12	D	18	A	26	A	35	D	41	A	49	A	58	D	64	A	72	A	81	D
C	5	B	17	B	23	A	31	A	40	B	46	A	54	A	63	B	69	A	77	A
D	6	C	13	A	23	C	29	A	37	C	46	C	52	A	60	C	69	C	75	A

n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1										
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x										
A	88	B	96	C	103	D	111	B	119	C	126	D	134	B	142	C	149	D	157	B
B	87	A	95	A	104	D	110	A	118	A	127	D	133	A	141	A	150	D	156	A
C	86	B	92	A	100	A	109	B	115	A	123	A	132	B	138	A	146	A	155	B
D	83	C	92	C	98	A	106	C	115	C	121	A	129	C	138	C	144	A	152	C

$$\text{Ruta}(s_1 = C): C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow \pi(C \rightarrow B \rightarrow D)$$



Ejemplo 5. Trayectorias (4)

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · 20 etapas · Origen en D:

n	20		19		18		17		16		15		14		13		12		11	
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x
A	11	D	19	B	27	C	34	D	42	B	50	C	57	D	65	B	73	C	80	D
B	12	D	18	A	26	A	35	D	41	A	49	A	58	D	64	A	72	A	81	D
C	5	B	17	B	23	A	31	A	40	B	46	A	54	A	63	B	69	A	77	A
D	6	C	13	A	23	C	29	A	37	C	46	C	52	A	60	C	69	C	75	A

n	10		9		8		7		6		5		4		3		2		1	
s_n	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x	f	x
A	88	B	96	C	103	D	111	B	119	C	126	D	134	B	142	C	149	D	157	B
B	87	A	95	A	104	D	110	A	118	A	127	D	133	A	141	A	150	D	156	A
C	86	B	92	A	100	A	109	B	115	A	123	A	132	B	138	A	146	A	155	B
D	83	C	92	C	98	A	106	C	115	C	121	A	129	C	138	C	144	A	152	C

$$\text{Ruta}(s_1 = D): D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \pi(C \rightarrow B \rightarrow D)$$



Ejemplo 5. Ganancia media por viaje

Ejemplo 5 · El despertar de la Fuerza · La rutina comercial · 20 etapas · Ganancia media:

<i>Pasos</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
<i>A</i>	11.00	9.50	9.00	8.50	8.40	8.33	8.14	8.13	8.11	8.00
<i>B</i>	12.00	9.00	8.67	8.75	8.20	8.17	8.29	8.00	8.00	8.10
<i>C</i>	5.00	8.50	7.67	7.75	8.00	7.67	7.71	7.88	7.67	7.70
<i>D</i>	6.00	6.50	7.67	7.25	7.40	7.67	7.43	7.50	7.67	7.50
<i>EM</i>	8.50	8.38	8.25	8.06	8.00	7.96	7.89	7.88	7.86	7.83

<i>Pasos</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	<i>19</i>	<i>20</i>
<i>A</i>	8.00	8.00	7.92	7.93	7.93	7.88	7.88	7.89	7.84	7.85
<i>B</i>	7.91	7.92	8.00	7.86	7.87	7.94	7.82	7.83	7.89	7.80
<i>C</i>	7.82	7.67	7.69	7.79	7.67	7.69	7.76	7.67	7.68	7.75
<i>D</i>	7.55	7.67	7.54	7.57	7.67	7.56	7.59	7.67	7.58	7.60
<i>EM</i>	7.82	7.81	7.79	7.79	7.78	7.77	7.76	7.76	7.75	7.75



Programación Dinámica probabilística

Concepto : El estado de la siguiente etapa no está determinado completamente por el estado y la decisión de la etapa actual (n). Existe una distribución de probabilidad para determinar cuál será el siguiente estado.

Nomenclatura:

N = número de etapas.

n = etiqueta de la etapa actual ($n = 1, 2, \dots, N$).

s_n = estado actual de la etapa n .

x_n = variable de decisión de la etapa n .

x_n^* = valor óptimo de x_n (dado s_n)

S = número de estados posibles en la etapa $n + 1$

i = etiqueta de estado posible en la etapa $n + 1$ ($i = 1, \dots, S$)

p_i = probabilidad de alcanzar el estado i desde el estado s_n con la decisión x_n

C_i = contribución de la etapa n a la función objetivo dependiente del estado i

$f_n(s_n, x_n)$ = contribución a la función objetivo de las etapas $n, n + 1, \dots, N$, desde s_n con decisión x_n

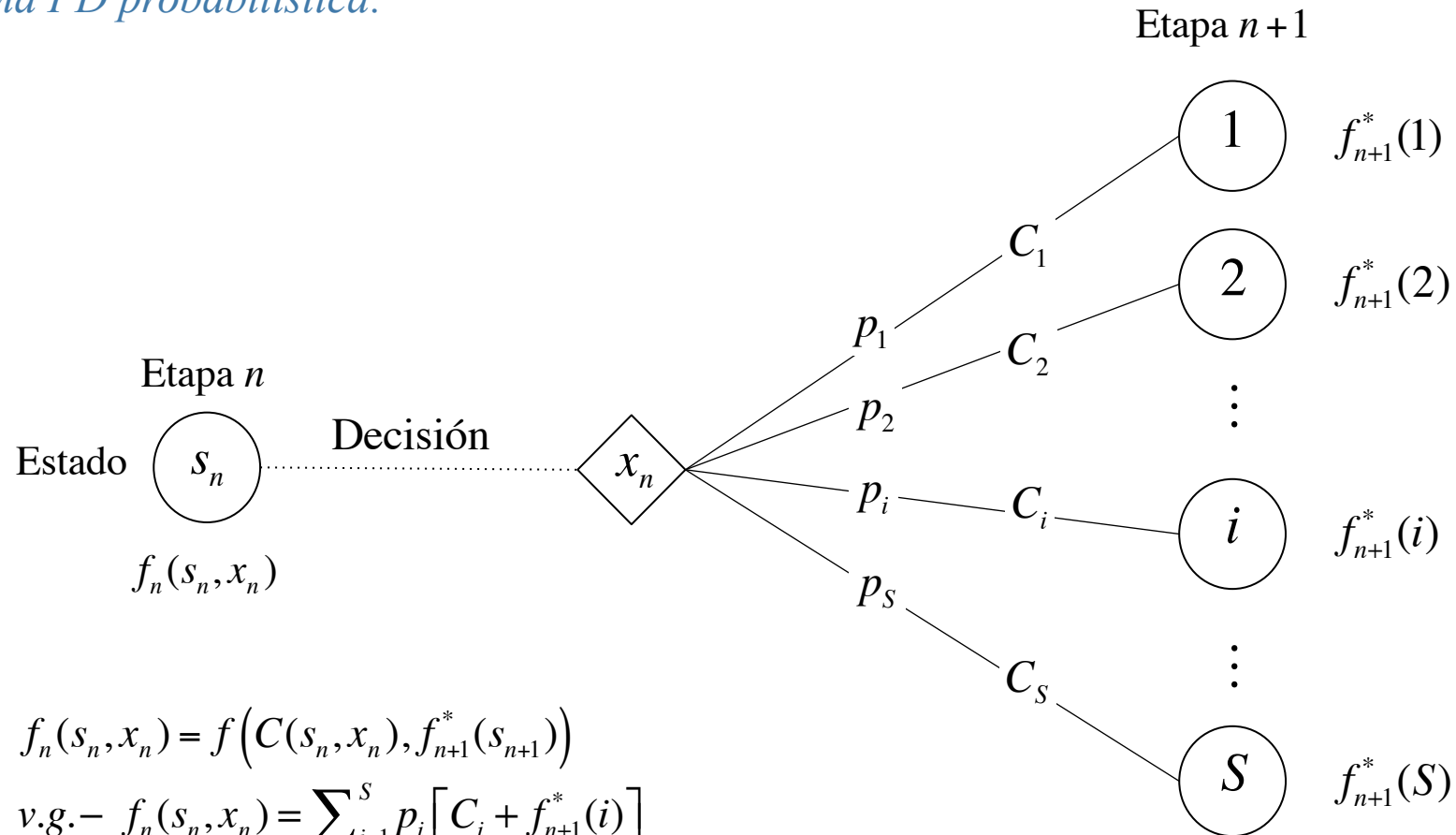
Caso particular: $f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^S p_i [C_i + f_{n+1}^*(i)]$, con $f_{n+1}^*(i) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(i, x_{n+1})$

$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$ = contribución óptima: $f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$ o $f_n^*(s_n) = \max_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$



Programación Dinámica probabilística

Esquema PD probabilística:



$$f_n(s_n, x_n) = f(C(s_n, x_n), f_{n+1}^*(s_{n+1}))$$

$$\text{v.g.} - f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^S p_i [C_i + f_{n+1}^*(i)]$$

$$\text{con } f_{n+1}^*(i) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(i, x_{n+1}) \text{ o } f_{n+1}^*(i) = \max_{x_{n+1}} f_{n+1}(i, x_{n+1})$$

Ejemplo 6. Programación dinámica probabilística. Presentación

Ejemplo 6 · El despertar de la Fuerza · Una rutina comercial arriesgada · Enunciado:

La joven REY, al mando del HALCÓN MILENARIO, considera arriesgada su rutina comercial en los 4 puntos del Imperio *A*, *B*, *C* y *D*. Por ello, en sus viajes quiere contemplar, además de las ganancias, la probabilidad de alcanzar con éxito cada destino (Tabla 2).

$g(s,x)$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	-	7	10	11
<i>B</i>	7	-	8	12
<i>C</i>	4	5	-	4
<i>D</i>	2	1	6	-

p_i	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	-	0.46	0.23	0.31
<i>B</i>	0.58	-	0.19	0.23
<i>C</i>	0.39	0.39	-	0.22
<i>D</i>	0.49	0.30	0.21	-

Tabla 2: Ganancia (g) por operación y probabilidad (p) de llegar al destino con éxito del *Halcón Milenario* según origen-destino

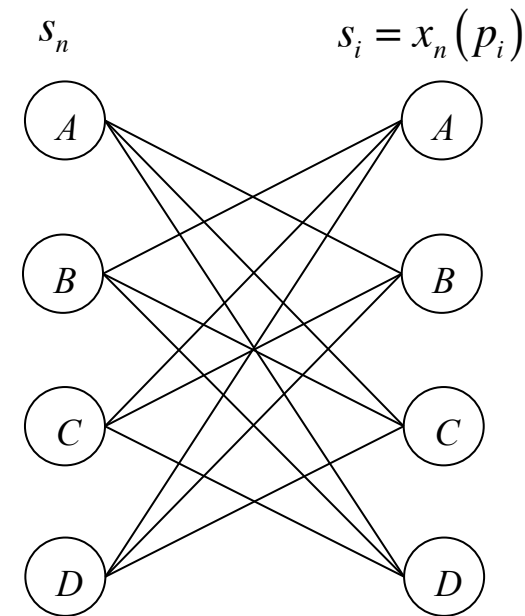


Figura 2: Esquema mono-etápico de los viajes del *Halcón Milenario*.

Recursividad

- Acabas de decir que es un juego antiguo. ¿Acaso no lo has inventado tú?

No; yo solamente lo he aplicado. Este juego es antiquísimo y dicen que procede de la India. Existe una interesante leyenda acerca del mismo. En la ciudad de Benarés hay un templo, en el cual, según cuenta la leyenda, el dios hindú Brahma, al crear el mundo, puso verticalmente tres palitos de diamantes, colocando en uno de ellos 64 anillos de oro: el más grande, en la parte inferior, y los demás por orden de tamaño uno encima del otro. Los sacerdotes del templo debían, trabajando noche y día sin descanso, trasladar todos los anillos de un palito a otro, utilizando el tercero como auxiliar, y observando las reglas de nuestro juego, o sea, cambiar cada vez sólo un anillo y no colocar un anillo de mayor diámetro sobre otro de menor. La leyenda dice que cuando los 64 anillos estuvieran trasladados llegaría el final del mundo.

Yákov Isídorovich PERELMÁN (1882 – 1942)

Matemáticas recreativas

