ÀLGEBRA LINEAL

Exercicis i problemes comentats

Jaume Martí-Farré, Pedro Daniel Prieto-Martínez, Jordi Tura

Departament de Matemàtica Aplicada IV

Universitat Politècnica de Catalunya

Aquest document pretén ser un complement de les classes de l'assignatura "Àlgebra Lineal" del primer curs del Grau en Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya, FME-UPC.

En les pàgines següents trobareu la resolució comentada de vint-i-set problemes seleccionats de la llista que l'assignatura ha fet servir durant els cursos 2009-2010, 2010-2011 i 2011-2012. Les resolucions comentades d'aquests problemes estan enfocades a millorar l'aprenentatge de l'assignatura, consolidar els diferents conceptes teòrics, i ajudar a destriar les dificultats conceptuals de les de càlcul. Per això aquests problemes han estat resolts amb el màxim detall possible. En cada un d'ells s'ha procurat explicar tots dels passos i raonaments que porten a la seva resolució i a més, d'alguns apartats, s'han presentat resolucions alternatives tot analitzant els avantatges i desavantatges de cadascuna d'elles. Durant la seva resolució s'han intercalat resums teòrics i comentaris addicionals amb l'objectiu d'ajudar a potenciar les capacitats d'abstracció i de comprensió de la matèria i que, alhora, deixin veure més enllà de l'exercici concret. Per tot això les explicacions dels problemes són molt més extenses i detallades del que es considera una resolució estàndard i, per tant, no s'han de fer servir com a model de com s'ha d'escriure un problema resolt. Esperem que aquest document us sigui d'utilitat.

Barcelona, juliol de 2012.

Exercicis i problemes. Enunciats

Matrius, determinants i sistemes d'equacions lineals

1. Determineu per a quins valors dels paràmetres reals a, b el sistema $\left\{\begin{array}{lll} x & -2y & = 3(a+b) \\ x & -y & = 2(a+b)+1 \end{array}\right.$ i el sistema $\left\{\begin{array}{lll} ax & +by & = a^2-b^2-6 \\ bx & +ay & = b^2-a^2+6 \end{array}\right.$ tenen una solució comuna.

2. (a) Sigui A la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ on a és un paràmetre real. Es demana:

(a.1) Determineu el rang de la matriu A. Quan A és invertible?

(a.2) Per a $a = 0$ calculeu A^{-1}.

(a.3) Determineu els valors de a pels quals $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Considerem el sistema homogeni $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 0 \\ -x+y+2z & = 0 \\ 2x+az & = 0 \end{array}\right.$.

(b.1) Per a quins valors de a el sistema és compatible determinat?

(b.2) Calculeu les solucions del sistema segons els diferents valors del paràmetre a.

(b.3) Determineu a, b de manera que $(x, y, z) = (2, b, 4)$ sigui una solució del sistema.

(c) Considerem el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 1 \\ -x+y+2z & = 3 \\ 2x+az & = c \end{array}\right.$.

(c.1) Per a quins valors de a,c el sistema és compatible? quan és compatible determinat? quan és compatible indeterminat?

(c.2) Determineu els valors a, c de manera que $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ sigui una solució del sistema. Quan és l'única solució del sistema?

(c.3) Demostreu que no existeixen a, c de manera que $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ sigui una solució del sistema.

(c.4) Determineu la solució general del sistema en el cas $a = 0$ i c arbitrari.

(c.5) Determineu la solució general del sistema en el cas a arbitrari i $c = -2$.

Espais vectorials

3. Demostreu que el conjunt B és una base de l'espai E que s'indica i, en cada cas, determineu les coordenades de l'element w en la base B.

(a) En $\mathbb{R}^2$ el conjunt $B = \{u_1, u_2\}$ on $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (3, 4)$, i l'element genèric $w = (a, b)$.

(b) En $\mathbb{R}^3$ el conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ on $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, i l'element genèric $w = (a, b, c)$.

(c) En $\mathbb{R}^4$ el conjunt de vectors $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ on $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 3, 0)$, $u_3 = (1, 0, -1, 0)$, $u_4 = (0, 1, 2, 0)$ i l'element $w = (1, 5, 10, 2)$.

(d) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el conjunt de matrius $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ on $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, i com element w la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Sigui $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Considerem els vectors $v_1 = u_1$, $v_2 = au_2 + u_3$ i $v_3 = u_1 + u_2 + bu_3$, on $a, b \in \mathbb{K}$ són escalars. Sigui $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(a) Determineu a, b per als quals B_v és base de E i $M(B_u \to B_v) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

(b) Determineu a, b per als quals B_v és base de E i les coordenades de $u_1 + 2u_2 - u_3$ en aquesta base són $(3, -1, -2)$.

5. Sigui E un espai vectorial de dimensió finita.

(a) Demostreu que si F, G són dos subespais de E aleshores, $\dim(F + G) - \dim(F \cap G) = \dim F - \dim G$ si i només si $G \subseteq F$.

(b) Sigui F un subespai de E, i siguin $G_1, G_2 \subseteq E$ dos subespais amb $\dim G_1 = \dim G_2$. Demostreu que $\dim(F + G_1) = \dim(F + G_2)$ si i només si $\dim(F \cap G_1) = \dim(F \cap G_2)$. És cert que $F + G_1 = F + G_2$ si i només si $F \cap G_1 = F \cap G_2$?

(c) Sigui F un subespai de E, i siguin H_1, H_2 dos subespais complementaris de F. Podem afirmar que $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$? Podem afirmar que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$?

6. Sigui $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matriu no nul·la fixada. Sigui $F_1(A) = \langle \mathrm{Id}, A, A^2, \ldots, A^n, \ldots \rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el subespai generat per les potències de A, i sigui $F_2(A) = \{M : AM = MA\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el subespai format per les matrius que commuten amb la matriu A. Demostreu que:

(a) El subespai $F_1(A)$ té dimensió 1 o 2, i té dimensió 1 si i només si A és una matriu escalar. (Indicació: demostreu que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A - \det(A)\,\mathrm{Id}$).

(b) El subespai $F_2(A)$ té dimensió 2 o 4, i té dimensió 4 si i només si A és una matriu escalar.

(c) Es té la igualtat $F_1(A) = F_2(A)$ si i només si A no és una matriu escalar.

7. En $\mathbb{R}^6$, agafem sis vectors $v_1, \ldots, v_6$ linealment independents i considerem els subespais $F = \langle v_1, v_2 \rangle$, $G = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$, $H = \langle v_6, v_1 + v_3 + v_6 \rangle$. Calculeu la dimensió i una base dels subespais $(F + G)/H$, $(F/H) + (G/H)$, $(F \cap G)/H$ i $(F/H) \cap (G/H)$ de l'espai quocient $\mathbb{R}^6/H$. Són F i G subespais complementaris? Són F/H i G/H subespais complementaris?

8. Considerem les famílies de vectors $B_1 = \{(1, -1, 0), (2, 1, 3)\}$ i $B_2 = \{(1, 5, 6), (1, 2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Demostreu que el subespai vectorial generat per la família de vectors B_1 coincideix amb el subespai vectorial que genera la família B_2. Notem per F aquest subespai.

(b) Trobeu, en l'espai vectorial F, la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2. Determineu les coordenades de $(-5, -7, -12) \in F$ en la base B_1 i en la base B_2.

(c) Sigui $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespai complementari de F. Demostreu que els conjunts $[B_1] = \{[(1, -1, 0)], [(2, 1, 3)]\}$ i $[B_2] = \{[(1, 5, 6)], [(1, 2, 3)]\}$ són dos bases de $\mathbb{R}^3/H$.

(d) Trobeu, en l'espai $\mathbb{R}^3/H$, la matriu de canvi de base de la base $[B_1]$ a la base $[B_2]$. Determineu les coordenades de $[(-5, -7, -12)] \in \mathbb{R}^3/H$ en la base $[B_1]$ i en la base $[B_2]$.

Aplicacions lineals

9. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y) = (x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y)$. Per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ es té que $\operatorname{Ker} f = \langle(1, -1)\rangle$? Quan $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y = 0\}$?

10. Sigui f un endomorfsme d'un espai vectorial E de dimensió finita n. Demostreu que:

(a) Si n és senar, o si n és parell i $\operatorname{rang} f \neq n/2$, aleshores segur que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$.

(b) Si $n = 2$ aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(c) Si $n = 3$ aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(d) Per a tot n es té que, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

11. En $\mathbb{R}^4$ considerem el subespai $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y - z = x - t = 0\}$ i l'endomorfisme f definit per $f(x, y, z, t) = (x - z, y + z - t, x + y - t, x - y - 2z + t)$. Calculeu la dimensió i una base dels subespais F, $f(F)$ i $f^{-1}(F)$, i comproveu que $f(f^{-1}(F)) \subsetneq F \subsetneq f^{-1}(f(F))$.

12. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ defint per $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 1, 0)$, $f(0, 0, 1, 0) = (-1, 1, 0, 1)$ i $f(0, 0, 0, 1) = (0, -1, 0, 1)$.

(a) Demostreu que si $F, G \subseteq \mathbb{R}^4$ són dos subespais vectorials no nuls tals que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, aleshores $\mathbb{R}^4 = f(F) \oplus f(G)$.

(b) Considerem els subespais vectorials $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x + y = z + t = 0\}$, $G_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y = z = x + t\}$, i $G_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y = z = x - t\}$. Demostreu que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_i$ i comproveu que $f(F) = F$. És cert que $f(G_i) = G_i$?

13. Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base d'un espai vectorial tres dimensional E. Considerem l'endomorfisme f de E definit per $f(au_1 + bu_2 + cu_3) = (a + b + c)u_1 + (-2a - b - 2c)u_2 + cu_3$.

(a) Demostreu que f i f^2 són isomorfismes. Calculeu l'invers de f.

(b) Demostreu que $f + \mathrm{Id}$ és un isomorfisme però que $f^2 + \mathrm{Id}$ no ho és.

(c) Comproveu que $(f + \mathrm{Id}) \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = 2(f^2 + \mathrm{Id})$ i que $f^2 + \mathrm{Id} = f + f^{-1}$.

14. Sigui $f_1 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'aplicació definida per $f_1(p) = p'$, i sigui $f_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'aplicació definida per $f_2(p) = \int_0^x p(t)dt$.

(a) Demostreu que f_1 és un $\mathbb{R}$-endomorfisme de $\mathbb{R}[x]$ exhaustiu però no injectiu, i que f_2 és un $\mathbb{R}$-endomorfisme de $\mathbb{R}[x]$ injectiu però no exhaustiu.

(b) Comproveu que la composició $f_1 \circ f_2$ és bijectiva, mentre que la composició $f_2 \circ f_1$ no és ni injectiva ni exhaustiva.

15. Siguin E_3 i E_2 dos espais vectorials reals de dimensions 3 i 2 respectivament. Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E_3, sigui $\{v_1, v_2\}$ una base de E_2, i sigui $f : E_3 \to E_2$ l'aplicació lineal definida per $f(e_1) = v_1 + 2v_2$, $f(e_2) = v_1 + 3v_2$, $f(e_3) = v_1 + 4v_2$. Comproveu que els vectors $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$, $u_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$, determinen una base de E_3, i que els vectors $w_1 = f(u_1)$, $w_2 = f(u_2)$ determinen una base de E_2. Doneu la matriu associada a f en aquestes bases.

16. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per $f(x, y, z, t) = (-x + 2y - t, x - y + z, x + t, -y + z - t)$, i sigui F el subespai vectorial $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y + z = z - t = 0\}$.

(a) Demostreu que f indueix un endomorfisme $\widetilde{f}$ de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$. És a dir, demostreu que l'aplicació $\widetilde{f}([(x,y,z,t)]) = [f(x,y,z,t)]$ està ben definida i és lineal.

(b) Comproveu que el conjunt $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$ és una base de $\mathbb{R}^4/F$. Ho és el conjunt $\{[(1,0,0,0)], [(0,1,0,0)]\}$?

(c) Doneu la matriu associada a $\widetilde{f}$ en la base $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$.

L'espai dual

17. Considerem els vectors $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ i $v_3 = (a,b,1)$ on $a,b \in \mathbb{R}$ són nombres reals. Calculeu la base dual $B^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Determineu la forma $\rho \in (\mathbb{R}^3)^*$ que en la base B^* té coordenades $(1,1,1)$.

18. Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió tres amb base $\{e_1, e_2, e_3\}$, i sigui $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la seva base dual. Considerem les formes $\rho_1 = e_1^* - e_2^*$, $\rho_2 = e_1^* - e_3^*$, $\rho_3 = e_2^* + e_3^*$. Demostreu que el conjunt $\mathfrak{B} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ és una base de E^* i determineu la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de l'espai E de la qual $\mathfrak{B}$ n'és la seva dual.

19. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per $f(x,y) = (3x-y, 5x-2y, -4x+2y, -7x+3y)$. Siguin $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ els vectors $v_1 = (1,2)$ i $v_2 = (1,1)$. Siguin $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$ els vectors $w_1 = (1,1,-1,-1)$, $w_2 = (1,1,-1,-2)$, $w_3 = (0,-1,1,1)$ i $w_4 = (-1,1,0,0)$.

(a) Demostreu que $B_v = \{v_1, v_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ i que $B_w = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Calculeu la base dual B_v^* de la base B_v i comproveu que la base dual de la base B_w és $B_w^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ on $\psi_1(x,y,z,t) = x+y+t$, $\psi_2(x,y,z,t) = z-t$, $\psi_3(x,y,z,t) = x+y+2z$, $\psi_4(x,y,z,t) = y+z$.

(b) Determineu la matriu $M(f; B_v, B_w)$ associada a l'aplicació lineal f en les bases B_v de $\mathbb{R}^2$ i B_w de $\mathbb{R}^4$, i determineu la matriu $M(f^*; B_w^*, B_v^*)$ associada a l'aplicació dual f^* en les bases B_w^* de $(\mathbb{R}^4)^*$ i B_v^* de $(\mathbb{R}^2)^*$.

Diagonalització

20. Considerem les següents matrius $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es demana:

i. Trobeu els valors i els vectors propis d'aquestes matrius. Digueu quines d'elles són diagonalitzables i, si ho són, determineu una base on la matriu tingui forma diagonal.

ii. Calculeu el polinomi mínim d'aquestes matrius. Aplicant el primer teorema de descomposició a aquest polinomi, doneu la descomposició de $\mathbb{K}^3$ com suma directa de subespais invariants per A i determineu una matriu diagonal per blocs $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ associada a aquesta descomposició i una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

21. Determineu els valors dels paràmetres reals per als quals les següents matrius són diagonalitzables i, en aquest cas, doneu la seva forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

22. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (x + y, x + ay - z, -x + y + bz)$.

(a) Determineu els valors de a i de b per als quals el vector $(1, 1, 0)$ és un vector propi de f i el subespai $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y + z = 0\}$ és un subespai invariant per f.

(b) Determineu els valors de a i de b per als quals 1 és un valor propi de f. Per a quins valors 1 és valor propi de f amb multiplicitat algebraica 2?

23. Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ definit per $f(x, y, z, t) = (y, -x + 2y, z, -x + y - z + 2t)$, i considerem els vectors $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ i $v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

(a) Comproveu que l'endomorfisme f no és diagonalitzable, que els vectors v_1, v_2, v_4 són vectors propis de f, i que v_3 no és vector propi de f.

(b) Sigui F el subespai invariant $F = \langle v_1, v_2 \rangle$, i considerem l'endomorfisme $\widetilde{f}$ induït per f en l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$. Comproveu que $\widetilde{f}$ és un endomorfisme diagonalitzable i que els vectors $[v_3], [v_4]$ determinen una base de $\mathbb{R}^4/F$ formada per vectors propis de $\widetilde{f}$.

24. Determineu $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $B^5 = \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix}$.

Espais euclidians i unitaris

25. Determineu quines de les següents aplicacions $\langle \cdot, \cdot \rangle \, : \, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defineixen un producte escalar en $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.

(b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.

26. Siguin E_1, E_2 dos $\mathbb{K}$-espais vectorials (on $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), i sigui $f : E_1 \to E_2$ una aplicació $\mathbb{K}$-lineal. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_2 \times E_2 \to \mathbb{K}$ un producte escalar en E_2 i sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle_f : E_1 \times E_1 \to \mathbb{K}$ l'aplicació definida per $\langle u, v \rangle_f = \langle f(u), f(v) \rangle$ per a tot $u, v \in E_1$. Demostreu que $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és un producte escalar en E_1 si i només si f és un monomorfisme.

27. En $\mathbb{R}^3$ considerem el producte escalar usual. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (y + z, -x - y - z, x + y)$.

(a) Determineu $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ subespais complementaris i invariants per f amb $\dim F_1 = 1$. És F_2 el complementari ortogonal de F_1?

(b) Doneu una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ amb $v_1 \in F_1$. Per a $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculeu les coordenades w i de $f(w)$ en aquesta base.

(c) Sigui $w = (1, 2, -3)$. Demostreu que w i $f(w)$ estan a la mateixa distància del subespai F_2. Al fer la imatge de w per f, ens allunyem o ens apropem al subespai F_1?

Exercicis i problemes. Solucions i resolucions comentades

- 1.

Determineu per a quins valors dels paràmetres reals a, b el sistema $\left\{\begin{array}{lll} x & -2y & = 3(a+b) \\ x & -y & = 2(a+b)+1 \end{array}\right.$ i el sistema $\left\{\begin{array}{lll} ax & +by & = a^2-b^2-6 \\ bx & +ay & = b^2-a^2+6 \end{array}\right.$ tenen una solució comuna.

Solució

Per a $a=-6$ i $b=6$. A més, en aquest cas la solució és única.

Resolució

- Podem resoldre aquest problema de diverses maneres. Observem en primer lloc que una solució comuna a ambdós sistemes haurà de satisfer totes les equacions de cada sistema. És a dir, és equivalent trobar una solució comuna a ambdós sistemes d'equacions que trobar una solució del sistema format per les quatre equacions. Per tant, una primera aproximació al problema consistiria en considerar el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y & = & 3(a+b) \\ x-y & = & 2(a+b)+1 \\ ax+by & = & a^2-b^2-6 \\ bx+ay & = & b^2-a^2+6 \end{array}\right.$$

  el qual, en forma matricial, és el següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a+b) \\ 2(a+b)+1 \\ a^2-b^2-6 \\ b^2-a^2+6 \end{pmatrix}$$

  i resoldre'l. Notem, però, que aquest sistema no és senzill de resoldre: tenim més equacions que incògnites, i dos paràmetres tant en la matriu del sistema com en el vector de termes independents. Qualsevol mètode de resolució de sistemes lineals comportarà, en aquest cas, un càlcul llarg i tediós, on arrossegarem constantment ambdós paràmetres i, molt possiblement, hàgim de fer una casuística important sobre els valors dels paràmetres per arribar a la solució. Per tant, és altament recomanable buscar alguna alternativa per resoldre el problema abans de buscar solucions en un sistema d'equacions com aquest.

- Una segona manera d'enfocar el problema seria resoldre cada sistema d'equacions per separat i, un cop tenim les solucions generals de cadascun, veure si en algun punt coincideixen. Aquesta segona manera és certament millor que la primera, ja que ambdós sistemes tenen dues equacions i dues incògnites i, en principi, són més senzills de resoldre. Per tant, en aquest cas consideraríem els dos sistemes independentment:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& 3(a+b) \\ x-y &=& 2(a+b)+1 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& a^2-b^2-6 \\ bx+ay &=& b^2-a^2+6 \end{array}\right.$$

els quals, en forma matricial, són, respectivament:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a+b) \\ 2(a+b)+1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2-6 \\ b^2-a^2+6 \end{pmatrix}.$$

- Observem, però, que el primer sistema és clarament molt més senzill de resoldre que el segon, atès que la matriu del sistema no depèn de paràmetres (estan tots en el vector de termes independents) i, per tant, no haurem de fer casuística del rang de la matriu en funció dels valors dels paràmetres a, b.

- Per tant, una tercera manera de resoldre aquest problema consisteix a resoldre en primer lloc el primer sistema i, un cop tinguem la solució general, substituir els valors de x, y que obtinguem en el segon per determinar a, b, i així és com procedirem.

- Considerem, doncs, el següent sistema d'equacions lineals:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& 3(a+b) \\ x-y &=& 2(a+b)+1 \end{array}\right.$$

el qual podem escriure en forma matricial de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a+b) \\ 2(a+b)+1 \end{pmatrix}.$$

- Comencem per determinar si el sistema és compatible. Per a fer-ho, determinarem el rang de la matriu del sistema. Atès que el rang de la matriu només pot ser u o dos[1], n'hi ha prou que calculem el determinant de la matriu del sistema: si el determinant és nul aleshores la matriu tindrà rang 1; altrament la matriu tindrà rang 2. Si anomenem A a la matriu d'aquest sistema d'equacions lineals, el determinant de la matriu és:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - (-2)\cdot 1 = -1+2 = 1.$$

Per tant, com que $\det(A) = 1 \neq 0$, la matriu té rang màxim 2 i el sistema és compatible determinat, de manera que tindrà una única solució.

- Per resoldre el sistema es pot usar qualsevol mètode de resolució de sistemes d'equacions lineals. Nosaltres invertirem directament la matriu A, ja que calcular la inversa d'una matriu 2×2 és un càlcul ràpid. Concretament, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

[1] El rang d'una matriu 2×2 pot ser únicament $0, 1, 2$, però l'única matiru amb rang 0 és la matriu que té tots els coeficients zero, que no és la matriu que estem considerant.

aleshores

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} \\ a^*_{21} & a^*_{22} \end{pmatrix}^T$$

on per a $1 \leq i, j \leq 2$ l'element a^*_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij} (inclòs el signe). Observem que, en aquest cas, els adjunts són determinants 1×1, és a dir, són directament nombres reals, de manera que el càlcul de la matriu inversa esdevé immediat, ja que la matriu inversa és simplement:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

En el nostre cas particular és:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ara multipliquem aquesta matriu pel vector de termes independents per trobar la solució del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(a+b) \\ 2(a+b)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(a+b)+4(a+b)+2 \\ -3(a+b)+2(a+b)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+2 \\ -(a+b)+1 \end{pmatrix}.$$

- Per tant, la solució del sistema és $(x, y) = (a + b + 2, -a - b + 1)$.
- Imposem ara que la solució que acabem de trobar també sigui solució de l'altre sistema. Per a fer-ho, simplement avaluem $(x, y) = (a + b + 2, -a - b + 1)$ en el segon sistema d'equacions, i obtenim:

$$\begin{cases} a(a+b+2) + b(-a-b+1) & = & a^2 - b^2 - 6 \\ b(a+b+2) + a(-a-b+1) & = & b^2 - a^2 + 6 \end{cases}$$

on desenvolupant, ens queda:

$$\begin{cases} a^2 + ab + 2a - ab - b^2 + b & = & a^2 - b^2 - 6 \\ ab + b^2 + 2b - a^2 - ab + a & = & b^2 - a^2 + 6 \end{cases}$$

i, simplificant, els termes de grau 2 (que són a^2, b^2, ab) es cancel·len i ens queda el següent sistema d'equacions lineals amb incògnites a, b:

$$\begin{cases} 2a + b & = & -6 \\ a + 2b & = & 6 \end{cases}$$

el qual s'escriu en forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Les solucions d'aquest sistema per a a, b (si existeixen) ens donaran els valors dels paràmetres pels quals els dos sistemes d'equacions lineals originals tenen una solució comuna.
- Comencem per veure si el sistema té alguna solució, és a dir, si és compatible. Com abans, el rang de la matriu només pot ser 1 o 2, i el determinarem calculant-ne el determinant, exactament igual que abans. Si denotem per B la matriu d'aquest sistema, és a dir, si posem:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

aleshores el determinant de B es pot calcular com:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3.$$

Com que $\det(B) = 3 \neq 0$, el sistema és compatible determinat i, per tant, té una única solució. És a dir, existeix un únic valor per a a i un únic valor per a b de manera que els dos sistemes d'equacions lineals tenen solució comuna.

- Per determinar aquests valors aplicarem el mateix procediment que abans: invertirem la matriu d'aquest nou sistema i la multiplicarem pel vector de termes independents per trobar la solució. De manera anàloga a com hem fet abans, la inversa de B és:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$$

de manera que ens queda:

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Ara multipliquem aquesta matriu pel vector de termes independents i obtindrem els valors de a i de b que buscàvem:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Per tant, per a $a = -6$ i $b = 6$, els dos sistemes donats en l'enunciat tenen solució comuna.

- **Comentari.** Tot i que no ens ho demanen a l'enunciat, no està de més calcular aquesta solució explícitament i comprovar que, en efecte, és solució d'ambdós sistemes. La solució general del primer sistema, que hem calculat prèviament, és $(x, y) = (a + b + 2, -a - b + 1)$. Posant $a = -6$ i $b = 6$, la solució és $(x, y) = (2, 1)$. Comprovem que $(x, y) = (2, 1)$ és solució també del segon sistema avaluant-la en les equacions:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-6) \cdot 2 + 6 \cdot 1 & = & (-6)^2 - 6^2 - 6 \\ 6 \cdot 2 + (-6) \cdot 1 & = & 6^2 - (-6)^2 + 6 \end{array} \right.$$

Desenvolupant, ens queda:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -12 + 6 & = & 36 - 36 - 6 \\ 12 - 6 & = & 36 - 36 + 6 \end{array} \right.$$

i simplificant es tenen les identitats següents:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -6 & = & -6 \\ 6 & = & 6 \end{array} \right.$$

Per tant es té, en efecte, una solució d'ambdós sistemes (que, a més, sabem que és $(x, y) = (2, 1)$).

- 2.

(a) Sigui A la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ on a és un paràmetre real. Es demana:

(a.1) Determineu el rang de la matriu A. Quan A és invertible?

(a.2) Per a $a = 0$ calculeu A^{-1}.

(a.3) Determineu els valors de a pels quals $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Considerem el sistema homogeni $\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 0 \\ 2x + az &= 0 \end{aligned} \right.$.

(b.1) Per a quins valors de a el sistema és compatible determinat?

(b.2) Calculeu les solucions del sistema segons els diferents valors del paràmetre a.

(b.3) Determineu a, b de manera que $(x, y, z) = (2, b, 4)$ sigui una solució del sistema.

(c) Considerem el sistema d'equacions $\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 3 \\ 2x + az &= c \end{aligned} \right.$.

(c.1) Per a quins valors de a,c el sistema és compatible? quan és compatible determinat? quan és compatible indeterminat?

(c.2) Determineu els valors a, c de manera que $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ sigui una solució del sistema. Quan és l'única solució del sistema?

(c.3) Demostreu que no existeixen a, c de manera que $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ sigui una solució del sistema.

(c.4) Determineu la solució general del sistema en el cas $a = 0$ i c arbitrari.

(c.5) Determineu la solució general del sistema en el cas a arbitrari i $c = -2$.

Solució

(a.1) Si $a = -1$ aleshores $\operatorname{rang}(A) = 2$, i si $a \neq -1$ aleshores $\operatorname{rang}(A) = 3$. La matriu A és invertible si i només si $a \neq -1$.

(a.2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & -3/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a.3) $a = -2$.

(b.1) $a \neq -1$.

(b.2) Si $a \neq -1$ la solució és $x = y = z = 0$.
Si $a = -1$ la solució és $x = \lambda$, $y = -3\lambda$, $z = 2\lambda$ on $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b.3) $a = -1$, $b = -6$.

(c.1) Si $a \neq -1$ el sistema és compatible determinat.
Si $a = -1$ i $c = -2$ el sistema és compatible indeterminat.
Si $a = -1$ i $c \neq -2$ el sistema és incompatible.

(c.2) Per a $c = -4 - 2a$. És única si $c = -4 - 2a$ i $a \neq -1$.

(c.3) —

(c.4) $x = c/2$, $y = -1 - 3c/2$, $z = c + 2$.

(c.5) Si $a = -1$ la solució és $x = -2 + \lambda$, $y = 5 - 3\lambda$, $z = -2 + 2\lambda$ on $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $a \neq -1$ la solució és $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$.

Resolució (a.1)

- Per determinar el rang de la matriu A hem d'esglaonar-la per files (o columnes) i comptar el nombre de files (o columnes) que no siguin únicament zeros. Aquest nombre enter ens donarà el rang de la matriu.

- En el nostre cas, per posar zeros a la primera columna (posicions $(2,1)$ i $(3,1)$), fixarem la primera fila (aquesta serà la fila *pivot*) i l'operarem amb la resta. En particular, canviarem la segona fila per la suma de la primera i segona files, i la tercera fila per la diferència entre aquesta i el doble de la primera. És a dir, fem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$$

on les transformacions han estat:

$$(1): \text{fila } 2 = \text{fila } 2 + \text{fila } 1,$$
$$(2): \text{fila } 3 = \text{fila } 3 - 2\times\text{fila } 1.$$

Amb això ja gairebé hem acabat. Només ens falta posar un zero a la posició $(3,2)$. Observem que no podem tornar a operar amb la primera fila, ja que en fer-ho tornaríem a tenir un nombre no nul en la posició $(3,1)$. Per tant, en aquest cas fixarem les dues primeres files i substituirem la tercera fila per la suma de la segona i la tercera files. Així tenim:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

on

$$(3): \text{fila } 3 = \text{fila } 3 + \text{fila } 2.$$

- Ara que ja tenim la matriu esglaonada per files, n'hi ha prou amb comptar el nombre de files diferents de 0. Fixem-nos que hi ha dues files que, per a tot valor de a, no estaran plenes de zeros, i per tant la matriu A té com a mínim rang 2. De fet, la matriu A tindrà rang 2 si i només si $a + 1 = 0$, és a dir, si i només si $a = -1$. Per tant, es té que:

$$\text{rang}(A) = \begin{cases} 2, & \text{si } a = -1; \\ 3, & \text{si } a \neq -1. \end{cases}$$

- Vegem ara quan la matriu A és invertible. Recordem que una matriu quadrada té inversa si i només si el seu determinant és no nul[2]. Per tant, si hem de determinar quan la matriu A és invertible, el més natural de pensar consisteix a calcular el determinant de la matriu A i veure per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ aquest determinant és diferent de 0.
- Tanmateix això seria un càlcul innecessari ja que acabem de calcular el rang de la matriu, i una caracterització alternativa de matriu invertible és que sigui quadrada i tingui rang màxim (igual a l'ordre de la matriu). Com acabem de veure, la matriu A té rang 3 (màxim) per a $a \neq -1$ i, per tant, serà invertible per a aquests valors de a.

- **Observació.** Una manera alternativa de procedir hauria estat calcular en primer lloc el determinant de la matriu A i determinar per a quins valors de a és nul (atès que obtindríem una equació polinomial en a, serien un nombre finit). Per a aquest nombre finit de valors de a esglaonaríem per files la matriu i determinaríem el rang de la matriu com hem fet aquí; i, per a la resta de valors de a, el rang de la matriu seria 3. Aquesta alternativa, tot i que seria més llarga amb la matriu donada, és útil en cas de tenir més d'un paràmetre.

Resolució (a.2)

- Hi ha diversos mètodes per calcular la inversa d'una matriu donada. Nosaltres usarem el mètode de càlcul per adjunts, i deixem com a exercici per al lector provar amb qualsevol altre mètode que la matriu que trobarem és, efectivament, la matriu inversa de A per a $a = 0$.
- Abans de fer cap càlcul, però, hem de comprovar si la matriu és invertible. En l'apartat anterior hem determinat que la matriu A és invertible si i només si $a \neq -1$. Com que estem prenent $a = 0 \neq -1$, aquesta matriu és, en efecte, invertible.
- Ara que hem comprovat que la matriu es pot invertir, vegem quina és la matriu que estem considerant:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- El primer que necessitem per calcular la matriu inversa és el determinant de la matriu de partida. El càlcul del determinant d'una matriu 3×3 es pot fer desenvolupant per adjunts alguna fila o columna, o bé mitjançant la regla de Sarrus. Nosaltres desenvoluparem per la tercera fila, aprofitant que hi tenim dos zeros, i ens estalviem de calcular dos adjunts:
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 2.$$
- Passem ara al càlcul de la matriu inversa pròpiament. Per la regla de càlcul de la matriu inversa per adjunts sabem que la matriu inversa és:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}^T$$

[2]En general, una matriu quadrada amb coeficients en un anell (commutatiu) és invertible si i només si el seu determinant és un element invertible de l'anell. En un cos, però, tot element no nul és invertible.

on a^*_{ij}, $1 \le i, j \le 3$, denota l'adjunt de l'element a_{ij} (inclòs el signe). Calculant tenim:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T .$$

- Per tant la inversa de la matriu A és la matriu:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & -3/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Resolució (a.3)

- Aquest apartat es pot resoldre de tres maneres. Denotem per B la matriu donada a l'enunciat, és a dir, posem

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

- Una primera aproximació al problema consistiria en calcular la matriu A^{-1} i, com que volem que B en sigui la matriu inversa, imposar $A^{-1} = B$. D'aquesta manera obtindrem una o més equacions que ens imposaran condicions sobre el paràmetre real a. Observem, però, que la matriu A depèn d'un paràmetre, i invertir una matriu amb un o més paràmetres comporta arrossegar el(s) paràmetre(s) al llarg de tot el càlcul, convertint-ho en un càlcul més tediós i pesat del que ja és habitualment.
- Una segona manera d'enfocar el problema, i que no comporta invertir la matriu A, seria calcular la matriu B^{-1} i imposar $A = B^{-1}$ per determinar el paràmetre. Tot i que aquesta segona manera és millor que la primera, ja que la matriu B no depèn de cap paràmetre, invertir una matriu segueix sent un procés normalment llarg i pesat, durant el qual és fàcil cometre errors de càlcul, raó que motiva que es desaconselli calcular inverses de matrius a menys que sigui estrictament necessari.
- En aquest cas, però, ens podem estalviar tots aquests càlculs que hem comentat. Recordem que si una matriu A és invertible aleshores la matriu inversa A^{-1} de A és l'única matriu que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}$$

on Id denota la matriu identitat. Per tant, una tercera manera d'encarar el problema és usar aquesta darrera propietat. Així, com que volem que la matriu B sigui la inversa de la matriu A per a algun valor $a \in \mathbb{R}$, el que farem és imposar que el producte de matrius $A \cdot B$ sigui la matriu identitat Id. Calculem primer el producte $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+a & -2-a & -1-a \end{pmatrix}$$

i imposem ara que $A \cdot B = \text{Id}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+a & -2-a & -1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2+a & = & 0 \\ -2-a & = & 0 \\ -1-a & = & 1 \end{array} \right.$$

d'on es dedueix $a = -2$.

- **Observació.** Podríem haver considerat el producte $B \cdot A$ i haver imposat $B \cdot A = \text{Id}$. D'aquesta manera hauríem obtingut el mateix resultat final[3]. Deixem com a exercici al lector fer aquests càlculs.

Resolució (b.1)

- Comencem per escriure aquest sistema d'equacions lineals en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Fixem-nos que la matriu del sistema és exactament la matriu A que hem estudiat en l'apartat anterior. Això ens estalviarà molts càlculs, ja que determinar per a quins valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ el sistema homogeni és compatible determinat és equivalent a determinar per a quins valors del paràmetre la matriu del sistema té rang màxim, i això últim ho hem fet en l'apartat $(a.1)$. En particular, en l'esmentat apartat hem provat que el rang de la matriu A és 3 (màxim) si i només si $a \neq -1$.

  Per tant, el sistema és compatible determinat per a $a \neq -1$. Altrament, si $a = -1$, el sistema serà compatible indeterminat.

- **Observació.** Un sistema homogeni $A\mathbf{x} = 0$, amb A una matriu qualsevol, mai pot ser incompatible ja que $\mathbf{x} = 0$ sempre és solució d'un sistema homogeni (és l'anomenada *solució trivial*). En termes de rangs, afegir una fila o columna de zeros a una matriu no en canvia el rang, i per tant la matriu del sistema i la matriu ampliada del sistema homogeni sempre tindran el mateix rang, de manera que el sistema serà sempre compatible. Per tant, un sistema homogeni o bé és compatible determinat (té una única solució que és la solució trivial) o bé és compatible indeterminat (té infinites solucions).

- **Observació.** Un sistema homogeni $A\mathbf{x} = 0$ de m equacions i n incògnites és compatible determinat si i només si el rang de la matriu del sistema coincideix amb el nombre d'incògnites del sistema, és a dir si i només si $\text{rang}(A) = n$. En particular si $m = n$ aleshores, el sistema homogeni $A\mathbf{x} = 0$ és compatible determinat si i només si $\text{rang}(A) = n$ si i només si $\det(A) \neq 0$ si i només si la matriu A és invertible.

[3] Per veure que $A^{-1} = B$ en principi hauríem de comprovar les dues igualtats. És a dir, en principi hauríem de veure que $A \cdot B = \text{Id}$ i que $B \cdot A = \text{Id}$. Ara bé, es pot demostrar que si es té una de les dues igualtats aleshores també es té l'altra. Per tant realment n'hi ha prou amb comprovar-ne només una.

Resolució (b.2)

- A primer cop d'ull aquest problema ens podria suggerir d'invertir la matriu A i trobar (x, y, z) (en cas que la matriu fos invertible)[4], però en realitat ens podem estalviar aquest càlcul. Fixem-nos que el producte de qualsevol matriu pel vector 0 dóna com a resultat el vector 0 de nou. Per tant, no ens cal conèixer explícitament la matriu inversa de A, només necessitem saber que existeix i ja tindrem la solució sense necessitat de fer cap càlcul. Per tant, si la matriu A és invertible, el sistema és compatible determinat i l'única solució és $x = y = z = 0$.

  De fet recordem el que hem dit abans: un sistema homogeni $A\mathbf{x} = 0$ amb n equacions i n incògnites és compatible determinat si i només si la matriu A del sistema és una matriu invertible i, en aquest cas, $\mathbf{x} = A^{-1}0 = 0$ és l'única solució del sistema.

- Per a aquells valors del paràmetre pels quals la matriu A no és invertible (en el nostre cas, només $a = -1$) caldrà trobar la solució de manera alternativa. Per exemple, podem triangular la matriu mitjançant transformacions per files i resoldre el sistema que obtindrem[5]. Notem, però, que no és necessari fer cap càlcul perquè ja hem triangulat la matriu A en l'apartat $(a.1)$. Per tant, només ens faltaria aplicar les transformacions de files que hem fet en la matriu al vector de termes independents, però en tractar-se del vector $(0, 0, 0)$ no ens cal fer res (qualsevol operació elemental de zeros donarà zero)[6].

- Així doncs, volem resoldre el següent sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ 2y + 3z & = & 0 \\ (a+1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

  Recordem, a més, que estem estudiant el cas en què el sistema és compatible indeterminat, és a dir, $a = -1$. Aleshores ens queda el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ 2y + 3z & = & 0 \\ 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

  Fixem-nos que la darrera equació ens diu que z pot prendre qualsevol valor real i per tant quedarà com a paràmetre. Posem $z = \alpha$ i trobem la solució en funció de α:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + \alpha & = & 0 \\ 2y + 3\alpha & = & 0 \end{array} \right.$$

  La segona equació es pot resoldre fàcilment, $y = -3\alpha/2$. Ara, si substituïm el valor de y en la primera equació aleshores obtindrem el valor de x, concretament obtenim $x = \alpha/2$.

---

[4] Recordeu que si A és una matriu invertible, aleshores l'única solució del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

[5] Aquest mètode de resolució de sistemes d'equacions lineals s'anomena *mètode per substitució enrere (o inversa)*, ja que el sistema triangulat inferiorment (els zeros estan per sota de la diagonal) té la darrera equació directa de resoldre i podem anar substituint de la penúltima a la primera els valors de les incògnites que anem trobant. Si triangulem el sistema superiorment (els zeros es troben per sobre de la diagonal), en diem *mètode per substitució endavant (o directa)*.

[6] Si el sistema fos complet, és a dir, si el vector de termes independents no fos el vector 0, aleshores aquest argument no seria vàlid. En l'apartat (c) en veurem un exemple.

- Per tant, totes les solucions del sistema compatible indeterminat són de la forma:

$$(x, y, z) = (\alpha/2, -3\alpha/2, \alpha)\,, \text{ on } \alpha \in \mathbb{R}$$

o equivalentment de la forma:

$$(x, y, z) = (\lambda, -3\lambda, 2\lambda) = \lambda(1, -3, 2), \text{ on } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- **Comentari.** Sigui $A\mathbf{x} = 0$ un sistema homogeni amb m equacions i n incògnites i amb coeficients en un cos $\mathbb{K}$. Aleshores, el conjunt de les solucions del sistema homogeni $A\mathbf{x} = 0$ es pot associar a un subespai vectorial F de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ de dimensió n sobre el cos $\mathbb{K}$.

  Concretament en el cas d'un sistema compatible determinat la solució es correspon a l'únic subespai vectorial F de dimensió zero de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$: el subespai vectorial $F = \{0\}$. Mentre que en el cas d'un sistema compatible indeterminat, les solucions del sistema es corresponen a un subespai vectorial F de dimensió major o igual a 1 de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$. De fet, la dimensió del subespai vectorial F coincideix amb el nombre de paràmetres lliures o *graus de llibertat* del sistema, que és el nombre d'incògnites del sistema menys el rang del sistema, és a dir $\dim F = n - \text{rang}(A)$.

  En el nostre cas, les solucions del sistema compatible indeterminat corresponen al subespai vectorial $F = \langle(1, -3, 2)\rangle$ de dimensió 1 de $\mathbb{R}^3$. Geomètricament, es tracta de la recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pels punts $(0, 0, 0)$ i $(1, -3, 2)$.

Resolució (b.3)

- Aquest apartat també es pot resoldre de diverses maneres. En aquesta resolució n'exposarem dues amb tot detall.

- **Resolució I**

  El primer que cal tenir en compte en apartats com aquest, on el que ens demanen és comprovar si un vector és solució del sistema, és que no ens cal en cap moment calcular la solució general del sistema. La manera més ràpida de comprovar-ho és, simplement, substituir els valors en les equacions, ja que qualsevol vector solució del sistema haurà de verificar les equacions. En cas que alguna equació porti a una identitat falsa quan avaluem (per exemple, la identitat $2 = 3$ és falsa en $\mathbb{R}$) el vector no serà solució del sistema. Altrament, sí que ho serà.

  En el nostre cas volem trobar alguns valors de a, b per tal que el vector $(x, y, z) = (2, b, 4)$ sigui solució. Substituïm aquests valors en el sistema d'equacions i tenim:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 + b + 4 & = & 0 \\ -2 + b + 8 & = & 0 \\ 4 + a4 & = & 0 \end{array}\right.$$

  La darrera equació ens dóna $a = -1$, mentre que les dues primeres dónen $b = -6$. Per tant, per a $a = -1$ i $b = -6$ el vector $(2, b, 4)$ és solució del sistema.

- **Resolució II**

Una manera alternativa de resoldre aquest apartat, tenint en compte que ja hem calculat la solució general del sistema en l'apartat (b.2), consisteix a "aturar-se i pensar". Recordem que en l'apartat anterior hem argumentat que si el sistema és compatible determinat l'única solució és $x = y = z = 0$. Com que $(2, b, 4) \neq (0, 0, 0)$ per a qualsevol valor $b \in \mathbb{R}$, en deduïm que per tal que $(2, b, 4)$ sigui solució el sistema ha de ser compatible indeterminat. Això implica $a = -1$ per l'apartat (b.1).

Per tant, només ens queda determinar el valor de b. Recordem que en l'apartat (b.2) hem calculat l'expressió general de la solució del sistema per a $a = -1$: totes les solucions eren de la forma $\lambda(1, -3, 2)$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per tant, si $(2, b, 4)$ és solució, ha de ser d'aquella forma per a algun valor de λ. Així, volem determinar per a quins valors de b existeix algun nombre real λ de manera que es tingui la igualtat $(2, b, 4) = \lambda(1, -3, 2)$. Desenvolupant tenim el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2 & = & \lambda \\ b & = & -3\lambda \\ 4 & = & 2\lambda \end{array} \right.$$

La primera i la darrera equació ens donen $\lambda = 2$, de manera que $b = -3\lambda = -3 \cdot 2 = -6$.

Resolució (c.1)

- Comencem per posar el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}.$$

Observem que, com en l'apartat (b), la matriu del sistema és la matriu A que hem estudiat en el primer apartat del problema.

- Anem a veure quan el sistema és compatible. Recordem que un sistema d'equacions lineals és compatible si la matriu del sistema i la matriu ampliada (i.e.: la matriu que resulta d'afegir el vector de termes independents com a columna addicional) tenen el mateix rang. Altrament el sistema és incompatible.

- Per l'apartat (a.1) sabem que la matriu A, que és exactament la matriu del sistema, té rang 2 per a $a = -1$, i té rang 3 altrament. Per tant, tenint en compte que el rang de la matriu ampliada sempre és major o igual que el rang de la matriu del sistema, és clar que si $a \neq -1$ el sistema serà compatible determinat per a tot valor c real[7]. En canvi, si $a = -1$ el sistema pot ser incompatible o compatible indeterminat, en funció del valor de c.

[7] Una caracterització alternativa dels sistemes compatibles determinats de n equacions amb n incògnites ($n \times n$) és que la matriu del sistema ha de tenir rang màxim n.

- Per trobar condicions sobre c que ens permetin decidir si el sistema és incompatible o compatible indeterminat escrivim la matriu ampliada del sistema:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & a & c \end{array}\right)$$

i l'esglaonem per files per determinar-ne el rang. Recordem que ja hem esglaonat la part que correspon a la matriu A en l'apartat $(a.1)$, de manera que ens podem estalviar de tornar a esglaonar tota la matriu: només ens cal aplicar les mateixes tranformacions de files a la darrera columna. En particular, recordem que les tranformacions que successivament hem aplicat a la matriu A són:

$$\begin{aligned} (1) &: \text{fila } 2 = \text{fila } 2 + \text{fila } 1, \\ (2) &: \text{fila } 3 = \text{fila } 3 - 2{\times}\text{fila } 1, \\ (3) &: \text{fila } 3 = \text{fila } 3 + \text{fila } 2. \end{aligned}$$

Aplicant les transformacions (1), (2) i (3) a la darrera columna de la matriu ampliada, obtenim la següent matriu:

$$(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & c+2 \end{array}\right).$$

Atès que el cas $a \neq -1$ ja l'hem discutit prèviament (el sistema és compatible determinat), posem $a = -1$ en la matriu i tenim

$$(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & c+2 \end{array}\right)$$

la qual té rang 2 per a $c = -2$, i té rang 3 per a $c \neq -2$.

- Per tant, el sistema és incompatible per a $a = -1$ i $c \neq -2$, i és compatible indeterminat per a $a = -1$ i $c = -2$.

Resolució (c.2)

- Procedirem com en la primera resolució de l'apartat $(b.3)$. Si substituïm $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ en el sistema, tenim les equacions:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2+5-2 & = & 1 \\ 2+5-4 & = & 3 \\ -4-2a & = & c \end{array}\right.$$

d'on la darrera equació dóna $c = -4 - 2a$. Per tant, $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ serà solució si $c = -4 - 2a$ per a qualsevol valor de a.

- Per saber quan és l'única solució del sistema només cal que recordem que un sistema lineal té solució única si és compatible determinat. En el nostre sistema això es té quan $a \neq -1$. Per tant, podem afirmar que $(x, y, z) = (-2, 5, 2)$ serà l'única solució quan $c = -4 - 2a$ i $a \neq -1$.

- **Comentari.** Observem que les dues primeres equacions, tot i que no ens aporten cap condició sobre els paràmetres a, c, ens asseguren que el vector $(-2, 5, -2)$ pot ser una solució del sistema. Com ja hem dit abans, si alguna d'aquestes equacions donés una identitat falsa o sense sentit, això implicaria que el vector que estem avaluant no seria solució per a cap valor de a, c. En el proper apartat en veurem un exemple.

Resolució (c.3)

- En aquest apartat veurem un exemple del que hem comentat en els apartats $(b.3)$ i $(c.2)$. Procedirem de la mateixa manera que en els dos apartats que hem citat: avaluarem $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ en el sistema d'equacions i buscarem condicions per a a i per a c per tal que sigui solució. Avaluant, obtenim les següents equacions:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0+0+1 & = & 1 \\ -0+0+2 & = & 3 \\ a & = & c \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 2 & = & 3 \\ a & = & c \end{array}\right.$$

Fixem-nos que la primera equació ens dóna una identitat certa, i l'última ens imposa una condició sobre a i c. Tanmateix, la segona equació porta a un absurd (2 i 3 no són iguals en els reals) que no podem arreglar per a cap valor de a, c ja que no apareixen en aquesta equació.

- Per tant, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ no pot ser una solució del sistema per a cap valor de a, c.

Resolució (c.4)

- Observem que, com que prenem $a = 0 \neq -1$ l'apartat $(c.1)$ ens assegura que el sistema és compatible determinat, i per tant tindrem solució única en funció de c, (per a cada valor de c tindrem una única solució).

- Atès que el sistema és compatible determinat, la matriu del sistema és invertible i podem calcular la solució multiplicant la matriu inversa de A pel vector de termes independents. Però en l'apartat $(a.2)$ hem calculat la matriu inversa de A quan $a = 0$, de manera que només ens queda fer el producte pel vector de termes independents per trobar la solució del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1 & -3/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c/2 \\ 2-3-3c/2 \\ -1+3+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c/2 \\ -1-3c/2 \\ 2+c \end{pmatrix}.$$

- Per tant, la solució és $(x, y, z) = (c/2, -1 - 3c/2, c + 2)$, $c \in \mathbb{R}$.

- **Comentari.** Donat un sistema d'equacions lineals $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en cas que no tinguem la matriu A^{-1}, el podem resoldre mitjançant el mètode de Gauss o bé amb la regla de Cramer (en aquest últim cas cal que la matriu del sistema tingui determinant no nul). El mètode de Cramer, però, no és més que fer el càlcul $A^{-1}\mathbf{b}$ restringit a cada incògnita del sistema de manera que, de fet, en calcular $A^{-1}\mathbf{b}$ estem aplicant la regla de Cramer amb totes les incògnites simultàniament.

Resolució (c.5)

- Fixem-nos que, a diferència de l'apartat anterior, en aquest cas la matriu del sistema no és necessàriament invertible, de manera que no podem calcular la solució general del sistema com hem fet abans. Una manera alternativa seria aprofitar que en l'apartat (c.1) hem triangulat la matriu i el vector de termes independents, substituir $c = -2$ i resoldre per substitució inversa en funció del paràmetre a. El procediment és exactament el mateix que el que hem aplicat en l'apartat (b.2) i es deixa al lector com a exercici.

- En aquesta resolució procedirem de manera alternativa. Fixem-nos que com que $c = -2$ aleshores, per l'apartat (c.1), el sistema és compatible independentment del valor de a. Per tant, tenint en compte que en l'apartat (b.2) ja hem determinat les solucions del sistema homogeni associat, podem resoldre aquest apartat aplicant el principi de superposició. Més concretament, farem servir com són les solucions dels sistemes complets compatibles.

- Sabem que si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és un sistema compatible d'equacions lineals, aleshores la seva solució general $\mathbf{x}_g$ es pot escriure com suma de la solució general $\mathbf{x}_h$ del sistema homogeni associat i d'una solució particular $\mathbf{x}_p$ del sistema complet, és a dir, $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$ on $\mathbf{x}_h$ és la solució general de $A\mathbf{x} = 0$ i on $\mathbf{x}_p$ és una solució particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- En el nostre cas, en l'apartat (b.2) ja hem calculat la solució general $\mathbf{x}_h$ del sistema homogeni associat:
$$\mathbf{x}_h = \begin{cases} (0,0,0), \text{ si } a \neq -1 \\ \lambda(1,-3,2) \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ si } a = -1 \end{cases}$$

- Per tant, ara només ens cal trobar una solució particular $\mathbf{x}_p$ del sistema complet que, per a $c = -2$ és el sistema d'equacions:
$$\left\{ \begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ -x+y+2z & = & 3 \\ 2x+az & = & -2 \end{array} \right.$$

- Anem a veure si podem trobar alguna solució particular $\mathbf{x}_p$ "a vista".

- No hi ha algorismes o receptes per trobar solucions d'un sistema d'equacions a vista: cada sistema és un món. Tanmateix, sí que hi ha algunes idees que podem provar usant el sentit comú. En el nostre cas, per exemple, el paràmetre a pot prendre qualsevol valor real, de manera que arrossegar-lo quan fem càlculs és poc recomanable a menys que volguem distingir molts casos. Atès que aquest paràmetre només apareix acompanyant la variable z, el podem eliminar fàcilment posant $z = 0$. Si ho fem aleshores la darrera equació es redueix a $2x = -2$, la qual es resol directament i dóna $x = -1$. Substituïnt $x = -1$ i $z = 0$ en les altres dues equacions, obtenim el sistema:
$$\left\{ \begin{array}{rcr} -1+y & = & 1 \\ 1+y & = & 3 \end{array} \right.$$
les quals donen ambdues la solució $y = 2$. Per tant, $\mathbf{x}_p = (x,y,z) = (-1,2,0)$ és una solució particular del sistema per a qualsevol valor de a. Així, ara podem concloure que la solució general del sistema és:
$$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \begin{cases} (-1,2,0), \text{ si } a \neq -1 \\ (-1,2,0) + \lambda(1,-3,2) \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ si } a = -1 \end{cases}$$

- *Observació.* Un mètode alternatiu per calcular una solució particular del nostre sistema d'equacions lineals és usar l'apartat (c.2). En aquell apartat hem demostrat que $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ és solució del sistema si i només si $c = -4 - 2a$. Com que estem en el cas $c = -2$ aleshores es té que, $(-2, 5, -2)$ és solució del sistema si i només si $-2 = -4 - 2a$, és a dir, $(-2, 5, -2)$ és solució del sistema si i només si $a = -1$. Per tant, si $a = -1$ (sistema compatible indeterminat) tenim $(x, y, z) = (-2, 5, -2)$ com a solució particular. Així, doncs, només ens faltaria determinar una solució particular si $a \neq -1$, però aquest cas és senzill perquè el sistema és compatible determinat i podem aplicar qualsevol mètode de resolució de sistemes lineals per determinar-ne l'única solució.

- *Observació.* Fixem-nos que $(-2, 5, -2) = (-1, 2, 0) - (1, -3, 2)$, és a dir, la solució particular $(-2, 5, -2)$ és de la forma $(-1, 2, 0) + \lambda(1, -3, 2)$ prenent $\lambda = -1$.

- **Comentari.** Geomètricament, les solucions d'un sistema complet no són més que les solucions del sistema homogeni associat traslladades. És a dir, el conjunt de les solucions d'un sistema homogeni, independentment de si és determinat o indeterminat, conté sempre l'origen i, per això, es corresponen amb subespais vectorials. En considerar un sistema no homogeni amb la mateixa matriu "les solucions són els mateixos subespais" però imposant que passin per un punt fixat enlloc de l'origen (en particular, deixen de ser subespais perquè no contenen el 0). En geometria, aquests objectes s'anomenem *subvarietats lineals*.

- 3.

Demostreu que el conjunt B és una base de l'espai E que s'indica i, en cada cas, determineu les coordenades de l'element w en la base B.

(a) En $\mathbb{R}^2$ el conjunt $B = \{u_1, u_2\}$ on $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (3, 4)$, i l'element genèric $w = (a, b)$.

(b) En $\mathbb{R}^3$ el conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ on $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, i l'element genèric $w = (a, b, c)$.

(c) En $\mathbb{R}^4$ el conjunt de vectors $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ on $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 3, 0)$, $u_3 = (1, 0, -1, 0)$, $u_4 = (0, 1, 2, 0)$ i l'element $w = (1, 5, 10, 2)$.

(d) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el conjunt de matrius $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ on $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, i com element w la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

Solució

(a) $((-4a + 3b)/2, (2a - b)/2)$. (b) $(-b + c, a + b - c, -a + c)$.

(c) $(2, 1, -1, 3)$. (d) $(2, 1, -1, 3)$.

Resolució

- Observem que en els quatre apartats ens demanen el mateix: que comprovem que cert conjunt de vectors B és una base d'un espai vectorial E, i que determinem les coordenades d'un vector w de l'espai E en aquesta base B. Per tant, en principi, tots els apartats els podríem resoldre de la "mateixa manera". Ara bé, com veureu, en cada un dels quatre apartats hem optat per presentar-vos una resolució diferent (no sempre la més curta i simple). D'aquesta manera tindreu diferents models complets de resolució que es poden fer servir per treballar amb aquests tipus de problemes. Això, juntament amb els comentaris que anirem fent al llarg de la resolució de cada un dels apartats, us pot ajudar en la comprensió dels diferents conceptes i resultats teòrics que hi intervenen i que tot seguit us anem a recordar.

- Primer de tot, i abans de procedir a la resolució del problema recordem els conceptes de sistemes de generadors, independència lineal, bases, dimensió i coordenades.

  - *Sistema de generadors.*

    Sigui S un subconjunt no buit d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Direm que S és un sistema de generadors de E si i només si tot element de E es pot expressar com combinació lineal d'elements de S.

    Observem que si un conjunt de vectors S és un sistema de generadors de E, i si $S \subseteq S'$, aleshores S' també és un sistema de generadors de E.

- *Independència lineal.*

  Sigui L un subconjunt no buit d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Direm que L és un conjunt de vectors linealment independents si i només si cap element de L es pot expressar com combinació lineal dels altres elements de L.

  Es demostra que, un subconjunt no buit L és un conjunt de vectors linealment independents si i només si, si un element de E es pot expressar com combinació lineal d'elements de L, aleshores aquesta expressió és única. Equivalentment, L és un conjunt de vectors linealment independents si i només si l'única combinació lineal nul·la d'elements de L és la trivial.

  Observem que si L és un conjunt de vectors linealment independents, i si $L' \subseteq L$ és un subconjunt no buit, aleshores L' també és un conjunt de vectors linealment independents.

- *Base.*

  Sigui B un subconjunt no buit d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Direm que B és una base de E si i només si és un sistema de generadors de E linealment independent. Equivalentment, B és una base de E si i només si tot element de l'espai E es pot expressar, de manera única, com combinació lineal d'elements de B.

  Es demostra que si E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul aleshores, com a mínim, existeix una base B de l'espai E (de fet es pot demostrar que tot sistema de generadors conté una base de l'espai, i que tot conjunt de vectors linealment independents es pot completar a una base de l'espai). A més es té que, si l'espai E té una base finita aleshores totes les bases de E són finites i tenen el mateix nombre d'elements.

- *Dimensió.*

  Sigui $n \geq 0$ un nombre natural. Direm que un $\mathbb{K}$-espai vectorial E té dimensió finita n, i notarem $\dim E = n$, si E té una base finita de n elements (on entenem que $n = 0$ si i només si $E = \{0\}$). En cas contrari direm que E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió infinita.

- *Coordenades.*

  Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita n i sigui $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de l'espai E. Sigui $v \in E$ i siguin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ els únics escalars tals que $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. En aquesta situació direm que λ_i és la i-èsima coordenada de v en la base B de E i que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ són les coordenades de v en la base B de E. Notarem $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_B$.

- En el cas d'espais vectorials de dimensió finita, aquestes nocions es poden pensar "matricialment" fent servir sistemes d'equacions lineals.

- Anem a recordar aquests resultats.

- Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita n i sigui $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de l'espai E. Donats r elements $v_1, \ldots, v_r \in E$, considerem la matriu $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ de n files i r columnes amb coeficients en el cos $\mathbb{K}$, on l'element $a_{i,j}$ de la matriu és la i-èsima coordenada de v_j en la base B de E. És a dir, $A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix} \quad \text{on } v_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})_B \quad \text{per a } 1 \leq j \leq r.$$

Observem que, d'una manera "informal", la matriu A es pot pensar com "la matriu dels vectors posats en columna", és a dir, es pot pensar com:

$$“A = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_j & \dots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right) = (v_1 | \dots | v_j | \dots | v_r)”.$$

- Amb aquesta matriu podem caracteritzar les nocions anteriors. Concretament es té que:

1. *Sistema de generadors.*

   Per definició, el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ és un sistema de generadors de E si i només si tot element u de E es pot expressar com combinació lineal de $v_1, \dots, v_r$. És a dir, si i només si per a tot vector $u \in E$ existeixen escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tals que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$.

   Matricialment aquesta noció es pot caracteritzar de la manera següent: el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ genera E si i només si el sistema d'equacions lineals

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

   és un sistema compatible per a tot $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. (Observis que la relació que hi ha entre les dues caracteritzacions de sistema de generadors és la següent: $u = (\mu_1, \dots, \mu_n)_B$ i $\lambda_i = x_i$ per a $1 \leq i \leq r$).

   Per tant es té que, el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ genera E si i només si la matriu A té rang n.

2. *Independència lineal.*

   Per definició, el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ és un conjunt de vectors linealment independents si i només si l'equació $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ té com única solució $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

   Matricialment aquesta noció es pot caracteritzar de la manera següent: el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ és un conjunt de vectors linealment independents si i només si el sistema d'equacions lineals homogeni

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   és un sistema compatible determinat. (Com hem comentat en la pàgina 21, això és equivalent a demanar que l'única solució sigui $x_1 = \cdots = x_r = 0$).

   Per tant es té que, el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ és un conjunt de vectors linealment independents si i només si la matriu A té rang r.

3. *Base.*

   Si $r = n$ aleshores, per definició, el conjunt $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de l'espai vectorial E si i només si tot element u de E es pot expressar, de manera única, com combinació lineal de $v_1, \dots, v_n$. És a dir, si i només si per a tot vector $u \in E$ existeixen uns únics escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tals que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Matricialment aquesta noció es pot caracteritzar de la manera següent: si $r = n$ aleshores, el conjunt $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de E si i només si el sistema d'equacions lineals

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

és un sistema compatible determinat per a tot $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. (Observis que la relació que hi ha entre les dues caracteritzacions de base és la següent: $u = (\mu_1, \dots, \mu_n)_B$ i $\lambda_i = x_i$ per a $1 \leq i \leq n$).

Per tant es té que si $r = n$ aleshores, el conjunt $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de E si i només si la matriu A té rang n. Observem que en aquest cas A és una matriu quadrada (ja que $r = n$) i, per tant, podem concloure que el conjunt $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de E si i només si la matriu A té determinant no nul.

4. *Coordenades.*

   Per definició es té que, si el conjunt $\{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de E i si $u \in E$ és un element arbitrari aleshores, u té coordenades $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ si i només si $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

   Matricialment es té que, si el vector u té coordenades $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, aleshores les coordenades de u en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ són l'única solució del sistema d'equacions lineals:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

- Per acabar amb aquest resum de propietats, anem a fer un parell d'observacions que sovint utilitzarem en la resolució dels problemes.

- **Observació.** Per definició, un conjunt no buit B d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E és una base de l'espai si i només si el conjunt B és un sistema de generadors linealment independent de E. Per tant, en principi, per demostrar que un conjunt de vectors no buit B és una base de l'espai hem de comprovar aquestes dues propietats. Ara bé, en un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita n es pot demostrar que un conjunt $\{v_1, \dots, v_n\}$ de n vectors és un sistema de generadors de E si i només si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és un conjunt de vectors linealment independents. Per tant, en un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita n, per provar que un conjunt $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de n vectors és una base de l'espai només ens cal provar una de les dues propietats. És a dir, només cal provar o bé que $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera E, o bé que $\{v_1, \dots, v_n\}$ és un conjunt de vectors linealment independents.

- **Observació.** El conjunt producte cartesià $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{K}$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita n. La *base canònica* de $\mathbb{K}^n$ és $B_e = \{e_1, \dots, e_n\}$ on, per a $1 \leq i \leq n$, l'element e_i es defineix com $e_i = (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{n,i}) \in \mathbb{K}^n$ on $\delta_{i,i} = 1$ i $\delta_{j,i} = 0$ si $j \neq i$. Observem que si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, aleshores $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Per tant, les coordenades de l'element $w = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ en la base canònica de $\mathbb{K}^n$ són $w = (x_1, \dots, x_n)_{B_e}$. És a dir, tenim la igualtat $w = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)_{B_e}$. Aquesta igualtat ens diu que podem "identificar" els punts de $\mathbb{K}^n$ amb les seves coordenades en la base canònica de $\mathbb{K}^n$.

- Un cop recordats aquests conceptes, passem a la resolució del problema.

Resolució (a)

- En aquest apartat considerem els elements $u_1 = (1, 2)$ i $u_2 = (3, 4)$ de $\mathbb{R}^2$.
- Ens demanen que demostrem que el conjunt $B = \{u_1, u_2\}$ és una base de l'espai vectorial $E = \mathbb{R}^2$, i que determinem les coordenades d'un element genèric $w = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$ en la base B.
- Observem que com que $\mathbb{R}^2$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita 2 aleshores, per demostrar que el conjunt de dos elements $B = \{u_1, u_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ n'hi ha prou amb comprovar o bé que el conjunt B és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$ o bé que B és un conjunt de vectors linealment independents. Tanmateix, en aquest primer apartat provarem les dues condicions per tal de tenir-ne un model complet de resolució.

- *Vegem en primer lloc que B és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$.*

  Aquí anem a demostrar que el conjunt B és un sistema de generadors fent servir la definició de sistema de generadors d'un espai. És a dir, anem a veure que qualsevol vector $w \in E$ es pot expressar com combinació lineal dels vectors de B.

  Per tant, agafem un element arbitrari $w = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ i hem de veure que existeixen escalars $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que:
  $$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$
  És a dir, volem veure que existeixen nombres reals $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que:
  $$(a, b) = \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(3, 4).$$
  Operant la igualtat anterior es pot escriure de la manera següent:
  $$(a, b) = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2).$$
  Ara, fixant-nos en cada una de les dues components dels vectors en la igualtat anterior, l'equació es pot reescriure com el següent sistema d'equacions lineals:
  $$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & a \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & b \end{array} \right.$$
  el qual podem escriure matricialment de la següent manera:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$
  Si denotem per A la matriu d'aquest sistema, tenim
  $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$
  Com que $\det(A) = -2 \neq 0$, aleshores podem concloure que el sistema és compatible per a tot valor de a i de b. Per tant, per a qualsevol valor de a i de b el sistema d'equacions lineals:

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

té, com a mínim, una solució. Amb això hem demostrat que el conjunt B és un sistema de generadors de l'espai $\mathbb{R}^2$.

- *Observació.* Recordeu que podem identificar els punts de $\mathbb{R}^2$ amb les seves coordenades en la base canònica $B_e = \{e_1, e_2\}$ on $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. Fent aquesta identificació es té que la matriu A del sistema coincideix amb la matriu A dels "vectors" u_1, u_2 posats en "columna", (veure pàgina 31). És a dir es té que

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow\\ u_1 & u_2\\ \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}$$

i, per tant, el sistema d'equacions lineals

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

és exactament el sistema d'equacions lineal que surt en la caracterització matricial dels sistemes de generadors de la pàgina 31.

- *Observació.* També podem demostrar que el conjunt B és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$ fent servir la caracterització matricial de la pàgina 31. Aquesta caracterització matricial ens diu que, si volem demostrar que el conjunt de $r = 2$ vectors $\{u_1, u_2\}$ és un sistema de generadors de l'espai $n = 2$ dimensional $\mathbb{R}^2$, únicament hem de comprovar que la matriu

$$A = \begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow\\ u_1 & u_2\\ \downarrow & \downarrow\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

que aquests r vectors determinen té rang $\operatorname{rang}(A) = n$. En aquest cas, per tant, únicament hem d'observar que $\operatorname{rang}(A) = n = 2$.

- *Vegem a continuació que B és un conjunt de vectors linealment independents.*

En aquest cas, per demostrar que B és un conjunt de vectors linealment independents, veurem que l'única combinació lineal nul·la d'elements de B és la trivial. És a dir, demostrarem que l'única solució de l'equació $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ és $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Per tant, el que farem és estudiar quines solucions reals $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ té l'equació:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0.$$

És a dir, volem estudiar quines solucions té l'equació:

$$\lambda_1(1,2) + \lambda_2(3,4) = (0,0).$$

Operant, aquesta equació es pot escriure com:

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2) = (0,0)$$

i ara, fixant-nos en cadascuna de les components dels vectors, l'equació anterior es pot reescriure en forma de sistema lineal de la següent manera:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

el qual podem reescriure matricialment com segueix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fixem-nos que la matriu d'aquest sistema és la matriu que abans hem denotat per A. Com ja hem vist abans, $\det(A) = -2 \neq 0$, de manera que el sistema

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és compatible determinat i, per tant, té com única solució la trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Amb això hem demostrat que els vectors de B són linealment independents.

- *Observació.* Si identifiquem els punts de $\mathbb{R}^2$ amb les seves coordenades en la base canònica B_e de $\mathbb{R}^2$, aleshores la matriu A del sistema coincideix amb la matriu A dels "vectors" u_1, u_2 posats en "columna" (veure pàgina 31). És a dir es té que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

i, per tant, el sistema d'equacions lineals homogeni

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és exactament el sistema d'equacions lineals homogeni que surt en la caracterització matricial de la independència lineal de la pàgina 31.

- *Observació.* També podem demostrar que el conjunt B és un conjunt de vectors linealment independents fent servir la caracterització matricial de la pàgina 31. Aquesta caracterització matricial ens diu que si volem demostrar que el conjunt de $r = 2$ vectors $\{u_1, u_2\}$ és un conjunt de vectors linealment independents de l'espai $n = 2$ dimensional $\mathbb{R}^2$, únicament hem de comprovar que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

que aquests r vectors determinen té rang $\mathrm{rang}(A) = r$. En aquest cas, per tant, únicament hem d'observar que $\mathrm{rang}(A) = r = 2$.

- *Ara anem a veure que B és una base de $\mathbb{R}^2$.*

En aquest cas no hem de fer res ja que per una banda hem vist que el conjunt B és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$ i per l'altra hem vist que B és un conjunt de vectors linealment independents. Per tant, per definició, el conjunt B és una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$.

Recordeu, però, el que hem dit al principi de la resolució d'aquest apartat. Com que $\mathbb{R}^2$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita dos per tant, de fet, només ens feia falta comprovar que el conjunt $B = \{u_1, u_2\}$ verifica una de les dues condicions: o bé que el conjunt B és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$, o bé que el conjunt B és un conjunt de vectors linealment independents.

- *Observació.* També podem demostrar que el conjunt $B = \{u_1, u_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ fent sevir la caracterització matricial de la pàgina 32. Per a això identifiquem els punts de $\mathbb{R}^2$ amb les seves coordenades en la base canònica B_e de $\mathbb{R}^2$. D'aquesta manera podem considerar la matriu A dels "vectors u_1, u_2 posats en columna", (veure pàgina 31). És a dir, podem considerar la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la caracterització de la pàgina 32 ens diu que, en l'espai vectorial $n = 2$ dimensional $\mathbb{R}^2$, si volem demostrar que un conjunt de $r = n = 2$ vectors $\{u_1, u_2\}$ és una base únicament hem de comprovar que la matriu quadrada A que aquests $r = n$ vectors determinen és una matriu de rang $\text{rang}(A) = r = n$ o, equivalentment, és una matriu de determinant no nul. En aquest cas, per tant, únicament hem d'observar que $\text{rang}(A) = r = n = 2$, és a dir que $\det(A) \neq 0$.

- *Finalment, determinem les coordenades de $w = (a, b)$ en la base B de $\mathbb{R}^2$.*

Les coordenades de l'element w en la base B són, per definició, els únics escalars λ_1, λ_2 tals que $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Per tant, per determinar les coordenades de l'element $w = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ en la base $B = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ hem de calcular l'única solució de l'equació:

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

És a dir, volem calcular els únics nombres reals $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que:

$$(a, b) = \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(3, 4).$$

Operant, i fixant-nos en cada una de les dues components dels vectors en la igualtat anterior, l'equació es pot reescriure com el següent sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & a \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & b \end{array} \right.$$

el qual podem escriure matricialment de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Fixem-nos que la matriu de coeficients d'aquest sistema, que denotem per A, té determinant $\det(A) = -2 \neq 0$. Per tant el sistema

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

és compatible determinat per a tot valor de a i de b, és a dir, el sistema realment té una única solució. Observeu que el fet que el sistema sigui compatible és la condició de sistema de generadors (existència de solucions), el fet que el sistema sigui determinat és la condició d'independència lineal (unicitat de la solució del sistema homogeni associat), i el fet que el sistema sigui compatible i determinat és la condició de base (existència i unicitat de la solució). A més observem que si identifiquem els punts de $\mathbb{R}^2$ amb les seves coordenades en la base canònica B_e de $\mathbb{R}^2$, aleshores la matriu A del sistema és la matriu dels "vectors u_1, u_2 posats en columna" (veure pàgina 31) i, per tant, el sistema que aquí tenim és exactament el sistema d'equacions lineals de la caracterització de coordenades que hem recordat en la pàgina 32.

Per determinar les coordenades hem de calcular l'única solució λ_1, λ_2 d'aquest sistema.

Atès que A és una matriu invertible, podem calcular la seva inversa i resoldre el sistema. Com ja hem vist en la pàgina 15, la inversa d'una matriu 2×2 es pot calcular fàcilment. Concretament es té que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

és una matriu invertible, aleshores

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

En el nostre cas tindrem que:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, multiplicant el sistema que volem resoldre per A^{-1}, obtindrem la seva solució

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4a - 3b \\ -2a + b \end{pmatrix}.$$

Per tant, les coordenades de w en la base $B = \{u_1, u_2\}$ són:

$$w = \left(\frac{-4a + 3b}{2}, \frac{2a - b}{2} \right)_B$$

és a dir es té que:

$$w = \frac{-4a + 3b}{2} u_1 + \frac{2a - b}{2} u_2.$$

Resolució (b)

- Considerem els elements $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ i $u_3 = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
- En aquest apartat ens demanen que demostrem que el conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de l'espai vectorial $E = \mathbb{R}^3$ i, a més, ens demanen que determinem les coordenades d'un element genèric $w = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ en aquesta base B.
- Per resoldre aquest apartat procedirem de manera diferent a la que hem explicat en l'apartat anterior. Concretament aquí veurem que tot element de l'espai es pot escriure de manera única com combinació lineal dels elements del conjunt B (fet que ens diu que el conjunt B és una base de l'espai) i, a més, determinarem aquesta combinació lineal en el cas de l'element w (d'on tindrem les coordenades de w en la base B).

- Per tant, agafem un element genèric $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ i anem a veure que existeixen uns únics escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de manera que:

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3.$$

  És a dir, anem a demostrar que existeixen uns únics nombres reals $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tals que:

$$(a, b, c) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 1) + \lambda_3(0, 1, 1).$$

- Operant la igualtat anterior es pot escriure de la manera següent:

$$(a, b, c) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

  Ara, fixant-nos en cada una de les tres components, aquesta equació és equivalent al següent sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & c \end{array} \right.$$

  que es pot reescriure en forma matricial com

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

- Denotem per A la matriu d'aquest sistema, és a dir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Observació.* Recordeu que podem identificar els punts de $\mathbb{R}^3$ amb les seves coordenades en la base canònica $B_e = \{e_1, e_2, e_3\}$ on $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ (veure observació en la pàgina 32). Fent aquesta identificació es té que la matriu A del sistema coincideix és la matriu dels "vectors" u_1, u_2, u_3 escrits en "columna", (veure pàgina 31). És a dir es té que:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

  i per tant, el sistema d'equacions lineals que tenim és exactament el sistema d'equacions lineal que surt en la caracterització matricial de base i de coordenades de la pàgina 32.

- Així, doncs, hem de veure que per a qualsevol valor de a, b, c el sistema

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

  és compatible determinat (fet que ens diu que el conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de l'espai) i, a més, hem de determinar l'única solució del sistema (d'on tindrem les coordenades de l'element genèric $w = (a, b, c)$ en la base B).

- Fem-ho.

- Per veure que el sistema és compatible determinat n'hi ha prou amb veure que la matriu A té determinant no nul. Si calculem tenim

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1) \cdot (-1) = 1 \neq 0.$$

  Amb això concloem que el conjunt de vectors B és una base de $\mathbb{R}^3$.

- Ara, per calcular les coordenades de w en la base B, hem de resoldre el sistema. Per resoldre el sistema calculem, tal i com hem fet a la pàgina 19, la matriu inversa de la matriu A per adjunts i obtenim:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

  Per tant la inversa de la matriu A és la matriu:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Ara podem resoldre el sistema multiplicant ambdós costats per A^{-1}, obtenint com solució:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b+c \\ a+b-c \\ -a+c \end{pmatrix}.$$

  Per tant, les coordenades de w en la base B són

$$\begin{aligned} w &= (-b+c, a+b-c, -a+c)_B \\ &= (-b+c)u_1 + (a+b-c)u_2 + (-a+c)u_3. \end{aligned}$$

Resolució (c)

- Anem a presentar dues resolucions per a aquest apartat.

- **Resolució I**

  En aquesta resolució procedirem de manera anàloga a com ho hem fet en l'apartat anterior.

  En aquest cas tenim $E = \mathbb{R}^4$ i tenim el conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de quatre vectors on $u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,2,3,0)$, $u_3 = (1,0,-1,0)$ i $u_4 = (0,1,2,0)$.

Per demostrar que B és una base hem de veure que si $v \in \mathbb{R}^4$ és un vector genèric aleshores existeixen uns únics escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tals que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4.$$

Si suposem que $v = (a, b, c, d)$, aleshores l'equació anterior és equivalent a la següent:

$$(a, b, c, d) = \lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, 2, 3, 0) + \lambda_3(1, 0, -1, 0) + \lambda_4(0, 1, 2, 0).$$

Ara, com hem fet en l'apartat anterior, si operem i si ens fixem en cadascuna de les quatre components dels vectors obtenim el següent sistema lineal de quatre equacions i quatre incògnites:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & a \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 & = & b \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 & = & c \\ \lambda_1 & = & d \end{array} \right.$$

que de forma matricial podem escriue com:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

En aquest punt, per demostrar que el conjunt B és una base, n'hi ha prou amb veure que per a qualsevol valor de a, b, c, d aquest sistema és un sistema compatible determinat, és a dir que el determinant de la matriu del sistema és no nul. Ara bé, aquí anem a fer una mica més. Determinarem explícitament l'única solució d'aquest sistema ja que així tindrem les coordenades de l'element genèric $v = (a, b, c, d)$ en la base B.

Per tant, anem a resoldre el sistema. Fixem-nos que la darrera equació ens dóna directament $\lambda_1 = d$. Substituint-ho en la primera equació del sistema, tenim

$$d + \lambda_3 = a \Longleftrightarrow \lambda_3 = a - d.$$

Aleshores, substituint λ_1 i λ_3 en la resta d'equacions, ens queda el següent sistema lineal amb incògnites λ_2, λ_4:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_2 + \lambda_4 & = & b \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_4 & = & c + a - d \end{array} \right.$$

el qual podem reescriure matricialment com

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c + a - d \end{pmatrix}.$$

Si denotem per M la matriu d'aquest darrer sistema, tenim

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1.$$

Com que $\det(M) = 1 \neq 0$, la matriu M és invertible, i podem calcular la seva inversa tal i com hem vist en l'apartat (a):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, multiplicant per M^{-1} en l'equació matricial anterior tenim:

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_4\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} b\\ c+a-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\\ c+a-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-c-a+d\\ -3b+2c+2a-2d\end{pmatrix}$$

d'on $\lambda_2 = 2b-c-a+d$ i $\lambda_4 = -3b+2c+2a-2d$.

Amb això hem vist que l'única solució $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ del sistema de quatre equacions i quatre incògnites que teníem és:

$$\begin{cases} \lambda_1 = d\\ \lambda_2 = 2b-c-a+d\\ \lambda_3 = a-d\\ \lambda_4 = -3b+2c+2a-2d\end{cases}$$

Per tant podem concloure que el conjunt B és una base de $\mathbb{R}^4$ i que les coordenades del vector genèric $v=(a,b,c,d)$ en la base B són:

$$\begin{aligned} v &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)_B\\ &= (d, -a+2b-c+d, a-d, 2a-3b+2c-2d)_B\\ &= du_1 + (-a+2b-c+d)u_2 + (a-d)u_3 + (2a-3b+2c-2d)u_4. \end{aligned}$$

Per últim, per tal de calcular les coordenades del vector $w=(1,5,10,2)$ en la base B, simplement posem $a=1, b=5, c=10$ i $d=2$ en l'expressió anterior, i tenim

$$\begin{aligned} w &= (2,1,-1,3)_B\\ &= 2u_1 + u_2 - u_3 + 3u_4. \end{aligned}$$

- **Resolució II**

En aquesta segona resolució atacarem el problema d'una manera més directa.

En resoldre aquest apartat identificarem els punts de $\mathbb{R}^4$ amb les seves coordenades en la base canònica $B_e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ on $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ i $e_4 = (0,0,0,1)$. És a dir, farem servir que la igualtat $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)_{B_e}$ (igualtat que hem justificat en la pàgina 32).

Primer anem a demostrar que el conjunt de quatre vectors $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$, on $u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,2,3,0)$, $u_3 = (1,0,-1,0)$, $u_4 = (0,1,2,0)$. Per a això n'hi ha prou amb veure que la matriu que aquests vectors determinen té rang màxim, (veure la caracterització de base de la pàgina 32).

En aquest cas la matriu A dels "vectors" u_1, u_2, u_3, u_4 escrits en "columna" (veure pàgina 31) és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té determinant:

$$\det(A) = (-1)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} = 4-3 = 1.$$

Com que la matriu A té determinant no nul, aleshores A té rang quatre i, per tant, el conjunt B és una base de $\mathbb{R}^4$.

Ara, anem a determinar les coordenades del vector $w = (1, 5, 10, 2)$ en la base B. És a dir, volem determinar els únics escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ verificant $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$. Per a això (veure pàgina 32), simplement hem de resoldre el sistema d'equacions:

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

és a dir el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De la darrera equació tenim $\lambda_1 = 2$ i substituint en la primera tindrem $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 = 1 - 2 = -1$. Substituint aquest valors en les altres dues equacions obtenim el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_2 + \lambda_4 & = & 5 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_4 & = & 9 \end{array} \right.$$

que té per solució $\lambda_2 = 1$, $\lambda_4 = 3$. Per tant les coordenades de $w = (1, 5, 10, 2)$ en la base B són

$$\begin{aligned} w &= (2, 1, -1, 3)_B \\ &= 2u_1 + u_2 - u_3 + 3u_4. \end{aligned}$$

Resolució (d)

- Considerem el conjunt $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ on les matrius A_i són:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- En aquest apartat ens demanen que demostrem que el conjunt $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és una base de l'espai vectorial $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius 2×2 amb coeficients reals, i que determineu les coordenades de la matriu w en aquesta base on:

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Una primera manera de resoldre aquest apartat seria treballar de la mateixa manera que hem fet fins ara. És a dir, com que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és un espai vectorial real de dimensió 4 aleshores, per demostrar que el conjunt $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de quatre vectors és una base de l'espai vectorial de les matrius 2×2 amb coeficients reals n'hi ha prou amb demostrar, o bé que el conjunt B és un sistema de generadors de l'espai vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, o bé que B és un conjunt de matrius linealment independents. És a dir:

  - o bé hem de veure que per a qualsevol matriu $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ existeixen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tals que $M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$, (aquesta és la condició de sistema de generadors).

- o bé hem de veure que si $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$ aleshores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, (aquesta és la condició d'independència lineal).

Deixem com a exercici per al lector resoldre l'exercici d'aquesta manera, treballant directament amb les matrius. (Si ho fem, veureu que els sistemes d'equacions que us sortiran en cada cas tenen, els dos, la mateixa matriu associada).

- Ara bé, com que estem en un espai vectorial de dimensió finita, podem treballar amb coordenades i fer servir els resultats teòrics que hem recordat a l'inici de la resolució d'aquest problema. Dit d'una manera informal, podem "pensar les matrius com vectors" i, aleshores, resoldre l'exercici com hem fet en els apartats anteriors.

- Aquí anem a treballar d'aquesta manera.

- Per a això considerem la base $B_E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Aleshores, si agafem coordenades en aquesta base, les matrius A_1, A_2, A_3, A_4 les podem escriure "com vectors" de la següent manera:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 1)_{B_e} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (0, 2, 3, 0)_{B_e} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, -1, 0)_{B_e} \\ A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 2, 0)_{B_e} \end{aligned}$$

i la matriu w es pot escriure com:

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = (1, 5, 10, 2)_{B_e}.$$

D'aquesta manera es té que la matriu A dels "vectors" A_1, A_2, A_3, A_4 escrits en "columna" és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ara, per demostrar que $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és una base hem de veure que la matriu A té rang quatre, i per calcular les coordenades de la matriu w en la base B hem de resoldre el sistema d'equacions lineals:

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Així, en agafar coordenades, aquest apartat es redueix a l'apartat anterior, i els càlculs que ara hem de fer són exactament els mateixos que hem fet abans. Per tant podem concloure que el conjunt $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és una base de l'espai de matrius $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i que, en aquesta base, la matriu w té coordenades

$$\begin{aligned} w =& (2, 1, -1, 3)_B \\ =& 2A_1 + A_2 - A_3 + 3A_4. \end{aligned}$$

- **Comentari.** Un cop s'hagin estudiat les aplicacions lineals, també es podria argumentar aquest apartat dient que l'espai vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és isomorf a l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ mitjançant la següent identificació

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto (a, b, c, d) \end{aligned}$$

Es pot comprovar fàcilment, un cop introduïda la teoria necessària, que aquesta aplicació és lineal i bijectiva.

- 4.

Sigui $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Considerem els vectors $v_1 = u_1$, $v_2 = au_2 + u_3$ i $v_3 = u_1 + u_2 + bu_3$, on $a, b \in \mathbb{K}$ són escalars. Sigui $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(a) Determineu a, b per als quals B_v és base de E i $M(B_u \to B_v) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

(b) Determineu a, b per als quals B_v és base de E i les coordenades de $u_1 + 2u_2 - u_3$ en aquesta base són $(3, -1, -2)$.

Solució

(a) $a = 3$, $b = 1$.
(b) $a = -4$, $b = 0$.

Resolució

- Abans d'iniciar la resolució d'aquest problema recordem, breument, els resultats teòrics que farem servir. Aquests resultats teòrics fan referència a les bases, a les coordenades i als canvis de coordenades en espais vectorials de dimensió finita. Alguns d'aquests resultats ja els hem comentat abans, d'una manera més extensa, en la resolució del problema de la pàgina 29.

- Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita n i sigui $B_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de l'espai E. Sigui $B_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunt de n elements de E. Per a $1 \leq j \leq n$, sigui $a_{i,j}$ la i-èsima coordenada de l'element v_j en la base B_e. Així, agafant les coordenades en la base B_e de E, podem escriure:
$$v_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})_{B_e} \quad \text{per a} \quad 1 \leq j \leq n$$
i, ara, podem considerar la matriu $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ quadrada de n files i n columnes definida per:
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
que, d'una manera "informal", es pot pensar com "la matriu dels vectors de B_v posats en columna", és a dir, la matriu A es pot pensar com:
$$\text{“}A = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_j & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right) = (v_1 | \ldots | v_j | \ldots | v_n)\text{”}.$$

- Fent servir aquesta matriu, es tenen els resultats següents:

1. *Base.*

   El conjunt $B_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de l'espai vectorial E si i només si la matriu A té rang n. És a dir, $B_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de E si i només si la matriu A té determinant no nul, o equivalentment si i només si la matriu A és invertible.

2. *Coordenades.*

   Suposem que el conjunt $B_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de l'espai vectorial E. Sigui $w \in E$ un element arbitrari. Siguin $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ les coordenades de w en la base B_e, i siguin $(\mu'_1, \ldots, \mu'_n)$ les coordenades de w en la base B_v. En aquesta situació es té que:

$$A \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

3. *Matriu de canvi de coordenades.*

   Suposem que el conjunt $B_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és una base de l'espai vectorial E. Aleshores la matriu A és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector w de E en la base B_v en les coordenades del vector w en la base B_e. Notarem $A = M(B_v \to B_e)$.

   A més en aquest cas es té que la matriu A és una matriu invertible, i la seva matriu inversa A^{-1} és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector w de E en la base B_e en les coordenades del vector w en la base B_v. És a dir es té la igualtat de matrius $M(B_e \to B_v) = M(B_v \to B_e)^{-1}$.

- Procedim, ara, a resoldre el problema.

Resolució (a)

- Primer de tot observem que el $\mathbb{K}$-espai vectorial E té dimensió finita 3 ja que la dimensió d'un espai vectorial és el nombre d'elements de qualsevol base de l'espai i, en aquest cas, per hipòtesi, sabem que el conjunt $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de l'espai vectorial E.

- En aquest apartat volem determinar quan el conjunt $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ és una base de l'espai E amb matriu canvi de base $M(B_u \to B_v) = P$, on els vectors v_1, v_2, v_3 són:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = au_2 + u_3 \\ v_3 = u_1 + u_2 + bu_3 \end{cases}$$

  i on P és la matriu:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

- Primer anem a veure per a quins valors de a i de b el conjunt B_v és una base de E.

- Com que els vectors del conjunt B_v venen donats en termes de la base B_u, podem prendre coordenades en aquesta darrera base. D'aquesta manera tenim:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (1,0,0)_{B_u} \\ v_2 &= au_2 + u_3 = (0,a,1)_{B_u} \\ v_3 &= u_1 + u_2 + bu_3 = (1,1,b)_{B_u} \end{aligned}$$

i per tant, la matriu A dels vectors de B_v escrits en columna és:

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

- Pel resultat teòric que hem recordat abans sabem que el conjunt de vectors B_v és una base de l'espai E si i només si la matriu A té rang 3, o equivalentment, si i només si la matriu A té determinant no nul.

- Ara, per tant, o bé hem de calcular el rang de la matriu A o bé hem de calcular el seu determinant. Per determinar el rang de la matriu podem esglaonar-la per files (deixem al lector comprovar els resultats que obtindríem mitjançant aquest càlcul). En aquest cas optarem per calcular el determinant de la matriu A ja que resulta un càlcul més fàcil. Si el calculem tenim:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 1.$$

- De tot això podem concloure que, el conjunt de vectors B_v és una base de l'espai vectorial E si i només si $\det(A) \neq 0$, és a dir si i només si $ab \neq 1$.

- Vegem a continuació com determinar els valors $a, b \in \mathbb{K}$ per tal que la matriu de canvi de base $M(B_u \to B_v)$ sigui la matriu donada P.

- Per una banda observem que la matriu A és la matriu que té per columnes els "vectors de la base B_v escrits en la base B_u". Per tant, pel resultat que hem recordat abans, la matriu A és la matriu que, aplicat a un vector escrit en la base B_v ens dóna el vector escrit en base B_u. En altres paraules, la matriu A és la matriu que transforma les coordenades d'un vector w de E en la base B_v en les coordenades del vector w en la base B_u. És a dir,

$$A = M(B_v \to B_u)$$

és la matriu de canvi de base de la base B_v a la base B_u.

- Per altra banda sabem que la matriu $M(B_u \to B_v)$, és a dir la matriu que transforma les coordenades d'un vector w de E en la base B_u en les coordenades del vector w en la base B_v, es pot calcular fent:

$$M(B_u \to B_v) = M(B_v \to B_u)^{-1}.$$

- Amb això podem conclore que:

$$M(B_u \to B_v) = P \text{ si i només si } P = A^{-1}.$$

- Per tant, el problema que tenim és determinar per a quins valors dels paràmetres a i b es té la igualtat $A^{-1} = P$.

- La manera més evident de resoldre aquest problema és invertir la matriu A i imposar la igualtat anterior, o bé invertir la matriu P i imposar la igualtat $P^{-1} = A$. Tanmateix, invertir una matriu és, en general, un procediment llarg i tediós (sobre tot si en la matriu tenim paràmetres). Per tant és recomanable buscar algun procediment alternatiu. El que farem és usar directament la definició de matriu invertible: una matriu quadrada M d'ordre n és invertible si i només si existeix una altra matriu quadrada N d'ordre n tal que $M \cdot N = N \cdot M = \mathrm{Id}$ i, en aquesta situació, es diu que N és la inversa de M i ho notarem $N = M^{-1}$.

- Anem, per tant, a fer servir la definició. Així, en el nostre cas, com que volem que $A^{-1} = P$, calcularem el producte de matrius $A \cdot P$ i imposarem que sigui igual a la matriu identitat 3×3.

  Fent aquest càlcul tenim:

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 - 1/2 & -a/2 + 3/2 \\ 0 & 1/2 - b/2 & -1/2 + 3b/2 \end{pmatrix}$$

  i imposant ara que $A \cdot P = \mathrm{Id}$, es té la igualtat matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 - 1/2 & -a/2 + 3/2 \\ 0 & 1/2 - b/2 & -1/2 + 3b/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  que podem reescriure en forma d'un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a/2 - 1/2 & = & 1 \\ -a/2 + 3/2 & = & 0 \\ 1/2 - b/2 & = & 0 \\ -1/2 + 3b/2 & = & 1 \end{array} \right.$$

  La primera i segona equació ens donen $a = 3$, mentre que la tercera i quarta equació ens donen $b = 1$. Observem que es compleix $ab = 3 \neq 1$, de manera que per a aquests valors el conjunt B_v és una base de l'espai, tal i com hem vist anteriorment.

- En conclusió, els valors de a i de b per als quals els vectors del conjunt B_v satisfan les propietats demanades són $a = 3$ i $b = 1$.

- **Comentari.** Per definició d'inversa es té que $A^{-1} = P$ si i només si $A \cdot P = P \cdot A = \mathrm{Id}$. Per tant, per veure que $A^{-1} = P$ hauríem de comprovar les dues igualtats, és a dir que $A \cdot P = \mathrm{Id}$ i que $P \cdot A = \mathrm{Id}$. Ara bé es pot demostrar que si es té una de les dues igualtats aleshores també es té l'altra. Per tant, per veure que $A^{-1} = P$ realment n'hi ha prou amb comprovar només una de les dues igualtats, és a dir n'hi ha prou amb veure o bé que $A \cdot P = \mathrm{Id}$ o bé que $P \cdot A = \mathrm{Id}$.

- *Comentari.* En la resolució hem imposat que $A \cdot P = \mathrm{Id}$. Ara, tot i que no és necessari, anem a veure què obtenim si demanem $P \cdot A = \mathrm{Id}$. Fent aquest càlcul tenim:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a/2 - 3/2 & 3/2 - 3b/2 \\ 0 & a/2 - 1/2 & 1/2 - b/2 \\ 0 & -a/2 + 3/2 & -1/2 + 3b/2 \end{pmatrix}$$

i imposant ara la igualtat $P \cdot A = \mathrm{Id}$, obtenim les equacions:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a/2 - 3/2 & = & 0 \\ 3/2 - 3b/2 & = & 0 \\ a/2 - 1/2 & = & 1 \\ 1/2 - b/2 & = & 0 \\ -a/2 + 3/2 & = & 0 \\ -1/2 + 3b/2 & = & 1 \end{array}\right.$$

que tenen per solució $a = 3$ i $b = 1$. En conclusió, tot i tenir diferents equacions, al final obtenim el mateix resultat.

Resolució (b)

- En aquest apartat volem determinar per a quins valors de a i de b el conjunt de vectors B_v és una base de E i les coordenades de $u_1 + 2u_2 - u_3$ en aquesta base són $(3, -1, -2)$.
- Atès que el conjunt de vectors B_v és el mateix que en l'apartat anterior, la condició necessària i suficient sobre els valors de a i de b per tal que el conjunt B_v sigui una base és la mateixa que abans: $ab \neq 1$. Ara volem determinar per a quins valors el vector $w = u_1 + 2u_2 - u_3$ té coordenades $(3, -1, -2)$ en la base B_v.
- Observem que les coordenades de w en la base B_u són $w = u_1 + 2u_2 - u_3 = (1, 2, -1,)_{B_u}$. Per tant el que volem és determinar per a quins valors de a i de b es té la igualtat:

$$(1, 2, -1)_{B_u} = (3, -1, -2)_{B_v}.$$

- Com hem justificat en l'apartat anterior, per construcció es té que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

  és la matriu de canvi de base $M(B_v \to B_u)$ de la base B_v a la base B_u. És a dir, multiplicant la matriu A per les coordenades d'un vector de l'espai E en la base B_v obtindrem les coordenades del vector en la base B_u. Per tant la següent igualtat es compleix:

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Si fem el producte del primer terme de la igualtat ens queda

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a - 2 \\ -1 - 2b \end{pmatrix}$$

  i si ara imposem la igualtat de vectors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -a - 2 \\ -1 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

obtenim el sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{rcr} 1 & = & 1 \\ -a-2 & = & 2 \\ -1-2b & = & -1 \end{array}\right.$$

La primera equació és una identitat que ens assegura que el sistema pot tenir solució. Ara, la segona i tercera equacions es resolen directament obtenint $a=-4$ i $b=0$. Com abans, notem que $ab=0\neq 1$, de manera que per a aquests valors de a i de b es té que B_v és una base de l'espai E.

- En conclusió, els valors de a i de b per als quals els vectors de B_v satisfan les propietats demanades a l'enunciat d'aquest apartat són $a=-4$ i $b=0$.

- 5.

Sigui E un espai vectorial de dimensió finita.

(a) Demostreu que si F, G són dos subespais de E aleshores, $\dim(F+G) - \dim(F \cap G) = \dim F - \dim G$ si i només si $G \subseteq F$.

(b) Sigui F un subespai de E, i siguin $G_1, G_2 \subseteq E$ dos subespais amb $\dim G_1 = \dim G_2$. Demostreu que $\dim(F+G_1) = \dim(F+G_2)$ si i només si $\dim(F \cap G_1) = \dim(F \cap G_2)$. És cert que $F + G_1 = F + G_2$ si i només si $F \cap G_1 = F \cap G_2$?

(c) Sigui F un subespai de E, i siguin H_1, H_2 dos subespais complementaris de F. Podem afirmar que $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$? Podem afirmar que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$?

Solució

(a) —
(b) —. No.
(c) No. No.

Resolució (a)

- La resolució d'aquest apartat (i dels següents) es basa en la fórmula de les dimensions de Grassmann i en un resultat addicional. Per a no repetir-los excessivament, els recordarem en aquest primer apartat i sols els citarem en els següents.

  - **Fórmula de Grassmann.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F_1, F_2 \subseteq E$ subespais vectorials de dimensió finita. Aleshores es té que* $\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

  - **Lema.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Si $F_1, F_2 \subseteq E$ són dos subespais vectorials de dimensió finita tals que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $F_1 = F_2$ si i només si* $\dim F_1 = \dim F_2$.

    Comentari. La demostració d'aquest lema és senzilla i es basa en aplicar el teorema de Steinitz. De fet, fixeu-vos que la implicació "$F_1 = F_2 \Rightarrow \dim F_1 = \dim F_2$" sempre és certa, de manera que només cal provar el recíproc. Es deixa al lector com a exercici.

- Passem ara a la resolució del problema. Atès que tenim una doble implicació ("si i només si"), procedirem demostrant cadascuna de les implicacions per separat.

- **Demostrem** $\boxed{\Leftarrow}$

- Aquesta és la implicació senzilla. Suposem que tenim la inclusió $G \subseteq F$. Aleshores tindrem les igualtats $F + G = F$ i $F \cap G = G$, ja que la suma de dos subespais vectorials un dels quals estigui contingut en l'altre és el més gran de tots dos, i la intersecció de dos subespais en les mateixes condicions és el més petit de tots dos. Ara observem que de $F+G=F$ es dedueix $\dim(F+G)=\dim F$, i que de $F\cap G=G$ es dedueix $\dim(F\cap G)=\dim G$. Per tant es té que:

$$\dim(F+G)-\dim(F\cap G)\overset{(1)}{=}\dim F-\dim(F\cap G)\overset{(2)}{=}\dim F-\dim G$$

on en (1) hem usat $\dim(F+G)=\dim F$, i en (2) hem usat $\dim(F\cap G)=\dim G$.

- **Demostrem** $\boxed{\Rightarrow}$

- En aquesta implicació és on necessitarem la fórmula de Grassmann. Suposem que es compleix

$$\dim(F+G)-\dim(F\cap G)=\dim F-\dim G$$

i volem veure que $G\subseteq F$. Com que E és un espai vectorial de dimensió finita, els subespais F i G també tenen dimensió finita. Per tant, aplicant la fórmula de Grassmann amb $F_1=F$ i $F_2=G$, tenim

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G$$

i, per tant, ara tenim les dues afirmacions següents:

$$\begin{aligned}\dim(F+G)-\dim(F\cap G)&=\dim F-\dim G\\ \dim(F+G)+\dim(F\cap G)&=\dim F+\dim G\end{aligned}$$

la primera per hipòtesi del problema i la segona per la fórmula de Grassmann.

- Si sumem aquestes dues equacions obtenim $2\dim(F+G)=2\dim F$, d'on es dedueix la igualtat de dimensions $\dim(F+G)=\dim F$. D'altra banda, si restem les dues equacions obtenim la igualtat $-2\dim(F\cap G)=-2\dim G$, d'on es dedueix que $\dim(F\cap G)=\dim G$. Per tant,

$$\begin{aligned}\dim(F+G)&=\dim F\\ \dim(F\cap G)&=\dim G\end{aligned}$$

- Ara bé, recordem que de la definició de suma tenim $F\subseteq F+G$. Com que en el nostre cas aquests dos subespais tenen la mateixa dimensió i és finita aleshores, pel lema, aquesta inclusió es converteix en la igualtat $F=F+G$. Anàlogament, de la definició d'intersecció tenim $F\cap G\subseteq G$, però en tenir la mateixa dimensió i ser finita aleshores, pel lema, la inclusió esdevé una igualtat. Per tant, tenim $F+G=F$ i $F\cap G=G$, d'on es dedueix que $G\subseteq F$, tal i com volíem veure[8].

Resolució (b)

- Aquest apartat el podríem resoldre exactament igual que l'apartat anterior: demostrant les dues implicacions de l'equivalència. Tanmateix, aquí procedirem de manera alternativa demostrant directament l'equivalència de l'afirmació. Abans, però, fem alguns càlculs previs.

- Aplicant la fórmula de Grassmann, prenent com subespais vectorials $F_1=F$ i $F_2=G_1$, tenim:

$$\dim(F+G_1)+\dim(F\cap G_1)=\dim F+\dim G_1$$

[8] De fet només ens cal una de les condicions, ja que és fàcil demostrar que: $F+G=F\Leftrightarrow G\subseteq F\Leftrightarrow F\cap G=G$.

i aplicant novament la fòrmula de Grassmann, però prenent ara $F_1 = F$ i $F_2 = G_2$, es té:

$$\dim(F + G_2) + \dim(F \cap G_2) = \dim F + \dim G_2.$$

- Restant aquestes dues identitats de nombres reals, obtenim:

$$\begin{aligned} &\dim(F + G_1) + \dim(F \cap G_1) - (\dim(F + G_2) + \dim(F \cap G_2)) = \\ &= \dim F + \dim G_1 - (\dim F + \dim G_2) \end{aligned}$$

  d'on reordenant i simplificant, aquesta igualtat esdevé:

$$\dim(F + G_1) - \dim(F + G_2) + \dim(F \cap G_1) - \dim(F \cap G_2) = \dim G_1 - \dim G_2$$

  i, usant l'hipòtesi $\dim G_1 = \dim G_2$, ens queda la següent identitat:

$$\dim(F + G_1) - \dim(F + G_2) = \dim(F \cap G_2) - \dim(F \cap G_1).$$

- Per tant, ja hem provat tot el que necessitem, ja que:

$$\begin{aligned} \dim(F + G_1) = \dim(F + G_2) &\Longleftrightarrow \dim(F + G_1) - \dim(F + G_2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim(F \cap G_2) - \dim(F \cap G_1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim(F \cap G_2) = \dim(F \cap G_1) \end{aligned}$$

  obtenint l'equivalència de l'enunciat.

- Passem ara a la segona pregunta d'aquest apartat: *és cert que* $F + G_1 = F + G_2$ *si i només si* $F \cap G_1 = F \cap G_2$*?*

- Pot semblar raonable que es doni aquesta equivalència pel fet que es dóna per les dimensions d'aquests subespais vectorials. Ara bé, cal tenir en compte que hi poden haver molts subespais diferents amb una dimensió fixada i per tant, dit poc formalment, "no és tant fàcil" que es donin les igualtats a nivell de subespais vectorials.

- De fet, l'equivalència que ens demanen en aquest cas és falsa, i ho és en ambdós sentits de la implicació, és a dir, la igualtat de la suma no implica la igualtat de la intersecció, ni tampoc la igualtat en la intersecció implica la igualtat en la suma. Vegem un contraexemple per a cada cas. En tots dos casos prendrem com espai vectorial $E = \mathbb{R}^3$.

- *Vegem en primer lloc que la igualtat en la suma no implica la igualtat en la intersecció.*

  Considerem els subespais vectorials:

$$\begin{aligned} F &= \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\} \\ G_1 &= \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0\} \\ G_2 &= \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\} \end{aligned}$$

  Des del punt de vista geomètric el subespai F és el pla XY ($\{z = 0\}$) de $\mathbb{R}^3$, el subespai G_1 és el pla XZ ($\{y = 0\}$) de $\mathbb{R}^3$, i el subespai G_2 és el pla YZ ($\{x = 0\}$) de $\mathbb{R}^3$. Clarament es té que $\dim G_1 = \dim G_2 = 2$ ($= \dim F$, tot i que això no és una hipòtesi de l'enunciat).

Pel que fa als subespais suma tenim:

$$F + G_1 = \langle (1,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle = \mathbb{R}^3$$
$$F + G_2 = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle = \mathbb{R}^3$$

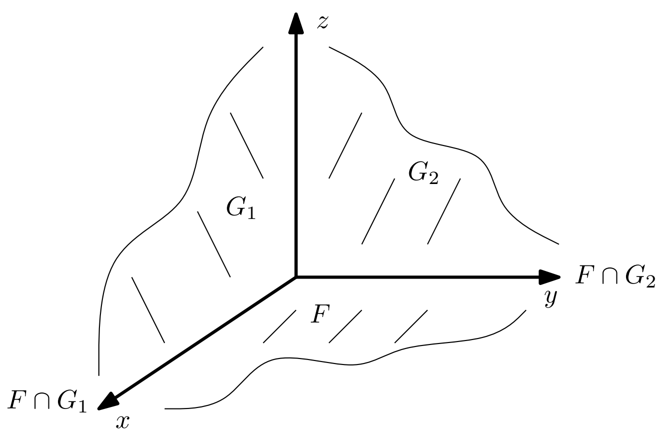
és a dir, $F + G_1 = F + G_2 = E$.

En canvi, quan calculem les interseccions obtenim:

$$F \cap G_1 = \langle (1,0,0)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = z = 0\}$$
$$F \cap G_2 = \langle (0,1,0)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = z = 0\}$$

que, clarament, no són iguals.

Per tant, tenim tres subespais F, G_1, G_2 tals que $F + G_1 = F + G_2$, però $F \cap G_1 \neq F \cap G_2$. Geomètricament la intersecció $F \cap G_1$ és l'eix OX, i la intersecció $F \cap G_2$ és l'eix OY. La idea geomètrica queda més ben reflectida en el següent dibuix:



- *Vegem ara que la igualtat en la intersecció no implica la igualtat en la suma.*

Prenem els subespais vectorials:

$$F = \langle (1,0,0)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = z = 0\}$$
$$G_1 = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$$
$$G_2 = \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0\}$$

Geomètricament el subespai F és la recta de l'eix OX, el subespai G_1 és el pla XY ($\{z = 0\}$), i el subespai G_2 és el pla XZ ($\{y = 0\}$). Observem, novament, que $\dim G_1 = \dim G_2 = 2$.

Si calculem els subespais suma $F + G_1$ i $F + G_2$, com que F està inclòs en tots dos es té que:

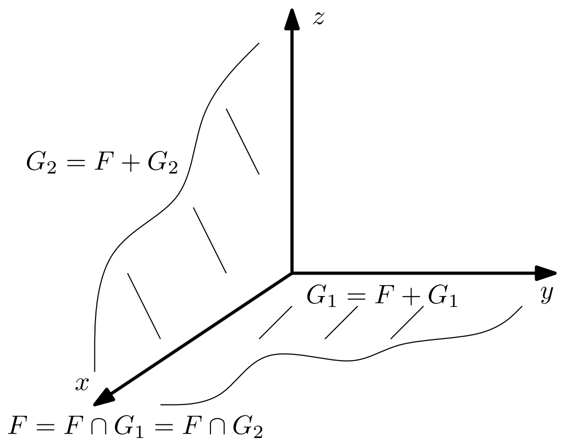
$$F + G_1 = \langle (1,0,0),(1,0,0),(0,1,0)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle = G_1$$
$$F + G_2 = \langle (1,0,0),(1,0,0),(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle = G_2$$

Així doncs tenim $F + G_1 = G_1 \neq G_2 = F + G_2$.

D'altra banda, com que $F \subseteq G_i$ per a $i = 1, 2$, aleshores els subespais intersecció són:

$$F \cap G_1 = \langle (1,0,0) \rangle = F$$
$$F \cap G_2 = \langle (1,0,0) \rangle = F$$

Per tant, tenim tres subespais vectorials F, G_1, G_2 tals que $F \cap G_1 = F \cap G_2 = F$, però $F + G_1 \neq F + G_2$. Gràficament, el dibuix és el següent:



Resolució (c)

- Com que H_1 i H_2 són subespais complementaris de F aleshores, per definició, es té que:

$$E = F \oplus H_1, \text{ és a dir, } E = F + H_1 \text{ i } F \cap H_1 = \{0\}$$
$$E = F \oplus H_2, \text{ és a dir, } E = F + H_2 \text{ i } F \cap H_2 = \{0\}$$

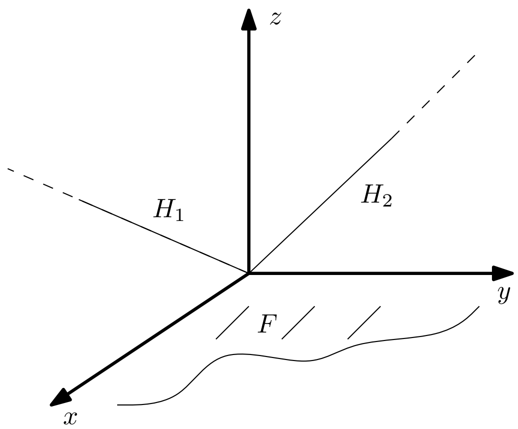
- Un cop recordada la definició de subespais complementaris, passem a les preguntes concretes d'aquest apartat.

- *Podem afirmar que $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$?*

  En general, no. Prenem, per exemple, $E = \mathbb{R}^3$ i considerem els subespais següents

$$F = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$$
$$H_1 = \langle (1,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = x - z = 0\}$$
$$H_2 = \langle (0,1,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y - z = 0\}$$

  Geomètricament el subespai F és el pla XY ($\{z = 0\}$) en l'espai $E = \mathbb{R}^3$, el subespai H_1 és una recta per l'origen continguda en el pla XZ i no continguda en el pla XY, i el subespai H_2 és una recta per l'origen continguda en el pla YZ i no continguda en el pla XY. Gràficament, el dibuix és el següent:



Clarament es té que:

$$F + H_1 = F + H_2 = \mathbb{R}^3$$

i també es té que:

$$F \cap H_1 = F \cap H_2 = \{0\}$$

ja que les rectes no estan contingudes en el pla XY. És a dir, aquestes rectes són subespais complementaris del subespai vectorial F. A més, com que aquestes rectes es troben en plans diferents, també es té que:

$$H_1 \cap H_2 = \{0\}$$

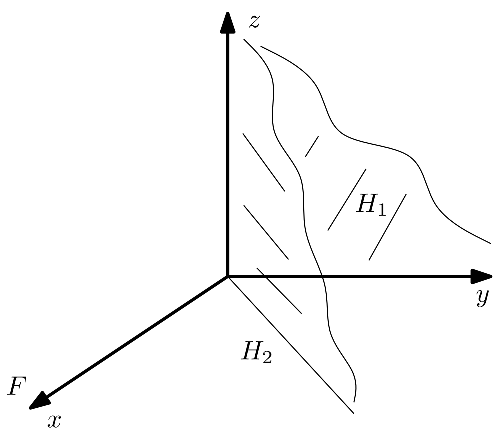
i ja tenim el que volíem.

- *Podem afirmar que* $H_1 \cap H_2 = \{0\}$*?*

De nou, en general no. Prenem, com abans, $E = \mathbb{R}^3$, i considerem ara els subespais

$$\begin{aligned} F &= \langle (1,0,0) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = z = 0\} \\ H_1 &= \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\} \\ H_2 &= \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0\} \end{aligned}$$

Geomètricament el subespai F és la recta de l'eix OX, el subespai H_1 és el pla YZ, i el subespai H_2 és el pla YZ girat $\pi/4$ sobre l'eix OZ. En aquest cas el dibuix és el següent:



Aleshores es té que:

$$F + H_1 = F + H_2 = \mathbb{R}^3$$

i també es té que:

$$F \cap H_1 = F \cap H_2 = \{0\}$$

ja que, en ambdós casos, els plans que hem pres per H_1 i H_2 no contenen l'eix OX $(= F)$. Per tant, els subespais H_1 i H_2 són subespais complementaris de F. Tanmateix, com que H_2 és el pla YZ $(= H_1)$ girat $\pi/4$ respecte l'eix OZ, es té que:

$$H_1 \cap H_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle \neq \{0\}$$

i ja tenim el que volíem.

- **Comentari.** Aquest darrer apartat té força intuïció geomètrica, i per aquest motiu hem preferit exposar-lo d'aquesta manera. Clarament tot aquest raonament es pot comprovar formalment calculant rangs de matrius i fent-ho pas a pas, però hem preferit donar una visió geomètrica que no pas tot un seguit de càlculs que no deixen veure la figura que tenim. En cas de voler comprovar-ho, els càlculs es deixen al lector com a exercici.

- 6.

Sigui $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matriu no nul·la fixada. Sigui $F_1(A) = \langle \mathrm{Id}, A, A^2, \dots, A^n, \dots \rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el subespai generat per les potències de A, i sigui $F_2(A) = \{M \,:\, AM = MA\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el subespai format per les matrius que commuten amb la matriu A. Demostreu que:

(a) El subespai $F_1(A)$ té dimensió 1 o 2, i té dimensió 1 si i només si A és una matriu escalar. (Indicació: demostreu que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A - \det(A)\,\mathrm{Id}$).

(b) El subespai $F_2(A)$ té dimensió 2 o 4, i té dimensió 4 si i només si A és una matriu escalar.

(c) Es té la igualtat $F_1(A) = F_2(A)$ si i només si A no és una matriu escalar.

Solució

—

Resolució (a)

- Comencem per demostrar la indicació.

- Suposem que la matriu A és:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$
Aquesta matriu té traça $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ i determinant $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Calculant tenim:
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(A)A - \det(A)\,\mathrm{Id} = \\
&\quad = (a_{11}+a_{22})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} (a_{11}+a_{22})a_{11} & (a_{11}+a_{22})a_{12} \\ (a_{11}+a_{22})a_{21} & (a_{11}+a_{22})a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{22}a_{11} & (a_{11}+a_{22})a_{12} \\ (a_{11}+a_{22})a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{22}a_{11} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) & (a_{11}+a_{22})a_{12} \\ (a_{11}+a_{22})a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & (a_{11}+a_{22})a_{12} \\ (a_{11}+a_{22})a_{21} & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{22}a_{12} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^2.
\end{aligned}$$

- Amb això queda demostrada la indicació.
- Ara, un cop hem demostrat la indicació, anem a veure que el subespai vectorial $F_1(A)$ està generat per les matrius Id i A. És a dir, anem a veure que $F_1(A) = \langle \mathrm{Id}, A \rangle$.
- Per definició tenim $F_1(A) = \langle \mathrm{Id}, A, A^2, \dots, A^n, \dots \rangle$. Per tant, per demostrar la igualtat de subespais $F_1(A) = \langle \mathrm{Id}, A \rangle$, únicament hem de provar que $A^n \in \langle \mathrm{Id}, A \rangle$ per a tot $n \geq 2$. Ho demostrarem per inducció sobre n:
  - Primer anem a demostrar el cas $n = 2$.

    Aquest cas és conseqüència directa de la indicació, ja que tenim $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A - \det(A)\,\mathrm{Id} = \lambda A + \mu\,\mathrm{Id} \in \langle \mathrm{Id}, A \rangle$.
  - Ara anem a demostrar que "$n \Rightarrow n+1$".

    La nostra hipòtesi d'inducció és que $A^n \in \langle \mathrm{Id}, A \rangle$. Per tant estem suposant que existeixen escalars λ_0, λ_1 tals que $A^n = \lambda_0\,\mathrm{Id} + \lambda_1 A$. Aleshores, per a A^{n+1} tenim:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A \\ &\overset{(1)}{=} (\lambda_0\,\mathrm{Id} + \lambda_1 A)A \\ &= \lambda_0 A + \lambda_1 A^2 \\ &\overset{(2)}{=} \lambda_0 A + \lambda_1(\mathrm{Tr}(A)A - \det(A)\,\mathrm{Id}) \\ &= -\lambda_1 \det(A)\,\mathrm{Id} + (\lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{Tr}(A))A \end{aligned}$$

    on en (1) hem aplicat la hipòtesi d'inducció i en (2) hem aplicat la indicació. Per tant, $A^{n+1} = \mu_0\,\mathrm{Id} + \mu_1 A$ amb $\mu_0 = -\lambda_1 \det(A)$ i amb $\mu_1 = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{Tr}(A)$. D'on $A^{n+1} \in \langle \mathrm{Id}, A \rangle$.
- Per tant, queda provat que $F_1(A) = \langle \mathrm{Id}, A \rangle$.
- Clarament, aquest subespai té dimensió 1 o 2 en funció de si Id i A són linealment dependents o independents, respectivament. De fet, té dimensió 1 si i només si Id i A són linealment dependents, és a dir, si i només si $A = \lambda\,\mathrm{Id}$ amb $\lambda \neq 0$. En altres paraules: el subespai $F_1(A)$ té dimensió 1 si i només si la matriu A és una matriu escalar. Per tant:

$$\dim F_1(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } A \text{ és escalar} \\ 2, & \text{si } A \text{ no és escalar} \end{cases}$$

Resolució (b)

- Per resoldre aquest apartat buscarem condicions que han de complir les matrius d'aquest subespai, és a dir, buscarem les equacions que determinen el subespai vectorial $F_2(A)$.
- Suposem que la matriu A és:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

  i sigui $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matriu arbitrària amb expressió:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

- Aleshores, el producte AM és:

$$AM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}m_{11} + a_{12}m_{21} & a_{11}m_{12} + a_{12}m_{22} \\ a_{21}m_{11} + a_{22}m_{21} & a_{21}m_{12} + a_{22}m_{22} \end{pmatrix}$$

  i el producte MA és:

$$MA = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}m_{11} + a_{21}m_{12} & a_{12}m_{11} + a_{22}m_{12} \\ a_{11}m_{21} + a_{21}m_{22} & a_{12}m_{21} + a_{22}m_{22} \end{pmatrix}.$$

- Ara imposem $AM = MA$ i ens queda la igualtat:

$$\begin{pmatrix} a_{11}m_{11} + a_{12}m_{21} & a_{11}m_{12} + a_{12}m_{22} \\ a_{21}m_{11} + a_{22}m_{21} & a_{21}m_{12} + a_{22}m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}m_{11} + a_{21}m_{12} & a_{12}m_{11} + a_{22}m_{12} \\ a_{11}m_{21} + a_{21}m_{22} & a_{12}m_{21} + a_{22}m_{22} \end{pmatrix}$$

  que dóna lloc al següent sistema d'equacions lineals on les incògnites són els coeficients de M:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}m_{11} + a_{12}m_{21} & = & a_{11}m_{11} + a_{21}m_{12} \\ a_{11}m_{12} + a_{12}m_{22} & = & a_{12}m_{11} + a_{22}m_{12} \\ a_{21}m_{11} + a_{22}m_{21} & = & a_{11}m_{21} + a_{21}m_{22} \\ a_{21}m_{12} + a_{22}m_{22} & = & a_{12}m_{21} + a_{22}m_{22} \end{array} \right.$$

  és a dir, tenim el següent sistema homogeni:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a_{21}m_{12} + a_{12}m_{21} & = & 0 \\ -a_{12}m_{11} + (a_{11} - a_{22})m_{12} + a_{12}m_{22} & = & 0 \\ a_{21}m_{11} + (a_{22} - a_{11})m_{21} - a_{21}m_{22} & = & 0 \\ a_{21}m_{12} - a_{12}m_{21} & = & 0 \end{array} \right.$$

  que es pot escriure en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Anomenem B a la matriu d'aquest sistema.

- Observem que el subespai $F_2(A)$ té dimensió $\dim F_2(A) = 4 - \operatorname{rang}(B)$. Per tant, hem de calcular el rang de la matriu B.

- Atès que només ens interessa el rang de la matriu del sistema B, i no pas solucionar el sistema pròpiament, podem fer operacions per files i columnes a la matriu B. Observem que la quarta fila és un múltiple de la primera, i anàlogament amb la quarta i primera columnes. És a dir, podem fer la següent reducció:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  on l'únic pas que hem fet ha estat eliminar la quarta fila i la quarta columna per ser múltiples d'una altra fila i columna, respectivament. Observem que $\operatorname{rang}(B) \leq 3$, ja que tenim almenys una fila o columna de zeros en aquesta transformada de B. Ara bé, si calculem el determinant de l'únic menor 3×3 que no té una fila o columna de zeros, ens queda:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11}-a_{22} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22}-a_{11} \end{vmatrix} = (-1)(-a_{21}) \begin{vmatrix} -a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22}-a_{11} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} -a_{12} & a_{11}-a_{22} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= a_{21}(-a_{12}(a_{22}-a_{11}) - 0) + a_{12}(0 - a_{21}(a_{11}-a_{22}))$$
$$= a_{21}a_{12}(a_{11}-a_{22}) - a_{12}a_{21}(a_{11}-a_{22}) = 0.$$

Per tant, la matriu B té tots els seus menors 3×3 iguals a 0, de manera que el seu rang és menor o igual a 2. De fet, observem que el seu rang no pot ser mai exactament 1, ja que no es poden anul·lar simultàniament dues files sense que s'anul·li també la tercera.

- Per tant, tenim:

$$\mathrm{rang}(B) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{12} = a_{21} = 0 \text{ i } a_{11} = a_{22} \ (\Leftrightarrow \text{la matriu } A \text{ és escalar}) \\ 2, & \text{altrament } (\Leftrightarrow \text{la matriu } A \text{ no és escalar}) \end{cases}$$

d'on com que $\dim F_2(A) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \mathrm{rang}(B) = 4 - \mathrm{rang}(B)$, en deduïm:

$$\dim F_2(A) = \begin{cases} 4, & \text{si } A \text{ és escalar} \\ 2, & \text{si } A \text{ no és escalar} \end{cases}$$

- **Comentari.** L'equivalència "$\dim F_2(A) = 4 \Leftrightarrow A$ és escalar" s'interpreta de la següent manera: les matrius escalars de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ són les úniques matrius de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que commuten (amb el producte) amb totes les matrius de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Resolució (c)

- Per a la resolució d'aquest apartat usarem el següent lema que hem introduït en la resolució del problema de la pàgina 51 (vegeu allà alguns comentaris respecte aquest resultat).

  - **Lema.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Si $F_1, F_2 \subseteq E$ són dos subespais vectorials de dimensió finita tals que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $F_1 = F_2$ si i només si $\dim F_1 = \dim F_2$.*

- A continuació detallem dues maneres diferents de resoldre aquest apartat.

- **Resolució I**

  Volem demostrar que es té la igualtat $F_1(A) = F_2(A)$ si i només si A no és una matriu escalar. En aquesta resolució el que farem és demostrar per separat les dues implicacions de l'equivalència.

  Primer anem a veure que si A no és una matriu escalar aleshores es té la igualtat de subespais $F_1(A) = F_2(A)$. Per tant, suposem que A no és una matriu escalar. En aquesta situació, els apartats anteriors ens asseguren que $\dim F_1(A) = \dim F_2(A) = 2$. Per tant, pel lema només ens falta veure o bé que $F_1(A) \subseteq F_2(A)$ o bé que $F_1(A) \supseteq F_2(A)$ per tenir la igualtat de subespais. Ara bé, és obvi que $F_1(A) \subseteq F_2(A)$, ja que tota matriu potència de A commuta amb A. És a dir, es té que:

$$A^k \cdot A = A^{k+1} = A \cdot A^k$$

per a tot $k \geq 0$, on $A^0 = \mathrm{Id}$. Per tant tenim la inclusió $F_1(A) \subseteq F_2(A)$, i per la igualtat de dimensió es té també la igualtat de subespais $F_1(A) = F_2(A)$.

Ara anem a veure que si tenim la igualtat de subespais $F_1(A) = F_2(A)$ aleshores la matriu A no és una matriu escalar. Ho demostrarem per reducció a l'absurd. Suposem, per a una contradicció, que A és una matriu escalar. Aleshores, per l'apartat (a) el subespai $F_1(A)$ té dimensió 1 i per l'apartat (b) el subespai $F_2(A)$ té dimensió 4. Però això entra en contradicció amb la nostra hipòtesi inicial, $F_1(A) = F_2(A)$, ja que dos subespais vectorials de dimensions diferents no poden ser mai iguals. Per tant, hem arribat a contradicció, de manera que A no pot ser una matriu escalar.

- Resolució II

Una manera alternativa de procedir és usar el lema per demostrar directament la doble implicació. Observem que, independentment de si la matriu A és una matriu escalar o no, sempre tenim la inclusió de subespais $F_1(A) \subseteq F_2(A)$. Per tant:

$$\begin{aligned} F_1(A) = F_2(A) &\overset{(1)}{\iff} \dim F_1(A) = \dim F_2(A) \\ &\overset{(2)}{\iff} \dim F_1(A) = \dim F_2(A) = 2 \\ &\overset{(3)}{\iff} A \text{ no és escalar} \end{aligned}$$

on en (1) hem aplicat el lema i en (2) i (3) hem aplicat els apartats (a) i (b).

- 7.

En $\mathbb{R}^6$, agafem sis vectors $v_1, \ldots, v_6$ linealment independents i considerem els subespais $F = \langle v_1, v_2 \rangle$, $G = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$, $H = \langle v_6, v_1 + v_3 + v_6 \rangle$. Calculeu la dimensió i una base dels subespais $(F+G)/H$, $(F/H) + (G/H)$, $(F \cap G)/H$ i $(F/H) \cap (G/H)$ de l'espai quocient $\mathbb{R}^6/H$. Són F i G subespais complementaris? Són F/H i G/H subespais complementaris?

Solució

Les dimensions valen $\dim(F+G)/H = \dim((F/H) + (G/H)) = 4$, $\dim(F \cap G)/H = 0$, i $\dim((F/H) \cap (G/H)) = 1$. El conjunt $\{[v_1], [v_2], [v_4], [v_5]\}$ és una base del subespai vectorial $(F+G)/H = (F/H) + (G/H) = \mathbb{R}^6/H$, i el conjunt $\{[v_3]\}$ és una base de $(F/H) \cap (G/H)$. Els subespais F i G no són complementaris ja que $\mathbb{R}^6 \neq F + G$. Els subespais F/H i G/H no són complementaris ja que $(F/H) \cap (G/H) \neq \{[0]\}$.

Resolució

- Observem en primer lloc que com que els vectors $v_1, \ldots, v_6$ són linealment independents en $\mathbb{R}^6$ també en són una base. D'altra banda recordem que donats n vectors linealment independents, qualsevol tria de $r \leq n$ vectors d'aquesta col·lecció també són linealment independents. D'aquí es dedueix que:

$$\dim F = \dim\langle v_1, v_2 \rangle = 2$$
$$\dim G = \dim\langle v_3, v_4, v_5 \rangle = 3$$

  i, a més, tenim que:

$$\dim H = \dim\langle v_6, v_1 + v_3 + v_6 \rangle = 2.$$

  Això últim es pot comprovar fàcilment prenent les coordenades de v_6 i $v_1 + v_3 + v_6$ en la base $\{v_1, \ldots, v_6\}$ de $\mathbb{R}^6$ (que són $v_6 = (0,0,0,0,0,1)$ i $v_1 + v_3 + v_6 = (1,0,1,0,0,1)$), i calculant el rang de la matriu $(v_6 \mid v_1 + v_3 + v_6)$ dels "vectors en columna".

- També és interessant observar el següent fet que farem servir més endavant. Com que v_6 és un element de H, aleshores es té:

$$v_1 + v_3 = (v_1 + v_3 + v_6) - v_6 \in \langle v_6, v_1 + v_3 + v_6 \rangle$$
$$v_1 + v_3 + v_6 = (v_1 + v_3) + v_6 \in \langle v_6, v_1 + v_3 \rangle$$

  i per tant $H = \langle v_6, v_1 + v_3 + v_6 \rangle = \langle v_6, v_1 + v_3 \rangle$.

- Per calcular les dimensions i les bases dels subespais vectorials que ens demanen, usarem els següents resultats vists a classe de teoria:

- **Lema 1.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F \subseteq E$ un subespai vectorial. Aleshores:*
  (i) *Si $G \subseteq E$, aleshores $G/F = (G+F)/F$.*
  (ii) *Si $G_1, G_2 \subseteq E$, aleshores $G_1/F = G_2/F \Longleftrightarrow G_1 + F = G_2 + F$.*

- **Lema 2.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F \subseteq E$ un subespai. Si $v_1, \ldots, v_r \in E$, aleshores $[v_1], \ldots, [v_r]$ són linealment independents en E/F si i només si $v_1, \ldots, v_r$ són linealment independents en E i $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \cap F = \{0\}$.*

- **Lema 3.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F \subseteq E$ un subespai. Si $G = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ és un subespai vectorial, aleshores $G/F = \langle [v_1], \ldots, [v_r] \rangle$.*

  Observació. Aquest últim resultat només assegura que l'espai vectorial quocient d'un espai vectorial està generat per les classes d'equivalència d'un sistema de generadors de l'espai original. Tanmateix, la condició d'independència lineal es pot perdre en el quocient, tal i com es posa de manifest en el lema 2.

- **Dimensió del quocient de subespais vectorials.** *Siguin $F_1, F_2 \subseteq E$ subespais vectorials d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita. Aleshores,* $\dim F_2/F_1 = \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1 + F_2) - \dim F_1$.

- **Fórmula de Grassmann.** *Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F_1, F_2 \subseteq E$ subespais vectorials de dimensió finita. Aleshores,* $\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

- Abans de passar al càlcul de les dimensions i de les bases que ens demanen, fem un parell de comentaris sobre l'espai quocient $\mathbb{R}^6/H$. Observem en primer lloc que:

$$\dim \mathbb{R}^6/H = \dim \mathbb{R}^6 - \dim H = 6 - 2 = 4.$$

Com que estem fent quocient per H, en l'espai quocient $\mathbb{R}^6/H$ tenim les següents relacions:

$$[v_6] = [0]$$
$$[v_1 + v_3] = [0], \text{ i per tant } [v_1] + [v_3] = [0], \text{ d'on } [v_1] = -[v_3].$$

D'altra banda, com que $\mathbb{R}^6 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \rangle$, en el quocient es té:

$$\mathbb{R}^6/H = \langle [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], [v_6] \rangle$$

pel lema 3. Ara bé, observem que això és només un sistema de generadors, i no pas una base. Tenint en compte les dues relacions que tenim en $\mathbb{R}^6/H$, i tenint en compte que $\dim \mathbb{R}^6/H = 4$, en deduïm que els conjunts de vectors $\{[v_1], [v_2], [v_4], [v_5]\}$ i $\{[v_2], [v_3], [v_4], [v_5]\}$ són dues bases de l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^6/H$. (Observeu que pel lema 2 és equivalent dir que els conjunts de vectors $\{[v_1], [v_2], [v_4], [v_5]\}$ i $\{[v_2], [v_3], [v_4], [v_5]\}$ són dues bases de l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^6/H$, a dir que els subespais vectorials $\langle v_1, v_2, v_4, v_5 \rangle$ i $\langle v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ són dos subespais complementaris del subespai H en $\mathbb{R}^6$).

- Passem ara al càlcul de la dimensió i de les bases dels subespais que ens demanen.

- *Base i dimensió del subespai $(F+G)/H$.*

Observem que, pel lema $1(i)$, es té la igualtat $(F+G)/H = (F+G+H)/H$. Si calculem, el subespai $F+G+H$ és

$$F + G + H = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1 + v_3\rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\rangle = \mathbb{R}^6.$$

Per tant, tenim $(F + G)/H = (F + G + H)/H = \mathbb{R}^6/H$, i per tant es té que $\dim(F + G)/H = \dim \mathbb{R}^6/H = 4$ i que una base de $(F + G)/H$ és una base de $\mathbb{R}^6/H$, és a dir, $\{[v_1], [v_2], [v_4], [v_5]\}$ o bé $\{[v_2], [v_3], [v_4], [v_5]\}$.

- *Base i dimensió del subespai* $(F \cap G)/H$.

Aquest apartat és més senzill, ja que com que $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ són linealment independents podem afirmar directament que:

$$F \cap G = \langle v_1, v_2\rangle \cap \langle v_3, v_4, v_5\rangle = \{0\}$$

i, per tant, $(F \cap G) + H = H$. Aleshores, aplicant la fórmula de les dimensions amb $F_1 = H$ i $F_2 = F \cap G$, es té que $\dim((F \cap G)/H) = \dim((F \cap G) + H) - \dim H = \dim H - \dim H = 0$ i, per tant, en deduïm que $(F \cap G)/H = \{[0]\}$.

- *Base i dimensió del subespai* $(F/H) + (G/H)$ *i del subespai* $(F/H) \cap (G/H)$.

Per a fer això necessitarem les dimensions dels subespais F/H i G/H. Calcularem cadascuna d'aquestes dimensions de manera diferent.

Per a F/H, com que $F = \langle v_1, v_2\rangle$, pel lema 3 tenim que $F/H = \langle [v_1], [v_2]\rangle$. D'altra banda, observem que el subespai suma $F + H$ és $F + H = \langle v_1, v_2, v_6, v_1 + v_3 + v_6\rangle = \langle v_1, v_2, v_6, v_3\rangle$ d'on es dedueix que $\dim(F + H) = 4$. Per tant, aplicant la fórmula de les dimensions amb $F_1 = H$ i $F_2 = F$, es té que $\dim F/H = \dim(F + H) - \dim H = 4 - 2 = 2$. Per tant, com que $F/H = \langle [v_1], [v_2]\rangle$ i $\dim F/H = 2$, en deduïm que $\{[v_1], [v_2]\}$ és una base de F/H.

Amb G/H procedirem de manera alternativa. Com que $G = \langle v_3, v_4, v_5\rangle$, pel lema 3 tenim $G/H = \langle [v_3], [v_4], [v_5]\rangle$. Apliquem ara el lema 2, d'on es té que $[v_3], [v_4], [v_5]$ són linealment independents en l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^6/H$ si i només si els vectors v_3, v_4, v_5 són linealment independents en $\mathbb{R}^6$ i, a més, $\langle v_3, v_4, v_5\rangle \cap H = \{0\}$. Sabem, per hipòtesi del problema, que els vectors v_3, v_4, v_5 són linealment independents, de manera que només ens falta comprovar si la intersecció del subespai que generen aquests vectors amb el subespai H és nul·la. Si ho escrivim resulta que $\langle v_3, v_4, v_5\rangle \cap H = \langle v_3, v_4, v_5\rangle \cap \langle v_6, v_1 + v_3\rangle = \{0\}$ perquè $v_1, \dots, v_6$ són linealment independents. Per tant, $\dim G/H = 3$ i $\{[v_3], [v_4], [v_5]\}$ és una base.

Anem a calcular ara una base i la dimensió del subespai suma $(F/H) + (G/H)$ i del subespai intersecció $(F/H) \cap (G/H)$.

Usant la fórmula de Grassmann amb $F_1 = F/H$ i $F_2 = G/H$, tenim

$$\begin{aligned}\dim((F/H) + (G/H)) &= \dim F/H + \dim G/H - \dim((F/H) \cap (G/H))\\ &= 2 + 3 - \dim((F/H) \cap (G/H))\\ &= 5 - \dim((F/H) \cap (G/H)).\end{aligned}$$

Recordem que $\dim \mathbb{R}^6/H = 4$, d'on es dedueix que $\dim((F/H) + (G/H)) \leq 4$ i, en conseqüència, $\dim((F/H) \cap (G/H)) \geq 1$. Per determinar aquestes dimensions, usem les bases de F/H i G/H que ja hem calculat. Com que $F/H = \langle [v_1], [v_2]\rangle$ i $G/H = \langle [v_3], [v_4], [v_5]\rangle$, per tant:

$$(F/H) + (G/H) = \langle [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5]\rangle.$$

Ara bé, recordem que en l'espai quocient hi tenim dues relacions: $[v_6] = [0]$ i $[v_1] = -[v_3]$. Per tant, podem eliminar $[v_3]$ o $[v_1]$ del sistema de generadors i ens queda, respectivament:

$$(F/H) + (G/H) = \langle [v_1], [v_2], [v_4], [v_5] \rangle = \langle [v_2], [v_3], [v_4], [v_5] \rangle = \mathbb{R}^6/H.$$

Amb això hem obtingut un sistema de quatre generadors linealment independents, ja que són base de $\mathbb{R}^6/H$. Per tant, hem trobat una base de $(F/H) + (G/H)$, i en podem deduir que $\dim((F/H) + (G/H)) = 4$. En conseqüència, $\dim((F/H) \cap (G/H)) = 1$, i una base és $\{[v_3]\}$ o $\{[v_1]\}$ de manera que ens queda:

$$(F/H) \cap (G/H) = \langle [v_1] \rangle = \langle [v_3] \rangle.$$

- Passem ara a les dues últimes preguntes de l'enunciat.

- *Són F i G subespais complementaris?*

  Els subespais vectorial F i G no són subespais complementaris de $\mathbb{R}^6$ perquè $\dim(F + G) = 5 < 6 = \dim \mathbb{R}^6$ i per tant $\mathbb{R}^6 \neq F + G$. Observem, però, que sí que és cert que la suma $F + G$ és directa ja que $F \cap G = \{0\}$.

- *Són F/H i G/H subespais complementaris?*

  En el quocient sí que és cert que $\mathbb{R}^6/H = (F/H) + (G/H)$, però com que $\dim((F/H) \cap (G/H)) = 1 \neq 0$, per tant $(F/H) \cap (G/H) \neq \{[0]\}$, (la suma $(F/H) + (G/H)$ no és directa). Així, els subespais F/H i G/H no són subespais complementaris de $\mathbb{R}^6/H$.

- **Comentari.** L'objectiu d'aquest problema és donar un exemple més concret del que està escrit en els apunts: algunes propietats dels subespais vectorials es "perden" i d'altres es "conserven" en passar al quocient. En particular, el quocient de la suma de subespais és la suma de subespais en el quocient, però en general no és així amb les interseccions. Això implica que la propietat de subespais complementaris en general no es conserva.

- 8.

Considerem les famílies de vectors $B_1 = \{(1,-1,0),(2,1,3)\}$ i $B_2 = \{(1,5,6),(1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Demostreu que el subespai vectorial generat per la família de vectors B_1 coincideix amb el subespai vectorial que genera la família B_2. Notem per F aquest subespai.

(b) Trobeu, en l'espai vectorial F, la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2. Determineu les coordenades de $(-5,-7,-12) \in F$ en la base B_1 i en la base B_2.

(c) Sigui $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespai complementari de F. Demostreu que els conjunts $[B_1] = \{[(1,-1,0)],[(2,1,3)]\}$ i $[B_2] = \{[(1,5,6)],[(1,2,3)]\}$ són dos bases de $\mathbb{R}^3/H$.

(d) Trobeu, en l'espai $\mathbb{R}^3/H$, la matriu de canvi de base de la base $[B_1]$ a la base $[B_2]$. Determineu les coordenades de $[(-5,-7,-12)] \in \mathbb{R}^3/H$ en la base $[B_1]$ i en la base $[B_2]$.

Solució

(a) —

(b) $M(B_1 \to B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Coordenades: $(-5,-7,-12) = (3,-4)_{B_1} = (1,-6)_{B_2}$.

(c) —

(d) $M([B_1] \to [B_2]) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Coordenades: $[(-5,-7,-12)] = (3,-4)_{[B_1]} = (1,-6)_{[B_2]}$.

Resolució (a)

- Al llarg de tot l'exercici denotarem $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (2,1,3)$, $v_1 = (1,5,6)$ i $v_2 = (1,2,3)$.
- Amb aquesta notació, vegem en primer lloc quina dimensió tenen el subespai generat per $B_1 = \{u_1,u_2\}$ i el subespai generat per $B_2 = \{v_1,v_2\}$. Per fer-ho, procedirem com és habitual: posarem els vectors de cada un d'aquests conjunts per columnes i calcularem el rang de les matrius que així obtenim.
- Per al conjunt de vectors B_1, el rang de la matriu que ens determinen el calculem esglaonant la matriu per files. Concretament fem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on

$$(1): \text{fila } 2 = \text{fila } 2 + \text{fila } 1,$$
$$(2): \text{fila } 3 = \text{fila } 3 - \text{fila } 2.$$

Per tant, la matriu té rang 2, i en conseqüència el subespai vectorial $\langle B_1 \rangle$ té dimensió 2.

- Per al conjunt de vectors B_2 procedirem de manera alternativa. Una caracterització alternativa del rang d'una matriu és que el rang és el màxim natural r per al qual existeix un menor no nul d'ordre r. És a dir, si $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és una matriu d'ordre $m \times n$ amb coeficients en un cos commutatiu $\mathbb{K}$ aleshores, el rang de la matriu C és el màxim natural r per al qual existeix una submatriu quadrada C' de C d'ordre r amb determinant $\det(C') \neq 0$.

  En el nostre cas concret, tenim la següent matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Com que la matriu és 3×2, no tenim cap menor d'ordre 3. Per tant, hem de començar per un menor d'ordre 2. Considerem el menor format per les dues primeres files:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 2 - 5 = -3 \neq 0.$$

  Ja hem trobat un menor no nul d'ordre 2, d'on en deduïm que el rang de la matriu és 2, és a dir, el subespai vectorial $\langle B_2 \rangle$ té dimensió 2.

- **Comentari.** Aquest mètode per determinar el rang mitjançant els menors de la matriu és, en general, poc eficient. En aquest cas el podíem aplicar perquè només havíem de calcular tres determinants d'ordre 2, però en cas que la dimensió fos més gran, el nombre de determinants a calcular creix molt ràpidament (així com el seu ordre).

- Pel que hem fet fins ara sabem que els dos subespais $\langle B_1 \rangle$ i $\langle B_2 \rangle$ tenen la mateixa dimensió. Per veure que són el mateix subespai n'hi ha prou amb comprovar, o bé que $\langle B_1 \rangle \subseteq \langle B_2 \rangle$, o bé que $\langle B_1 \rangle \supseteq \langle B_2 \rangle$ (en general cal comprovar les dues inclusions, però per la igualtat de dimensions una de les inclusions implica automàticament l'altra).

- Anem a demostrar que $\langle B_1 \rangle \subseteq \langle B_2 \rangle$. Per a això el que hem de veure és que podem escriure els vectors de B_1 com combinació lineal dels vectors de B_2. És a dir, volem:

$$(1, -1, 0) = \lambda_1(1, 5, 6) + \lambda_2(1, 2, 3)$$
$$(2, 1, 3) = \mu_1(1, 5, 6) + \mu_2(1, 2, 3)$$

  per a certs valors $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Això ens dóna dos sistemes d'equacions lineals que, escrits en forma matricial, són els següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- *Observació.* Per veure que $\langle B_1 \rangle \subseteq \langle B_2 \rangle$ no és necessari trobar la solució explícita dels sistemes: només cal veure que són compatibles. En aquest exercici, però, calcularem la solució explícita, ja que la necessitarem en l'apartat següent.

- Anomenem $A = (v_1 \mid v_2)$ a la matriu dels dos sistemes:

$$A = (v_1 \mid v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, les matrius ampliades d'ambdós sistemes són:

$$(A \mid u_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$
$$(A \mid u_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

les quals podem esglaonar fàcilment mitjançant les mateixes operacions

$$(A \mid u_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$(A \mid u_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

on

$$(1) : \begin{cases} \text{fila } 2 = \text{fila } 2 - 5 \times \text{fila } 1, \\ \text{fila } 3 = \text{fila } 3 - 6 \times \text{fila } 1, \end{cases}$$
$$(2) : \begin{cases} \text{fila } 3 = \text{fila } 3 - \text{fila } 2. \end{cases}$$

- Per tant, els sistemes lineals que ens queden són:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ -3\lambda_2 &= -6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 &= 2 \\ -3\mu_2 &= -9 \end{cases}$$

En cadascun tenim una equació que es resol directament: $\lambda_2 = 2$, $\mu_2 = 3$, i per tant la solució del sistema és $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 3$.

- Amb això ens queda:

$$(1, -1, 0) = -1(1, 5, 6) + 2(1, 2, 3) = -v_1 + 2v_2$$
$$(2, 1, 3) = -1(1, 5, 6) + 3(1, 2, 3) = -v_1 + 3v_2$$

i per tant, els vectors de B_1 són combinació lineal dels vectors de B_2, d'on es dedueix que $\langle B_1 \rangle \subseteq \langle B_2 \rangle$ i, per la igualtat de dimensions, es dedueix la igualtat de subespais $\langle B_1 \rangle = \langle B_2 \rangle = F$.

- **Observació.** També podríem haver escrit els vectors de B_2 com combinació lineal dels vectors de B_1. De fet, en aquest cas, resulta més senzill fer-ho així atès que un dels vectors de B_1 té un 0 en una component, i això facilita enormement el càlcul (ja que en aquella coordenada només hi contribueix l'altre vector, i es determina immediatament el coeficient). Tanmateix, atès que en el proper apartat ens demanen una matriu de canvi de base, hem preferit fer-ho en aquest altre sentit per estalviar-nos repetir càlculs.

Resolució (b)

- Observem en primer lloc que com que l'espai vectorial F té dimensió 2, qualsevol matriu de canvi de base en F serà una matriu quadrada 2×2. Aquest fet, a priori, pot semblar contradictori, ja que l'espai vectorial F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ que ens ve donat per un cert nombre de vectors que tenen tres components. Tanmateix, és important no perdre de vista el que estem fent: F, vist com a espai vectorial per si mateix[9], té dimensió 2 i, per tant, tots els vectors que conté tenen dues coordenades en qualsevol base de F que prenguem. Aquest fet és independent de si l'espai vectorial que considerem (en aquest cas, F) és subespai d'un espai vectorial de major dimensió (en aquest cas, $E = \mathbb{R}^3$): el que compta quan calculem una matriu de canvi de base és la dimensió de l'espai on fem el canvi de base.

- Després d'aquesta breu discussió que, esperem, hagi aclarit el perquè la matriu que calcularem serà 2×2 enlloc de 3×3 o 3×2 (que seria el més esperable i intuïtiu[10]), passem al càlcul de la matriu pròpiament.

- Per calcular la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2 necessitem les coordenades dels vectors de la base B_1 escrits en la base B_2, és a dir, hem d'escriure els vectors de B_1 com combinació lineal dels vectors de B_2. Però això ja ho hem fet en l'apartat anterior, i hem trobat:

$$\begin{aligned}(1,-1,0) &= -1(1,5,6) + 2(1,2,3)\\ (2,1,3) &= -1(1,5,6) + 3(1,2,3)\end{aligned}$$

  Per tant, tenim:

$$\begin{aligned}u_1 &= -1v_1 + 2v_2 = (-1,2)_{B_2}\\ u_2 &= -1v_1 + 3v_2 = (-1,3)_{B_2}\end{aligned}$$

  i aquestes són les coordenades dels vectors de B_1 escrits en la base B_2.

- Amb això, la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2 és la matriu:

$$M(B_1 \to B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Considerem ara el vector $w = (-5,-7,-12)$, i en volem determinar les seves coordenades en la base B_1 i en la base B_2.

- Comencem per calcular les coordenades de w en la base B_1. Volem:

$$(-5,-7,-12) = \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda(1,-1,0) + \mu(2,1,3).$$

  Si ho escrivim com a sistema d'equacions, es té:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + 2\mu &=& -5\\ -\lambda + \mu &=& -7\\ 3\mu &=& -12\end{array}\right.$$

[9] Recordeu que si tenim un subespai vectorial F d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E, aleshores F també és un $\mathbb{K}$-espai vectorial (sobre el mateix cos).

[10] Per descartar el cas 3×2 (que és el cas en què pensem en la matriu $A = (v_1 \mid v_2)$), recordeu que una matriu de canvi de base sempre és una matriu invertible i, per tant, quadrada, ja que si tenim un canvi de base en un sentit hem de tenir el canvi de base en sentit contrari, que és el canvi donat per la matriu inversa. En termes d'aplicacions lineals, un canvi de base en un $\mathbb{K}$-espai vectorial E és un endomorfisme bijectiu (de fet és la identitat).

És a dir, λ i μ són les solucions del sistema complet que té per matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -12 \end{array}\right).$$

Per resoldre aquest sistema podem fer servir qualsevol mètode de resolució de sistemes lineals (no quadrats) que coneguem. En aquest cas, però, tornem al sistema d'equacions que teníem i fixem-nos que la darrera equació només depèn de μ, i per tant es resol directament: $\mu = -12/3 = -4$. Substituint en les altres dues equacions, ens queda:

$$\left\{\begin{array}{rcr} -5 & = & \lambda - 8 \\ -7 & = & -\lambda - 4 \end{array}\right.$$

les quals ens donen ambdues la solució $\lambda = 3$. Per tant, tenim:

$$w = (-5, -7, -12) = 3(1, -1, 0) - 4(2, 1, 3) = 3u_1 - 4u_2 = (3, -4)_{B_1}.$$

- Per trobar les coordenades de w en la base B_2, podem aplicar el mateix procediment o podem aprofitar que hem calculat la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2. Usarem aquest segon mètode i deixem al lector buscar les coordenades de manera anàloga a com ho acabem de fer per comprovar que el resultat coincideix. Recordem que la matriu de canvi de base és:

$$M(B_1 \to B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si denotem per P aquesta matriu, aleshores les coordenades del vector w en la base B_2 es poden calcular fent el següent:

$$w_{B_2} = Pw_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Per tant tenim:

$$w = (1, -6)_{B_2}.$$

- Amb això hem trobat les coordenades de w en les bases que ens demanaven:

$$w = (-5, -7, -12) = (3, -4)_{B_1} = (1, -6)_{B_2}.$$

Resolució (c)

- Recordem que per determinar una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^3/H$, hem de prendre una base del subespai H i completar-la a una base de l'espai total $\mathbb{R}^3$. Aleshores, les classes d'equivalència dels vectors amb els quals hem completat la base de H a una base de $\mathbb{R}^3$ formen una base de l'espai quocient.

- En el nostre cas, observem que H té dimensió 1, ja que en ser un subespai complementari de F es té $\dim H = \dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 3 - 2 = 1$. Per tant, les seves bases tindran un sol element. Sigui $w_0 \in E$ tal que $H = \langle w_0 \rangle$. A més, com que H és un subespai complementari de F, els conjunts B_1 i B_2 completen la base de H a una base de $\mathbb{R}^3$. En altres paraules, els conjunts de vectors $\{w_0\} \cup B_1 = \{w_0, u_1, u_2\}$ i $\{w_0\} \cup B_2 = \{w_0, v_1, v_2\}$ són dues bases de $\mathbb{R}^3$.

- Per tant, pel que hem comentat al principi d'aquest apartat, les classes d'equivalència dels vectors amb els quals completem la base de H a una base de l'espai total formen una base de $\mathbb{R}^3/H$, és a dir, els conjunts:

$$[B_1] = \{[u_1], [u_2]\} = \{[(1,-1,0)], [(2,1,3)]\}$$
$$[B_2] = \{[v_1], [v_2]\} = \{[(1,5,6)], [(1,2,3)]\}$$

  són dues bases de $\mathbb{R}^3/H$.

- Observem que com que H és un subespai complementari de F aleshores $\mathbb{R}^3/H = (F+H)/H$. Per tant es té que $\mathbb{R}^3/H = F/H$.

Resolució (d)

- Per l'apartat anterior sabem que els conjunts de vectors $[B_1]$ i $[B_2]$ són dues bases de l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^3/H = F/H$. A més recordem que en l'apartat (*b*) hem vist que els conjunts de vectors B_1 i B_2 (sense classes d'equivalència) són dues bases de F, i també hem vist que la matriu de canvi de base de la base B_1 de F a la base B_2 de F (sense classes d'equivalència) és la matriu:

$$M(B_1 \to B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Per tant, com que $\mathbb{R}^3/H = F/H$, aleshores la matriu de canvi de base en l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^3/H$ serà la mateixa, ja que podem prendre els mateixos representants en la classe d'equivalència per calcular-la. És a dir, com que:

$$\begin{cases} u_1 = -v_1 + 2v_2 \\ u_2 = -v_1 + 3v_2 \end{cases}$$

  tenim que:

$$\begin{cases} [u_1] = [-v_1 + 2v_2] = -[v_1] + 2[v_2] = (-1,2)_{[B_1]} \\ [u_2] = [-v_1 + 3v_2] = -[v_1] + 3[v_2] = (-1,3)_{[B_1]} \end{cases}$$

  d'on es té que:

$$M([B_1] \to [B_2]) = M(B_1 \to B_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Amb un raonament anàleg, per determinar les coordenades del vector $[w] = [(-5,-7,-12)]$ en les dues bases n'hi ha prou amb prendre les classes d'equivalència de les coordenades que hem calculat per al vector $w = (-5,-7,-12)$ en l'apartat (*b*). En particular:

$$[w] = [(-5,-7,-12)] = \begin{cases} [(3,-4)_{B_1}] = [3u_1 - 4u_2] = 3[u_1] - 4[u_2] = (3,-4)_{[B_1]}. \\ [(1,-6)_{B_2}] = [1v_1 - 6v_2] = 1[v_1] - 6[v_2] = (1,-6)_{[B_2]}. \end{cases}$$

- 9.

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y) = (x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y)$. Per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ es té que $\operatorname{Ker} f = \langle (1, -1) \rangle$? Quan $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y = 0\}$?

Solució

Per a $\alpha = 1$. Per a $\alpha = -1$.

Resolució

- Abans de passar a la resolució d'aquest problema anem a fer uns breus comentaris relatius a les diferents maneres de donar una aplicació lineal: de manera explícita, per l'acció sobre una base, i de manera matricial. Aquests comentaris no són necessàris per a la resolució d'aquest exercici, però sí que són importants per a una bona comprensió del tema d'aplicacions lineals.

  - *Comentari 1.* Sigui $h : E_1 \to E_2$ una aplicació $\mathbb{K}$-lineal entre dos $\mathbb{K}$-espais vectorials E_1 i E_2. Es diu que l'aplicació lineal h està definida de manera explícita si ens donen l'acció de h sobre un element genèric v de l'espai vectorial E_1. Per exemple, l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ d'aquest exercici la tenim donada de forma explícita ja que ens donen l'acció de f sobre un element genèric (x, y) de $\mathbb{R}^2$, acció que en aquest cas és $f(x, y) = (x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y)$.

  - *Comentari 2.* Recordeu, però, que de la linealitat es dedueix que qualsevol aplicació lineal queda unívocament determinada per la seva acció sobre els elements d'una base. Per tant, únicament ens cal conèixer el valor de h sobre els elements d'una base de l'espai E_1. És a dir, si coneixem $\{h(v_i)\}_i$ on $\{v_i\}_i$ és una base de E_1, aleshores podem determinar el valor de $h(v)$ per a tot $v \in E_1$. Per exemple, l'aplicació lineal f d'aquest exercici ens queda determinada pel valor de $f(1, 0)$ i de $f(0, 1)$, que són $f(1, 0) = (1, 1, 1)$ i $f(0, 1) = (\alpha^2, 1, \alpha)$, ja que per a un element arbitrari (x, y) de $\mathbb{R}^2$, com que $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, aleshores de la linealitat de l'aplicació f tindrem que $f(x, y) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = x(1, 1, 1) + y(\alpha^2, 1, \alpha) = (x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y)$.

  - *Comentari 3.* Ara recordeu que els elements d'un espai vectorial queden unívocament determinats per les seves coordenades en una base. Per tant, l'element $h(v_i)$ està unívocament determinat per les coordenades que té en una base $\{w_j\}_j$ de l'espai vectorial E_2. Així, si els espais E_1 i E_2 són de dimensió finita n i m respectivament, i si $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de E_1 i si $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ és una base de E_2, aleshores l'aplicació lineal h la tindrem unívocament determinada si coneixem les coordenades dels vectors $h(v_1), \dots, h(v_n)$ en la base $\{w_1, \dots, w_m\}$ de E_2. Per tant, l'aplicació lineal h està unívocament determinada per la matriu que "té per columnes les coordenades d'aquests vectors". Direm que aquesta matriu és la matriu de l'aplicació lineal h en la base B_1 de E_1 i en la base B_2 de E_2, i notarem $M(f; B_1, B_2)$. És a dir, $M(f; B_1, B_2)$ és la matriu

$$\text{“}M(f;B_1,B_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ h(v_1) & \dots & h(v_i) & \dots & h(v_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right)\text{”}$$

on en la i-èsima columna hi tenim escrites les coordenades del vector $h(v_i)$ en la base $\{w_1, \dots, w_m\}$, (observeu que aquesta matriu té tantes columnes com la dimensió de l'espai vectorial E_1 i té tantes files com la dimensió de l'espai E_2). Per exemple, per a l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ d'aquest exercici es té que $f(1,0) = (1,1,1)$ i $f(0,1) = (\alpha^2, 1, \alpha)$. Per tant, la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i de $\mathbb{R}^3$ és la matriu[11]

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Observeu que ara, amb aquesta matriu, podem calcular el valor de $f(x,y)$ ja que:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha^2 y \\ x + y \\ x + \alpha y \end{pmatrix}.$$

- Un cop fets aquests comentaris relatius a diferents maneres de donar una aplicació lineal, passem a la resolució del nostre problema.

- **Primera part**

- Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y) = (x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y)$.

- En aquesta primera part volem determinar per a quins valors del paràmetre real $\alpha \in \mathbb{R}$ l'aplicació lineal f té per nucli el subespai $\langle (1,-1) \rangle$.

- Recordem que si E_1 i E_2 són dos $\mathbb{K}$-espais vectorials, i si $h \colon E_1 \to E_2$ és una aplicació $\mathbb{K}$-lineal, aleshores el nucli de h, que notarem per $\operatorname{Ker} h$, és el subespai vectorial format pels elements de l'espai E_1 que tenen per imatge el 0 de l'espai E_2. És a dir, $\operatorname{Ker} h = \{u \in E_1 \,:\, h(u) = 0\}$.

- Per tant, el nucli de la nostra aplicació lineal f és el subespai:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + \alpha^2 y = x + y = x + \alpha y = 0\}. \end{aligned}$$

[11] Recordeu que podem ”identificar” els punts de $\mathbb{K}^n$ amb les seves coordenades en la base canònica de $\mathbb{K}^n$, (per a més detalls veure pàgina 32).

- Així, per determinar el nucli de f hem de resoldre el sistema homogeni:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+\alpha^2 y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \\ x+\alpha y & = & 0 \end{array}\right.$$

que matricialment es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir, per determinar els elements del nucli hem de resoldre el sistema homogeni que té per matriu associada la matriu de l'aplicació lineal. Observem, per tant, que la dimensió del nucli coincideix amb els graus de llibertat d'aquest sistema homogeni, és a dir es té la igualtat:

$$\dim \operatorname{Ker} f = 2 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- Ara, podem presentar tres maneres diferents de resoldre aquesta part de l'exercici.

1. Una primera manera de resoldre aquest apartat és calcular primer el subespai nucli de f (és a dir resoldre el sistema homogeni) i, un cop l'hem calculat, veure quan tenim la igualtat de subespais $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$. Observeu que el sistema que hem de resoldre depèn de paràmetres. Per tant, en principi, no sembla aconsellable seguir aquesta idea de resolució.

2. Com que volem la igualtat de subespais $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$, en particular volem que el nucli tingui dimensió 1. Per tant, de fet, només hem de calcular el subespai nucli en aquest cas. Així, una segona manera de resoldre aquest apartat és determinar per a quins valors de α el nucli té dimensió 1 (és a dir, per a quins valors el sistema homogeni té un grau de llibertat) i, un cop fet això, calcular el subespai nucli de f per a aquests valors i veure si tenim la igualtat $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$. Observeu que per determinar quan el nucli té dimensió 1 el que hem de fer és calcular el rang d'una matriu que depèn d'un paràmetre.

3. Ara bé, en aquest exercici realment no cal calcular el nucli, ja que el que volem és determinar per a quins valors de α es compleix la igualtat $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$. Per determinar aquests valors el primer que podem fer és imposar que $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$, és a dir imposar que $(1,-1) \in \operatorname{Ker} f$. Fent això obtindrem una condició necessària per al valor de α. Aleshores, per als valors de α que així haurem obtingut, el que haurem de fer és comprovar si la inclusió de subespais $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$ és o no és una igualtat.

- En el cas de l'aplicació lineal que aquí tenim no hi ha molta diferència en els tres mètodes de resolució. Ara bé, en altres situacions sí que algun dels mètodes pot ser molt més fàcil d'aplicar que els altres.

- En aquesta resolució pocedirem de la darrera manera que hem explicat i deixem com a exercici al lector fer la resolució de les altres dues maneres.

- Per tant, primer imposem que $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$.

  Com que $\operatorname{Ker} f$ és un subespai vectorial aleshores es té que, $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$ si i només si $(1,-1) \in \operatorname{Ker} f$. Per tant, $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$ si i només si $f(1,-1) = (0,0,0)$.

Calculant tenim que $f(1,-1) = (1-\alpha^2, 1-1, 1-\alpha) = (1-\alpha^2, 0, 1-\alpha)$.

Per tant, $f(1,-1) = (0,0,0)$ si i només si $(1-\alpha^2, 0, 1-\alpha) = (0,0,0)$. Ara aquesta igualtat la podem reescriure en forma de sistema de tres equacions amb una incògnita:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-\alpha^2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 1-\alpha & = & 0 \end{array}\right.$$

La primera equació ens dóna $\alpha^2 = 1$, mentre que la darrera equació ens fixa el signe, donant-nos $\alpha = 1$. Per últim, la segona equació és una identitat que ens assegura que el sistema té solució.

Per tant hem provat que tenim la inclusió $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$ si i només si $\alpha = 1$.

- Ara provem que si $\alpha = 1$ aleshores tenim la igualtat de subespais $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$.

  Això ho podem fer de dues maneres: o bé calculant explícitament el nucli, o bé mirant quina és la seva dimensió. Anem a fer-ho de les dues maneres:

  - Si calculem el nucli tenim que, per a $\alpha = 1$, el nucli de f és

    $$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+y, x+y, x+y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+y = 0\} \end{aligned}$$

    i per tant es té la igualtat $\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+y=0\} = \langle(1,-1)\rangle$.

  - Si calculem la dimensió del nucli tenim que per a $\alpha = 1$

    $$\dim \operatorname{Ker} f = 2 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

    i per tant tenim igualtat de dimensions $\dim \operatorname{Ker} f = \dim\langle(1,-1)\rangle = 1$, d'on podem concloure que la inclusió de subespais $\langle(1,-1)\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f$ esdevé una igualtat.

  Així hem demostrat que per a $\alpha = 1$ es té la igualtat de subespais $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$.

- Per tant, en conclusió, hem provat que $\operatorname{Ker} f = \langle(-1,1)\rangle$ si i només si $\alpha = 1$.

- **Segona part**

- Continuem amb l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y) = (x+\alpha^2 y, x+y, x+\alpha y)$.

- En aquesta part de l'exercici volem determinar per a quins valors del paràmetre real $\alpha \in \mathbb{R}$ l'aplicació lineal f té per imatge el subespai vectorial $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x-y=0\}$.

- Recordem que si E_1 i E_2 són dos $\mathbb{K}$-espais vectorials, i si $h \colon E_1 \to E_2$ és una aplicació $\mathbb{K}$-lineal, aleshores la imatge de h, que notarem per $\operatorname{Im} h$, és el subespai vectorial de E_2 format per les imatges dels vectors de E_1. És a dir, $\operatorname{Im} h = \{h(u) \,:\, u \in E_1\}$. La linealitat de l'aplicació ens permet demostrar que la imatge d'una base per una aplicació lineal és un sistema de generadors del subespai imatge[12]. Així, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base de l'espai vectorial E_1, aleshores podem afirmar que $\operatorname{Im} h = \langle h(e_1), \ldots, h(e_n)\rangle$.

- En el nostre cas, per tant, per calcular la imatge de l'aplicació lineal f agafem la base canònica $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ i, aleshores tindrem que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \langle f(e_1), f(e_2)\rangle \\ &= \langle f(1,0), f(0,1)\rangle \\ &= \langle (1,1,1), (\alpha^2, 1, \alpha)\rangle.\end{aligned}$$

Observem que la dimensió de la imatge és el rang de la matriu que té per columnes aquests dos vectors, i que precisament aquesta matriu és la matriu de l'aplicació lineal. És a dir:

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- Denotem per F el subespai $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0\}$.
- Volem determinar els valors de α per tal que $\operatorname{Im} f = F$.
- Comencem per veure quan $\operatorname{Im} f \subseteq F$.

Per una banda, com que $\operatorname{Im} f = \langle (1,1,1), (\alpha^2, 1, \alpha)\rangle$ aleshores, $\operatorname{Im} f \subseteq F$ si i només si $(1,1,1) \in F$ i $(\alpha^2, 1, \alpha) \in F$. Per l'altra, com que el subespai F està definit per una equació, aleshores, si volem veure que un vector pertany al subespai n'hi ha prou amb comprovar que el vector satisfà l'equació. Per tant, en el nostre cas, hem de determinar per a quins valors del paràmetre α els vectors $(1,1,1)$ i $(\alpha^2, 1, \alpha)$ satisfan l'equació que defineix F. Calculant tenim:

$$\begin{aligned}&(1,1,1) \in F \iff 1 - 1 = 0 \\ &(\alpha^2, 1, \alpha) \in F \iff \alpha^2 - 1 = 0\end{aligned}$$

Per tant $(1,1,1) \in F$ sense importar el valor de α, mentre que $(\alpha^2, 1, \alpha) \in F$ si i només si $\alpha^2 = 1$, és a dir, si i només si $\alpha = \pm 1$.

- Així de moment hem vist que $\operatorname{Im} f \subseteq F$ si i només si $\alpha = \pm 1$.
- Per acabar anem a determinar per a quins valors la inclusió $\operatorname{Im} f \subseteq F$ és una igualtat.

Com que estem en dimensió finita, la inclusió de subespais és una igualtat si i només si els dos subespais tenen la mateixa dimensió. Per tant hem de veure si per a $\alpha = \pm 1$ es té o no es té la igualtat de dimensions $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$. D'una banda el subespai F té dimensió 2, ja que és un subespai de $\mathbb{R}^3$ definit per una única equació i per tant la seva dimensió val $\dim F = 3 - 1 = 2$. D'altra banda, com que $\operatorname{Im} f = \langle (1,1,1), (\alpha^2, 1, \alpha)\rangle$, aleshores:

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 - 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si i només si } \alpha = 1 \\ 2 & \text{si i només si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

[12] En general, però, la imatge d'una base per una aplicació lineal no és una base del subespai imatge. Això es deu al fet que poden aparèixer relacions de dependència lineal entre les imatges dels vectors. Una condició suficient per tal que la imatge d'una base sigui una base del subespai imatge és que l'aplicació sigui injectiva.

Així per a $\alpha = 1$ tindrem $\dim \operatorname{Im} f = 1 < 2 = \dim F$ i per tant la inclusió de subespais no és una igualtat. Mentre que si $\alpha = -1$ aleshores $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim F$ i, per tant, la inclusió de subespais $\operatorname{Im} f \subseteq F$ és una igualtat.

- Per tant, en conclusió, hem provat que $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0\}$ si i només si $\alpha = -1$.

- **Observació.** Una altra manera d'expressar el que ara hem demostrat és la següent: per a $\alpha = -1$ tots els elements del subespai $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0\}$ tenen antiimatges per f, però per a $\alpha \neq -1$ hi ha elements del subespai $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0\}$ que no tenen antiimatges per f. Els comentaris que ara farem fan referència a les "antiimatges".

- **Comentari.** Si E_1 i E_2 són dos $\mathbb{K}$-espais vectorials, i si $h \colon E_1 \to E_2$ és una aplicació $\mathbb{K}$-lineal aleshores, per definició, la imatge de h és el subespai vectorial de E_2 format per les imatges dels vectors de E_1. Per tant, la imatge de h és el subespai vectorial format pels elements de E_2 que tenen antiimatge per h. És a dir:

$$\operatorname{Im} h = \{h(u) \ : \ u \in E_1\} = \{w \in E_2 \ : \ \text{existeix } v \in E_1 \text{ amb } h(v) = w\}.$$

Fixat un element $w \in E_2$, el conjunt $\{v \in E_1 \ : \ h(v) = w\}$ és el conjunt de les antiimatges de w per l'aplicació h. El conjunt de les antiimatges de w per h pot ser buit i, en general, no és un subespai vectorial (de fet és un subespai si i només si $w = 0$). Observem que el nucli de h és el conjunt de les antiimatges del 0 per l'aplicació lineal h.

- **Comentari.** Si $h \colon E_1 \to E_2$ és una aplicació lineal aleshores, per determinar si un element w de E_2 té o no té antiimatges per h podem fer, bàsicament, dues coses:

  - o bé fer servir el subespai vectorial imatge $\operatorname{Im} h$.
  - o bé fer servir l'expressió explícita de l'aplicació lineal h.

  Concretament, per determinar si un element (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ té o no té antiimatges per l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ d'aquest exercici, podem fer el següent:

  - *Mètode 1.*

    Sabem que els elements que tenen antiimatge per f són els elements del subespai $\operatorname{Im} f$ que en aquest cas és el subespai $\langle (1, 1, 1), (\alpha^2, 1, \alpha) \rangle$. Per tant, un element (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ té antiimatge per f si i només si existeixen nombres reals λ_1, λ_2 de manera que $(a, b, c) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(\alpha^2, 1, \alpha)$. És a dir, si i només si el sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + \alpha^2 y & = & a \\ x + y & = & b \\ x + \alpha y & = & c \end{array} \right.$$

    és un sistema compatible i, en aquest cas, les solucions del sistema ens determinen la combinació lineal, és a dir, ens determinen els escalars λ_1 i λ_2. Observem que aquest sistema s'escriu matricialment com:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

i per tant, la matriu del sistema és la matriu que té per columnes els vectors d'un sistema de generadors del subespai imatge. A més, observem que en el cas en què el sistema sigui compatible aleshores, hi ha unicitat de la solució si i només si el rang de la matriu del sistema val 2. És a dir, si i només si les dues columnes de la matriu són linealment independents. Dit d'una altra manera, si les columnes de la matriu determinen una base del subespai imatge.

- *Mètode 2.*

  Per veure si un element té antiimatge, enlloc de fer servir el subespai imatge, podem fer servir l'expressió de l'aplicació f. D'aquesta manera es té que un element $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ té antiimatge per f si i només si existeix $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ amb $f(x, y) = (a, b, c)$. És a dir, si i només si existeix $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x + \alpha^2 y, x + y, x + \alpha y) = (a, b, c)$. Per tant, els elements que tenen antiimatges per f són els vectors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ per als quals el sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + \alpha^2 y & = & a \\ x + y & = & b \\ x + \alpha y & = & c \end{array} \right.$$

  és un sistema compatible i, en aquest cas, les solucions del sistema ens determinen les antiimatges de (a, b, c) per f. Observem que aquest sistema s'escriu matricialment com:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

  i per tant, la matriu del sistema és la matriu de l'aplicació lineal. A més observem que, en el cas en què el sistema sigui compatible aleshores, hi ha unicitat de la solució si i només si el sistema homogeni associat és compatible determinat. Dit d'una altra manera, si hi ha antiimatge, aleshores aquesta és única si i només si el nucli és nul, (recordeu que aquesta condició sobre el nucli caracteritza la injectivitat de les aplicacions lineals).

Observem que en aquest cas en els dos mètodes tenim la mateixa matriu. Això, però, pot no ser cert en general.

- 10.

Sigui f un endomorfsme d'un espai vectorial E de dimensió finita n. Demostreu que:

(a) Si n és senar, o si n és parell i $\operatorname{rang} f \neq n/2$, aleshores segur que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$.

(b) Si $n = 2$ aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(c) Si $n = 3$ aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(d) Per a tot n es té que, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Solució

—

Resolució

- A teoria hem vist el següent resultat que ens relaciona les dimensions del nucli i de la imatge d'una aplicació lineal:

  - **Proposició.** *Sigui* $f : E_1 \to E_2$ *una aplicació* $\mathbb{K}$*-lineal entre dos* $\mathbb{K}$*-espais vectorials de dimensió finita. Aleshores,* $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E_1$.

- Per resoldre aquest problema aplicarem aquest resultat en el cas en què l'aplicació lineal f sigui un endomorfisme.

Resolució (a)

- Com que f és un $\mathbb{K}$-endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita $\dim E = n$ aleshores, per la proposició, es té que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = n$.

- Primer anem a demostrar que si n és senar aleshores $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$.

  Suposem que n és senar. Com que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$, en particular la suma de dimensions $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ és senar i, per tant, un dels dos sumands ha de ser parell i l'altre ha de ser senar. Així, si n és senar aleshores els dos subespais tenen dimensions diferents i, per tant, els dos subespais no poden ser iguals de cap manera. Per tant, si n és senar aleshores segur que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$, com volíem demostrar.

- Ara anem a demostrar que si n és parell i $\operatorname{rang} f \neq n/2$ aleshores $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$.

  La demostració la farem per reducció a l'absurd. És a dir, veurem que si tenim la igualtat de subespais $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ aleshores arribem a una contradicció.

Suposem que n és parell, que $\operatorname{rang} f \neq n/2$ i que tenim la igualtat de subespais $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. De la igualtat de subespais vectorials tindrem la igualtat de dimensions[13]. Per tant, si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ aleshores s'ha de complir que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$ i, com que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$, per tant es té que $2 \dim \operatorname{Im} f = n$, d'on $\dim \operatorname{Im} f = n/2$ (observem que aquesta igualtat té sentit ja que estem suposant que n és parell). Ara bé, recordem que per definició el rang d'un endomorfisme és la dimensió del subespai imatge. Per tant, hem arribat a una contradicció, ja que $n/2 \neq \operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = n/2$, com volíem demostrar.

Resolució (b)

- Volem demostrar que si f és un $\mathbb{K}$-endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita $\dim E = 2$ aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
- Si el subespai nucli és el subespai nul, o si el subespai imatge és el subespai nul, aleshores trivialment es té que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
- Per tant, podem suposar que ambdós subespais són no nuls. És a dir, podem suposar que els dos subespais tenen dimensió estrictament positiva, $\dim \operatorname{Ker} f > 0$ i $\dim \operatorname{Im} f > 0$.

  En aquest cas, de la igualtat $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = 2$ es dedueix que l'única possibilitat és que aquests dos subespais tinguin dimensió $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$. Per tant podem assegurar que existeixen vectors no nuls $v_1, v_2 \in E$ tals que $\operatorname{Ker} f = \langle v_1 \rangle$ i $\operatorname{Im} f = \langle v_2 \rangle$. Anem a veure que, aleshores, de la dependència o independència lineal dels vectors v_1 i v_2 podem concloure o bé que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ o bé que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

  En efecte, si els vectors v_1 i v_2 són linealment dependents, aleshores tindrem la igualtat de subespais vectorials $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$, és a dir, tindrem la igualtat $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. En canvi, si els vectors v_1 i v_2 són linealment independents aleshores es té que $\langle v_1 \rangle \neq \langle v_2 \rangle$, d'on $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2 \rangle = \{0\}$, i per tant que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
- En qualsevol cas hem demostrat que si l'espai E té dimensió dos aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- *Comentari.* Observem que de fet hem demostrat que si F_1 i F_2 són dos subespais vectorials de dimensió 1 aleshores, o bé els dos subespais són iguals ($F_1 = F_2$) o bé la seva intersecció és l'element neutre ($F_1 \cap F_2 = \{0\}$). Si ho pensem en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ aquest resultat és evident ja que els subespais de dimensió 1 són les rectes r per l'origen 0 i per tant, en aquest cas, el resultat ens diu que, si r_1 i r_2 són dos rectes que passin per l'origen 0 aleshores, o bé són iguals ($r_1 = r_2$), o bé la seva intersecció és l'origen ($r_1 \cap r_2 = \{0\}$).

Resolució (c)

- Volem demostrar que si f és un $\mathbb{K}$-endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita

[13] Recordeu que per tal que dos subespais vectorials siguin iguals és necessari (però no suficient) que les dimensions coincideixin. És a dir, la igualtat de subespais vectorials implica la igualtat de dimensions, però el recíproc no és cert en general.

$\dim E = 3$ aleshores o bé $\operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- Òbviament si el subespai nucli és el subespai nul, o si el subespai imatge és el subespai nul, aleshores es té que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- Per tant, podem suposar que ambdós subespais són no nuls. És a dir, podem suposar que els dos subespais tenen dimensió estrictament positiva.

- Observem que si $\dim \operatorname{Ker} f > 0$ i si $\dim \operatorname{Im} f > 0$ aleshores, com que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = 3$, un dels dos subespais té dimensió 1 i l'altre té dimensió 2. És a dir, les úniques opcions són:
$$\begin{cases} \text{o bé } \dim \operatorname{Ker} f = 1 \text{ i } \dim \operatorname{Im} f = 2 \\ \text{o bé } \dim \operatorname{Ker} f = 2 \text{ i } \dim \operatorname{Im} f = 1 \end{cases}$$

- Anem a veure que si tenim $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ i $\dim \operatorname{Im} f = 2$ aleshores, o bé $\operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

  Suposem que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ i que $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Aleshores existeixen vectors $v_1, v_2, v_3 \in E$ tals que $\operatorname{Ker} f = \langle v_1 \rangle$ i $\operatorname{Im} f = \langle v_2, v_3 \rangle$. Si els tres vectors v_1, v_2, v_3 són linealment independents, aleshores segur que $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2, v_3 \rangle = \{0\}$ i, per tant, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Per tant, per acabar hem d'estudiar el cas en què v_1, v_2, v_3 siguin linealment dependents.

  Com que els vectors v_2 i v_3 són linealment independents (ja que $\dim \operatorname{Im} f = 2$ i $\operatorname{Im} f = \langle v_2, v_3 \rangle$), aleshores podem afirmar que els vectors v_1, v_2, v_3 són linealment dependents si i només si v_1 és combinació lineal de v_2 i de v_3. Per tant, si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents aleshores tindrem que $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$ i, per tant, tindrem la inclusió $\langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_2, v_3 \rangle$. És a dir, tindrem la inclusió $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$. A més, aquesta inclusió és estricta ja que aquests subespais no tenen la mateixa dimensió (de fet en aquest cas tenim $\dim \operatorname{Ker} f = 1 < 2 = \dim \operatorname{Im} f$). Per tant si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents aleshores es té que $\operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Im} f$.

- Finalment, ens queda el cas $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ i $\dim \operatorname{Im} f = 1$, el qual es raona de manera anàloga a com ho acabem de fer, prenent dos vectors linealment independents com a generadors de $\operatorname{Ker} f$ i un vector generador de $\operatorname{Im} f$. No en donarem els detalls, però obtindrem o bé que $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} f$ o bé que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

- *Comentari.* Observem que de fet hem demostrat que si tenim dos subespais vectorials F_1 i F_2 de dimensió $\dim F_1 = 1$ i $\dim F_2 = 2$ aleshores, o bé $F_1 \subsetneq F_2$ o bé $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Si ho pensem en $\mathbb{R}^3$ aquest resultat és evident, ja que els subespais vectorials de dimensió 1 són les rectes per l'origen 0 i els subespais de dimensió 2 són els plans per l'origen 0 i, per tant, aquest resultat ens diu que si tenim una recta r amb $0 \in r$ i un pla π amb $0 \in \pi$ aleshores, o bé la recta r està continguda en el pla π (i per tant $r \subsetneq \pi$), o bé la intersecció de la recta i el pla és l'origen (és a dir $r \cap \pi = \{0\}$).

Resolució (d)

- Volem demostrar que si f és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita n aleshores:
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

- Recordem que per definició es té que:
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \text{ i } \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

- Per tant únicament hem de demostrar l'equivalència:

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$$

i, com que estem en dimensió finita, n'hi ha prou amb demostrar l'equivalència a nivell de dimensions[14]. És a dir, només cal demostrar que si f és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita aleshores:

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0.$$

- Anem a demostrar-ho.
- Per un banda tenim la següent igualtat que ens relaciona les dimensions del nucli i de la imatge:

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

- Per altra banda, aplicant la fórmula de Grassmann tenim la igualtat:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f).$$

- Ajuntant aquestes dues igualtats, tenim:

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f).$$

i d'aquesta igualtat s'obté l'equivalència que volíem demostrar:

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0.$$

[14]Recordeu que si F és un subespai vectorial d'un espai vecorial E de dimensió finita aleshores, $F = E$ si i només si $\dim F = \dim E$, i $F = \{0\}$ si i només si $\dim F = 0$. En la pàgina 51 hem recordat un resultat més general.

- 11.

En $\mathbb{R}^4$ considerem el subespai $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x+y-z = x-t = 0\}$ i l'endomorfisme f definit per $f(x,y,z,t) = (x-z, y+z-t, x+y-t, x-y-2z+t)$. Calculeu la dimensió i una base dels subespais F, $f(F)$ i $f^{-1}(F)$, i comproveu que $f(f^{-1}(F)) \subsetneq F \subsetneq f^{-1}(f(F))$.

Solució

El subespai F té dimensió 2 i una base de F és $\{(1,0,1,1),(0,1,1,0)\}$. El subespai $f(F)$ té dimensió 1 i una base de $f(F)$ és $\{(-1,2,1,-3)\}$. El subespai $f^{-1}(F)$ té dimensió 3 i una base de $f^{-1}(F)$ és $\{(1,0,0,0),(1,-1,1,0),(0,1,0,1)\}$. Es té que $f(f^{-1}(F)) = \langle (1,0,1,1)\rangle \subsetneq F \subsetneq \langle (1,0,1,1),(0,1,1,0),(1,-1,1,0)\rangle = f^{-1}(f(F))$.

Resolució

- La resolució d'aquest exercici la farem en cinc passos.

- **Primer pas**

- Anem a calcular la dimensió i una base del subespai F.

- Comencem per determinar la dimensió de F. Com que F està donat per equacions, la seva dimensió ve donada pels graus de llibertat del sistema, és a dir:

$$\dim F = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rang}(A)$$

on A és la matriu que ens defineix el sistema d'equacions que ens dóna el subespai:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fent una única transformació per files tenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que la matriu A té rang 2. Així doncs, F té dimensió $\dim F = 4 - 2 = 2$.

- Determinem a continuació una base de F. Com que F ve definit pel següent sistema d'equacions:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ x-t & = & 0 \end{array} \right.$$

les quals podem escriure de manera equivalent com:

$$\begin{cases} z &= x+y \\ x &= t \end{cases}$$

podem, usant aquestes relacions, escriure un vector $v \in F$ de la següent manera:

$$v = (x, y, z, t) = (t, y, t + y, t) = y(0, 1, 1, 0) + t(1, 0, 1, 1)$$

de manera que $F = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1) \rangle$, i aquests dos vectors formen una base de F per ser dos vectors generadors d'un subespai de dimensió 2.

- **Segon pas**

- Passem ara a calcular la dimensió i una base del subespai $f(F)$, el subespai imatge del subespai F per l'aplicació lineal f.
- Per definició es té:

$$f(F) = \left\{ u \in \mathbb{R}^4\colon \text{ existeix } v \in F \text{ amb } f(v) = u \right\} = \{ f(v)\colon v \in F \}.$$

- Observem, però, que com que tenim $F = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1) \rangle$ aleshores, per calcular el subespai imatge $f(F)$ n'hi ha prou amb calcular la imatge dels vectors que generen F, ja que tot vector del subespai es pot escriure com combinació lineal dels generadors del subespai i la linealitat de l'aplicació f ens permet afirmar que aquesta combinació lineal es conserva a nivell de les imatges. És a dir, podem calcular la imatge de qualsevol vector del subespai en funció de les imatges dels generadors del subespai.

  Més formalment, si denotem $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ i $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, podem escriure tot vector $v \in F$ com $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, i podem calcular $f(v)$ de la següent manera:

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{(1)}{=} f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) \overset{(2)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

  on en (1) hem usat la primera propietat de linealitat de f (és a dir fem servir que $f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2)$), i en (2) hem usat la segona propietat de linealitat de f (és a dir fem servir que $f(\mu w) = \mu f(w)$). Així, si $F = \langle v_1, v_2 \rangle$, aleshores es té que $f(F) = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle$.

- Per tant, com acabem de veure, n'hi ha prou amb calcular les imatges dels generadors del subespai F i ja tindrem els generadors de $f(F)$.

  Calculant, es té:

$$\begin{aligned} f(0, 1, 1, 0) &= (0 - 1, 1 + 1 - 0, 0 + 1 - 0, 0 - 1 - 2 \cdot 1 + 0) = (-1, 2, 1, -3) \\ f(1, 0, 1, 1) &= (1 - 1, 0 + 1 - 1, 1 + 0 - 1, 1 - 0 - 2 \cdot 1 + 1) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

  Per tant $f(F) = \langle (-1, 2, 1, -3), (0, 0, 0, 0) \rangle = \langle (-1, 2, 1, -3) \rangle$ està generat per un sol vector no nul. Així $f(F)$ té dimensió 1 i a més $\{(-1, 2, 1, -3)\}$ és una base de $f(F)$.

- **Observació.** En general, donada una aplicació lineal $h\colon E_1 \to E_2$, la imatge d'un subespai vectorial està generada per les imatges dels generadors del subespai, per tant, la imatge d'un sistema de generadors d'un subespai G de E_1 és un sistema de generadors del subespai imatge $h(G)$, és a dir $h(\langle w_1, \ldots, w_r \rangle) = \langle h(w_1), \ldots, h(w_r) \rangle$. Notem, tanmateix, que és possible que els vectors imatge no siguin linealment independents i, per tant, poden no determinar una base del subespai imatge $h(G)$. És a dir, la imatge d'una base d'un subespai G per una aplicació lineal no és, en general, una base del subespai imatge $h(G)$ i, per tant, pot ser que la dimensió baixi, és a dir, tenim la desigualtat de dimensions $\dim h(\langle w_1, \ldots, w_r \rangle) \leq \dim\langle w_1, \ldots, w_r \rangle$ però no podem afirmar que tinguem igualtat. Si l'aplicació lineal h és injectiva, però, sí que és certa, ja que les aplicacions injectives verifiquen que la imatge d'un conjunt de vectors linealment independents és un conjunt de vectors linealment independents.

- **Tercer pas**

- Ara calcularem la dimensió i una base del subespai $f^{-1}(F)$, el subespai antiimatge del subespai F per l'aplicació lineal f.

- Per definició d'antiimatge:
$$f^{-1}(F) = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \colon f(u) \in F \right\}.$$

- Agafem doncs un vector arbitrari $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$. Calculem la seva imatge $f(u)$:
$$f(u) = (\underbrace{\alpha_1 - \alpha_3}_{x}, \underbrace{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}_{y}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4}_{z}, \underbrace{\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4}_{t})$$
i imposem ara que $f(u) \in F$, és a dir, $f(u)$ ha de satisfer les equacions de F:
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \Longleftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4) = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0 \\ x - t = 0 \Longleftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$$
Observem que la primera equació és una identitat, i per tant no ens imposa cap restricció addicional. La segona equació sí que ens dóna una relació algebraica entre els components de u, d'on en podem deduir:
$$f^{-1}(F) = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon y + z - t = 0 \right\}$$
i per tant $f^{-1}(F)$ té dimensió 3.

- Per trobar-ne una base, suposem que $v = (x, y, z, t) \in f^{-1}(F)$. Aleshores podem escriure v de la següent manera:
$$v = (x, y, z, t) = (x, y, z, y + z) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1)$$
i per tant tenim $f^{-1}(F) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle$, d'on es dedueix que el conjunt de vectors $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ és una base del subespai $f^{-1}(F)$ per ser un sistema de tres vectors generadors en un subespai de dimensió 3.

- **Quart pas**

- Comprovem ara que $f(f^{-1}(F)) \subsetneq F$.

- Comencem per calcular una base de $f(f^{-1}(F))$. Com que acabem de calcular una base de $f^{-1}(F)$, n'hi ha prou que calculem les imatges dels generadors de $f^{-1}(F)$ per tenir un sistema de generadors de $f(f^{-1}(F))$.

- Calculant tenim:

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (1-0, 0+0-0, 1+0-0, 1-0-0+0) = (1,0,1,1) \\ f(0,1,0,1) &= (0-0, 1+0-1, 0+1-1, 0-1-0+1) = (0,0,0,0) \\ f(0,0,1,1) &= (0-1, 0+1-1, 0+0-1, 0-0-2\cdot 1+1) = (-1,0,-1,-1) \end{aligned}$$

i per tant es té:

$$f(f^{-1}(F)) = \langle (1,0,1,1), (0,0,0,0), (-1,0,-1,-1) \rangle = \langle (1,0,1,1) \rangle$$

que té dimensió 1.

- Observem que $(1,0,1,1)$ satisfà les equacions que defineixen F. Així $(1,0,1,1) \in F$ i, per tant, es té la inclusió de subespais $f(f^{-1}(F)) \subseteq F$. Ara bé, com que $\dim f(f^{-1}(F)) = 1 < 2 = \dim F$, aquesta inclusió no pot ser una igualtat. Per tant, $f(f^{-1}(F)) \subsetneq F$.

- **Cinquè pas**

- Per acabar comprovem que $F \subsetneq f^{-1}(f(F))$.

- Procedirem com abans. Per definició de l'antiimatge d'un subespai tenim:

$$f^{-1}(f(F)) = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \colon f(u) \in f(F) \right\}.$$

- Sigui doncs $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$. Aplicant f a aquest vector ens queda:

$$f(u) = (\underbrace{\alpha_1 - \alpha_3}_{x}, \underbrace{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}_{y}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4}_{z}, \underbrace{\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4}_{t})$$

i com que $f(F) = \langle (-1,2,1,-3) \rangle$ aleshores, per tal que $f(u) \in f(F)$ s'ha de complir que:

$$(\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4) = \lambda(-1,2,1,-3)$$

o, escrit com a sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 - \alpha_3 &=& -\lambda \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 &=& 2\lambda \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 &=& \lambda \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 &=& -3\lambda \end{array} \right.$$

Per tant, hauríem de resoldre aquest sistema d'equacions per a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ en funció del paràmetre λ. Deixem al lector acabar-ho com a exercici.

- Alternativament, un procediment més senzill és el següent. Com que $f(F)$ està generat pel vector $(-1,2,1,-3)$, és immediat comprovar que $f(F)$ també està definit de la següent manera:

$$f(F) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon 2x + y = x + z = 3x - t = 0 \right\}$$

de manera que només ens cal imposar que el vector $f(u)$ satisfaci les equacions de $f(F)$, és a dir:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \iff 2(\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = 0 \iff 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ x + z = 0 \iff (\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4) = 0 \iff 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 3x - t = 0 \iff 3(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4) = 0 \iff 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{array} \right.$$

Notem que les tres relacions que tenim són la mateixa, d'on es dedueix:

$$f^{-1}(f(F)) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon 2x+y-z-t=0\right\}$$

que té dimensió 3.

- Per calcular-ne una base, sigui $v \in f^{-1}(f(F))$. Aleshores:

$$v = (x,y,z,t) = (x,y,z,2x+y-z) = x(1,0,0,2) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,-1)$$

i per tant $f^{-1}(f(F)) = \langle (1,0,0,2), (0,1,0,1), (0,0,1,-1) \rangle$.

- Observem que

$$(1,0,1,1) = (1,0,0,2) + (0,0,1,-1) \in f^{-1}(f(F))$$
$$(0,1,1,0) = (0,1,0,1) + (0,0,1,-1) \in f^{-1}(f(F))$$

de manera que $F \subseteq f^{-1}(f(F))$, però com que $\dim F = 2 < 3 = \dim f^{-1}(f(F))$, la inclusió és estricta, és a dir, $F \subsetneq f^{-1}(f(F))$. Alternativament, també podríem comprovar que els generadors de F satisfan les equacions que defineixen $f^{-1}(f(F))$, obtenint el mateix resultat.

- **Conclusions.** Observem que en aquest problema hem vist que:

$$\dim f(F) < \dim F < \dim f^{-1}(F)$$

i també hem vist que:

$$\dim f(f^{-1}(F)) < \dim F < \dim f^{-1}(f(F)).$$

La lectura que podem fer de la primera desigualtat de la primera cadena de desigualtats és la següent: una aplicació lineal pot reduir la dimensió de l'espai, però en cap cas pot augmentar-la. Intuïtivament això és clar: una aplicació no "treu vectors del no res", és a dir, tot vector en la imatge prové d'algun vector en l'espai de sortida i, per tant, com a molt se'n poden tenir tants com n'hi ha en l'espai de sortida. Observem que sempre ens restringim a la imatge de l'aplicació, ja que hi poden haver vectors en l'espai d'arribada que no siguin imatge de cap vector, és a dir, l'aplicació no és necessàriament exhaustiva.

Pel que fa a la segona cadena de desigualtats, aquesta ens dóna un exemple clar d'una propietat ben coneguda en conjunts. Una aplicació $h \colon X \to X$ d'un conjunt X en si mateix, no necessàriament lineal, sempre compleix $h(h^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq h^{-1}(h(A))$ per a tot $A \subseteq X$, però aquestes inclusions no sempre són igualtats. La injectivitat i l'exhaustivitat de l'aplicació són condicions que permeten convertir aquestes inclusions en igualtats.

- 12.

Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ defint per $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1)$, $f(0,1,0,0) = (0,1,1,0)$, $f(0,0,1,0) = (-1,1,0,1)$ i $f(0,0,0,1) = (0,-1,0,1)$.

(a) Demostreu que si $F, G \subseteq \mathbb{R}^4$ són dos subespais vectorials no nuls tals que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, aleshores $\mathbb{R}^4 = f(F) \oplus f(G)$.

(b) Considerem els subespais vectorials $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; 2x + y = z + t = 0\}$, $G_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; y = z = x + t\}$, i $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; y = z = x - t\}$. Demostreu que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_i$ i comproveu que $f(F) = F$. És cert que $f(G_i) = G_i$?

Solució

(a) —

(b) —. Es té que $f(G_1) = G_1$ i que $f(G_2) \neq G_2$, (de fet els subespais $f(G_2)$ i G_2 tenen intersecció nul·la).

Resolució (a)

- En aquest apartat volem demostrar que si tenim dos subespais F i G complementaris aleshores les seves imatges $f(F)$ i $f(G)$ per l'endomorfisme f també són subespais complementaris.

  Recordem que la "idea" dels subespais complemenaris és que en "ajuntar" una base d'un subespai amb una base de l'altre subespai tinguem una base de tot l'espai vectorial.

  Per tant, en certa manera, el que ens cal per demostrar aquest exercici és veure si l'endomorfisme que tenim "transforma" les bases en bases. Així, d'una banda ens cal que l'endomorfisme "transformi" els sistemes de generadors en sistemes de generadors (fet que caracteritza les aplicacions lineals exhaustives) i, d'altra banda també ens cal que l'endomorfisme "transformi" vectors linealment independents en vectors linealment independents (fet que caracteritza les aplicacions lineals injectives). Per tant, el que ens cal és que l'endomorfisme f sigui bijectiu.

- Anem a resoldre aquest apartat seguint aquesta idea.

- Comencem, per tant, per veure que f és un automorfisme de $\mathbb{R}^4$, és a dir, un isomorfisme (una aplicació lineal bijectiva) de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ en si mateix.

- Recordem que si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita, i si B és una base de l'espai E aleshores, l'endomorfisme h és un automorfisme si i només si la matriu $M(h; B)$ associada a h en la base B és una matriu invertible.

- En el nostre cas, en l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ prenem la base canònica $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. La matriu associada a f en la base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ és la següent:

$$M(f;B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Per determinar si aquesta matriu és invertible podem calcular-ne el determinant (i serà invertible si el determinant és no nul) o calcular-ne el rang (i serà invertible si el rang és màxim). En aquesta resolució optarem per calcular-ne el rang esglaonant per files la matriu $M(f;B)$. Si ho fem tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  i per tant el rang és 4.

- Per tant, la matriu associada a f és invertible, d'on es dedueix que f és un isomorfisme de $\mathbb{R}^4$ en si mateix, en altres paraules, f és un automorfisme de $\mathbb{R}^4$. (A més, la matriu $M(f^{-1};B)$ associada a l'isomorfisme invers f^{-1} en la base B és la matriu $M(f^{-1};B)=M(f;B)^{-1}$).

- Un cop hem provat això, podem resoldre aquest apartat de dues maneres diferents. La primera resolució és la formalització de la idea que hem donat al principi de l'exercici, mentre que la segona resolució consisteix a treballar directament amb les definicions de subespais vectorials complementaris.

  En aquesta resolució exposarem totes dues maneres amb detall.

- **Resolució I**

  En aquesta primera resolució usarem la següent caracterització dels isomorfismes que hem vist a teoria:

  - **Lema.** *Si* $f\colon E_1 \to E_2$ *és una aplicació* $\mathbb{K}$*-lineal i* $B=\{e_i\}_i$ *una base de* E_1 *aleshores* f *és un isomorfisme si i només si el conjunt* $\{f(e_i)\}_i$ *és una base de* E_2.

  En el nostre cas tenim $E_1=E_2=\mathbb{R}^4$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial i una aplicació $\mathbb{R}$-lineal f. Com que ja hem provat que f és un isomorfisme, aquest lema ens afirma que la imatge de tota base de $\mathbb{R}^4$ és també una base de $\mathbb{R}^4$. A més, per restricció, aquest lema també ens assegura que la imatge d'una base d'un subespai H és una base del subespai imatge $f(H)$.

  Considerem, aleshores, una base $B_F=\{v_1,\ldots,v_r\}$ del subespai F i una base $B_G=\{w_1,\ldots,w_s\}$ del subespai G. Com que els subespais F i G són no nuls, aleshores els conjunts B_F i B_G són no buits, és a dir, es té que $r,s\geq 1$. A més, com que per hipòtesi $\mathbb{R}^4=F\oplus G$, aleshores el conjunt $B_F\cup B_G=\{v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$, (en particular $r+s=4$).

  Ara, aplicant el lema, podem afirmar que el conjunt $f(B_F)=\{f(v_1),\ldots,f(v_r)\}$ és una base del subespai $f(F)$, que el conjunt $f(B_G)=\{f(w_1),\ldots,f(w_s)\}$ és una base del subespai $f(G)$, i que el conjunt $f(B_F\cup B_G)=\{f(v_1),\ldots,f(v_r),f(w_1),\ldots,f(w_s)\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. D'aquí, com que $f(B_F\cup B_G)=f(B_F)\cup f(B_G)$, podem deduir que $\mathbb{R}^4=f(F)\oplus f(G)$, com volíem demostrar.

- **Resolució II**

En aquesta segona resolució treballarem directament. És a dir, en aquesta segona resolució demostrarem que $\mathbb{R}^4 = f(F) + f(G)$ i que $f(F) \cap f(G) = \{0\}$.

Recordeu que per hipòtesi es té que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. És a dir, estem suposant que la suma val $F + G = \mathbb{R}^4$ i que la intersecció és $F \cap G = \{0\}$. El que veurem és que l'exhaustivitat de f ens permet afirmar que $\mathbb{R}^4 = f(F) + f(G)$, mentre que la injectivitat ens garanteix que $f(F) \cap f(G) = \{0\}$.

Primer anem a veure que $\mathbb{R}^4 = f(F) + f(G)$.

Per hipòtesi tenim la igualtat $\mathbb{R}^4 = F + G$. D'aquí, aplicant f en els dos costats de la igualtat, tenim que $f(\mathbb{R}^4) = f(F + G)$.

Per una banda, com que en el nostre cas f és un automorfimse, en particular f és un epimorfisme i, per tant, tenim la igualtat $f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4$.

Per altra banda, per la linealitat, es té que la imatge de la suma de dos subespais per una aplicació lineal és el subespai vectorial suma de les imatges dels dos subespais. És a dir, en general es té que si $h : E_1 \to E_2$ és una aplicació lineal i si $H_1, H_2 \subseteq E_1$ són dos subsepais vectorials, aleshores $h(H_1 + H_2) = h(H_1) + h(H_2)$. Per tant, en el nostre cas tenim la igualtat $f(F + G) = f(F) + f(G)$.

Per tant amb tot això podem concloure que $\mathbb{R}^4 = f(\mathbb{R}^4) = f(F+G) = f(F)+f(G)$, com volíem demostrar.

Ara, per tal que la suma sigui directa, hem de demostrar que $f(F) \cap f(G) = \{0\}$.

Observem que com que $f(F) \cap f(G)$ és un subespai vectorial, aleshores tenim la inclusió $\{0\} \subseteq f(F) \cap f(G)$. Per tant, únicament hem de veure que $f(F) \cap f(G) \subseteq \{0\}$. És a dir hem de veure que si $v \in f(F) \cap f(G)$ aleshores $v = 0$.

Demostrem-ho. Sigui $v \in f(F) \cap f(G)$. Aleshores, per ser $v \in f(F)$, existeix $u_1 \in F$ tal que $f(u_1) = v$. Anàlogament, per ser $v \in f(G)$, existeix $u_2 \in G$ tal que $f(u_2) = v$. Ara bé, com que f és un isomorfisme, existeix un únic $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(u) = v$, d'on es dedueix que $u_1 = u_2 = u$. Així tenim $u = u_1 \in F$ i tenim $u = u_2 \in G$, d'on $u \in F \cap G$. Ara bé, recordem que com que per hipòtesi $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, en particular es té que $F \cap G = \{0\}$. Per tant $u = 0$, d'on $v = f(u) = f(0) = 0$ (ja que com que f és una aplicació lineal, aleshores $f(0) = 0$). Així es té que $v = 0$, com volíem demostrar.

Comentari.

Per hipòtesi tenim la igualtat $F \cap G = \{0\}$. D'aquí, aplicant l'endomorfisme f a aquesta igualtat, es té que $f(F \cap G) = f(\{0\})$. Recordeu que com que f és una aplicació lineal, aleshores $f(0) = 0$. Per tant $f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\}$, i així podem concloure que $f(F \cap G) = f(\{0\}) = \{0\}$.

Així, una manera alternativa de demostrar que $f(F) \cap f(G) = \{0\}$ seria provar que, en general, si $h : E_1 \to E_2$ és una aplicació lineal i si $H_1, H_2 \subseteq E_1$ són dos subsepais vectorials, aleshores es té la igualtat $h(H_1 \cap H_2) = h(H_1) \cap h(H_2)$. A diferència del que succeeix amb la suma, la intersecció no sempre té un bon comportament. De fet es pot demostrar que en general només es té la inclusió $h(H_1 \cap H_2) \subseteq h(H_1) \cap h(H_2)$, mentre que la inclusió $h(H_1) \cap h(H_2) \subseteq h(H_1 \cap H_2)$ és certa si h és injectiva. Per completar aquest apartat, anem a demostrar aquest resultat.

En primer lloc anem a veure que $h(H_1 \cap H_2) \subseteq h(H_1) \cap h(H_2)$. Prenem un element $v \in h(H_1 \cap H_2)$. Aleshores, per definició, com a mínim existeix un element $u \in H_1 \cap H_2$ tal que $h(u) = v$. Com que $u \in H_1 \cap H_2$, en particular es té que $u \in H_1$ i, per tant, $v = h(u) \in h(H_1)$. De la mateixa manera, com que $u \in H_1 \cap H_2$, aleshores $u \in H_2$ i, per tant, $v = h(u) \in h(H_2)$. Així $v \in h(H_1)$ i $v \in h(H_2)$, és a dir, $v \in h(H_1) \cap h(H_2)$. Amb això hem demostrat la inclusió $h(H_1 \cap H_2) \subseteq h(H_1) \cap h(H_2)$.

Ara anem a demostrar que si h és injectiva aleshores es té que $h(H_1) \cap h(H_2) \subseteq h(H_1 \cap H_2)$. Sigui $v \in h(H_1) \cap h(H_2)$. Aleshores, per ser $v \in h(H_1)$, existeix $u_1 \in H_1$ tal que $h(u_1) = v$. Anàlogament, per ser $v \in h(H_2)$, existeix $u_2 \in H_2$ tal que $h(u_2) = v$. Per tant tenim $u_1, u_2 \in E_1$ amb $h(u_1) = h(u_2)$, d'on es dedueix que $u_1 = u_2$ ja que h és injectiva. Notem $u = u_1 = u_2$. Així tenim $u = u_1 \in H_1$ i tenim $u = u_2 \in H_2$, d'on $u \in H_1 \cap H_2$, i per tant podem concloure que $v = h(u) \in h(H_1 \cap H_2)$. Amb això hem demostrat la inclusió $h(H_1) \cap h(H_2) \subseteq h(H_1 \cap H_2)$ en el cas en què l'aplicació h sigui injectiva.

- **Observació.** El comportament de la suma i de la intersecció de subespais per una aplicació lineal és conseqüència del següent lema relatiu a les aplicacions (no necessàriament lineals) entre conjunts (no necessàriament espais vectorials). El lema estableix el comportament de la unió i de la intersecció de subconjunts per una aplicació.

  - **Lema.** *Sigui $h\colon X \to Y$ una aplicació entre dos conjunts X, Y, i siguin $A, B \subseteq X$ dos subconjunts de X. Aleshores es té que:*
    a. $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.
    b. $h(A \cap B) \subseteq h(A) \cap h(B)$, *però en general no podem afirmar que tinguem la igualtat.*
    c. Si h és injectiva aleshores $h(A \cap B) = h(A) \cap h(B)$.

Resolució (b)

- Comencem per calcular les dimensions i una base de F, G_1 i G_2. Com que estan definits per equacions, la seva dimensió serà la diferència entre la dimensió de $\mathbb{R}^4$ i el nombre d'equacions linealment independents o, equivalentment, la diferència entre la dimensió de $\mathbb{R}^4$ i el rang de la matriu definida per les equacions que ens donen cada subespai.

- Comencem per F. Les equacions que ens donen aquest subespai són:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right.$$

que, escrites en forma matricial, són

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriu d'aquest sistema té clarament rang 2, i per tant el subespai F té dimensió $\dim F = 4 - 2 = 2$. A més, podem calcular fàcilment una base del subespai de la següent manera: donat $v \in F$, podem escriure v com

$$v = (x, y, z, t) = (x, -2x, z, -z) = x(1, -2, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1)$$

i per tant $F = \langle(1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\rangle$.

- Passem a G_1. Com abans, ara les equacions que defineixen aquest subespai són:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ y & = & x+t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y-z & = & 0 \\ x-y+t & = & 0 \end{array}\right.$$

on hem omès la tercera equació ($z = x + t$) perquè és clarament combinació lineal de les dues anteriors i, per tant, no ens afegeix condicions addicionals. Aquestes equacions les podem escriure matricialment de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriu d'aquest sistema també té rang 2 i, per tant, la dimensió del subespai vectorial G_1 és $\dim G_1 = 4 - 2 = 2$. Pel mateix procediment d'abans, tenim que $G_1 = \langle(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\rangle$.

- Vegem ara G_2. Les equacions que defineixen aquest subespai són:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ y & = & x-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y-z & = & 0 \\ x-y-t & = & 0 \end{array}\right.$$

que, escrites en forma matricial esdevenen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i la matriu del sistema té, de nou, rang 2, d'on es dedueix que la dimensió del subespai G_2 és $\dim G_2 = 4 - 2 = 2$. Anàlogament a com ho hem fet per a F i per a G_1, ara es té que $G_2 = \langle(1, 1, 1, 0), (0, -1, -1, 1)\rangle$.

- Ara que tenim les dimensions i bases dels subespais vectorials F, G_1 i G_2, anem a comprovar que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_i$ per a $i = 1, 2$.

- *Anem a veure que* $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_1$.

- Vegem en primer lloc que $\mathbb{R}^4 = F + G_1$, és a dir, que la unió de les bases de F i de G_1 és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^4$. Tal i com acabem de calcular, tenim:

$$F = \langle(1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\rangle$$
$$G_1 = \langle(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\rangle$$

Per tant, veure que la unió d'aquestes dues bases genera $\mathbb{R}^4$ és equivalent a veure que la matriu dels vectors posats en columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang màxim 4. Esglaonant la matriu, tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

i per tant la matriu té rang 4, de manera que es té $\mathbb{R}^4 = F + G_1$.

- Ens faltaria veure que $F \cap G_1 = \{0\}$ per tal que la suma fos directa. Per a això apliquem la fórmula de Grassmann amb els subespais F i G_1 i tenim:

$$\dim(F \cap G_1) = \dim F + \dim G_1 - \dim(F + G_1)$$

i com que $\dim(F + G_1) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ i $\dim F = \dim G_1 = 2$, ens queda que:

$$\dim(F \cap G_1) = 2 + 2 - 4 = 0$$

d'on es dedueix que $F \cap G_1 = \{0\}$, i per tant la suma $\mathbb{R}^4 = F + G_1$ és directa.

- *Anem a veure que* $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_2$.

- Vegem en primer lloc que la unió de les bases de F i de G_2 genera $\mathbb{R}^4$. Recordem que aquests subespais estan donats per:

$$F = \langle (1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$$
$$G_2 = \langle (1, 1, 1, 0), (0, -1, -1, 1) \rangle$$

Aleshores, per determinar si la unió d'aquestes dues bases genera $\mathbb{R}^4$, hem de veure si la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang màxim 4. Esglaonant, es té:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que la matriu té rang 4 i, per tant, $\mathbb{R}^4 = F + G_2$.

- Com abans, ens falta veure que la suma és directa, és a dir, que $F \cap G_2 = \{0\}$. Anàlogament a com hem procedit abans, aplicant la fórmula de Grassmann amb els subespais F i G_2 tenim:

$$\dim(F \cap G_2) = \dim F + \dim G_2 - \dim(F + G_2)$$

i usant que $\dim(F + G_2) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, i que $\dim F = \dim G_2 = 2$, ens queda

$$\dim(F \cap G_2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

i, per tant, $F \cap G_2 = \{0\}$. D'aquí es dedueix que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_2$.

- *Observació.* De moment, per tant, hem demostrat que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_i$ per a $i = 1, 2$. Per tant, aplicant l'apartat (a) podem afirmar que també tenim $\mathbb{R}^4 = f(F) \oplus f(G_i)$ per a $i = 1, 2$. Així, en particular, tenim la igualtat $F \oplus G_1 = f(F) \oplus f(G_1)$ i la igualtat $F \oplus G_2 = f(F) \oplus f(G_2)$. El que ara anem a fer és primer veure que $f(F) = F$, i tot seguit, estudiar si tenim la igualtat $f(G_i) = G_i$ per a $i = 1, 2$.

- *Vegem a continuació que $f(F) = F$.*

- Observem que, com que f és un isomorfisme, aleshores $\dim f(F) = \dim F$, i per tant n'hi ha prou que comprovem o bé que $f(F) \subseteq F$ o bé que $f(F) \supseteq F$, ja que la igualtat de dimensió és equivalent a la igualtat de subespais en aquest cas. Nosaltres demostrarem que $f(F) \subseteq F$. Per veure-ho, podem procedir de diverses maneres. En aquesta resolució n'exposarem tres.

- Mètode I.

Aquesta primera aproximació al problema consisteix a treballar amb les definicions. Recordeu que, per definició d'imatge, $f(F) = \{v \in \mathbb{R}^4\colon$ existeix $u \in F$ tal que $f(u) = v\}$. Per tant, tot vector de $f(F)$ és de la forma $f(u)$ per a algun $u \in F$. Així, per veure que $f(F)$ està contingut en F n'hi ha prou amb prendre un vector arbitrari $u \in F$, calcular-ne la imatge $f(u)$ i comprovar que $f(u)$ satisfà les equacions que defineixen F. Aquest seria el procediment "normal" en aquest problema, ja que ens han definit F mitjançant equacions. Vegem-ho en detall.

Sigui $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in F$ un vector qualsevol de F. Per calcular $f(u)$ usarem la matriu associada a l'aplicació f, $M(f; B)$. Concretament fem:

$$M(f;B) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

d'on tenim que:

$$f(u) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\underbrace{\alpha_1 - \alpha_3}_{x}, \underbrace{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}_{y}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{z}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4}_{t}).$$

Un cop hem calculat $f(u)$ hem de veure que $f(u) \in F$. Per a això comprovem si $f(u)$ satisfà les equacions que defineixen el subespai F:

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ z + t &= 0 \end{cases}$$

Calculant tenim:

$$\begin{aligned}
&2x+y = 2(\alpha_1-\alpha_3)+(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4) = 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4 = 2\alpha_1+\alpha_2-(\alpha_3+\alpha_4)\\
&z+t = (\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4) = 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4
\end{aligned}$$

Recordem, però, que $u \in F$, i per tant es compleix que:

$$\begin{aligned}
2\alpha_1+\alpha_2 &= 0\\
\alpha_3+\alpha_4 &= 0
\end{aligned}$$

Substituint-ho a les equacions anteriors, obtenim:

$$\begin{aligned}
&2x+y = 2\alpha_1+\alpha_2-(\alpha_3+\alpha_4) = 0-0 = 0\\
&z+t = 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0+0 = 0
\end{aligned}$$

i, per tant, $f(u) \in F$, d'on es dedueix $f(F) \subseteq F$ i, per la igualtat en les dimensions, obtenim la igualtat de subespais $f(F) = F$.

- Mètode II.

En el procediment anterior no hem usat en cap moment una base de F ja que, a priori, no ens la donen. Tanmateix, podem aprofitar que l'hem calculat abans per comprovar ara que $f(F) \subseteq F$. Recordem que el subespai F ve donat per:

$$F = \langle (1,-2,0,0),(0,0,1,-1)\rangle.$$

Aleshores, per la linealitat, els generadors de $f(F)$ són les imatges dels generadors de F. De fet, com que f és un isomorfisme i com que aquests generadors de F són, en realitat, una base de F, el que obtindrem serà una base de $f(F)$. Calculant mitjançant la matriu $M(f;B)$ associada a f tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on es dedueix:

$$\begin{aligned}
f(1,-2,0,0) &= (1,-2,-1,1)\\
f(0,0,1,-1) &= (-1,2,0,0)
\end{aligned}$$

i per tant, tenim:

$$f(F) = \langle (1,-2,-1,1),(-1,2,0,0)\rangle.$$

Vegem ara que aquests dos vectors són de F. Per fer-ho hem de resoldre els dos sistemes d'equacions següents:

$$\begin{aligned}
(1,-2,-1,1) &= \lambda_1(1,-2,0,0)+\lambda_2(0,0,1,-1)\\
(-1,2,0,0) &= \mu_1(1,-2,0,0)+\mu_2(0,0,1,-1)
\end{aligned}$$

En aquest cas, però, ens podem estalviar aquest càlcul i fer-ho "a vista" gràcies a la forma que tenen els generadors de F. En particular, tenim:

$$\begin{aligned}(1,-2,-1,1) &= (1,-2,0,0)-(0,0,1,-1)\\ (-1,2,0,0) &= -(1,-2,0,0)\end{aligned}$$

és a dir, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mu_1 = -1$ i $\mu_2 = 0$. Per tant, hem vist la inclusió $f(F) \subseteq F$ i, per la igualtat de dimensions, tenim la igualtat de subespais $f(F) = F$.

- Mètode III.

En el primer procediment que hem donat només hem usat les equacions que defineixen el subespai F, mentre que en el segon només hem usat els seus generadors. Tanmateix, si disposem d'ambdues coses podem "prendre el millor" de cadascun dels dos mètodes anteriors. Com que disposem dels generadors de F, podem calcular ràpidament els generadors de $f(F)$ i, aleshores, només ens cal comprovar que aquests generadors satisfan les equacions de F.

Anem a fer-ho. En el mètode anterior hem vist que $f(F)$ ve donat per:

$$f(F) = \langle (1,-2,-1,1), (-1,2,0,0) \rangle.$$

Per tant, n'hi ha prou que comprovem que aquests dos vectors satisfan les equacions que defineixen el subespai F. Per a $(1,-2,-1,1)$ tenim:

$$\begin{aligned}2x+y &= 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 2-2 = 0\\ z+t &= 1\cdot(-1)+1\cdot 1 = -1+1 = 0\end{aligned}$$

i per tant $(1,-2,-1,1) \in F$. Anàlogament, per a $(-1,2,0,0)$ tenim:

$$\begin{aligned}2x+y &= 2\cdot(-1)+1\cdot 2 = -2+2 = 0\\ z+t &= 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0+0 = 0\end{aligned}$$

i tenim $(-1,2,0,0) \in F$.

Per tant, hem demostrat la inclusió de subespais $f(F) \subseteq F$, i per la igualtat de dimensions es té la igualtat de subespais $f(F) = F$.

- Amb això hem vist, de tres maneres diferents, que tenim la igualtat de subespais vectorials $f(F) = F$. Ara, per acabar l'exercici, hem de veure si les igualtats $f(G_1) = G_1$ i $f(G_2) = G_2$ són o no són certes.

- *És certa la igualtat $f(G_i) = G_i$ per a $i = 1, 2$?*

- Com abans, per ser f un isomorfisme, $\dim f(G_i) = \dim G_i$, i per tant només ens cal provar alguna de les inclusions $f(G_i) \subseteq G_i$ o $f(G_i) \supseteq G_i$. Procedirem com en el mètode I que hem explicat a dalt. (Deixem com a exercici per al lector la resolució fent servir els altres dos mètodes).

- Primer anem a veure si tenim la igualtat $f(G_1) = G_1$. Sigui $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in G_1$ un element arbitrari de G_1. Aplicant f tenim:

$$f(u) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\underbrace{\alpha_1 - \alpha_3}_{x}, \underbrace{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}_{y}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{z}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4}_{t}).$$

  Comprovem si $f(u)$ satisfà les equacions de G_1:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y - z & = & 0 \\ x - y + t & = & 0 \end{array} \right.$$

  Calculant tenim:

$$\begin{aligned} y - z &= (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_2) = -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ x - y + t &= (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ &= 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_4) - (\alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}$$

  Ara bé, com que $u \in G_1$, aleshores es té que $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ i que $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0$. Substituint-ho en les equacions anteriors, tenim:

$$\begin{aligned} y - z &= -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ x - y + t &= 2(\alpha_1 + \alpha_4) - (\alpha_2 + \alpha_3) = 2\alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) = -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

  i per tant $f(u) \in G_1$, d'on es dedueix $f(G_1) \subseteq G_1$. Ara, per la igualtat de dimensions, podem concloure que tenim la igualtat de subespais $f(G_1) = G_1$.

- Comprovem ara si tenim la igualtat $f(G_2) = G_2$. Anàlogament a com ho hem fet per a G_1, sigui ara $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in G_2$ un vector arbitrari de G_2. Aleshores el vector $f(u)$ és, com abans:

$$f(u) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\underbrace{\alpha_1 - \alpha_3}_{x}, \underbrace{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}_{y}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{z}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4}_{t})$$

  Vegem ara si $f(u)$ satisfà les equacions de G_2:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y - z & = & 0 \\ x - y - t & = & 0 \end{array} \right.$$

  Calculant tenim:

$$\begin{aligned} y - z &= (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_2) = -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ x - y - t &= (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) = -\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{aligned}$$

  Ara, com que $u \in G_2$, sabem que $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ i que $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 = 0$, i per tant ens queda:

$$\begin{aligned} y - z &= -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = -(\alpha_2 + \alpha_4) + \alpha_3 - \alpha_4 = -\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = -2\alpha_4 \\ x - y - t &= -\alpha_2 - 3\alpha_3 = -4\alpha_3 \end{aligned}$$

  Com que aquestes dues equacions no s'anul·len necessàriament, es té que $f(G_2) \not\subseteq G_2$, i en particular $f(G_2) \neq G_2$. De fet, es pot demostrar que $f(G_2) \cap G_2 = \{0\}$.

- **Conclusions.** L'objectiu d'aquest problema és doble. Per una banda hem vist que la propietat de ser complementari es manté per automorfismes, és a dir, si tenim dos subespais vectorials F, G d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita tals que $E = F \oplus G$, aleshores les seves imatges per un automorfisme també són subespais complementaris. Tanmateix cal anar amb compte perquè encara que un dels dos subespais sigui "invariant" per l'automorfisme, l'altre subespai no ho és necessàriament, tal i com hem vist en el segon apartat. El primer apartat només ens diu que les imatges seguiran sent subespais complementaris, i de subespais complementaris a un subespai fixat n'hi ha infinits de diferents.

- 13.

Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base d'un espai vectorial tres dimensional E. Considerem l'endomorfisme f de E definit per $f(au_1 + bu_2 + cu_3) = (a + b + c)u_1 + (-2a - b - 2c)u_2 + cu_3$.

(a) Demostreu que f i f^2 són isomorfismes. Calculeu l'invers de f.
(b) Demostreu que $f + \mathrm{Id}$ és un isomorfisme però que $f^2 + \mathrm{Id}$ no ho és.
(c) Comproveu que $(f + \mathrm{Id}) \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = 2(f^2 + \mathrm{Id})$ i que $f^2 + \mathrm{Id} = f + f^{-1}$.

Solució

(a) —. L'invers és $f^{-1}(au_1 + bu_2 + cu_3) = (-a - b - c)u_1 + (2a + b)u_2 + cu_3$.
(b) —
(c) —

Resolució

- Aquest problema es pot resoldre de diverses maneres.

- Una primera aproximació seria usar les definicions dels objectes i treballar amb elles. Per exemple, per veure que una aplicació lineal h és un isomorfisme (és a dir, que és bijectiva), hauríem de veure que és un monomorfisme (és a dir, que és injectiva) i que és un epimorfisme (és a dir, que és exhaustiva).

  Així, una primera manera de veure que una aplicació lineal $h : E_1 \to E_2$ entre dos espais vectorials és un isomorfime consisteix a comprovar, per una banda que el seu nucli és $\operatorname{Ker} h = \{0\}$ (que el nucli sigui nul ens caracteritza la injectivitat de l'aplicació lineal) i, per altra banda hauríem de veure que la seva imatge és $\operatorname{Im} h = E_2$ (aquesta condició caracteritza l'exhaustivitat).

- Ara bé, en el nostre cas les aplicacions lineals que tenim són endomorfismes d'un espai vectorial de dimensió finita i, per tant, podem aplicar el següent resultat demostrat a classe de teoria:

  Proposició. *Sigui $h : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal entre dos $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita. Suposem que $\dim E_1 = \dim E_2$. Aleshores es té que, f és un monomorfisme $\Leftrightarrow$ f és un epimorfisme $\Leftrightarrow$ f és un isomorfisme.*

  D'aquesta manera, per demostrar que els endomorfismes dels apartats (a) i (b) són isomorfismes només ens cal verificar o bé que són injectius (és a dir que tenen nucli nul) o bé que són exhaustius (és a dir que tenen per imatge tot l'espai).

- Tanmateix treballar directament amb les aplicacions pot resultar llarg i tediós. De fet, i si és possible, en el cas de les aplicacions lineals és recomenable treballar amb la seva representació matricial[15]. Per aquest motiu en aquesta resolució treballarem amb les matrius associades als endomorfismes que ens demanen.

- Recordeu que si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita n, i si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base de l'espai E, aleshores la matriu de l'endomorfisme h en la base B és la matriu quadrada $M(h; B)$ de n files i n columnes que "té per columnes les coordenades de les imatges de la base", és a dir, és la matriu:

$$\text{“}M(h;B) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ h(e_1) & \ldots & h(e_i) & \ldots & h(e_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right)\text{”}$$

on, en la i-èsima columna, hi tenim escrites les coordenades del vector $h(e_i)$ en la base B.

- Abans de procedir a la resolució recordarem les propietats que farem servir. A teoria hem vist diferents propietats de la representació matricial de les aplicacions lineals (no necessàriament endomorfismes). Aquí, però, únicament recordarem l'enunciat en el cas de matrius associades a endomorfismes.

  Siguin E un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul de dimensió finita i sigui B una base de l'espai E. Siguin $f, g\colon E \to E$ dos endomorfismes de E i sigui $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar. Aleshores:

  - *Igualtat d'endomorfismes.* La matriu determina unívocament l'endomorfisme. És a dir, $f = g$ si i només si $M(f; B) = M(g; B)$.
  - *Suma d'endomorfismes.* La matriu associada a la suma d'endomorfismes és la suma de les matrius associades. És a dir, $M(f + g; B) = M(f; B) + M(g; B)$.
  - *Producte d'un endomorfisme per un escalar.* La matriu associada al producte d'un endomorfisme per un escalar és el producte de la matriu associada a l'endomorfisme per l'escalar. És a dir, $M(\lambda f; B) = \lambda M(f; B)$.
  - *Composició d'endomorfismes.* La matriu associada a la composició d'endomorfismes és el producte de les matrius associades. És a dir, $M(g \circ f; B) = M(g; B) \cdot M(f; B)$.
  - *Caracterització dels isomorfismes.* L'endomorfisme f és un isomorfisme si i només si la matriu associada és una matriu invertible. Per tant, f és un isomorfisme si i només si $M(f; B)$ és invertible si i només si $\operatorname{rang} M(f; B) = \dim E$ si i només si $\det M(f; B) \neq 0$.
  - *Invers d'un isomorfisme.* Si f és un isomorfisme aleshores la matriu associada a l'endomorfisme invers f^{-1} és la inversa de la matriu associada a f. És a dir, $M(f^{-1}; B) = M(f; B)^{-1}$.
  - *La identitat.* La matriu associada a l'endomorfisme identitat és la matriu identitat. És a dir, $M(\mathrm{Id}_E; B) = \mathrm{Id}$.

- Passem ara a la resolució del problema.

- **Notació.** Atès que totes les matrius associades a endomorfismes que considerarem en aquest problema les calcularem en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de l'espai E, denotarem la matriu associada a un endomorfisme $h\colon E \to E$ en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ per M_h enlloc de $M(h; \{u_1, u_2, u_3\})$.

[15]Per representar matricialment una aplicació lineal $h : E_1 \to E_2$ entre dos espais vectorials ens cal que els espais tinguin dimensió finita i, a més, hem de conèixer l'acció de l'aplicació sobre una base de l'espai. La definició d'aquesta matriu l'hem recordat en la pàgina 74.

Resolució (a)

- Primer anem a calcular la matriu associada a l'endomorfisme f en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$.
- L'endomorfisme $f : E \to E$ està definit per:

$$f(au_1 + bu_2 + cu_3) = (a + b + c)u_1 + (-2a - b - 2c)u_2 + cu_3$$

  i, per tant es té que els vectors de la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ tenen imatge:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1 - 2u_2 \\ f(u_2) &= u_1 - u_2 \\ f(u_3) &= u_1 - 2u_2 + u_3 \end{aligned}$$

  d'on, agafant coordenades en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ tindrem que:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (1, -2, 0)_B \\ f(u_2) &= (1, -1, 0)_B \\ f(u_3) &= (1, -2, 1)_B \end{aligned}$$

  Així, la matriu M_f associada a l'endomorfisme f en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de E és:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pels resultats que hem comentat sabem que, f és un isomorfisme si i només si la matriu M_f té determinant no nul. Calculant tenim

$$\det(M_f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$$

  i per tant, com que $\det(M_f) = 1 \neq 0$, podem concloure que f és un isomorfisme.

- Per veure que f^2 també és un isomorfisme, calcularem la matriu associada a aquest endomorfisme en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ i veurem que també té determinant no nul.

  Com que $f^2 = f \circ f$, per tant tenim $M_{f^2} = M_{f \circ f} = M_f \cdot M_f$. Tanmateix no necessitem calcular explícitament la matriu associada a f^2 ja que, per veure que f^2 és un isomorfisme, n'hi ha prou amb veure que la seva matriu associada té determinant no nul. Recordem que per la multiplicativitat del determinant sabem que donades dues matrius quadrades A_1, A_2 de la mateixa dimensió es compleix que $\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$. Per tant, en el nostre cas tenim:

$$\det(M_{f^2}) = \det(M_{f \circ f}) = \det(M_f \cdot M_f) = \det(M_f) \cdot \det(M_f).$$

  Així doncs $\det(M_{f^2}) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$, d'on es dedueix que f^2 també és un isomorfisme[16].

[16] Observem que amb el mateix argument es pot demostrar que si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita aleshores, h és un isomorfisme $\Leftrightarrow$ per a tot $n \geq 1$ l'endomorfisme h^n és un isomorfisme $\Leftrightarrow$ existeix un natural $n_0 \geq 1$ de manera que l'endomorfisme h^{n_0} és un isomorfimse.

- Finalment, hem de determinar f^{-1} (que sabem que existeix perquè f és un isomorfisme). Per fer-ho, determinarem la matriu associada a f^{-1}. Ara bé, recordem que la matriu $M_{f^{-1}}$ associada a f^{-1} compleix que $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$. Per tant:

$$M_{f^{-1}} = M_f^{-1} = \frac{1}{\det(M_f)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

i calculant tenim:

$$M_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Comentari.* Recordeu que també podem calcular la matriu inversa M_f^{-1} aplicant el mètode de Gauss. En el nostre cas si fem Gauus tindrem:

$$(M_f \mid \mathrm{Id}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (\mathrm{Id} \mid M_f^{-1}).$$

- Ara, un cop tenim la matriu inversa M_f^{-1}, la imatge per l'endomorfisme invers f^{-1} d'un vector $w = (a, b, c)_B = au_1 + bu_2 + cu_3 \in E$ es pot calcular com:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b-c \\ 2a+b \\ c \end{pmatrix}$$

i, per tant, es té que:

$$f^{-1}(a, b, c) = (-a-b-c, 2a+b, c).$$

- És a dir l'expressió general de l'endomorfisme f^{-1} és:

$$f^{-1}(au_1 + bu_2 + cu_3) = (-a-b-c)u_1 + (2a+b)u_2 + cu_3.$$

Resolució (b)

- Tot i que la composició d'isomofismes sempre és un isomorfisme, això no és cert, en general, per a la suma. L'exemple més clar és prendre les aplicacions Id i $-\mathrm{Id}$ en qualsevol espai vectorial no nul. És clar que ambdues aplicacions són isomorfismes, però la seva suma és $\mathrm{Id} + (-\mathrm{Id}) = 0$ (l'aplicació idènticament 0), que no és un isomorfisme. En aquest apartat veurem un altre exemple. Concretament veurem que la suma d'isomorfismes $f + \mathrm{Id}$ també és un isomorfisme, mentre que la suma d'isomorfismes $f^2 + \mathrm{Id}$ no ho és.

- Recordem que la matriu associada a una suma d'aplicacions lineals definides sobre els mateixos espais vectorials és la suma de les matrius associades a cadascuna de les aplicacions. Aplicant això a l'endomorfisme $f + \mathrm{Id}$ tindrem que la seva matriu associada és:

$$M_{f+\mathrm{Id}} = M_f + M_{\mathrm{Id}} = M_f + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ara, per determinar si $f + \mathrm{Id}$ és un isomorfisme, procedirem com en l'apartat anterior: veurem si el determinant de la matriu associada a aquest endomorfisme és no nul. Calculant tenim:

$$\det(M_{f+\mathrm{Id}}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-4) = 4.$$

D'on, com que $\det(M_{f+\mathrm{Id}}) = 4 \neq 0$, aleshores es té que la matriu $M_{f+\mathrm{Id}}$ és invertible i, per tant, l'endomorfisme $f + \mathrm{Id}$ és un isomorfisme.

- Procedim anàlogament amb l'endomorfisme $f^2 + \mathrm{Id}$. La matriu associada a aquest endomorfisme és la matriu:

$$\begin{aligned} M_{f^2+\mathrm{Id}} &= M_{f^2} + M_{\mathrm{Id}} = M_f \cdot M_f + \mathrm{Id} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aquesta matriu té clarament determinant nul, ja que té dues columnes de zeros. Per tant, en deduïm que $f^2 + \mathrm{Id}$ no és un isomorfisme, perquè la seva matriu associada no és invertible.

Resolució (c)

- Volem demostrar les igualtats d'endomorfismes:

$$\begin{gathered} (f + \mathrm{Id}) \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = 2(f^2 + \mathrm{Id}) \\ f^2 + \mathrm{Id} = f + f^{-1} \end{gathered}$$

- Per una banda recordeu que la igualtat a nivell d'aplicacions és equivalent a la igualtat entre les matrius associades. Per tant, per comprovar aquestes identitats d'endomorfismes n'hi ha prou amb comprovar-les per a les seves matrius associades. Així es té que:

$$(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id}) = 2(f^2+\mathrm{Id}) \Longleftrightarrow M_{(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id})} = M_{2(f^2+\mathrm{Id})}$$
$$f^2+\mathrm{Id} = f+f^{-1} \Longleftrightarrow M_{f^2+\mathrm{Id}} = M_{f+f^{-1}}$$

- Però a més, per altra banda, el comportament de les matrius associades respecte les operacions d'endomorfimes ens permet afirmar que tenim les igualtats:

$$\begin{aligned} M_{(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id})} &= M_{f+\mathrm{Id}} \cdot M_{f^2+\mathrm{Id}} \\ M_{2(f^2+\mathrm{Id})} &= 2M_{f^2+\mathrm{Id}} \\ M_{f+f^{-1}} &= M_f + M_{f^{-1}} \end{aligned}$$

- Per tant podem concloure que:

$$(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id}) = 2(f^2+\mathrm{Id}) \Longleftrightarrow M_{f+\mathrm{Id}} \cdot M_{f^2+\mathrm{Id}} = 2M_{f^2+\mathrm{Id}}$$
$$f^2+\mathrm{Id} = f+f^{-1} \Longleftrightarrow M_{f^2+\mathrm{Id}} = M_f + M_{f^{-1}}$$

- Recordeu que en els apartats anteriors ja hem calculat totes les matrius que intervenen en aquestes dues igualtas matricials. Així, per acabar, només hem de comprovar que aquestes dues igualtats de matrius són certes.

  Calculant tenim:

$$\begin{aligned} M_{f+\mathrm{Id}} \cdot M_{f^2+\mathrm{Id}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2M_{f^2+\mathrm{Id}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_f + M_{f^{-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M_{f^2+\mathrm{Id}} \end{aligned}$$

  i per tant, com que les dues identitats són certes a nivell de matrius, també seran certes per a les aplicacions.

- **Comentari.** Observem que la igualtat d'endomorfismes $f^2+\mathrm{Id} = f+f^{-1}$ es pot obtenir usant la igualtat $(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id}) = 2(f^2+\mathrm{Id})$ i el fet de que f és un isomorfisme. En efecte, si sabem que $(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id}) = 2(f^2+\mathrm{Id})$ aleshores, com que $(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id}) = f^3+f^2+f+\mathrm{Id}$, per tant tindrem que $f^3+f^2+f+\mathrm{Id} = 2f^2+2\,\mathrm{Id}$, d'on s'obté la igualtat $f^3+f = f^2+\mathrm{Id}$ i ara, aplicant l'isomorfisme f^{-1} a cada banda, es té que $f^2+\mathrm{Id} = f+f^{-1}$.

- **Comentari.** Observem que no podem fer la simplificació "$(f+\mathrm{Id})\circ(f^2+\mathrm{Id}) = 2(f^2+\mathrm{Id}) \Rightarrow (f+\mathrm{Id}) = 2\,\mathrm{Id}$" ja que per "tatxar" l'endomorfisme $f^2+\mathrm{Id}$ és necessari que aquest sigui un isomorfisme. És a dir, recordeu que en general "simplificar" vol dir "operar amb l'invers" i per tant, en aquest cas, per "simplificar" en realitat cal composar amb l'invers de $f^2 + \mathrm{Id}$ per la dreta, el qual no existeix.

- 14.

Sigui $f_1 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'aplicació definida per $f_1(p) = p'$, i sigui $f_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ l'aplicació definida per $f_2(p) = \int_0^x p(t)dt$.

(a) Demostreu que f_1 és un $\mathbb{R}$-endomorfisme de $\mathbb{R}[x]$ exhaustiu però no injectiu, i que f_2 és un $\mathbb{R}$-endomorfisme de $\mathbb{R}[x]$ injectiu però no exhaustiu.

(b) Comproveu que la composició $f_1 \circ f_2$ és bijectiva, mentre que la composició $f_2 \circ f_1$ no és ni injectiva ni exhaustiva.

Solució

—

Resolució

- En aquest problema treballem amb l'espai vectorial $\mathbb{R}[x]$ dels polinomis amb coeficients reals. Aquest espai vectorial té dimensió infinita (concretament té dimensió infinita numerable), i el conjunt de polinomis

$$\{x^n\}_{n\geq 0} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$$

és una base d'aquest espai. Abans de començar la resolució d'aquest problema, anem a fer alguns comentaris relatius als espais vectorials infinit dimensionals.

- **Comentari.** Recordeu que, independentment de la dimensió de l'espai vectorial, les combinacions lineals sempre són sumes finites. Per tant, si un $\mathbb{K}$-espai vectorial E és de dimensió infinita amb base $B = \{v_i\}_{i\in I}$ aleshores, per a tot element $v \in E$ es té que existeix un nombre finit de $n(v) \geq 1$ escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n(v)} \in \mathbb{K}$, i existeixen $n(v)$ elements de la base $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n(v)}} \in B$ de manera que:

$$v = \lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + \ldots + \lambda_{n(v)} v_{i_{n(v)}}.$$

Observeu que en aquesta suma no hi "surten" tots els elements de la base. Ara bé, la frase "tot element s'escriu, de manera única, com combinació lineal d'elements de la base" continua tenint sentit ja que podem escriure la "suma finita" com una "suma infinita" on només hi hagi un "nombre finit de sumands no nuls". És a dir, com que $B = \{v_i\}_{i\in I}$ és una base de E aleshores, per a tot $v \in E$ podem afirmar que existeixen uns únics escalars $\{\mu_i\}_{i\in I}$ de manera que el conjunt $\{i \,:\, \mu_i \neq 0\}$ és finit i es té la igualtat

$$v = \sum_{i\in I} \mu_i v_i.$$

Observeu que si no tenim la condició "el conjunt $\{i \,:\, \mu_i \neq 0\}$ és finit" aleshores tenim una "suma infinita" d'elements, és a dir, tenim una sèrie.

- **Comentari.** Si hem de treballar amb un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita el que fem, normalment, és fixar una base i, aleshores, treballar amb les coordenades que els elements de l'espai tenen en aquesta base. D'aquesta manera deixem de treballar directament en l'espai E per passar a treballar en el $\mathbb{K}$-espai vectorial n-dimensional $\mathbb{K}^n$ on $n = \dim E$. Fent això els elements de l'espai els pensem com n-plas i podem considerar, per exemple, la matriu que aquestes n-plas ens defineixen. Observem que això no ho podem fer en el cas d'espais de dimensió infinita ja que en aquest cas tindríem "matrius infinites".

- **Comentari.** L'objectiu d'aquest problema és mostrar que els resultats que hem vist en l'assignatura per a espais de dimensió finita no sempre funcionen en el cas infinit dimensional. Concretament en aquest problema veurem dos resultats de dimensió finita que no es conserven en dimensió infinita:

  - Sabem que si $f : E \to E$ és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de de dimensió finita aleshores es té que, l'endomorfsme f és bijectiu $\Leftrightarrow$ f és injectiu $\Leftrightarrow$ f és exhaustiu. És a dir, en dimensió finita són equivalents ser bijectiu, ser injectiu i ser exhaustiu.

    En el primer apartat d'aquest problema veurem que aquest resultat pot no ser cert en dimensió infinita. Concretament veurem que existeixen dos endomorfismes tals que un és exhaustiu, però no injectiu, mentre que el segon és injectiu, però no exhaustiu.

  - En el segon apartat veurem un altre exemple on la intuïció falla. Concretament veurem que existeixen dos endomorfismes tals que la composició en un sentit ens dóna un endomorfisme bijectiu ben definit (de fet, la composició en un sentit serà la identitat), mentre que la composició en sentit contrari ens dóna un endomorfisme que no és ni injectiu ni exhaustiu.

    Aquest resultat és impensable en dimensió finita ja que si $f, g : E \to E$ són dos endomorfismes d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió finita, aleshores es té que, la composició $f \circ g$ és bijectiva $\Leftrightarrow$ els endomorfismes f i g són bijectius $\Leftrightarrow$ la composició $g \circ f$ és bijectiva [17].

  En conclusió, hem de vigilar quan treballem amb espais vectorials de dimensió infinita ja que, en aquest cas, la intuïció ens pot fallar.

- Un cop fets aquests comentaris, passem a la resolució del nostre problema.

Resolució (a)

- Primer de tot observem que si $p \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi aleshores la seva derivada p' i la seva integral $\int_0^x p(t)dt$ també són polinomis. És a dir, si $p \in \mathbb{R}[x]$ aleshores $f_1(p), f_2(p) \in \mathbb{R}[x]$. Per tant les aplicacions f_1 i f_2 estan ben definides[18].

- Un cop hem justificat que les aplicacions f_1 i f_2 estan ben definides, anem a veure que les dues

[17] Matricialment, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ són dues matrius quadrades d'ordre n amb coeficients en un cos commutatiu $\mathbb{K}$, aleshores, la matriu producte $A \cdot B$ és invertible $\Leftrightarrow$ les matrius A i B són ivertibles $\Leftrightarrow$ la matriu producte $B \cdot A$ és invertible. Recordeu que $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B) = \det(B \cdot A)$.

[18] Observeu que no tenim problemes ja que estem en $\mathbb{R}[x]$. Ara bé, si considerem $\mathbb{R}_n[x]$ aleshores l'aplicació $g_1 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definida per $g_1(p) = p'$ està ben definida, però "l'aplicació" $g_2 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definida per $g_2(p) = \int_0^x p(t)dt$ no està ben definida.

aplicacions són $\mathbb{R}$-lineals. És a dir, hem de veure que si $p, q \in \mathbb{R}[x]$ són dos polinomis i si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ són dos escalars aleshores es té que:

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda p + \mu q) &= \lambda f_1(p) + \mu f_1(q) \\
f_2(\lambda p + \mu q) &= \lambda f_2(p) + \mu f_2(q)
\end{aligned}
$$

Observem, però, que de fet això és ben conegut ja que no és res més que la linealitat de la derivació i de la integració. És a dir, com que:

$$
\begin{aligned}
(\lambda p + \mu q)' &= \lambda p' + \mu q' \\
\int_0^x (\lambda p(t) + \mu q(t))dt &= \lambda \int_0^x p(t)dt + \mu \int_0^x q(t)dt
\end{aligned}
$$

tenim que:

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda p + \mu q) &= (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda f_1(p) + \mu f_1(q) \\
f_2(\lambda p + \mu q) &= \int_0^x (\lambda p(t) + \mu q(t))dt = \lambda \int_0^x p(t)dt + \mu \int_0^x q(t)dt = \lambda f_2(p) + \mu f_2(q)
\end{aligned}
$$

- Així, doncs, les aplicacions $f_1 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ i $f_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ són dos $\mathbb{R}$-endomorfismes de l'espai vectorial real de dimensió infinita $\mathbb{R}[x]$. Ara anem a veure que f_1 és exhaustiu però no injectiu, i que f_2 és injectiu però no exhaustiu.

- *Primer vegem que f_1 és un endomorfisme exhaustiu (és un epimorfisme).*

Una manera de veure que l'aplicació f_1 és exhaustiva consisteix a demostrar que tot polinomi té, com a mínim, una antiimatge per f_1. És a dir hem de veure que, si $p \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi arbitrari aleshores existeix, com a mínim, un polinomi $q \in \mathbb{R}[x]$ amb $f_1(q) = p$. És a dir, donat un polinomi $p \in \mathbb{R}[x]$ hem de veure que existeix, com a mínim, un polinomi $q \in \mathbb{R}[x]$ amb $q' = p$. Això en aquest cas és evident ja que si $p \in \mathbb{R}[x]$ és el polinomi genèric:

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

aleshores, el polinomi $q \in \mathbb{R}[x]$ definit per:

$$q = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$$

és una antiimatge de p per f_1. En efecte, calculant tenim:

$$f_1(q) = q' = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \right)' = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} (x^{i+1})' = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} \cdot (i+1)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = p.$$

Observem que aquesta demostració de la exhaustivitat és "constructiva" ja que donem, de manera explícita, una antiimatge d'un element genèric.

Una manera alternativa de veure que f_1 és exhaustiva és comprovar que $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}[x]$ i, per demostrar-ho, fer servir que l'aplicació f_1 és lineal i que coneixem una base de l'espai. Concretament, fer servir el següent resultat: com que $\{x^n\}_{n\geq 0}$ és una base de $\mathbb{R}[x]$, i com que f_1 és lineal, aleshores el conjunt $\{f_1(x^n)\}_{n\geq 0}$ és un sistema de generadors del subespai imatge $\operatorname{Im} f_1$. Si ho fem en el nostre cas es té que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f_1 &= \langle f_1(1), f_1(x), f_1(x^2), \dots, f_1(x^n), f_1(x^{n+1}), \dots \rangle \\
&= \langle 0, 1, 2x, \dots, nx^{n-1}, (n+1)x^n, \dots \rangle \\
&= \langle 1, 2x, \dots, nx^{n-1}, (n+1)x^n, \dots \rangle \\
&= \langle 1, x, \dots, x^{n-1}, x^n, \dots \rangle \\
&= \mathbb{R}[x]
\end{aligned}$$

com volíem demostrar.

- *Vegem a continuació que f_1 no és un endomorfisme injectiu (no és un monomorfisme).*

Hi ha diferents maneres de veure si una aplicació és o no és injectiva. Una d'elles és fer servir la definició d'injectivitat. Si volem pensar-ho d'aquesta manera aleshores, per veure que f_1 no és injectiva hem de trobar dos polinomis diferents $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tals que $f_1(p) = f_1(q)$, és a dir dos polinomis diferents tals que tenen la mateixa imatge, en aquest cas, que tenen la mateixa derivada. Aquí, per exemple, els polinomis $p = x$ i $q = 1 + x$ ho verifiquen i, per tant, f_1 no és injectiva.

Una manera diferent de veure si l'aplicació f_1 no és injectiva és fer servir que aquesta aplicació és lineal i que, per tant, podem aplicar la següent caracterització d'injectivitat de les aplicacions lineals: una aplicació lineal $h : E_1 \to E_2$ és injectiva si i només si el seu nucli $\operatorname{Ker} h$ és nul, (recordeu que si h és lineal aleshores es té que $h(0) = 0$). Per tant, per estudiar la injectivitat hem de calcular el nucli de l'aplicació lineal. En el nostre cas, si $p \in \mathbb{R}[x]$ és el polinomi:

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

aleshores:

$$f_1(p) = p' = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right)' = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^i)' = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$$

d'on es té que:

$$\begin{aligned}
f_1(p) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow i a_i = 0 \text{ per a } 0 \leq i \leq n \Leftrightarrow a_i = 0 \text{ per a } 1 \leq i \leq n \\
&\Leftrightarrow p = a_0 \\
&\Leftrightarrow p \text{ és un polinomi constant}
\end{aligned}$$

i per tant el nucli de f_1 és:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f_1 &= \{ p \in \mathbb{R}[x] \,:\, f_1(p) = 0 \} \\
&= \{ p \in \mathbb{R}[x] \,:\, p \text{ és un polinomi constant} \} \\
&= \langle 1 \rangle
\end{aligned}$$

que és un subespai vectorial no nul de dimensió 1 (una base del nucli és el polinomi constant $p = 1$). En particular, com que $\operatorname{Ker} f_1 \neq \{0\}$, aleshores f_1 no és injectiva.

Observem que, de la linealitat de f_1 es té que dos polinomis tenen la mateixa imatge per f_1 si i només si la seva diferència és un element del nucli de f_1. Per tant, dos polinomis tenen la mateixa imatge per f_1 si i només si difereixen en una constant.

- *Ara anem a veure que f_2 és un endomorfisme injectiu (un monomorfisme).*

Per veure la injectivitat, n'hi ha prou amb provar que el seu nucli és trivial. Per tant, hem de veure quins polinomis s'anul·len per f_2.

Anem a fer-ho. Sigui $p \in \mathbb{R}[x]$ el polinomi:

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

aleshores:

$$f_2(p) = \int_0^x p(t)dt = \int_0^x \sum_{i=0}^{n} a_i t^i dt = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^x t^i dt = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$$

i per tant:

$$\begin{aligned} f_2(p) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_i}{i+1} = 0 \text{ per a } 0 \le i \le n \Leftrightarrow a_i = 0 \text{ per a } 0 \le i \le n \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

d'on es dedueix que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f_2 &= \{p \in \mathbb{R}[x] \;:\; f_2(p) = 0\} \\ &= \{0\} = \langle 0 \rangle \end{aligned}$$

i, per tant, f_2 és un endomorfisme injectiu.

- *Finalment vegem que f_2 no és un endomorfisme exhaustiu (no és un epimorfisme).*

Ara, per veure que f_2 no és exhaustiu, el que farem serà calcular un sistema de generadors de $\operatorname{Im} f_2$ i veurem que $\operatorname{Im} f_2 \subsetneq \mathbb{R}[x]$. Recordem que per calcular un sistema de generadors del subespai $\operatorname{Im} f_2$ n'hi ha prou amb calcular la imatge d'una base qualsevol de $\mathbb{R}[x]$ per f_2.

En el nostre cas, si considerem la base $\{x^n\}_{n\ge 0}$ de $\mathbb{R}[x]$ i calculem la seva imatge per l'endomorfisme f_2, aleshores tenim:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_2 &= \langle f_2(1), f_2(x), f_2(x^2), \ldots, f_2(x^{n-1}), f_2(x^n), \ldots \rangle \\ &= \langle x, x^2/2, x^3/3, \ldots, x^n/n, x^{n+1}/(n+1), \ldots \rangle \\ &= \langle x, x^2, x^3 \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots \rangle \\ &\subsetneq \langle 1, x, x^2, x^3 \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots \rangle \\ &= \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Observem que $1 \notin \operatorname{Im} f_2$, de manera que els polinomis constants no nuls no estan en la imatge de f_2 i, en particular, cap d'aquests elements pot tenir antiimatge per aquesta aplicació. De fet, els elements de la imatge de f_2 són els polinomis amb terme independent igual a zero. Així doncs, f_2 no és exhaustiu.

Resolució (b)

- Observeu que com que f_1 i f_2 són dos endomorfismes de $\mathbb{R}[x]$, aleshores podem considerar les composicions $f_1 \circ f_2$ i $f_2 \circ f_1$. Ambdues composicions són endomorfismes de $\mathbb{R}[x]$.

- *Anem a veure que la composició $f_1 \circ f_2$ és bijectiva.*

  Fixem-nos que la composició que estem considerant és:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}[x] \\ p & \longmapsto & \int_0^x p(t)dt & & \\ & & q & \longmapsto & q' \end{array}$$

  Per tant, si $p \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi arbitrari donat per

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

  aleshores, tal i com hem vist abans, $f_2(p)$ es pot calcular com

$$f_2(p) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$$

  i, per tant, $(f_1 \circ f_2)(p)$ ve donat per:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(p) = f_1(f_2(p)) &= f_1\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} f_1(x^{i+1}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(i+1)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = p. \end{aligned}$$

  Com que el polinomi p que hem pres era arbitrari, tenim que $(f_1 \circ f_2)(p) = p$ per a tot $p \in \mathbb{R}[x]$. Per tant, $f_1 \circ f_2 = \mathrm{Id}$, que és bijectiva.

- *Vegem a continuació que $f_2 \circ f_1$ no és ni injectiva ni exhaustiva.*

  En aquest cas, la composició que estem considerant és:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}[x] \\ p & \longmapsto & p' & & \\ & & q & \longmapsto & \int_0^x q(t)dt \end{array}$$

Com abans, sigui $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi arbitrari donat per

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

i calculem la seva imatge per $f_2 \circ f_1$. En primer lloc, tenim que $f_1(p)$ ve donat per:

$$f_1(p) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

i si ara apliquem f_2 a aquest darrer polinomi, tenim

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(p) = f_2(f_1(p)) = f_2\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}\right) &= \int_0^x \sum_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1} dt \\ = \sum_{i=1}^{n} i a_i \int_0^x t^{i-1} dt = \sum_{i=1}^{n} i a_i \frac{x^i}{i} &= \sum_{i=1}^{n} a_i x^i.\end{aligned}$$

D'una banda observem que d'aquesta darrera expressió en podem deduir que

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(p) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \text{ per a } 1 \le i \le n \\ &\Leftrightarrow p = a_0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ és un polinomi constant}\end{aligned}$$

i per tant el nucli de la composició $f_2 \circ f_1$ és el subespai:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1) &= \{p \in \mathbb{R}[x] \ : \ (f_2 \circ f_1)(p) = 0\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}[x] \ : \ p \text{ és un polinomi constant}\} \\ &= \langle 1 \rangle\end{aligned}$$

d'on, com que el nucli no és nul, podem concloure que $f_2 \circ f_1$ no és injectiva.

D'altra banda la composició $f_2 \circ f_1$ no és exhaustiva ja que les constants no estan en la imatge. Concretament la imatge de $f_2 \circ f_1$ és el subespai:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f_2 \circ f_1) &= \langle (f_2 \circ f_1)(1), (f_2 \circ f_1)(x), (f_2 \circ f_1)(x^2), \ldots, (f_2 \circ f_1)(x^{n-1}), (f_2 \circ f_1)(x^n), \ldots \rangle \\ &= \langle x, x^2, x^3 \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots \rangle \subsetneq \langle 1, x, x^2, x^3 \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots \rangle = \mathbb{R}[x].\end{aligned}$$

- *Observació.* Observeu que si $p \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi arbitrari, aleshores $(f_1 \circ f_2)(p) = p$ mentre que $(f_2 \circ f_1)(p) = p - p(0)$.

- **Comentari.** En l'apartat (a) hem vist que l'aplicació lineal f_1 no és injectiva i que l'aplicació lineal f_2 no és exhaustiva. Aleshores, per demostrar que la composició $f_2 \circ f_1$ no és ni injectiva ni exhaustiva podem fer servir o bé el següent resultat general d'aplicacions lineals:

  Si $h_1 \colon E_1 \to E_2$ *i* $h_2 \colon E_2 \to E_3$ *són dues aplicacions lineals, aleshores* $\mathrm{Ker}\, h_1 \subseteq \mathrm{Ker}(h_2 \circ h_1)$ *i* $\mathrm{Im}(h_2 \circ h_1) \subseteq \mathrm{Im}\, h_2$.

o bé el següent resultat de teoria de conjunts:

> *Si* $h_1 \colon X_1 \to X_2$ *i* $h_2 \colon X_2 \to X_3$ *són dues aplicacions tals que la composició* $h_2 \circ h_1$ *és exhaustiva, aleshores l'aplicació* h_2 *és exhaustiva. Mentre que si la composició* $h_2 \circ h_1$ *és injectiva, aleshores l'aplicació* h_1 *és injectiva.*

Deixem com a exercici al lector demostrar aquests dos resultats i aplicar-los per justificar que la composició $f_2 \circ f_1$ no és ni injectiva ni exhaustiva.

- 15.

Siguin E_3 i E_2 dos espais vectorials reals de dimensions 3 i 2 respectivament. Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E_3, sigui $\{v_1, v_2\}$ una base de E_2, i sigui $f : E_3 \to E_2$ l'aplicació lineal definida per $f(e_1) = v_1 + 2v_2$, $f(e_2) = v_1 + 3v_2$, $f(e_3) = v_1 + 4v_2$. Comproveu que els vectors $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$, $u_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$, determinen una base de E_3, i que els vectors $w_1 = f(u_1)$, $w_2 = f(u_2)$ determinen una base de E_2. Doneu la matriu associada a f en aquestes bases.

Solució

—. La matriu associada és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolució

- Denotarem per B_e, B_u, B_v i B_w els següents conjunts de vectors:

$$B_e = \{e_1, e_2, e_3\} \ , \quad B_u = \{u_1, u_2, u_3\} \ , \quad B_v = \{v_1, v_2\} \ , \quad B_w = \{w_1, w_2\}.$$

- Per hipòtesi sabem que el conjunt B_e és una base de l'espai vectorial E_3 i que el conjunt B_v és una base de l'espai vectorial E_2. Anem a veure que els conjunts B_u i B_w també són bases.

- *Primer demostrem que B_u és una base de E_3.*

Recordem que els vectors u_1, u_2, u_3 venen definits per:

$$u_1 = e_1 + e_2 \ , \quad u_2 = e_2 + e_3 \ , \quad u_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

d'on, prenent coordenades en la base B_e, tenim:

$$u_1 = (1, 1, 0)_{B_e} \ , \quad u_2 = (0, 1, 1)_{B_e} \ , \quad u_3 = (1, -2, 1)_{B_e}.$$

Aleshores, per provar que el conjunt $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de E_3, n'hi ha prou amb provar que la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors u_1, u_2, u_3 en la base B_e, és una matriu de rang màxim o, equivalentment, que és una matriu de determinant no nul. En el nostre cas, per tant, hem de veure que la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

té determinant no nul.

Calculant tenim:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4.$$

Així, com que $\det(P) = 4 \neq 0$, podem concloure que el conjunt B_u és una base de E_3.

- *Ara anem a demostrar que B_w és una base de E_2.*

Recordem que els vectors w_1 i w_2 venen definits per:

$$w_1 = f(u_1)\ , \quad w_2 = f(u_2)$$

on $f : E_3 \to E_2$ és l'aplicació lineal definida per:

$$f(e_1) = v_1 + 2v_2\ , \quad f(e_2) = v_1 + 3v_2\ , \quad f(e_3) = v_1 + 4v_2.$$

Per tant, de la definició dels vectors u_1 i u_2, i de la linealitat de l'aplicació f ens queda:

$$\begin{aligned} w_1 &= f(u_1) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (v_1 + 2v_2) + (v_1 + 3v_2) = 2v_1 + 5v_2 \\ w_2 &= f(u_2) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = (v_1 + 3v_2) + (v_1 + 4v_2) = 2v_1 + 7v_2 \end{aligned}$$

i finalment prenent coordenades en la base B_v tindrem:

$$\begin{aligned} w_1 &= 2v_1 + 5v_2 = (2, 5)_{B_v} \\ w_2 &= 2v_1 + 7v_2 = (2, 7)_{B_v} \end{aligned}$$

Així, doncs, per veure que el conjunt $B_w = \{w_1, w_2\}$ és una base de E_2, n'hi ha prou amb veure que la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors w_1, w_2 en la base B_v, és una matriu de rang màxim. És a dir hem de veure que la matriu

$$Q = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

té determinant no nul. Calculant el determinant tenim

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 4$$

i, com que és no nul, podem concloure que el conjunt B_w és una base de E_2.

- Per tant, de moment hem demostrat que els conjunts B_u i B_w també són bases. Un cop comprovat això, i per acabar, anem a calcular la matriu de l'aplicació lineal f en aquestes bases.

- *Per últim, calculem la matriu associada a f en les bases B_u i B_w.*

El càlcul d'aquesta matriu es pot fer de diverses maneres. D'una banda, per exemple, podem calcular-la fent servir el procediment estàndard de "canvi de base" i, d'altra banda, la podríem calcular directament fent servir la definició de matriu associada a una aplicació lineal. Aquí anem a presentar aquests dos mètodes de resolució.

- Mètode I.

Tenim l'aplicació lineal $f : E_3 \to E_2$ definida per:

$$f(e_1) = v_1 + 2v_2 \ , \quad f(e_2) = v_1 + 3v_2 \ , \quad f(e_3) = v_1 + 4v_2$$

d'on, agafant coordenades en la base B_v, podem escriure:

$$f(e_1) = (1, 2)_{B_v} \ , \quad f(e_2) = (1, 3)_{B_v} \ , \quad f(e_3) = (1, 4)_{B_v} .$$

Per tant directament tenim la matriu associada a f en les bases B_e i B_v, que és la matriu:

$$M(f; B_e, B_v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ara farem servir canvis de base per calcular la matriu associada a l'aplicació lineal f en les bases B_u i B_w. Concretament per calcular aquesta matriu n'hi ha prou amb multiplicar a banda i banda la matriu $M(f; B_e, B_v)$ per la corresponent matriu de canvi de base.

- **Comentari.** Recordeu que si B és una base d'un espai vectorial E de dimensió finita aleshores la matriu associada a l'aplicació identitat $\mathrm{Id}_E : E \to E$ en la base B de E és la matriu identitat, és a dir $M(\mathrm{Id}_E; B) = \mathrm{Id}_n$. Ara bé, si tenim dues bases B_1 i B_2 de l'espai vectorial E aleshores, la matriu de l'aplicació identitat Id_E en aquestes bases és la matriu de canvi de base. És a dir $M(\mathrm{Id}_E; B_1, B_2) = M(B_1 \to B_2)$ és la matriu que transforma les coordenades d'un vector w de E en la base B_1 en les coordenades del vector w en la base B_2.

Per tant, en el nostre cas, la matriu $M(f; B_u, B_w)$ associada a l'aplicació lineal f en les bases B_u i B_w la calcularem fent:

$$M(f; B_u, B_w) = M(B_v \to B_w) \cdot M(f; B_e, B_v) \cdot M(B_u \to B_e)$$

igualtat que es pot escriure amb el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
(E_3, B_u) \arrow[r, "f", "M(f;B_u,B_w)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{E_3}"', "M(B_u \to B_e)"] & (E_2, B_w) \\
(E_3, B_e) \arrow[r, "f", "M(f;B_e,B_v)"'] & (E_2, B_v) \arrow[u, "\mathrm{Id}_{E_2}"', "M(B_v \to B_w)"]
\end{tikzcd}$$

on cada element d'aquest diagrama commutatiu és:

(E_3, B_e) és l'espai vectorial E_3 amb la base B_e.

(E_3, B_u) és l'espai vectorial E_3 amb la base B_u.

(E_2, B_v) és l'espai vectorial E_2 amb la base B_v.

(E_2, B_w) és l'espai vectorial E_2 amb la base B_w.

$M(B_u \to B_e)$ és la matriu de canvi de base de la base B_u a la base B_e de E_3.

$M(B_v \to B_w)$ és la matriu de canvi de base de la base B_v a la base B_w de E_2.

$M(f; B_e, B_v)$ és la matriu de l'aplicació lineal f en les bases B_e de E_3 i B_v de E_2.

$M(f; B_u, B_w)$ és la matriu de l'aplicació lineal f en les bases B_u de E_3 i B_w de E_2.

Observem que, per construcció, la matriu P és la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors de la base B_u escrites en la base B_e. Per tant, la matriu P és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector de E_3 en la base B_u en les coordenades del vector en la base B_e. És a dir,

$$M(B_u \to B_e) = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anàlogament, per construcció, la matriu Q és la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors de la base B_w escrites en la base B_v. Per tant, Q és la matriu canvi de base que transforma les coordenades d'un vector de E_2 en la base B_w en les coordenades del vector en la base B_v. És a dir,

$$M(B_w \to B_v) = Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

D'aquí es té que la inversa de Q és la matriu del canvi de base invers. És a dir,

$$M(B_v \to B_w) = M(B_w \to B_v)^{-1} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, fent el producte, obtenim la matriu $M(f; B_u, B_w)$ associada a l'aplicació lineal f en la bases B_u de E_3 i B_w de E_2:

$$\begin{aligned} M(f; B_u, B_w) &= M(B_v \to B_w) \cdot M(f; B_e, B_v) \cdot M(B_u \to B_e) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Mètode II.

Anem a calcular la matriu fent servir la definició de matriu associada a una aplicació lineal. En aquest exercici veureu que resulta molt més fàcil calcular-la d'aquesta manera.

Per definició, la matriu $M(f; B_u, B_w)$ associada a l'aplicació lineal f en la bases $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ de E_3 i $B_w = \{w_1, w_2\}$ de E_2 és la matriu que té per "columnes" les coordenades dels vectors $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ en la base B_w. És a dir,

$$\text{“}M(f; B_u, B_w) = \left(\begin{array}{c|c|c} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}\right)\text{”}$$

on en la i-èsima columna hi escrivim les coordenades del vector $f(u_i)$ en la base $B_w = \{w_1, w_2\}$. Així, en el nostre cas, no hem de fer res per calcular les dues primeres columnes d'aquesta matriu ja que, per definició, tenim:

$$w_1 = f(u_1)\ , \quad w_2 = f(u_2)$$

i, per tant, es té que:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= w_1 = (1, 0)_{B_w} \\ f(u_2) &= w_2 = (0, 1)_{B_w} \end{aligned}$$

Ara, per acabar, ens falta calcular la tercera columna d'aquesta matriu, és a dir, ens falta calcular les coordenades de $f(u_3)$ en la base B_w. En aquest cas el càlcul també és senzill ja que com que per definició

$$u_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

aleshores, fent servir la definició i la linealitat de f tindrem que:

$$\begin{aligned} f(u_3) &= f(e_1 - 2e_2 + e_3) \\ &= f(e_1) - 2f(e_2) + f(e_3) \\ &= (v_1 + 2v_2) - 2(v_1 + 3v_2) + (v_1 + 4v_2) = 0 \end{aligned}$$

i, per tant, si agafem coordenades tindrem:

$$f(u_3) = 0 = (0, 0)_{B_w}.$$

D'aquesta manera tenim directament la matriu associada a l'aplicació lineal f en les bases B_u de E_3 i B_w de E_2:

$$M(f; B_u, B_w) = \text{“}\left(\begin{array}{c|c|c} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}\right)\text{”} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 16.

Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per $f(x,y,z,t) = (-x+2y-t, x-y+z, x+t, -y+z-t)$, i sigui F el subespai vectorial $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y+z = z-t = 0\}$.

(a) Demostreu que f indueix un endomorfisme $\widetilde{f}$ de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$. És a dir, demostreu que l'aplicació $\widetilde{f}([(x,y,z,t)]) = [f(x,y,z,t)]$ està ben definida i és lineal.

(b) Comproveu que el conjunt $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$ és una base de $\mathbb{R}^4/F$. Ho és el conjunt $\{[(1,0,0,0)], [(0,1,0,0)]\}$?

(c) Doneu la matriu associada a $\widetilde{f}$ en la base $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$.

Solució

(a) —

(b) —. No.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Resolució (a)

- Per demostrar que $\widetilde{f}$ està "ben definida" hem de comprovar que la seva definició és independent del representant de la classe d'equivalència que agafem. És a dir, en principi, per demostrar que $\widetilde{f}$ està "ben definida" hauríem de veure que, si tenim dos elements $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ amb $[v_1] = [v_2]$ en l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$, aleshores també es té la igualtat de classes $[f(v_1)] = [f(v_2)]$ en $\mathbb{R}^4/F$.

- Observem que de la linealitat de f i de la definició de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$, es té que:

$$\begin{array}{rcl} [v_1] = [v_2] & \Leftrightarrow & v_1 - v_2 \in F \\ [f(v_1)] = [f(v_2)] & \Leftrightarrow & f(v_1 - v_2) \in F \end{array}$$

- Per tant, per demostrar que $\widetilde{f}$ està "ben definida" només hem de demostrar que si tenim un element $v \in F$ aleshores $f(v) \in F$. És a dir, únicament hem de veure que $f(F) \subseteq F$.

- **Comentari.** De fet, això que ara hem explicat és un cas particular d'un resultat més general demostrat a teoria. Concretament és un cas particular de la següent proposició que ens caracteritza quan una aplicació lineal entre dos espais vectorials "indueix" una aplicació lineal a "nivell" d'espais quocients:

  Proposició. *Sigui $h : E_1 \to E_2$ una aplicació $\mathbb{K}$-lineal entre dos $\mathbb{K}$-espais vectorials E_1 i E_2, i siguin $F_1 \subseteq E_1$ i $F_2 \subseteq E_2$ dos subespais vectorials. Sigui $\widetilde{h}\colon E_1/F_1 \to E_2/F_2$ la correspondència definida per $\widetilde{h}([v]) = [h(v)]$. Aleshores es té que, $\widetilde{h}$ és una aplicació si i només si*

$h(F_1) \subseteq F_2$. A més, en aquest cas, $\widetilde{h}$ també és $\mathbb{K}$-lineal.

- Així hem de demostrar, per tant, que $f(F) \subseteq F$ i, per a això, únicament cal demostrar que els generadors del subespai vectorial $f(F)$ estan en F.

  Un sistema de generadors del subespai vectorial $f(F)$ s'obté fent la imatge per f d'un sistema de generadors de F. Així, per calcular-ne un, primer hem de calcular un sistema de generadors del subespai F.

  El subespai $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y+z = z-t = 0\}$ té dimensió 2, ja que les dues equacions que el defineixen són linealment independents (això es pot veure a simple vista, perquè en una no hi tenim cap terme amb t, mentre que en la segona sí). A més tenim:

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y + z = z - t = 0\} \\ &= \{(x, -x - z, z, z) \in \mathbb{R}^4 \text{ on } x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -1, 0, 0), (0, -1, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$

  i, per tant, els vectors $(1, -1, 0, 0)$ i $(0, -1, 1, 1)$ ens determinen una base de F. Ara, aplicant f a aquests dos vectors obtindrem un sistema de generadors de $f(F)$. Recordem que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ està definit per $f(x, y, z, t) = (-x + 2y - t, x - y + z, x + t, -y + z - t)$. Per tant:

$$\begin{aligned} f(F) &= \langle f(1, -1, 0, 0), f(0, -1, 1, 1) \rangle \\ &= \langle (-3, 2, 1, 1), (-3, 2, 1, 1) \rangle \\ &= \langle (-3, 2, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

  Finalment, com hem dit abans, per veure la inclusió $f(F) \subseteq F$ n'hi ha prou amb comprovar que els generadors del subespai $f(F)$ estan en F. És a dir, en aquest cas, únicament hem de veure que $(-3, 2, 1, 1) \in F$ i, com que el subespai F està donat per equacions, només cal que comprovem que aquest vector les satisfà. Calculant tenim:

$$\begin{aligned} &x + y + z = -3 + 2 + 1 = 0 \\ &z - t = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

  Per tant $(-3, 2, 1, 1) \in F$, i es compleix, doncs, que $f(F) \subseteq F$.

- Amb això hem demostrat que l'aplicació $\widetilde{f} \colon \mathbb{R}^4/F \to \mathbb{R}^4/F$ induïda per l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ en el quocient $\mathbb{R}^4/F$ és una aplicació ben definida.

- Ara anem a demostrar que $\widetilde{f}$ és lineal.

  És a dir hem de veure que, per a qualsevol parella de vectors $[v_1], [v_2] \in \mathbb{R}^4/F$ i per a qualsevol parella d'escalars $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, es té que:

$$\widetilde{f}(\lambda_1[v_1] + \lambda_2[v_2]) = \lambda_1\widetilde{f}([v_1]) + \lambda_2\widetilde{f}([v_2])).$$

  La demostració és la mateixa que s'ha fet a teoria per demostrar la proposició que hem recordat abans. Anem a repetir-la.

  Prenem, doncs, dos vectors de l'espai quocient $[v_1], [v_2] \in \mathbb{R}^4/F$ i dos escalars $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Aleshores tenim la següent cadena d'igualtats:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\lambda_1[v_1]+\lambda_2[v_2]) &\overset{(1)}{=} \widetilde{f}([\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2]) \overset{(2)}{=} [f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)]\\ &\overset{(3)}{=} [\lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)] \overset{(4)}{=} \lambda_1[f(v_1)]+\lambda_2[f(v_2)]\\ &\overset{(5)}{=} \lambda_1\widetilde{f}([v_1])+\lambda_2\widetilde{f}([v_2])\end{aligned}$$

on en les igualtats (1) i (4) hem usat la definició de les operacions en l'espai quocient, mentre que en les igualtats (2) i (5) hem usat la definició de $\widetilde{f}$, i en la igualtat (3) hem fet servir la linealitat de l'aplicació f. Per tant tenim:

$$\widetilde{f}(\lambda_1[v_1]+\lambda_2[v_2]) = \lambda_1\widetilde{f}([v_1])+\lambda_2\widetilde{f}([v_2])$$

com volíem demostrar.

Resolució (b)

- Primer de tot observem que com que el subespai F té dimensió 2, aleshores l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$ té dimensió $\dim \mathbb{R}^4/F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 4-2 = 2$. Per tant, té sentit preguntar-se si un conjunt format per dos vectors és o no és una base d'aquest espai vectorial.

- *Anem a demostrar que* $\{[(0,0,1,0)],[(0,0,0,1)]\}$ *és una base de* $\mathbb{R}^4/F$.

  Com que $\{[(0,0,1,0)],[(0,0,0,1)]\}$ és un conjunt de dos vectors d'un espai vectorial de dimensió dos, per veure que aquest conjunt és una base de l'espai n'hi ha prou amb demostrar que és un conjunt de vectors linealment independents en $\mathbb{R}^4/F$. És a dir hem de veure que $\lambda=\mu=0$ és l'única solució de l'equació:

$$\lambda[(0,0,1,0)]+\mu[(0,0,0,1)] = [(0,0,0,0)].$$

  Observem que, per la definició de les operacions en l'espai quocient tenim:

$$\lambda[(0,0,1,0)]+\mu[(0,0,0,1)] = [\lambda(0,0,1,0)+\mu(0,0,0,1)] = [(0,0,\lambda,\mu)].$$

  Per tant, hem de veure que $\lambda=\mu=0$ són els únics escalars verificant l'equació:

$$[(0,0,\lambda,\mu)] = [(0,0,0,0)].$$

  Anem a veure-ho.

  D'una banda, per definició de l'espai quocient, es té que:

$$[(0,0,\lambda,\mu)] = [(0,0,0,0)] \Leftrightarrow (0,0,\lambda,\mu)\in F$$

  i, d'altra banda, com que $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z=z-t=0\}$, aleshores:

$$(0,0,\lambda,\mu)\in F \Leftrightarrow \lambda = \lambda-\mu = 0.$$

Per tant, ajuntant aquestes dues equivalències, es té que:

$$[(0,0,\lambda,\mu)] = [(0,0,0,0)] \Leftrightarrow \lambda = \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

com volíem demostrar.

- *Comentari 1.* Observem que en aquesta demostració hem fet servir que el subespai F el tenim donat per equacions. Anem a veure com podem fer la demostració si enlloc de les equacions tenim una base del subespai. En aquest cas, en l'apartat (a) hem vist que els vectors $(1,-1,0,0)$ i $(0,-1,1,1)$ determinen una base de F. Per tant, $(0,0,\lambda,\mu) \in F$ si i només si existeixen nombres reals $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $(0,0,\lambda,\mu) = a(1,-1,0,0) + b(0,-1,1,1)$. Això dóna lloc a un sistema de quatre equacions:

$$\left\{\begin{array}{rcc} 0 & = & a \\ 0 & = & -a-b \\ \lambda & = & b \\ \mu & = & b \end{array}\right.$$

amb dues incògnites a, b i paràmetres λ, μ. Les dues primeres equacions ens donen $a = b = 0$, d'on, a partir de les dues últimes equacions, se'n dedueix que $\lambda = \mu = 0$. Per tant, les classes $[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]$ són linealment independents i, en particular, formen una base de $\mathbb{R}^4/F$.

- *Comentari 2.* Sabem que $\{(1,-1,0,0), (0,-1,1,1)\}$ és una base de F. Per tant, com que coneixem una base del subespai vectorial F, per demostrar que un conjunt de classes de vectors és una base de l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^4/F$ podem fer servir el següent resultat general:

> Proposició. *Sigui F un subespai d'un espai vectorial E de dimensió finita, i sigui $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de F. Aleshores, un conjunt de classes de vectors $\{[w_1], \ldots, [w_s]\}$ és una base de l'espai quocient E/F si i només si el conjunt de vectors $\{w_1, \ldots, w_s, v_1, \ldots, v_r\}$ és una base de l'espai E.*

Així, aplicant aquest resultat en el nostre cas tindrem que $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$ és una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$ si i només si $\{(0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,-1,0,0), (0,-1,1,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Per tant, $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$ és una base de $\mathbb{R}^4/F$ si i només si la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té determinant no nul (observeu que és la matriu associada al sistema anterior). Si calculem veurem que aquesta matriu té determinant -1 i, per tant, $\{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$ és una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$.

- *Ara anem a determinar si el conjunt* $\{[(1,0,0,0)], [(0,1,0,0)]\}$ *és o no és una base de* $\mathbb{R}^4/F$.

A continuació veurem que el conjunt de classes de vectors $\{[(1,0,0,0)], [(0,1,0,0)]\}$ no és una base de l'espai quocient usant el criteri que hem recordat en el comentari anterior.

És a dir, com que el conjunt $\{(1,-1,0,0),(0,-1,1,1)\}$ és una base del subespai F, aleshores el conjunt de classes $\{[(1,0,0,0)],[(0,1,0,0)]\}$ és una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$ si i només si el conjunt de vectors $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,-1,1,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Per tant, $\{[(1,0,0,0)],[(0,1,0,0)]\}$ és una base de $\mathbb{R}^4/F$ si i només si la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té determinant no nul. Observem que les dues últimes files d'aquesta matriu són iguals. Per tant, aquesta matriu té determinant 0. Així, podem concloure que $\{[(1,0,0,0)],[(0,1,0,0)]\}$ no és una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$.

Observació. De fet $[(1,0,0,0)]$ i $[(0,1,0,0)]$ són dos vectors linealment dependents de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$. La seva relació de dependència lineal és $[(1,0,0,0)]-[(0,1,0,0)]=[(0,0,0,0)]$.

Resolució (c)

- En aquest apartat ens demanen que determinem la matriu $M(\widetilde{f};\mathcal{B})$ associada a l'endomorfisme $\widetilde{f}$ en la base $\mathcal{B}=\{[(0,0,1,0)],[(0,0,0,1)]\}$ de $\mathbb{R}^4/F$.
- Per definició, la matriu $M(\widetilde{f};\mathcal{B})$ és la matriu que té per "columnnes" les coordenades de les imatges de la base. Per tant, per trobar aquesta matriu únicament hem de calcular les coordenades dels vectors $\widetilde{f}([(0,0,1,0)])$ i $\widetilde{f}([(0,0,0,1)])$ en la base $\mathcal{B}$.
- Anem a calcular-ho.
- Recordem que l'endomorfisme $\widetilde{f}$ està definit per:

  $$\widetilde{f}([(x,y,z,t)])=[f(x,y,z,t)]=[(-x+2y-t,x-y+z,x+t,-y+z-t)]$$

  i per tant calculant tenim:

  $$\begin{aligned}\widetilde{f}([(0,0,1,0)])&=[f(0,0,1,0)]=[(0,1,0,1)]\\ \widetilde{f}([(0,0,0,1)])&=[f(0,0,0,1)]=[(-1,0,1,-1)]\end{aligned}$$

- Ara hem de determinar les coordenades d'aquests vectors en la base $\mathcal{B}$.
- Per determinar les coordenades d'un element $[(a,b,c,d)]\in\mathbb{R}^4/F$ en la base $\mathcal{B}$ fem el següent.

  Com que $\mathcal{B}=\{[(0,0,1,0)],[(0,0,0,1)]\}$ és una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$ i com que el conjunt $\{(1,-1,0,0),(0,-1,1,1)\}$ és una base del subespai F, aleshores sabem que el conjunt $B=\{(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,-1,0,0),(0,-1,1,1)\}$ és una base de l'espai $\mathbb{R}^4$.

  Ara únicament hem d'observar que si coneixem les coordenades del vector (a,b,c,d) en la base B de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ aleshores coneixarem les coordenades de la classe $[(a,b,c,d)]$ en la base $\mathcal{B}$ de l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^4/F$. Concretament es té que si $(a,b,c,d)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)_B$ aleshores $[(a,b,c,d)]=(\lambda_1,\lambda_2)_{\mathcal{B}}$.

La demostració d'aquest resultat és senzilla. Per fer-la únicament hem de tenir present la definició de coordenades i "com funciona" l'espai quocient. En efecte, si els escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ són les coordenades de (a, b, c, d) en la base B, aleshores:

$$(a, b, c, d) = \lambda_1(0, 0, 1, 0) + \lambda_2(0, 0, 0, 1) + \lambda_3(1, -1, 0, 0) + \lambda_4(0, -1, 1, 1)$$

i per tant, en l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$ tindrem la igualtat:

$$\begin{aligned}
[(a, b, c, d)] &= [\lambda_1(0, 0, 1, 0) + \lambda_2(0, 0, 0, 1) + \lambda_3(1, -1, 0, 0) + \lambda_4(0, -1, 1, 1)] \\
&= \lambda_1[(0, 0, 1, 0)] + \lambda_2[(0, 0, 0, 1)] + \lambda_3[(1, -1, 0, 0)] + \lambda_4[(0, -1, 1, 1)] \\
&= \lambda_1[(0, 0, 1, 0)] + \lambda_2[(0, 0, 0, 1)]
\end{aligned}$$

d'on podem concloure que els escalars λ_1, λ_2 són les coordenades de $[(a, b, c, d)]$ en la base $\mathcal{B}$.

- Per tant, per determinar les coordenades de la classe $[(a, b, c, d)]$ en la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4/F$ n'hi ha prou amb calcular les coordenades del vector (a, b, c, d) en la base B de $\mathbb{R}^4$, coordenades que podem obtenir solucionant el sistema d'equacions lineals compatible i determinat de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right).$$

- Fent servir això, anem a calcular les coordenades de $[(0, 1, 0, 1)]$ i de $[(-1, 0, 1, -1)]$ en la base $\mathcal{B}$.

Per calcular les coordenades de $[(0, 1, 0, 1)]$ en la base $\mathcal{B}$ n'hi ha prou amb resoldre el sistema d'equacions lineals compatible i determinat de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

És fàcil veure que la solució d'aquest sistema d'equacions lineals és $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$ i $\lambda_4 = -1$. Per tant, les coordenades del vector $(0, 1, 0, 1)$ en la base B són:

$$(0, 1, 0, 1) = (1, 2, 0, -1)_B$$

i, d'aquí tindrem que les coordenades de la classe $[(0, 1, 0, 1)]$ en la base $\mathcal{B}$ són

$$[(0, 1, 0, 1)] = (1, 2)_{\mathcal{B}}.$$

Anàlogament, per calcular les coordenades de $[(-1, 0, 1, -1)]$ en la base $\mathcal{B}$ ara n'hi ha prou amb resoldre el sistema d'equacions lineals compatible i determinat de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Aquest sistema d'equacions té solució $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ i $\lambda_4 = 1$. Així, les coordenades del vector $(-1, 0, 1, -1)$ en la base B són:

$$(-1, 0, 1, -1) = (0, -2, -1, 1)_B$$

d'on les coordenades de $[(-1,0,1,-1)]$ en la base $\mathcal{B}$ són:

$$[(-1,0,1,-1)] = (0,-2)_{\mathcal{B}}.$$

- En conclusió, tenim:

$$\widetilde{f}([(0,0,1,0)]) = [f(0,0,1,0)] = [(0,1,0,1)] = (1,2)_{\mathcal{B}}$$
$$\widetilde{f}([(0,0,0,1)]) = [f(0,0,0,1)] = [(-1,0,1,-1)] = (0,-2)_{\mathcal{B}}$$

i per tant la matriu de l'endomorfisme $\widetilde{f}$ en la base $\mathcal{B}$ és:

$$M(\widetilde{f};\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- **Observació.** Notem que $\widetilde{f}$ és un isomorfisme de $\mathbb{R}^4/F$, ja que la seva matriu associada és invertible (té determinant no nul). Tanmateix, es pot comprovar que l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ que hem pres inicialment no és un isomorfisme (únicament hem de veure que la matriu associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^4$ té el determinant nul). Per tant aquest exercici ens dóna un exemple d'aplicació lineal no bijectiva que indueix un isomorfisme en el quocient.

  Un dels motius pels quals succeeix això és el següent. Sabem que un endomorfisme d'un espai vectorial és un isomorfisme si i només si els seu nucli és nul. En el nostre cas si calculeu el nucli de l'endomorfisme f veureu que aquest és el subespai vectorial no nul $\operatorname{Ker} f = \langle(1,0,-1,-1)\rangle$, (per calcular-ho únicament heu de resoldre el sistema homogeni que té per matriu associada la matriu de l'endomorfisme f en la base canònica de $\mathbb{R}^4$). Ara bé, és fàcil veure que $(1,0,-1,-1) \in F$ i, per tant, tenim $\operatorname{Ker} f = \langle(1,0,-1,-1)\rangle \subseteq F$. Així, en fer quocient pel subespai F el que fem és "eliminar" els elements del nucli de f, és a dir, si $w \in \operatorname{Ker} f$ alehores en el quocient la seva classe és $[w] = [0] \in \mathbb{R}^4/F$.

- **Comentari.** En general es pot demostrar que, si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E i si F és un subespai vectorial de E amb $h(F) \subseteq F$, aleshores l'endomorfisme $\widetilde{h}$ que indueix h en l'espai vectorial quocient E/F és un isomorfisme si i només si $\{w \in E \,:\, h(w) \in F\} \subseteq F$. És a dir, $\widetilde{h}$ és un isomorfisme si i només si $h^{-1}(F) \subseteq F$. Per tant, si volem que $\widetilde{h}$ sigui un isomorfisme, és necessari que $\operatorname{Ker} h \subseteq F$, (ja que sempre es té la inclusió de subespais $\operatorname{Ker} h \subseteq h^{-1}(F)$).

- 17.

Considerem els vectors $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ i $v_3 = (a,b,1)$ on $a, b \in \mathbb{R}$ són nombres reals. Calculeu la base dual $B^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Determineu la forma $\rho \in (\mathbb{R}^3)^*$ que en la base B^* té coordenades $(1,1,1)$.

Solució

$v_1^*(x,y,z) = x - az$, $v_2^*(x,y,z) = y - bz$, $v_3^*(x,y,z) = z$, $\rho(x,y,z) = x + y + (1-a-b)z$.

Resolució

- Recordem en primer lloc alguns conceptes bàsics sobre l'espai dual.

1. Donat un $\mathbb{K}$-espai vectorial E, l'espai dual E^* es defineix com el $\mathbb{K}$-espai vectorial de les aplicacions lineals de E en el cos $\mathbb{K}$. Els elements de E^* s'anomenen, habitualment, *formes* o *covectors*.

2. Si E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita, aleshores el seu dual E^* també és un espai vectorial de dimensió finita i, a més, es té la igualtat de dimensions $\dim E^* = \dim E$.

3. Donada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ d'un espai vectorial E de dimensió finita n, la base dual associada a B és $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$, on v_i^* és l'aplicació lineal definida de la següent manera:
$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad \text{per a } 1 \le i, j \le n.$$

4. Fixades B_1 base de E_1 i B_2 base de E_2, a tota aplicació lineal $f\colon E_1 \to E_2$ li podem associar una matriu $m \times n$ (m files i n columnes), on $n = \dim E_1$ i $m = \dim E_2$, i aquesta matriu determina unívocament l'aplicació. En particular, fixada una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de l'espai E, a tota forma de l'espai dual se li pot associar una matriu $1 \times n$, on $n = \dim E$, i aquesta matriu determina unívocament la forma. De fet, aquesta matriu, vista com a vector, són les coordenades de la forma $\varphi \in E^*$ en la base dual $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, és a dir:
$$\varphi = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \varphi(e_1)e_1^* + \ldots + \varphi(e_n)e_n^*.$$

5. Sigui $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de l'espai E i sigui $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la seva base dual. En aquesta situació, si el vector $u \in E$ té coordenades $u = (a_1, \ldots, a_n)_B$ en la base B i si la forma $\varphi \in E^*$ té coordenades $\varphi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{B^*}$ en la base B^*, aleshores:
$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

- Passem, ara, a la resolució del nostre problema.

- Tenim $E = \mathbb{R}^3$ i els vectors $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ i $v_3 = (a, b, 1)$, i ens demanen calcular-ne la base dual.

- En primer lloc comprovem que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ és, en efecte, una base de $\mathbb{R}^3$. Hem de veure que la matriu dels vectors en columna, que denotarem A, té rang màxim, és a dir, que la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  té rang màxim 3. Podem esglaonar la matriu o calcular-ne el determinant. Atès que es tracta d'una matriu triangular, el determinant en aquest cas és el producte dels elements de la diagonal, que és 1. Per tant, la matriu A té rang màxim 3 i B és, en efecte, una base de $\mathbb{R}^3$ per a qualsevol valor de a i de b.

- Per calcular la base dual B^* de la base B, usarem la pròpia definició de base dual, és a dir, busquem formes v_i^* tals que $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ per a $1 \leq i, j \leq n$:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1^*(v_1) = 1 \\ v_1^*(v_2) = 0 \\ v_1^*(v_3) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} v_1^*(1,0,0) = 1 \\ v_1^*(0,1,0) = 0 \\ v_1^*(a,b,1) = 0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} v_2^*(v_1) = 0 \\ v_2^*(v_2) = 1 \\ v_2^*(v_3) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} v_2^*(1,0,0) = 0 \\ v_2^*(0,1,0) = 1 \\ v_2^*(a,b,1) = 0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} v_3^*(v_1) = 0 \\ v_3^*(v_2) = 0 \\ v_3^*(v_3) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} v_3^*(1,0,0) = 0 \\ v_3^*(0,1,0) = 0 \\ v_3^*(a,b,1) = 1 \end{array}\right.$$

- Recordem que $v_i^* \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és una aplicació lineal, és a dir, que tenim:

$$v_i^*(x, y, z) = \alpha_{i1}x + \alpha_{i2}y + \alpha_{i3}z.$$

- Substituint-ho en les equacions anteriors, i usant el punt (5) que hem comentat al principi de la resolució, obtenim:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \\ \\ \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix} = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \\ \\ \begin{pmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix} = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix}\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix}\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix} = 1 \end{array}\right.$$

  les quals podem desenvolupar per obtenir:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_{11} & = & 1 \\ \alpha_{12} & = & 0 \\ a\alpha_{11} + b\alpha_{12} + \alpha_{13} & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_{21} & = & 0 \\ \alpha_{22} & = & 1 \\ a\alpha_{21} + b\alpha_{22} + \alpha_{23} & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_{31} & = & 0 \\ \alpha_{32} & = & 0 \\ a\alpha_{31} + b\alpha_{32} + \alpha_{33} & = & 1 \end{array}\right.$$

- Aquests sistemes es poden resoldre de manera directa obtenint:

$$\begin{cases} \alpha_{11} &= & 1 \\ \alpha_{12} &= & 0 \\ \alpha_{13} &= & -a \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{21} &= & 0 \\ \alpha_{22} &= & 1 \\ \alpha_{23} &= & -b \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{31} &= & 0 \\ \alpha_{32} &= & 0 \\ \alpha_{33} &= & 1 \end{cases}$$

- Per tant, donat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, les aplicacions lineals v_i^* venen definides de la següent manera:

$$v_1^*(x, y, z) = x - az$$
$$v_2^*(x, y, z) = y - bz$$
$$v_3^*(x, y, z) = z$$

- Determinem, a continuació, la forma $\rho \in (\mathbb{R}^3)^*$ que en la base B^* té coordenades $(1, 1, 1)$.

- Com que l'expressió en coordenades en la base B^* és $(1, 1, 1)$, podem escriure la forma ρ de la següent manera:
$$\rho = v_1^* + v_2^* + v_3^*.$$
Per tant, donat un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la seva imatge per ρ es pot escriure:
$$\rho(x, y, z) = v_1^*(x, y, z) + v_2^*(x, y, z) + v_3^*(x, y, z)$$
i, desenvolupant, tenim:
$$\rho(x, y, z) = (x - az) + (y - bz) + z = x + y + (1 - a - b)z.$$

Resolució alternativa

- Un mètode alternatiu i substancialment més ràpid per determinar la base dual B^* associada a la base B l'exposem a continuació.

- Suposem demostrat que el conjunt B forma una base de $\mathbb{R}^3$, (el procediment és exactament el mateix que hem exposat prèviament i per aquest motiu no el repetirem).

- Ara podem fer el següent.

- Tenim $B_e = \{e_1, e_2, e_3\}$, amb $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$, la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i $B_e^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base dual associada a B_e, on les formes e_i^* venen definides per:

$$e_1^*(x, y, z) = x$$
$$e_2^*(x, y, z) = y$$
$$e_3^*(x, y, z) = z$$

- Per una banda sabem que la matriu de canvi de base de la base B de $\mathbb{R}^3$ a la base canònica B_e de $\mathbb{R}^3$ és la matriu:
$$M(B \to B_e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Per l'altra, pel que hem vist a teoria, sabem que la matriu de canvi de base de la base dual B^* de la base B a la base dual B_e^* de la base B_e és la matriu $M(B^* \to B_e^*) = (M(B \to B_e)^T)^{-1}$.

- Per tant, en el nostre cas, podem concloure que:

$$M(B^* \to B_e^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}.$$

- Ara que tenim la matriu de canvi de base en el dual, les formes v_i^* que ens demanen no són més que les "columnes" d'aquesta matriu, ja que les columnes d'aquesta matriu són exactament les coordenades de les formes v_i^* en la base dual de la base canònica.

- Per tant, tenim:

$$\begin{aligned} v_1^* &= (1, 0, -a)_{B_e^*} \\ v_2^* &= (0, 1, -b)_{B_e^*} \\ v_3^* &= (0, 0, 1)_{B_e^*} \end{aligned}$$

  és a dir:

$$\begin{aligned} v_1^* &= e_1^* - ae_3^* \\ v_2^* &= e_2^* - be_3^* \\ v_3^* &= e_3^* \end{aligned}$$

  i per tant:

$$\begin{aligned} v_1^*(x, y, z) &= x - az \\ v_2^*(x, y, z) &= y - bz \\ v_3^*(x, y, z) &= z \end{aligned}$$

- La forma ρ es pot determinar igual que en la resolució prèvia, o també podem aprofitar que hem calculat la matriu de canvi de base per determinar-la.

- Recordem que l'expressió en coordenades en la base B^* de la forma ρ és $\rho = (1, 1, 1)_{B^*}$. Llavors, usant la matriu de canvi de base, tenim que l'expressió en coordenades de ρ en la base B_e^* és $\rho = (1, 1, 1 - a - b)_{B_e^*}$ ja que tenim:

$$M(B^* \to B_e^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a - b + 1 \end{pmatrix}.$$

- Per tant es té que $\rho(x, y, z) = x + y + (1 - a - b)z$.

- 18.

Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió tres amb base $\{e_1, e_2, e_3\}$, i sigui $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la seva base dual. Considerem les formes $\rho_1 = e_1^* - e_2^*$, $\rho_2 = e_1^* - e_3^*$, $\rho_3 = e_2^* + e_3^*$. Demostreu que el conjunt $\mathfrak{B} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ és una base de E^* i determineu la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de l'espai E de la qual $\mathfrak{B}$ n'és la seva dual.

Solució

$v_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3)$, $v_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3)$, $v_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Resolució

- Comencem per veure que el conjunt $\mathfrak{B} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ és una base de E^*.
- Recordem que l'espai dual d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial per si mateix i, per tant, el procediment per determinar si un conjunt d'elements és una base és exactament el mateix que per a qualsevol altre espai vectorial.
- En aquest cas, tenim que $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ és una base de E^* per ser el dual d'una base de E. Per tant, els elements ρ_i es poden escriure en coordenades en aquesta base de la següent manera:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1, -1, 0) \\ \rho_2 &= (1, 0, -1) \\ \rho_3 &= (0, 1, 1) \end{aligned}$$

  Per tant, n'hi ha prou amb posar aquests "vectors" en columna en una matriu i comprovar-ne el rang, i formaran una base si el rang de la matriu és màxim. És a dir, considerem la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  i l'esglaonem per files per determinar-ne el rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Un cop esglaonada, és clar que el rang de la matriu és 3 i, per tant, el conjunt $\mathfrak{B} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ és una base de l'espai E^*.
- Determinem, a continuació, la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de E tal que $\mathfrak{B}$ n'és la base dual. Aquí ho farem fent servir la definició de base dual. Al final presentarem una resolució alternativa fent servir matrius de canvi de base.

- Recordem que, per definició de base dual, s'ha de complir:

$$\rho_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

- Atès que tenim les formes ρ_i com combinacions lineals de la base dual $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$, el més natural és determinar els vectors v_j com combinacions lineals de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

- Suposem doncs que els vectors v_j, $1 \leq j \leq 3$, tenen la següent expressió en coordenades en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$v_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})$$

  i, per tant, el que ara hem de fer és determinar els coeficients a_{jk} per a $1 \leq j, k \leq 3$.

- Observem que podem reescriure els vectors v_j de la següent manera:

$$v_j = a_{j1}e_1 + a_{j2}e_2 + a_{j3}e_3.$$

- Ara imposem que $\mathfrak{B}$ ha de ser la base dual de B i obtenim, d'aquesta manera, els sistemes:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1(v_1) = 1 \\ \rho_1(v_2) = 0 \\ \rho_1(v_3) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_2(v_1) = 0 \\ \rho_2(v_2) = 1 \\ \rho_2(v_3) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_3(v_1) = 0 \\ \rho_3(v_2) = 0 \\ \rho_3(v_3) = 1 \end{array}\right.$$

- Substituint v_j per l'expressió que hem donat a dalt i desenvolupant per la linealitat de les formes ρ_i, tenim:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \rho_1(v_1) = \rho_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) = a_{11}\rho_1(e_1) + a_{12}\rho_1(e_2) + a_{13}\rho_1(e_3) \\ 0 = \rho_1(v_2) = \rho_1(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) = a_{21}\rho_1(e_1) + a_{22}\rho_1(e_2) + a_{23}\rho_1(e_3) \\ 0 = \rho_1(v_3) = \rho_1(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = a_{31}\rho_1(e_1) + a_{32}\rho_1(e_2) + a_{33}\rho_1(e_3) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \rho_2(v_1) = \rho_2(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) = a_{11}\rho_2(e_1) + a_{12}\rho_2(e_2) + a_{13}\rho_2(e_3) \\ 1 = \rho_2(v_2) = \rho_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) = a_{21}\rho_2(e_1) + a_{22}\rho_2(e_2) + a_{23}\rho_2(e_3) \\ 0 = \rho_2(v_3) = \rho_2(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = a_{31}\rho_2(e_1) + a_{32}\rho_2(e_2) + a_{33}\rho_2(e_3) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \rho_3(v_1) = \rho_3(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) = a_{11}\rho_3(e_1) + a_{12}\rho_3(e_2) + a_{13}\rho_3(e_3) \\ 0 = \rho_3(v_2) = \rho_3(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) = a_{21}\rho_3(e_1) + a_{22}\rho_3(e_2) + a_{23}\rho_3(e_3) \\ 1 = \rho_3(v_3) = \rho_3(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = a_{31}\rho_3(e_1) + a_{32}\rho_3(e_2) + a_{33}\rho_3(e_3) \end{array}\right.$$

- Substituint ara ρ_i per les seves expressions en la base $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$, ens queda:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = a_{11}(e_1^* - e_2^*)(e_1) + a_{12}(e_1^* - e_2^*)(e_2) + a_{13}(e_1^* - e_2^*)(e_3) \\ 0 = a_{21}(e_1^* - e_2^*)(e_1) + a_{22}(e_1^* - e_2^*)(e_2) + a_{23}(e_1^* - e_2^*)(e_3) \\ 0 = a_{31}(e_1^* - e_2^*)(e_1) + a_{32}(e_1^* - e_2^*)(e_2) + a_{33}(e_1^* - e_2^*)(e_3) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} 0 = a_{11}(e_1^* - e_3^*)(e_1) + a_{12}(e_1^* - e_3^*)(e_2) + a_{13}(e_1^* - e_3^*)(e_3) \\ 1 = a_{21}(e_1^* - e_3^*)(e_1) + a_{22}(e_1^* - e_3^*)(e_2) + a_{23}(e_1^* - e_3^*)(e_3) \\ 0 = a_{31}(e_1^* - e_3^*)(e_1) + a_{32}(e_1^* - e_3^*)(e_2) + a_{33}(e_1^* - e_3^*)(e_3) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} 0 = a_{11}(e_2^* + e_3^*)(e_1) + a_{12}(e_2^* + e_3^*)(e_2) + a_{13}(e_2^* + e_3^*)(e_3) \\ 0 = a_{21}(e_2^* + e_3^*)(e_1) + a_{22}(e_2^* + e_3^*)(e_2) + a_{23}(e_2^* + e_3^*)(e_3) \\ 1 = a_{31}(e_2^* + e_3^*)(e_1) + a_{32}(e_2^* + e_3^*)(e_2) + a_{33}(e_2^* + e_3^*)(e_3) \end{array}\right.$$

- Usant la definició de suma de dues aplicacions lineals tenim:

$$\begin{cases} 1 = a_{11}(e_1^*(e_1) - e_2^*(e_1)) + a_{12}(e_1^*(e_2) - e_2^*(e_2)) + a_{13}(e_1^*(e_3) - e_2^*(e_3)) \\ 0 = a_{21}(e_1^*(e_1) - e_2^*(e_1)) + a_{22}(e_1^*(e_2) - e_2^*(e_2)) + a_{23}(e_1^*(e_3) - e_2^*(e_3)) \\ 0 = a_{31}(e_1^*(e_1) - e_2^*(e_1)) + a_{32}(e_1^*(e_2) - e_2^*(e_2)) + a_{33}(e_1^*(e_3) - e_2^*(e_3)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11}(e_1^*(e_1) - e_3^*(e_1)) + a_{12}(e_1^*(e_2) - e_3^*(e_2)) + a_{13}(e_1^*(e_3) - e_3^*(e_3)) \\ 1 = a_{21}(e_1^*(e_1) - e_3^*(e_1)) + a_{22}(e_1^*(e_2) - e_3^*(e_2)) + a_{23}(e_1^*(e_3) - e_3^*(e_3)) \\ 0 = a_{31}(e_1^*(e_1) - e_3^*(e_1)) + a_{32}(e_1^*(e_2) - e_3^*(e_2)) + a_{33}(e_1^*(e_3) - e_3^*(e_3)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11}(e_2^*(e_1) + e_3^*(e_1)) + a_{12}(e_2^*(e_2) + e_3^*(e_2)) + a_{13}(e_2^*(e_3) + e_3^*(e_3)) \\ 0 = a_{21}(e_2^*(e_1) + e_3^*(e_1)) + a_{22}(e_2^*(e_2) + e_3^*(e_2)) + a_{23}(e_2^*(e_3) + e_3^*(e_3)) \\ 1 = a_{31}(e_2^*(e_1) + e_3^*(e_1)) + a_{32}(e_2^*(e_2) + e_3^*(e_2)) + a_{33}(e_2^*(e_3) + e_3^*(e_3)) \end{cases}$$

- Finalment, usant que $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ és la base dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$, és a dir, que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, ens queden les següents equacions lineals amb incògnites en els coeficientes a_{ij}:

$$\begin{cases} 1 = a_{11} - a_{12} \\ 0 = a_{21} - a_{22} \\ 0 = a_{31} - a_{32} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11} - a_{13} \\ 1 = a_{21} - a_{23} \\ 0 = a_{31} - a_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{12} + a_{13} \\ 0 = a_{22} + a_{23} \\ 1 = a_{32} + a_{33} \end{cases}$$

- **Observació.** Una manera alternativa i més ràpida d'arribar a aquest sistema d'equacions és usant coordenades, tal i com hem exposat en el punt (5) de la resolució del problema de la pàgina 127, que recordem a continuació. Donada una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ d'un espai vectorial E, considerem la seva base dual $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$. En aquesta situació, si un vector $u \in E$ té coordenades $u = (a_1, \ldots, a_n)_B$ en la base B i si una forma $\varphi \in E^*$ té coordenades $\varphi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{B^*}$ en la base B^*, aleshores:

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

  Per tant, en el nostre cas, per a $1 \leq j \leq 3$ tenim:

$$\begin{cases} \delta_{1j} = \rho_1(v_j) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = a_{j1} - a_{j2} \\ \\ \delta_{2j} = \rho_2(v_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = a_{j1} - a_{j3} \\ \\ \delta_{3j} = \rho_3(v_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = a_{j2} + a_{j3} \end{cases}$$

  d'on obtenim el sistema anterior.

- Tornant al nostre problema observem que, de manera immediata, del sistema d'equacions lineals s'obtenen les següents relacions:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{13} = -a_{12} \\ a_{21} &= a_{22} = -a_{23} \\ a_{31} &= a_{32} = a_{33} \end{aligned}$$

  i les següents equacions:

$$\begin{aligned} a_{11} - a_{12} &= 1 \\ a_{21} - a_{23} &= 1 \\ a_{32} + a_{33} &= 1 \end{aligned}$$

  les quals, usant les relacions anteriors, tenen per solució:

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1/2.$$

- Per tant els vectors v_j s'escriuen en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de la següent manera:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ v_2 &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ v_3 &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \end{aligned}$$

- **Comentari.** Tot i que no ens ho demanen, comprovem que, en efecte, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ formen una base de E i que, a més, $\mathfrak{B} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ n'és la base dual.

  Comencem per veure que és una base. Posem les coordenades d'aquests vectors en columna en una matriu i esglaonem:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Clarament aquesta matriu té rang 3, i per tant B és efectivament una base de E.

  Vegem que $\mathfrak{B}$ és la seva base dual. Per fer-ho, calcularem $\rho_i(v_j)$ per a $1 \leq i, j \leq 3$ i veurem que, en efecte, obtenim δ_{ij}. Calculant:

$$\begin{aligned} \rho_1(v_1) &= (e_1^* - e_2^*)\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \rho_1(v_2) &= (e_1^* - e_2^*)\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \rho_1(v_3) &= (e_1^* - e_2^*)\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\rho_2(v_1) = (e_1^* - e_3^*)\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\rho_2(v_2) = (e_1^* - e_3^*)\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\rho_2(v_3) = (e_1^* - e_3^*)\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\rho_3(v_1) = (e_2^* + e_3^*)\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\rho_3(v_2) = (e_2^* + e_3^*)\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\rho_3(v_3) = (e_2^* + e_3^*)\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3\right) = \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

on hem omès el desenvolupament dels termes mitjançant la linealitat de les formes ρ_i i la definició de suma d'aplicacions lineals. El desenvolupament es deixa al lector com a exercici.

Resolució alternativa

- Una manera alternativa d'atacar aquest problema l'exposem a continuació.

- Atès que les formes ρ_i ens venen donades com combinació lineal de les formes e_j^*, els coeficients que acompanyen aquestes últimes formes són exactament les coordenades de les ρ_i en la base dual $B_e^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ i, per tant, la matriu d'aquests "vectors" en columna és exactament la matriu de canvi de base de la base $\mathfrak{B}$ a la base B_e^*. És a dir, tenim:

$$\rho_1 = (1, -1, 0)_{B_e^*}$$
$$\rho_2 = (1, 0, -1)_{B_e^*}$$
$$\rho_3 = (0, 1, 1)_{B_e^*}$$

  i per tant:

$$M(\mathfrak{B} \to B_e^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Volem determinar la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de E tal que la seva base dual sigui $B^* = \mathfrak{B}$.

- Pel que sabem de teoria, la matriu de canvi de base de la base B a la base $B_e = \{e_1, e_2, e_3\}$ és la matriu:

$$M(B \to B_e) = (M(B^* \to B_e^*)^T)^{-1}$$

  i així ara tenim:

$$M(B \to B_e) = (M(B^* \to B_e^*)^T)^{-1} = (M(\mathfrak{B} \to B_e^*)^T)^{-1}.$$

- Per tant, les "columnes" d'aquesta matriu seran les coordenades, en la base B_e, dels vectors v_i que busquem. Calculant tenim:

$$M(B \to B_e) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'on:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}\,(1,-1,1)_{B_e} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ v_2 &= \frac{1}{2}\,(1,1,-1)_{B_e} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ v_3 &= \frac{1}{2}\,(1,1,1)_{B_e} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \end{aligned}$$

- **Conclusions.** Aquest problema ens ha mostrat un fet molt important: l'espai dual, per molt complicat que pugui semblar a primer cop d'ull, no deixa de ser un espai vectorial sobre un cos, i, per tant, podem prendre'l com un espai vectorial per si sol i pensar els seus elements com "vectors" enlloc de formes. Per tant, en el moment de calcular-ne bases, la dimensió o verificar si un conjunt d'elements és una base, entre moltes altres coses, podem aplicar tot el que sabem sobre els espais vectorials "normals".

- 19.

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y) = (3x-y, 5x-2y, -4x+2y, -7x+3y)$. Siguin $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ els vectors $v_1 = (1, 2)$ i $v_2 = (1, 1)$. Siguin $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$ els vectors $w_1 = (1, 1, -1, -1)$, $w_2 = (1, 1, -1, -2)$, $w_3 = (0, -1, 1, 1)$ i $w_4 = (-1, 1, 0, 0)$.

(a) Demostreu que $B_v = \{v_1, v_2\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ i que $B_w = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Calculeu la base dual B_v^* de la base B_v i comproveu que la base dual de la base B_w és $B_w^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ on $\psi_1(x, y, z, t) = x + y + t$, $\psi_2(x, y, z, t) = z - t$, $\psi_3(x, y, z, t) = x + y + 2z$, $\psi_4(x, y, z, t) = y + z$.

(b) Determineu la matriu $M(f; B_v, B_w)$ associada a l'aplicació lineal f en les bases B_v de $\mathbb{R}^2$ i B_w de $\mathbb{R}^4$, i determineu la matriu $M(f^*; B_w^*, B_v^*)$ associada a l'aplicació dual f^* en les bases B_w^* de $(\mathbb{R}^4)^*$ i B_v^* de $(\mathbb{R}^2)^*$.

Solució

(a) —. La base dual és $B_v^* = \{\rho_1, \rho_2\}$ on $\rho_1(x, y) = -x + y$, $\rho_2(x, y) = 2x - y$. —

(b) $M(f; B_v, B_w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $M(f^*; B_w^*, B_v^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolució (a)

- *Vegem en primer lloc que B_v és una base de $\mathbb{R}^2$ i que B_w és una base de $\mathbb{R}^4$.*

- Procedirem com sempre: escriurem els "vectors" en columna i comprovarem si la matriu que en resulta té rang màxim.

- Per al conjunt B_v la matriu dels vectors en columna que obtenim és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la qual podem esglaonar, o simplement calcular-ne el determinant que és $1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0$. Com que té determinant no nul, aquesta matriu té rang màxim i, per tant, el conjunt B_v és una base de $\mathbb{R}^2$.

- Per al conjunt B_w, la matriu dels vectors en columna és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la qual podem esglaonar de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i veiem que té rang màxim 4. Per tant el conjunt de vectors B_w és una base de $\mathbb{R}^4$.

- *Calculem a continuació la base dual B_v^* de la base B_v.*

Ho farem de dues maneres: fent servir la definició i fent servir matrius canvi de base.

- Mètode I.

En primer lloc procedirem per la definició de base dual. És a dir, determinarem dues formes v_1^*,v_2^* tals que $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ per a $1 \leq i, j \leq 2$. Escrit en forma de sistema, ens queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^*(v_1) = 1 \\ v_1^*(v_2) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1^*(1,2) = 1 \\ v_1^*(1,1) = 0 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} v_2^*(v_1) = 0 \\ v_2^*(v_2) = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_2^*(1,2) = 0 \\ v_2^*(1,1) = 1 \end{array} \right.$$

Recordem que $v_i^* \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una aplicació lineal, i per tant la podem escriure de la següent manera:

$$v_i^*(x, y) = \alpha_{i1}x + \alpha_{i2}y$$

i per tant els sistemes d'equacions anteriors són:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{11} + 2\alpha_{12} & = & 1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{21} + 2\alpha_{22} & = & 0 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} & = & 1 \end{array} \right.$$

els quals es poden resoldre directament i tenen per solució

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{12} = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{21} = 2 \\ \alpha_{22} = -1 \end{array} \right.$$

Per tant, les aplicacions v_i^* venen definides per:

$$v_1^*(x, y) = -x + y$$
$$v_2^*(x, y) = 2x - y$$

- Mètode II.

Podem determinar aquesta base dual de manera alternativa usant, per a això, les matrius de canvi de base. Observem que la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

és la matriu dels vectors de la base B_v escrits en la base canònica de $\mathbb{R}^2$, que denotem $B_{e,\mathbb{R}^2}$. Per tant, aquesta matriu és exactament la matriu de canvi de base de B_v a $B_{e,\mathbb{R}^2}$, és a dir:

$$M(B_v \to B_{e,\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, pel que hem vist a teoria, la matriu de canvi de base de la base dual B_v^* a la base dual $B_{e,\mathbb{R}^2}^*$ és la inversa de la transposada de la matriu que tenim. És a dir:

$$M(B_v^* \to B_{e,\mathbb{R}^2}^*) = (M(B_v \to B_{e,\mathbb{R}^2})^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Recordem, però, que les columnes d'aquesta matriu són les coordenades de les formes de B_v^*, vistes com a vectors d'un espai vectorial, i expressades en la base dual $B_{e,\mathbb{R}^2}^*$ de la base canònica $B_{e,\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}^2$. Per tant, la base dual B_v^* associada a la base B_v és $B_v^* = \{v_1^*, v_2^*\}$ on:

$$v_1^* = (-1, 1)_{B_{e,\mathbb{R}^2}^*}$$
$$v_2^* = (2, -1)_{B_{e,\mathbb{R}^2}^*}$$

és a dir:

$$v_1^*(x, y) = -x + y$$
$$v_2^*(x, y) = 2x - y$$

- Amb això hem calculat, de dues maneres diferents, la base dual $B_v^* = \{v_1^*, v_2^*\}$ de la base $B_v = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Concretament hem vist que la base dual és $B_v^* = \{v_1^*, v_2^*\}$ on v_1^*, v_2^* són les formes $v_1^*(x, y) = -x + y$, $v_2^*(x, y) = 2x - y$.

- *Per últim, comprovem que la base dual de B_w és $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$.*

- Per fer-ho, comencem veient que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ és una base de $(\mathbb{R}^4)^*$. Si denotem per $B_{e,\mathbb{R}^4}$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$, aleshores les coordenades de ψ_i en la base dual $B_{e,\mathbb{R}^4}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ de la base $B_{e,\mathbb{R}^4}$ són:

$$\psi_1 = (1, 1, 0, 1)_{B_{e,\mathbb{R}^4}^*}$$
$$\psi_2 = (0, 0, 1, -1)_{B_{e,\mathbb{R}^4}^*}$$
$$\psi_3 = (1, 1, 2, 0)_{B_{e,\mathbb{R}^4}^*}$$
$$\psi_4 = (0, 1, 1, 0)_{B_{e,\mathbb{R}^4}^*}$$

Posant aquests "vectors" en columna en una matriu, tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i ara calculem el rang d'aquesta matriu esglaonant per files:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, aquesta matriu té rang 4 i el conjunt $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ és una base de $(\mathbb{R}^4)^*$.

- Vegem ara que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ és la base dual de la base $B_w = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.
- Hem de comprovar si $\psi_i(w_j) = \delta_{ij}$ per a $1 \leq i, j \leq 4$. És a dir, hem de veure:

$$\begin{cases} \psi_1(w_1) = 1 \\ \psi_1(w_2) = 0 \\ \psi_1(w_3) = 0 \\ \psi_1(w_4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_2(w_1) = 0 \\ \psi_2(w_2) = 1 \\ \psi_2(w_3) = 0 \\ \psi_2(w_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_3(w_1) = 0 \\ \psi_3(w_2) = 0 \\ \psi_3(w_3) = 1 \\ \psi_3(w_4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_4(w_1) = 0 \\ \psi_4(w_2) = 0 \\ \psi_4(w_3) = 0 \\ \psi_4(w_4) = 1 \end{cases}$$

Observem que comprovar això és equivalent a demanar que la matriu N dels "vectors fila" ψ_i multiplicant per l'esquerra amb la matriu M dels "vectors columna" w_j ens doni la matriu identitat (veure el punt (5) de la pàgina 127), és a dir:

$$\begin{pmatrix} \leftarrow \psi_1 \rightarrow \\ \leftarrow \psi_2 \rightarrow \\ \leftarrow \psi_3 \rightarrow \\ \leftarrow \psi_4 \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_4 \,.$$

Fem el càlcul:

$$\begin{aligned} NM &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1-1 & 1+1-2 & -1+1 & -1+1 \\ -1+1 & -1+2 & 1-1 & 0 \\ 1+1-2 & 1+1-2 & -1+2 & -1+1 \\ 1-1 & 1-1 & -1+1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i, per tant, es compleix $\psi_i(w_j) = \delta_{ij}$, de manera que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ és, en efecte, la base dual de la base B_w, és a dir, $B_w^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$.

- Amb això hem acabat la resolució de l'apartat (a).

Resolució (b)

- Anem a presentar dues resolucions per a aquest apartat.

- **Primera resolució**

- Per determinar la matriu $M(f;B_v,B_w)$ associada a l'aplicació lineal f en les bases demanades necessitem, en primer lloc, calcular les imatges dels vectors de la base B_v per f. Recordem que l'aplicació lineal f ve definida per $f(x,y)=(3x-y,5x-2y,-4x+2y,-7x+3y)$.

- Si calculem les imatges de $v_1=(1,2)$ i $v_2=(1,1)$ per f, tenim:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(1,2) = (3\cdot 1 - 1\cdot 2\ ,\ 5\cdot 1 - 2\cdot 2\ ,\ -4\cdot 1 + 2\cdot 2\ ,\ -7\cdot 1 + 3\cdot 2) = (1,1,0,-1) \\ f(v_2) &= f(1,1) = (3\cdot 1 - 1\cdot 1\ ,\ 5\cdot 1 - 2\cdot 1\ ,\ -4\cdot 1 + 2\cdot 1\ ,\ -7\cdot 1 + 3\cdot 1) = (2,3,-2,-4) \end{aligned}$$

- Ara, per determinar la matriu $M(f;B_v,B_w)$, hem d'escriure els vectors $f(v_1)$ i $f(v_2)$ en coordenades en la base B_w. És a dir, hem de determinar λ_i i μ_i per a $1\le i\le 4$, tals que:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 \\ f(v_2) &= \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 w_3 + \mu_4 w_4 \end{aligned}$$

- Substituint $f(v_i)$ i w_j, ens queden les equacions:

$$\begin{aligned} (1,1,0,-1) &= \lambda_1(1,1,-1,-1) + \lambda_2(1,1,-1,-2) + \lambda_3(0,-1,1,1) + \lambda_4(-1,1,0,0) \\ (2,3,-2,-4) &= \mu_1(1,1,-1,-1) + \mu_2(1,1,-1,-2) + \mu_3(0,-1,1,1) + \mu_4(-1,1,0,0) \end{aligned}$$

les quals podem reescriure en els dos sistemes d'equacions següents:

$$\left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_4 &=& 1 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4 &=& 1 \\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3 &=& -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} \mu_1+\mu_2-\mu_4 &=& 2 \\ \mu_1+\mu_2-\mu_3+\mu_4 &=& 3 \\ -\mu_1-\mu_2+\mu_3 &=& -2 \\ -\mu_1-2\mu_2+\mu_3 &=& -4 \end{array}\right.$$

Matricialment, els dos sistemes anteriors són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- *Observació.* Notem que aquests dos sistemes d'equacions són sistemes de matriu associada la matriu M que hem definit en l'apartat anterior, és a dir, la matriu dels w_i en columna. En l'apartat anterior hem vist que $NM = \mathrm{Id}_4$, d'on es pot deduir que $N = M^{-1}$. Per tant, la solució es pot calcular directament fent:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\\ -4\end{pmatrix}.$$

  En aquesta resolució, però, farem tot el desenvolupament i resolució del sistema lineal esglaonant la matriu. Es deixa al lector comprovar que, en efecte, aquesta manera alternativa ens dóna el resultat que busquem. També es deixa al lector calcular M^{-1} i veure que realment $M^{-1} = N$.

- Per resoldre aquests dos sistemes lineals, considerem les matrius ampliades de cada sistema:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 1 & 0 & -1\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2\\ -1 & -2 & 1 & 0 & -4\end{array}\right)$$

  i les esglaonarem per files per resoldre ambdós sistemes per substitució inversa. Observem, però, que com que la matriu del sistema és la mateixa en tots dos sistemes d'equacions, és equivalent esglaonar cadascuna de les matrius ampliades anteriors que esglaonar la següent matriu:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2\\ -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -4\end{array}\right)$$

  és a dir, la matriu ampliada amb els dos vectors de termes independents[19]. Esglaonant aquesta matriu tenim:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2\\ -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2\end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

- Per tant, els dos sistemes d'equacions anteriors esdevenen, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

[19] De fet, els dos sistemes d'equacions es poden escriure matricialment en un de sol prenent un "vector" de termes independents i un "vector" d'incògnites, on aquests "vectors" tenen dues columnes cadascun d'ells. Aquests sistemes s'anomenen sistemes matricials, ja que les solucions que es busquen són matrius enlloc de vectors.

o, equivalentment, en forma d'equacions:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 &= 1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 &= 1 \\ \lambda_4 &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 &= 2 \\ -\mu_2 + \mu_3 - \mu_4 &= -2 \\ \mu_3 - \mu_4 &= 0 \\ \mu_4 &= 1 \end{cases}$$

- Fent substitució inversa, la solució de cadascun dels sistemes és:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 1 \\ \mu_4 = 1 \end{cases}$$

i, per tant, tenim:

$$f(v_1) = w_1 + w_2 + 2w_3 + w_4 = (1,1,2,1)_{B_w}$$
$$f(v_2) = w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 = (1,2,1,1)_{B_w}$$

d'on es dedueix que la matriu associada a f en les bases B_v de $\mathbb{R}^2$ i B_w de $\mathbb{R}^4$ és:

$$M(f; B_v, B_w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Per acabar, passem al càlcul de la matriu associada a l'aplicació dual $f^*\colon (\mathbb{R}^4)^* \to (\mathbb{R}^2)^*$ de l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$.

- Per determinar aquesta matriu podríem repetir el procés que acabem d'exposar amb les bases B_w^* i B_v^* dels espais duals. Tanmateix, podem aprofitar que B_w^* i B_v^* no són només bases dels espais duals sinó que són, respectivament, les bases duals de les bases B_w i B_v que alhora són, precisament, les bases respecte les quals hem calculat la matriu $M(f; B_v, B_w)$. En aquest cas sabem que la matriu associada a l'aplicació dual en les bases duals, $M(f^*; B_w^*, B_v^*)$, es pot calcular simplement com $M(f^*; B_w^*, B_v^*) = M(f; B_v, B_w)^T$.

- Per tant, tenim:

$$M(f^*; B_w^*, B_v^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i ja hem acabat.

- **Segona resolució**

- Una manera alternativa de calcular la matriu associada a f en les bases demanades l'exposem a continuació.

- Recordem que l'aplicació lineal f ve donada per $f(x,y) = (3x - y, 5x - 2y, -4x + 2y, -7x + 3y)$ i, per tant, la matriu associada a f en les bases canòniques $B_{e,\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}^2$ i $B_{e,\mathbb{R}^4}$ de $\mathbb{R}^4$ és:

$$M(f; B_{e,\mathbb{R}^2}, B_{e,\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ -4 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

- D'altra banda, tenim els canvis de base en $\mathbb{R}^2$ i en $\mathbb{R}^4$ donats, respectivament, per les matrius següents:

$$M(B_v \to B_{e,\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Per tant, podem considerar el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B_v) \arrow[r, "f", "M(f;B_v,B_w)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}"', "M(B_v\to B_{e,\mathbb{R}^2})"] & (\mathbb{R}^4, B_w) \arrow[d, "M(B_w\to B_{e,\mathbb{R}^4})"', "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}"] \\
(\mathbb{R}^2, B_{e,\mathbb{R}^2}) \arrow[r, "f", "M(f;B_{e,\mathbb{R}^2},B_{e,\mathbb{R}^4})"'] & (\mathbb{R}^4, B_{e,\mathbb{R}^4})
\end{tikzcd}$$

on cada element d'aquest diagrama és:

$(\mathbb{R}^2, B_{e,\mathbb{R}^2})$ és l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ amb la seva base canònica.

$(\mathbb{R}^2, B_v)$ és l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ amb la base B_v donada.

$(\mathbb{R}^4, B_{e,\mathbb{R}^4})$ és l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ amb la seva base canònica.

$(\mathbb{R}^4, B_w)$ és l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ amb la base B_w donada.

$M(B_v \to B_{e,\mathbb{R}^2})$ és la matriu de canvi de base de la base B_v a la base canònica $B_{e,\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}^2$.

$M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})$ és la matriu de canvi de base de la base B_w a la base canònica $B_{e,\mathbb{R}^4}$ de $\mathbb{R}^4$.

$M(f; B_{e,\mathbb{R}^2}, B_{e,\mathbb{R}^4})$ és la matriu de l'aplicació lineal f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i de $\mathbb{R}^4$.

$M(f; B_v, B_w)$ és la matriu de l'aplicació lineal f en les bases B_v de $\mathbb{R}^2$ i B_w de $\mathbb{R}^4$.

- D'aquest diagrama es dedueix que podem calcular la matriu de f en les bases B_v i B_w de la següent manera:

$$M(f; B_v, B_w) = M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})^{-1} \cdot M(f; B_{e,\mathbb{R}^2}, B_{e,\mathbb{R}^4}) \cdot M(B_v \to B_{e,\mathbb{R}^2}).$$

Dit en paraules: fem un canvi de base, apliquem f i fem un altre canvi de base. (Recordeu que la matriu $M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})^{-1}$ és la matriu de canvi de base de la base canònica $B_{e,\mathbb{R}^4}$ de $\mathbb{R}^4$ a la base B_w, és a dir, es té la igualtat $M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})^{-1} = M(B_{e,\mathbb{R}^4} \to B_w)$).

- Observem que com que la matriu $M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})$ és la matriu M de l'apartat (a), aleshores la seva inversa $M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})^{-1}$ és la matriu N d'aquell apartat.

- Per tant, només ens queda calcular:

$$\begin{aligned}
M(f; B_v, B_w) &= M(B_w \to B_{e,\mathbb{R}^4})^{-1} \cdot M(f; B_{e,\mathbb{R}^2}, B_{e,\mathbb{R}^4}) \cdot M(B_v \to B_{e,\mathbb{R}^2}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ -4 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- Per acabar, calculem la matriu associada a l'aplicació dual $f^*\colon (\mathbb{R}^4)^* \to (\mathbb{R}^2)^*$ de l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Sabem que la matriu $M(f^*; B_w^*, B_v^*)$ associada a l'aplicació dual en les bases duals es pot calcular per:
$$M(f^*; B_w^*, B_v^*) = M(f; B_v, B_w)^T.$$

- Per tant, tenim:
$$M(f^*; B_w^*, B_v^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  i ja hem acabat.

- 20.

Considerem les següents matrius $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Es demana:

i. Trobeu els valors i els vectors propis d'aquestes matrius. Digueu quines d'elles són diagonalitzables i, si ho són, determineu una base on la matriu tingui forma diagonal.

ii. Calculeu el polinomi mínim d'aquestes matrius. Aplicant el primer teorema de descomposició a aquest polinomi, doneu la descomposició de $\mathbb{K}^3$ com suma directa de subespais invariants per A i determineu una matriu diagonal per blocs $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ associada a aquesta descomposició i una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

Solució

(a) Els valors propis són -1, -3 i 2. Els vectors propis de valor propi -1 són $\langle(1,-1,1)\rangle$, els vectors propis de valor propi -3 són $\langle(-1,1,1)\rangle$, i els vectors propis de valor propi 2 són $\langle(0,1,0)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$-diagonalitzable i $\mathbb{C}$-diagonalitzable. Té forma diagonal $\mathrm{Diag}(-1,-3,2)$ respecte de la base $\{(1,-1,1),(-1,1,1),(0,1,0)\}$.

El polinomi mínim és $m_A(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

La descomposició associada és $\mathbb{K}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ on $F_1 = \mathrm{Ker}(A + \mathrm{Id}) = \langle(1,-1,1)\rangle$, on $F_2 = \mathrm{Ker}(A + 3\,\mathrm{Id}) = \langle(-1,1,1)\rangle$, i on $F_3 = \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id}) = \langle(0,1,0)\rangle$.

Tenim $A = PDP^{-1}$ on $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i on $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Els valors propis són 0 (valor propi doble) i -3 (valor propi simple). Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(2,0,1)\rangle$, i els de valor propi -3 són $\langle(-8,1,-3)\rangle$. La matriu no és ni $\mathbb{R}$-diagonalitzable ni $\mathbb{C}$-diagonalitzable.

El polinomi mínim és $m_A(x) = x^3 + 3x^2$.

La descomposició associada és $\mathbb{K}^3 = F_1 \oplus F_2$ on $F_1 = \mathrm{Ker}(A + 3\,\mathrm{Id}) = \langle(-8,1,-3)\rangle$, i on $F_2 = \mathrm{Ker}\,A^2 = \langle(2,0,1),(1,0,0)\rangle$.

Tenim $A = PDP^{-1}$ on $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i on $P = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Té un únic valor propi: 1 (valor propi triple). Els vectors propis de valor propi 1 són $\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$. La matriu no és ni $\mathbb{R}$-diagonalitzable ni $\mathbb{C}$-diagonalitzable.

El polinomi mínim és $m_A(x) = x^2 - 2x + 1$.

La descomposició associada és $\mathbb{K}^3 = F_1 = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id})^2 = \langle(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\rangle$.

Tenim $A = PDP^{-1}$ on $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i on $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) En $\mathbb{R}$ té un únic valor propi: 0 (valor propi simple). Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(1,0,1)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable.

En $\mathbb{C}$ té valors propis 0, $2i$, $-2i$. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(1,0,1)\rangle$, els de valor propi $2i$ són $\langle(1,i,-1)\rangle$, i els de $-2i$ són $\langle(1,-i,-1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$-diagonalitzable i té forma diagonal $\mathrm{Diag}(0,2i,-2i)$ respecte de la base $\{(1,0,1),(1,i,-1),(1,-i,-1)\}$.

El polinomi mínim és $m_A(x) = x^3 + 4x$.

Per a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la descomposició associada és $\mathbb{C}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ on $F_1 = \operatorname{Ker} A = \langle(1,0,1)\rangle$, on $F_2 = \operatorname{Ker}(A - 2i\,\mathrm{Id}) = \langle(1,i,-1)\rangle$, i on $F_3 = \operatorname{Ker}(A + 2i\,\mathrm{Id}) = \langle(1,-i,-1)\rangle$.

Per a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la descomposició associada és $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ on $F_1 = \operatorname{Ker} A = \langle(1,0,1)\rangle$, i on $F_2 = \operatorname{Ker}(A^2 + 4\,\mathrm{Id}) = \langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aleshores $A = PDP^{-1}$ on $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$ i on $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aleshores $A = PDP^{-1}$ on $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ i on $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolució

- Abans de procedir a la resolució d'aquest exercici, anem a fer una breu discussió sobre la teoria de diagonalització.

- La idea que hi ha darrera del procés de diagonalització d'un endomorfisme f, o d'una matriu A, és clara: volem obtenir una expressió "senzilla" de l'endomorfisme f o de la matriu A que estem considerant. En el cas d'una matriu l'expressió més senzilla que sabem manipular és una matriu diagonal, que es tradueix, en termes d'endomorfismes, en una aplicació lineal que envia cada component a un múltiple de si mateixa.

- Formalment, direm que un endomorfisme f d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul E de dimensió finita n és un *endomorfisme* $\mathbb{K}$*-diagonalitzable* si existeix una base $B_v = \{v_1, \dots, v_n\}$ de l'espai vectorial E de manera que la matriu associada a f en aquesta base és una matriu diagonal, és a dir $M(f; B_v) = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ on $\mu_i \in \mathbb{K}$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Mentre que direm que una matriu quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'ordre n amb coeficients en un cos commutatiu $\mathbb{K}$ és una *matriu* $\mathbb{K}$*-diagonalitzable* si existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i existeix una matriu diagonal $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de manera que $A = PDP^{-1}$.

- Per tant, si tenim un endomorfisme f d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul E de dimensió finita n, o bé si tenim una matriu quadrada A d'ordre n amb coeficients en el cos $\mathbb{K}$, el que busquem és una forma diagonal D i un canvi de base P que ens porti de la forma que tenim inicialment a la forma diagonal.

- Així doncs, per poder dur a terme el procés de diagonalització ens calen els següents elements: per una banda ens calen n elements $\mu_1, \dots, \mu_n$ del cos $\mathbb{K}$, comptant repeticions, que ens donin la forma diagonal D i, per altra banda, ens calen n vectors linealment independents $v_1, \dots, v_n$ de l'espai vectorial E que ens donin el canvi de base P. Observem que $f(v_i) = \mu_i v_i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Els escalars del cos s'anomenen *valors propis* de l'endomorfisme o de la matriu, mentre que els vectors que ens donen el canvi de base són *vectors propis*.

- En el cas en què no puguem obtenir algun d'aquests elements, és a dir, que no tinguem n valors propis o no puguem determinar n vectors propis linealment independents, aleshores, si succeeix això, no podrem obtenir una forma diagonal per a l'endomorfisme o per a la matriu donada.

- D'una banda els valors propis es poden determinar fàcilment com les arrels d'un polinomi. Concretament es demostra que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de l'endomorfisme f si i només si λ és una arrel del *polinomi característic* de l'endomorfisme f, polinomi que es defineix com $p_f(x) = \det(f - x\,\mathrm{Id})$. La *multiplicitat algebraica* del valor propi λ és la multiplicitat de λ com arrel del polinomi característic $p_f(x)$.

- D'altra banda els vectors propis de l'endomorfisme els podem determinar solucionant sistemes homogenis. Concretament, si λ és un valor propi de l'endomorfisme f aleshores, els vectors propis de f de valor propi λ són els elements no nuls del subespai $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$. La *multiplicitat geomètrica* del valor propi λ és el màxim nombre de vectors propis de valor propi λ linealment independents que té l'endomorfisme f, és a dir, la dimensió del subespai $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$. Es demostra que si el valor propi λ té multiplicitat algebraica n_λ aleshores la seva multiplicitat geomètrica verifica $1 \leq \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \leq n_\lambda$.

- Amb tot això ara podem enunciar el següent teorema de caracterització dels endomorfismes i de les matrius diagonalitzables:

  - **Teorema.** *Sigui f un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul E de dimensió finita n. Aleshores, l'endomorfisme f és $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si existeix una base de l'espai E formada per vectors propis de f, si i només si el polinomi característic de l'endomorfisme f descompon en factors lineals en l'anell de polinomis $\mathbb{K}[x]$ i la multiplicitat algebraica dels valors propis de f coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica. És a dir, l'endomorfisme f és $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si $p_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{n_r}$ amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ diferents entre ells i a més $n_i = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\,\mathrm{Id})$ per a tot $i \in \{1, \ldots, r\}$.*

    A més a més, en aquesta situació, si $\{v_{i,1}, \ldots, v_{i,n_i}\}$ és una base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i\,\mathrm{Id})$, aleshores el conjunt de vectors $B = \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,n_r}\}$ és una base de l'espai vectorial E i la matriu associada a l'endomorfisme f en la base de B de E és la matriu diagonal $M(f; B) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \overset{n_1}{\ldots}, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r, \overset{n_r}{\ldots}, \lambda_r) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- D'aquest teorema es dedueix que no tots els endomorfismes són diagonalitzables. Ara bé, es pot demostrar que sempre un endomorfisme admet una *forma diagonal per blocs*. Aquest resultat és conseqüència del *primer teorema de descomposició*, teorema on intervenen les nocions de *polinomi anul·lador* i de *subespai invariant*. Anem a recordar aquests conceptes.

- Donat un endomorfisme f d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E, es diu que un subespai vectorial F de E és un *subespai invariant* per l'endomorfisme f si $f(F) \subseteq F$, és a dir, si i només si per a tot $v \in F$ es té que $f(v) \in F$. Observem que si F és un subespai invariant per f aleshores la restricció $f_{|F}$ ens defineix un endomorfisme de F. Aquesta observació és la que ens permet relacionar els subespais invariants amb la *diagonalització per blocs*. Concretament es té que:

  - **Proposició.** *Sigui f un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul E de dimensió finita. Suposem que existeixen subespais vectorials no nuls $F_1, \ldots, F_r$ de E invariants per f tals que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$. Sigui $n_i = \dim F_i$ i sigui B_i una base del subespai F_i. Aleshores, la matriu associada a l'endomorfisme f en la base $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ de E és una matriu diagonal per* *blocs. Concretament es té que* $M(f;B) = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_r) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *on* $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ *és la matriu de l'endomorfisme* $f_{|F_i}$ *en la base* B_i *de* F_i*, és a dir,* $A_i = M(f_{|F_i}; B_i)$.

- Així, per determinar una forma diagonal per blocs associada a l'endomorfisme f el que hem de fer és donar la descomposició de l'espai com suma directa de subespais invariants. Aquesta descomposició la garanteix el *primer teorema de descomposició* que relaciona la descomposició de l'espai vectorial amb la factorització de certs polinomis, els *polinomis anul·ladors*.

  - **Teorema.** *Sigui* f *un endomorfisme d'un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial no nul* E *de dimensió finita i sigui* p *un polinomi anul·lador de* f*, és a dir* $p \in \mathbb{K}[x]$ *és un polinomi tal que* $p(f) = 0$*. Considerem la descomposició factorial* $p = \alpha p_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{t_s}$ *del polinomi* p *en* $\mathbb{K}[x]$*. Aleshores es té que,* $E = \mathrm{Ker}\, p_1^{t_1}(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, p_s^{t_s}(f)$ *i els subespais* $\mathrm{Ker}\, p_1^{t_1}(f), \dots, \mathrm{Ker}\, p_s^{t_s}(f)$ *són subespais invariants per* f *(pot ser que algun d'ells sigui nul).*

- Ara únicament hem de recordar que en el cas de dimensió finita podem assegurar l'existència de polinomis anul·ladors. De fet el *teorema de Cayley-Hamilton* ens diu que el polinomi característic $p_f(x)$ és un polinomi anul·lador de l'endomorfisme f. D'aquesta manera sempre podem aplicar el primer teorema de descomposició al polinomi característic $p_f(x)$. En aquest cas, a més, es pot demostrar que si $p_f(x) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ és la descomposició factorial en $\mathbb{K}[x]$ del polinomi característic $p_f(x)$, aleshores, els subespais vectorials $\mathrm{Ker}\, p_1^{n_1}(f), \dots, \mathrm{Ker}\, p_r^{n_r}(f)$ són invariants per f, són no nuls, i tenen dimensió $\dim \mathrm{Ker}\, p_i^{n_i}(f) = n_i \deg p_i$.

- Observem que per aplicar el primer teorema de descomposició hem de factoritzar un polinomi i això serà més fàcil quant més petit sigui el grau del polinomi. Per tant és natural considerar el polinomi mònic anul·lador de grau més petit. Aquest polinomi, que notem per $m_f(x)$, s'anomena el *polinomi mínim* de l'endomorfisme f. De fet es pot demostrar que un polinomi $p \in \mathbb{K}[x]$ és un polinomi anul·lador de f si i només si p és múltiple de $m_f(x)$. Aquesta relació es pot concretar molt més en el cas del polinomi característic. Concretament es té el següent resultat que relaciona la descomposició factorial del polinomi característic i del polinomi mínim:

  - **Proposició.** *Sigui* f *un endomorfisme d'un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial no nul* E *de dimensió finita* n*, i sigui* $p_f(x) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ *la descomposició factorial en* $\mathbb{K}[x]$ *del polinomi característic de* f*. Aleshores, la descomposició factorial del polinomi mínim de* f *és* $m_f(x) = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$ *on* $1 \le m_i \le n_i$*. Concretament* $m_i = \min\{m \,:\, \dim \mathrm{Ker}\, p_i^m(f) = n_i \deg p_i\}$.

- Finalment observem que el cas més senzill és el cas en què el polinomi mínim descompon en factors lineals de multiplicitat 1, és a dir el cas en què el polinomi p_i és un polinimi mònic de grau 1 i la multiplictat m_i del factor p_i val $m_i = 1$. Aquest és exactament el cas de l'endomorfisme diagonalitzable. Concretament es té que:

  - **Teorema.** *Sigui* f *un endomorfisme d'un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial no nul* E *de dimensió finita* n*. Aleshores, l'endomorfisme* f *és* $\mathbb{K}$*-diagonalitzable si i només si el polinomi mínim de l'endomorfisme* f *es descompon en factors lineals simples en l'anell de polinomis* $\mathbb{K}[x]$*. És a dir, l'endomorfisme* f *és* $\mathbb{K}$*-diagonalitzable si i només si existeixen* $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ *diferents entre ells tals que* $m_f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)$.

- Amb això acabem aquest repàs sobre la teoria de diagonalització i els diferents conceptes que hi intervenen. Un cop fet aquest repàs passem a la resolució d'aquest exercici. Atès que cada apartat és independent dels altres, al llarg de tota la resolució denotarem per A la matriu corresponent a l'apartat que estem resolent.

Resolució (a)

- *Polinomi característic i valors propis de la matriu* A.

Recordem que els valors propis d'una matriu, o d'un endomorfisme, es poden calcular fent servir el polinomi característic. Concretament, els valors propis són les arrels d'aquest polinomi. Per tant, hem de determinar en primer lloc el polinomi característic de la matriu i, tot seguit, determinar-ne les arrels. El polinomi característic de la matriu A es calcula de la següent manera:

$$p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 0 & 1 \\ 4 & 2-x & -1 \\ 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix}.$$

Observem que la segona columna només té el terme de la diagonal no nul. Per tant, desenvolupem el determinant per la segona columna i tenim:

$$p_A(x) = -(x-2)\det \begin{pmatrix} -2-x & 1 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix}.$$

Ara observem que el determinat que hem de calcular és exactament el polinomi característic d'una matriu quadrada 2×2. Pel que hem fet a teoria sabem que si $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ és una matriu 2×2 aleshores el seu polinomi característic és $p_C(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(C)x + \det(C)$. Per tant en el nostre cas tenim:

$$\det \begin{pmatrix} -2-x & 1 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} = x^2 + 4x + 3$$

i, per tant, el polinomi característic de la matriu A és:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= -(x-2)(x^2+4x+3) \\ &= -(x-2)(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

d'on els valors propis de la matriu A són $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ i $\lambda_3 = 2$.

Ara que ja hem calculat els valors propis, anem a veure si la matriu A és o no és una matriu diagonalitzable.

- *És la matriu* A *una matriu diagonalitzable?*

Recordem que, pel teorema de diagonalització, una matriu $n \times n$ és diagonalitzable si i només si el polinomi característic descompon totalment en factors lineals i la multiplicitat algebraica de cada valor propi λ_i (el nombre de vegades que es repeteix l'arrel λ_i en el polinomi característic) coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica (la dimensió del subespai vectorial $\operatorname{Ker}(A-\lambda_i \operatorname{Id})$).

Per tant, un cop es té la descomposició del polinomi característic en factors lineals, per saber si la matriu és diagonalitzable únicament falta comprovar que les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen. En el nostre cas això resulta evident ja que, en general, la multiplicitat geomètrica està fitada per l'algebraica, és a dir es té que

$$1 \leq \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i \operatorname{Id}) \leq n_{\lambda_i}$$

on n_{λ_i} denota la multiplicitat algebraica del valor propi λ_i. Com a conseqüència d'això, si la multiplicitat algebraica d'un valor propi és 1, aleshores la seva multiplicitat geomètrica també i ambdós valors coincideixen.

Aquesta és la situació en la matriu A que estem considerant: com que el polinomi característic té totes les arrels diferents, totes elles tenen multiplicitat algebraica 1 i, per l'exposició que acabem de fer, també tenen multiplicitat geomètrica 1. Així doncs, podem afirmar que la matriu A és diagonalitzable. A més, com que la descomposició del polinomi característic és vàlida tant a $\mathbb{Q}$, com a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, aleshores podem afirmar que la matriu és diagonalitzable en tots tres cossos.

En el cas en què només volguéssim determinar si la matriu A és diagonalitzable o no ja hauríem acabat. Tanmateix també ens demanen trobar la forma diagonal associada i una base en la qual la matriu diagonalitza, i això és el que farem a continuació.

- *Forma diagonal associada.*

Com hem explicat en la discussió teòrica prèvia a la resolució del problema, la forma diagonal associada D a la matriu A s'obté "escrivint en la diagonal" els valors propis $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de la matriu, mentre que els vectors $v_1, \ldots, v_n$ que ens donen el canvi de base P són una base de vectors propis de la matriu. És a dir, es té que $A = PDP^{-1}$ on la forma diagonal D és $D = \operatorname{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ i on les columnes de P determinen una base de vectors propis $v_1, \ldots, v_n$ de la matriu A (concretament el vector v_i és un vector propi de la matriu A de valor propi μ_i).

Per tant en el nostre cas tenim $A = PDP^{-1}$ on la forma diagonal D és

$$D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \operatorname{Diag}(-1, -3, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i on la matriu P és la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

que té per columnes una base de vectors propis v_1, v_2, v_3. Concretament el vector v_i és un vector propi de valor propi λ_i. Ara, per tant, hem de calcular una base de vectors propis.

- *Vectors propis de la matriu A de valor propi -1.*

Cada vector propi està associat a un únic valor propi (tot i que cada valor propi por tenir com a màxim tants vectors propis linealment independents com la seva multiplicitat algebraica), i aquests vectors es determinen com els elements no nuls dels subespais vectorials $\operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id})$, on $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de la matriu.

Un cop recordat això anem a determinar els vectors propis de valor $\lambda = -1$. Aquests vectors són els elements no nuls del subespai $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{Id})$. Per tant, la matriu que estem considerant és

$$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observem que la suma de la primera i tercera columnes ens dóna la segona columna, de manera que el nucli d'aquesta matriu és $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{Id}) = \langle (1, -1, 1) \rangle$.

Tot i que en aquesta resolució hem determinat el nucli $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ "a vista", la manera general per trobar-ne els generadors és resoldre el sistema homogeni de matriu associada $A - \lambda\,\mathrm{Id}$, és a dir el sistema homogeni $(A - \lambda\,\mathrm{Id})\mathbf{x} = 0$. Abans de continuar calculant una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de vectors propis de la matriu A, anem a fer un comentari relatiu a la solució dels sistemes lineals homogenis [20].

- *Comentari.* Els vectors propis de la matriu A de valor propi $\lambda = -1$ els determinem solucionant el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és a dir el sistema lineal homogeni

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} -x & & +z & = 0 \\ 4x & +3y & -z & = 0 \\ x & & -z & = 0 \end{array} \right.$$

La matriu d'aquest sistema homogeni té rang 2 i, per tant, podem escriure les solucions en funció d'un paràmetre (ja que el sistema té un grau de llibertat). És a dir, podem donar les solucions de la forma $x \equiv x(\xi)$, $y \equiv y(\xi)$ i $z \equiv z(\xi)$ on $\xi \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real. En aquest comentari anem a analitzar una mica més aquesta frase, concretament anem a veure què podem agafar com a paràmetre [21]. En general, si $A\mathbf{x} = 0$ és un sistema homogeni de n equacions i n incògnites $x_1, \ldots, x_n$, i si notem per $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ les n columnes de la matriu A, aleshores es té que, les solucions del sistema $A\mathbf{x} = 0$ es poden escriure de manera lineal en funció de les variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ (és a dir, podem escriure $x_i \equiv x_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ per a $1 \leq i \leq n$) si i només si $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(C_{i_1}(A), \ldots, C_{i_r}(A)) = r$. En el nostre cas, per tant, únicament hem d'observar que com que la matriu del sistema té rang 2 aleshores podem afirmar que qualsevol menor de rang 2 ens permet escriure les seves dues incògnites associades com a variables i la resta d'incògnites (en aquest cas una) com a paràmetres (en aquest cas un). Dit d'una altra manera, com que per exemple el menor

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

és un menor de rang 2, aleshores sí que podem fer servir la variable z com a paràmetre ξ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $x \equiv x(z)$ i $y \equiv y(z)$. En efecte, resolem el sistema d'equacions i obtenim $x = z$ i $3y = z - 4x = -3z$, d'on $y = -z$ i, per tant,

[20] Aquest és, per tant, un comentari més propi del tema de resolució de sistemes d'equacions lineals que del tema de diagonalització.

[21] Una generalització al cas no lineal és el teorema de la funció implícita.

$\operatorname{Ker}(A + \operatorname{Id}) = \{(z, -z, z) \in \mathbb{K}^3 \ : \ z \in \mathbb{K}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle$. Anàlogament, com que per exemple el menor

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

és un menor de rang 2, aleshores també podem fer servir la variable y com a paràmetre ξ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $x \equiv x(y)$ i $z \equiv z(y)$. De la mateixa manera, com que per exemple el menor

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

és un menor de rang 2, aleshores també podem fer servir la variable x com a paràmetre ξ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $y \equiv y(x)$ i $z \equiv z(x)$ [22].

- *Vectors propis de la matriu A de valor propi -3 i de valor propi* 2.

Continuem calculant una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de vectors propis de la matriu A. Recordem que de moment hem calculat els vectors propis de valor propi $\lambda = -1$. Per tant, ara hem de calcular els vectors propis de valor propi $\lambda = -3$ i els vectors propis de valor propi $\lambda = 2$.

Anem a calcular els vectors propis de valor propi $\lambda = -3$. Aquest vectors són els elements no nuls de $\operatorname{Ker}(A + 3\operatorname{Id})$. La matriu de la qual hem de calcular el nucli és la matriu

$$A + 3\operatorname{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, la suma de les dues darreres columnes de la matriu ens dóna com a resultat la primera columna, de manera que tenim $\operatorname{Ker}(A + 3\operatorname{Id}) = \langle (-1, 1, 1) \rangle$.

Finalment, anem a calcular els vectors propis de valor propi $\lambda = 2$. En aquest cas la matriu de la qual hem de calcular el nucli és

$$A - 2\operatorname{Id} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Atès que aquesta matriu té una columna de zeros, el seu nucli es determina de manera immediata, obtenint $\operatorname{Ker}(A - 2\operatorname{Id}) = \langle (0, 1, 0) \rangle$.

- *Comentari.* Seguint amb la idea del comentari anterior, els vectors propis de valor propi $\lambda = 2$ els determinem solucionant el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[22] No sempre podem fer servir totes les variables com a paràmetres. En el proper comentari veurem un exemple en aquesta situació. Aquesta situació l'analitzarem de nou en la pàgina 158. A més, en la pàgina 163 veurem un cas on farem servir dos paràmetres.

La matriu d'aquest sistema homogeni té rang 2 i per tant, com abans, ara també podem escriure les solucions en funció d'un paràmetre (ja que el sistema té un grau de llibertat). És a dir podem donar les solucions de la forma $x \equiv x(\xi)$, $y \equiv y(\xi)$ i $z \equiv z(\xi)$ on $\xi \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real. En aquest cas, com que per exemple el menor

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

és un menor de rang 2, aleshores sí que podem fer servir la variable y com a paràmetre ξ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $x \equiv x(y)$ i $z \equiv z(y)$, (en aquest cas resulta $x \equiv x(y) \equiv 0$ i $z \equiv z(y) \equiv 0$). Ara bé, no podem posar la incògnita x com a paràmetre ξ ja que els tres menors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

tenen rang 1. Per tant no podem donar la solució del sistema de la forma $y \equiv y(x)$ i $z \equiv z(x)$.

- *Base de vectors propis.*

Recordem que volem calcular una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de vectors propis de la matriu A. Pel que hem fet fins ara sabem que els vectors $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ i $v_3 = (0, 1, 0)$ són tres vectors propis d'aquesta matriu. Ens faltaria veure que tots tres vectors són linealment independents. Tanmateix sabem, pel que hem vist a teoria, que els vectors propis associats a valors propis diferents són sempre linealment independents. Per tant podem afirmar que el conjunt de vectors $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ és una base, d'on tenim que la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ens dóna el canvi de base de la matriu A a la matriu diagonal D donada per

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathrm{Diag}(-1, -3, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Comentari.* Es pot comprovar que en efecte es té la igualtat $A = PDP^{-1}$. Observem, però, que no cal calcular la inversa de la matriu P ja que, com que P és invertible aleshores $A = PDP^{-1}$ si i només si $AP = PD$. Es deixa com a exercici al lector comprovar aquesta igualtat.

- *Polinomi mínim de la matriu A.*

Per una banda recordem que el polinomi mínim d'una matriu és el polinomi mònic anul·lador de menor grau de la matriu. Això implica que tot polinomi anul·lador de la matriu és un múltiple del polinomi mínim. En particular el polinomi mínim ha de ser un divisor del polinomi característic, ja que el polinomi característic anul·la la matriu (teorema de Cayley-Hamilton).

Per altra banda sabem que tots els valors propis són arrels de qualsevol polinomi anul·lador de la matriu. En particular podem afirmar que els factors primers del polinomi característic també són factors primers del polinomi mínim.

Per tant, si el polinomi característic descompon en factors irreductibles en $\mathbb{K}[x]$ de la següent manera

$$p_A(x) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

aleshores el polinomi mínim ve donat per

$$m_A(x) = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$$

on $1 \leq m_i \leq n_i$. A més sabem que els exponents m_i es poden determinar ja que

$$m_i = \min\{m \,:\, \dim \operatorname{Ker} p_i^m(A) = n_i \deg p_i\}$$

i, per tant, si $n_i = 1$ aleshores $m_i = 1$. En particular, si el polinomi característic $p_A(x)$ descompon en factors lineals de multiplicitat 1, aleshores el polinomi mínim $m_A(x)$ coincideix amb el polinomi característic (llevat d'un factor constant per a fer-lo mònic). Aquesta és la situació que ara tenim. És a dir, com que el polinomi característic de la matriu A és

$$p_A(x) = -(x+1)(x+3)(x-2)$$

aleshores el polinomi mínim de la matriu A és

$$m_A(x) = (x+1)(x+3)(x-2).$$

- *Comentari.* Notem que, de fet, aquest resultat també el podem obtenir aplicant el teorema de diagonalització de la pàgina 149 que diu que una matriu és diagonalitzable si i només si tots els factors del polinomi mínim són lineals i de multiplicitat 1. En el nostre cas, per tant, com que sabem que la matriu A és diagonalitzable amb valors propis $-1, -3, 2$ aleshores podem afirmar que el polinomi mínim de A és $m_A(x) = (x+1)(x+3)(x-2)$.

- *Subespais invariants associats al primer teorema de descomposició.*

Pel primer teorema de descomposició sabem que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i si

$$m_A(x) = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$$

és la descomposició factorial del polinomi mínim de la matriu A en $\mathbb{K}[x]$ aleshores

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} p_1^{m_1}(A) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} p_r^{m_r}(A)$$

és una descomposició de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ com suma directa de subespais vectorials no nuls i invariants per A. En el nostre cas, la descomposició en factors irreductibles del polinomi mínim de la matriu A és

$$m_A(x) = (x+1)(x+3)(x-2)$$

i per tant, aplicant el primer teorema de descomposició, tindrem que l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$ descompon en subespais invariants com

$$\mathbb{K}^3 = \operatorname{Ker}(A + \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(A + 3\,\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id})$$

és a dir tenim

$$\mathbb{K}^3 = \langle (1,-1,1) \rangle \oplus \langle (-1,1,1) \rangle \oplus \langle (0,1,0) \rangle.$$

- *Comentari.* Observem que els tres subespais vectorials que obtenim en aquesta descomposició són tots ells subespais de vectors propis. De fet això només es pot tenir quan la matriu A sigui una matriu diagonalitzable (aquest és el nostre cas).

- *Forma diagonal per blocs associada.*

Per acabar, fent servir la descomposició de $\mathbb{K}^3$ com suma directa de subespais invariants, calcularem una matriu diagonal per blocs associada $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ i una matriu invertible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tal que $A = QD'Q^{-1}$.

En aquest cas aquestes matrius es determinen fàcilment. Concretament la matriu D' és una matriu amb tres blocs 1×1 (ja que cada bloc correspon a cada un dels tres sumands de la descomposició). És a dir en aquest cas la matriu D' és una matriu diagonal. Mentre que la matriu invertible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ és la matriu formada per una base de vectors propis (ja que cada un dels tres sumands és un subespai de vectors popis). Per tant tenim el mateix resultat que abans, $A = QD'Q^{-1}$ on:

$$D' = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolució (b)

- *Polinomi característic i valors propis de la matriu A.*

Com abans, comencem calculant el polinomi característic de la matriu:

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} -2-x & 20 & 4 \\ 0 & -3-x & 0 \\ -1 & 7 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= -(x+3)\det \begin{pmatrix} -2-x & 4 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= -(x+3)(x^2 - \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x + \det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \\ &= -(x+3)(x^2 - 0 \cdot x + 0) \\ &= -(x+3)x^2. \end{aligned}$$

Notem que, com en l'apartat anterior, la descomposició del polinomi característic és vàlida a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ i, per tant, els resultats que segueixen són vàlids en tots tres cossos. És a dir, pel que fa referència a la diagonalització no hi ha diferència si pensem la matriu A com a matriu d'un $\mathbb{Q}$-endomorfisme, o si la pensem com a matriu d'un $\mathbb{R}$-endomorfisme o si la pensem com a matriu d'un $\mathbb{C}$-endomorfisme.

El polinomi característic ens proporciona, per una banda, els valors propis de la matriu (que són les arrels del polinomi) i, per altra banda, la multiplicitat algebraica de cada un dels valors propis (que és la multiplicitat del valor propi com arrel del polinomi).

En el nostre cas, per tant, els valors propis de la matriu són $\lambda_1 = -3$ amb multiplicitat algebraica 1, i $\lambda_2 = 0$ amb multiplicitat algebraica 2.

- *És la matriu A una matriu diagonalitzable?*

Ara, un cop tenim els valors propis i la seva multiplicitat algebraica, podem estudiar la diagonalització de la matriu A.

Notem que, en aquest cas, no podem afirmar directament que la matriu és diagonalitzable ja que, tot i que les multiplicitats algebraica i geomètrica del valor propi -3 coincideixen (és un valor propi simple), això no és necessàriament cert per al valor propi 0. De fet, a continuació veurem que això no és així.

Aplicant el teorema de diagonalització que hem recordat en la pàgina 148 tindrem que, en el nostre cas, la matriu A és diagonalitzable si i només si les multiplicitats algebraica i geomètrica del valor propi 0 coincideixen, és a dir, si i només si $\dim \operatorname{Ker}(A - 0 \cdot \mathrm{Id}) = 2$. En aquest cas la matriu

$$A - 0 \cdot \mathrm{Id} = A = \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

té rang dos ja que les dues primeres files (o columnes) no són proporcionals, mentre que la tercera és combinació lineal de les altres dues. Així $\dim \operatorname{Ker}(A - 0 \cdot \mathrm{Id}) = \dim \operatorname{Ker} A = 3 - \operatorname{rang}(A) = 3 - 2 = 1$ i, per tant, la matriu A no és diagonalitzable (la multiplicitat geomètrica del valor propi 0 val 1 mentre que l'algebraica val 2).

- *Vectors propis de la matriu A.*

A continuació passem al càlcul dels vectors propis de la matriu A. Recordem que els vectors propis de valor propi λ són els elements no nuls del subespai vectorial $\operatorname{Ker}(A - \lambda\, \mathrm{Id})$.

Per al valor propi $\lambda_1 = -3$ la matriu que hem de considerar és

$$A + 3\, \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tot i que no és evident de veure a simple vista, es pot comprovar resolent el sistema homogeni $(A + 3\, \mathrm{Id})\mathbf{x} = 0$ que $\operatorname{Ker}(A + 3\, \mathrm{Id}) = \langle (8, -1, 3) \rangle$, i per tant el vector $(8, -1, 3)$ és un vector propi de la matriu A associat al valor propi -3.

Per al valor propi $\lambda_2 = 0$ la matriu que considerem és la pròpia matriu A:

$$A - 0 \cdot \mathrm{Id} = A = \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per una banda sabem que aquest nucli té dimensió 1. Per altra banda, com que la primera i tercera columnes d'aquesta matriu són proporcionals per un factor -2, podem afirmar que $(2,0,1) \in \operatorname{Ker} A$. Així podem concloure que $\operatorname{Ker} A = \langle (2,0,1) \rangle$. Per tant, el vector $(2,0,1)$ és un vector propi de la matriu A associat al valor propi 0.

- *Comentari.* Observem que el màxim nombre de vectors propis linealment independents que té la matriu A és dos. En particular no existeix una base de vectors propis associada a la matriu A i, per tant, recuperem el que ja sabem: que la matriu A no és diagonalitzable.

- *Comentari.* Seguint amb la idea dels comentaris de les pàgines 152 i 153, els vectors propis de valor propi $\lambda = 0$ els determinem solucionant el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com que la matriu d'aquest sistema homogeni té rang 2, aleshores podem escriure les solucions del sistema de la forma $x \equiv x(\xi)$, $y \equiv y(\xi)$ i $z \equiv z(\xi)$ on $\xi \in \mathbb{R}$ és un paràmetre real. En aquest cas, com que per exemple el menor

$$\begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

és un menor de rang 2, aleshores sí que podem fer servir la variable z com a paràmetre ξ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $x \equiv x(z)$ i $y \equiv y(z)$, (en aquest cas resulta $x \equiv x(z) \equiv 2z$ i $y \equiv y(z) \equiv 0$). Ara bé, no podem posar la incògnita y com a paràmetre ξ ja que els tres menors

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

tenen rang 1. Per tant no podem donar la solució del sistema de la forma $x \equiv x(y)$ i $z \equiv z(y)$.

- *Polinomi mínim de la matriu A.*

Ara anem a calcular el polinomi mínim $m_A(x)$ de la matriu A. Per calcular-lo recordem que aquest polinomi ha de ser un divisor mònic del polinomi característic i ha de tenir les mateixes arrels. En el nostre cas el polinomi característic de la matriu A és

$$p_A(x) = -(x+3)x^2$$

de manera que només tenim dos candidats a polinomi mínim:

$$\begin{aligned} &\text{o bé} \quad m_A(x) = (x+3)x \\ &\text{o bé} \quad m_A(x) = (x+3)x^2. \end{aligned}$$

Tanmateix recordem el teorema de la pàgina 149. Aquest teorema ens diu que totes les arrels del polinomi mínim $m_A(x)$ tenen multiplicitat 1 si i només si la matriu A és diagonalitzable. Així, com que en el cas en què estem sabem que la matriu A no és diagonalitzble (ja que les multiplicitats algebraica i geomètrica d'un valor propi no coincideixen), per tant podem afirmar que el polinomi $(x+3)x$ no pot ser el polinomi mínim de A, de manera que

$$m_A(x) = (x+3)x^2.$$

Aquest no és l'únic argument que podem fer servir per determinar el polinomi mínim. En els següents comentaris presentem dos arguments "alternatius".

- *Comentari.* Recordeu que si $p_A(x) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ és la descomposició factorial del polinomi característic d'una matriu A, aleshores el polinomi mínim de la matriu és $m_A(x) = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$ on $1 \leq m_i = \min\{m \,:\, \dim \operatorname{Ker} p_i^m(A) = n_i \deg p_i\} \leq n_i$, (veure proposició en la pàgina 149). Per tant, com que en el nostre cas tenim que $p_A(x) = -(x+3)x^2$, i com que sabem que $\dim \operatorname{Ker} A = 1 \neq 2$, aleshores podem concloure que $m_A(x) = (x+3)x^2$.

- *Comentari.* Observem que el polinomi $(x+3)x$ no pot ser el polinomi mínim ja que de fet no és un polinomi anul·lador de la matriu A. En efecte, tenim $(x+3)x = x^2 + 3x$ i calculant:

$$A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 0 & -72 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

d'on $A^2 + 3A$ no és la matriu nul·la. De fet en aquest cas es té que la matriu $A^2 + 3A$ no anul·la a cap vector $v \in \operatorname{Ker} A^2$ tal que $v \notin \operatorname{Ker} A$. Observeu que aquests vectors existeixen ja que sempre es té la inclusió $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2$, però com que ara tenim $\dim \operatorname{Ker} A = 1 \neq 2 = \dim \operatorname{Ker} A^2$, per tant podem afirmar que $\operatorname{Ker} A \subsetneq \operatorname{Ker} A^2$. Un vector v en aquesta situació és, per exemple, el vector $v = (1, 0, 0)$.

- *Subespais invariants associats al primer teorema de descomposició.*

Atès que la matriu A no és diagonalitzable, no podrem determinar una base de vectors propis i, per tant, l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$ no és suma directa dels subespais de vectors propis. És a dir, en aquest cas es té que:

$$\mathbb{K}^3 \neq \operatorname{Ker}(A + 3\,\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker} A.$$

Per "transformar" aquesta "desigualtat" en una "igualtat" hem de modificar convenientment alguns dels subespais que hi intervenen. El primer teorema de descomposició ens diu com fer-ho. Concretament, com que la descomposició en factors irreductibles del polinomi característic i del polinomi mínim de la matriu A és

$$\begin{aligned} p_A(x) &= -(x+3)x^2 \\ m_A(x) &= (x+3)x^2 \end{aligned}$$

per tant, aplicant el primer teorema de descomposició a qualsevol d'aquests polinomis tindrem que l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$ descompon en subespais invariants com

$$\mathbb{K}^3 = \operatorname{Ker}(A + 3\,\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker} A^2$$

i que la dimensió de cada un d'aquests subespais és

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(A + 3\,\mathrm{Id}) &= \deg(x+3) = 1 \\ \dim \operatorname{Ker} A^2 &= \deg(x^2) = 2. \end{aligned}$$

Ara anem a determinar una base de cada un d'aquests subespais. Observem que el subespai vectorial $\mathrm{Ker}(A+3\,\mathrm{Id})$ és el subespai dels vectors propis de valor propi -3 del qual abans ja n'hem calculat una base

$$\mathrm{Ker}(A+3\,\mathrm{Id}) = \langle (8,-1,3)\rangle$$

i, per tant, únicament hem de calcular una base del subespai dos dimensional $\mathrm{Ker}\,A^2$. Anem a fer-ho. Com que A^2 és la matriu

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -72 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

aleshores el seu nucli és el subespai

$$\mathrm{Ker}\,A^2 = \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle$$

i per tant $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ és una base de $\mathrm{Ker}\,A^2$. Ara bé, de "bases n'hi ha moltes" i en aquest cas "n'hi ha una de millor". En efecte, recordem que es té la inclusió $\mathrm{Ker}\,A \subseteq \mathrm{Ker}\,A^2$, (de fet en aquest cas aquesta inclusió és estricta ja que $\dim \mathrm{Ker}\,A = 1 \neq 2 = \dim \mathrm{Ker}\,A^2$). Per tant, tot i que $\mathrm{Ker}\,A^2$ no és un subespai de vectors propis, podem afirmar que $\mathrm{Ker}\,A^2$ conté el subespai vectorial $\mathrm{Ker}\,A$ que sí que és un subespai de vectors propis (els vectors propis de valor propi 0). Així podem obtenir una "bona base" del subespai $\mathrm{Ker}\,A^2$ completant una base del subespai de vectors propis $\mathrm{Ker}\,A$. En el nostre cas, com que

$$\mathrm{Ker}\,A = \langle (2,0,1)\rangle$$

aleshores completant tindrem que

$$\mathrm{Ker}\,A^2 = \langle (2,0,1),(1,0,0)\rangle.$$

En conclusió, tenim la descomposició de $\mathbb{K}^3$ en subespais invariants és

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^3 &= \mathrm{Ker}(A+3\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,A^2 \\ &= \langle (8,-1,3)\rangle \oplus \langle (2,0,1),(1,0,0)\rangle\end{aligned}$$

i una base de $\mathbb{K}^3$ associada a aquesta descomposició és la base $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ on

$$\begin{aligned} v_1 &= (8,-1,3) \\ v_2 &= (2,0,1) \\ v_3 &= (1,0,0). \end{aligned}$$

- *Forma diagonal per blocs associada.*

Per acabar, fent servir la descomposició de $\mathbb{K}^3$ com suma directa de subespais invariants, calcularem una matriu diagonal per blocs associada $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ i una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

En el nostre cas hem vist que l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$ descompon com suma directa d'un subespai invariant de dimensió 1 i d'un subespai invariant de dimensió 2. Per tant podem afirmar que la matriu D associada serà una matriu diagonal per blocs amb un bloc 1×1 i un bloc 2×2 (ja que cada bloc correspon a cada un dels dos sumands de la descomposició). A més, pel que hem fet a teoria sabem que com matriu invertible P podem considerar la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

que té per "columnes els vectors" de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ associada a la descomposició de l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$. Anem a determinar les matrius D i P.

Com que abans ja hem calculat la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, podem agafar com matriu P la corresponent matriu canvi de base

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ara anem a calcular la matriu diagonal per blocs D associada. Això es pot fer de dues maneres diferents: o bé fent servir "canvis de base" o bé fent servir la "definició de matriu associada". Si fem sevir "canvis de base" únicament hem de pensar que $D = P^{-1}AP$ i, per tant, hem de calcular la inversa de la matriu P. Fent aquests càlculs tindrem:

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dificultat d'aquest mètode és que per determinar la matriu diagonal per blocs D hem d'invertir la matriu P. Com hem dit, una manera alternativa per calcular la matriu D és fer servir la "definició de matriu associada". Notem per f l'endomorfisme de $\mathbb{K}^3$ definit per la matriu A, és a dir, l'endomorfisme que en la base canònica B_e de $\mathbb{K}^3$ té com matriu associada $M(f, B_e)$ la matriu A. Aleshores sabem que la matriu D no és més que la matriu de l'endomorfisme f en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$, és a dir, D és la matriu que "té per columnes les coordenades de les imatges d'aquesta base"

$$D = M(f; B) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

on en la i-èsima columna de la matriu hi tenim escrites les coordenades del vector $f(v_i)$ en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. En el nostre cas tenim

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -3 \cdot v_1 = (-3, 0, 0)_B \\ f(v_2) &= 0 \cdot v_2 = (0, 0, 0)_B \end{aligned}$$

ja que el vector v_1 és un vector propi de valor propi -3 i el vector v_2 és un vector propi de valor propi 0. Així únicament ens falta per calcular les coordenades del vector $f(v_3)$ en la base B de $\mathbb{K}^3$. Com que $v_3 = (1, 0, 0)$ aleshores

$$f(v_3) = f(1, 0, 0) = (-2, 0, -1)$$

vector que podem escriure en la base B com [23]

$$f(v_3) = -v_2 = (0, -1, 0)_B.$$

Amb tot això obtenim la matriu diagonal per blocs:

$$D = M(f;B) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolució (c)

- *Polinomi característic i valors propis de la matriu A.*

Comencem per calcular el polinomi característic de la matriu A per tal de determinar els valors propis. En aquest cas, el polinomi és

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= -(x-1)\det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= -(x-1)(x^2 - \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \\ &= -(x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (1-x)^3. \end{aligned}$$

Com en els apartats anteriors, la descomposició del polinomi característic té lloc tant a $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, de manera que tot el raonament que segueix es pot aplicar indiferentment en qualsevol dels tres cossos.

L'única arrel del polinomi característic és $x = 1$, de manera que la matriu A té un únic valor propi $\lambda = 1$ amb multiplicitat algebraica 3.

- *És la matriu A una matriu diagonalitzable?*

Aplicant el teorema de diagonalització que hem recordat en la pàgina 148 tindrem que: la matriu A és diagonalitzable si i només si les multiplicitats algebraica i geomètrica del valor

[23] Recordeu que el subespai vectorial $\langle v_2, v_3 \rangle$ és un subespai invariant per la matriu A i, per tant, és un subespai invariant per l'endomorfisme f. Així podem afirmar que $f(v_3) \in \langle v_2, v_3 \rangle$, és a dir segur que $f(v_3) = \alpha v_2 + \beta v_3$. Dit d'una manera informal, el vector $f(v_3)$ no dependrà del primer vector de la base B. Així l'única dificultat és determinar els escalars α i β. En general, aquests valors es poden determinar "fàcilment".

propi 1 coincideixen, és a dir, si i només si $\dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id}) = 3$. En aquest cas la matriu

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

té rang 1, ja que tenim una columna de zeros i les dues primeres columnes són proporcionals amb un factor -1, de manera que $\dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rang}(A - \mathrm{Id}) = 3 - 1 = 2 \neq 3$ i, per tant, la matriu A no és diagonalitzable.

- *Comentari.* Observem que, en general, si una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té un únic valor propi λ de multiplicitat algebraica n aleshores, la matriu A és diagonalitzable si i només si la matriu A és diagonal. En efecte, pel teorema de diagonalització que hem recordat en la pàgina 148 es té que, si una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té un únic valor propi λ de multiplicitat algebraica n, aleshores, la matriu A és diagonalitzable si i només si la multiplicitat geomètrica del valor propi λ és n. Per tant, A és diagonalitzable si i només si la matriu $A - \lambda \mathrm{Id}$ té rang 0, és a dir, si i només si la matriu $A - \lambda \mathrm{Id}$ és la matriu nul·la si i només si $A = \lambda \mathrm{Id}$. Això, en aquest cas, és equivalent a dir que la matriu A ja és diagonal. Aquest argument el podem aplicar a la matriu A que estem considerant per concloure que la nostra matriu no és diagonalitzable. És a dir, la matriu $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ no és una matriu diagonaliztable ja que és una matriu no diagonal amb un únic valor propi $\lambda = 1$ amb multiplicitat algebraica 3.

- *Vectors propis de la matriu A.*

  Vegem com determinar els vectors propis. Atès que en aquest cas només tenim un valor propi, $\lambda = 1$, l'única matriu que hem de considerar és

$$A - \lambda \mathrm{Id} = A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  que té per nucli el subespai

$$\operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \ : \ -x + y = 0\} = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

  de manera que el conjunt $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ és una base del subespai que determinen els vectors propis de valor propi 1.

- *Comentari.* Observem que el màxim nombre de vectors propis linealment independents que té la matriu A és dos. En particular no existeix una base de vectors propis associada a la matriu A i, per tant, recuperem el que ja sabem: que la matriu A no és diagonalitzable.

- *Comentari.* Seguint amb la idea del comentari de la pàgina 152, els vectors propis de valor propi $\lambda = 1$ els determinem solucionant el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com que la matriu d'aquest sistema homogeni té rang 1, podem escriure les solucions del sistema de manera lineal en funció de dos paràmetres reals. És a dir podem escriure, de manera lineal, $x \equiv x(\xi_1, \xi_2)$, $y \equiv y(\xi_1, \xi_2)$ i $z \equiv z(\xi_1, \xi_2)$ on $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ són dos paràmetres reals. Observeu que en aquest cas podem fer servir com a paràmetres $\xi_1 = y$ i $\xi_2 = z$ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $x \equiv x(y, z)$, (en aquest cas resulta $x \equiv x(y, z) \equiv y$). També podem fer servir com a paràmetres $\xi_1 = x$ i $\xi_2 = z$ i, per tant, podem donar la solució del sistema de la forma $y \equiv y(x, z)$, (en aquest cas resulta $y \equiv y(x, z) \equiv x$). Ara bé, no podem posar les incògnites x i y com a paràmetres i, per tant, no podem donar la solució del sistema de la forma $z \equiv z(x, y)$.

- *Polinomi mínim de la matriu A.*

Ara anem a calcular el polinomi mínim $m_A(x)$ de la matriu A. Recordem que aquest polinomi ha de ser un divisor mònic del polinomi característic i ha de tenir les mateixes arrels. En el nostre cas el polinomi característic de la matriu A és

$$p_A(x) = -(x-1)^3$$

de manera que en principi tenim tres candidats a polinomi mínim:

$$\begin{aligned} &\text{o bé} \quad m_A(x) = x - 1, \\ &\text{o bé} \quad m_A(x) = (x-1)^2, \\ &\text{o bé} \quad m_A(x) = (x-1)^3. \end{aligned}$$

Per determinar quin d'aquests polinomis és el polinomi mínim farem servir la proposició de la pàgina 149. En el nostre cas aquesta proposició ens diu que com que $p_A(x) = -(x-1)^3$ aleshores $m_A(x) = (x-1)^r$ on $1 \leq r = \min\{m \,:\, \dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id})^m = 3\} \leq 3$. Com que

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant el seu nucli té dimensió $\dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rang}(A - \mathrm{Id}) = 3 - 1 = 2$. Així, podem afirmar que el polinomi $x - 1$ no pot ser el polinomi mínim de A. Ara bé, es té que

$$(A - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i, per tant, el seu nucli té dimensió $\dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id})^2 = 3 - \operatorname{rang}(A - \mathrm{Id})^2 = 3 - 0 = 3$. D'on podem concloure que el polinomi mínim de la matriu A és

$$m_A(x) = (x-1)^2.$$

- *Comentari.* Anem a veure una manera "alternativa" per determinar el polinomi mínim. Per una banda recordeu que el polinomi mínim d'una matriu A és el polinomi anul·lador mònic de grau mínim que té la matriu. Per altra banda recordeu que el teorema de Cayley-Hamilton ens diu que el polinomi característic $p_A(x)$ és un polinomi anul·lador de la matriu A. Per tant, com que en el nostre cas $p_A(x) = -(x-1)^3$, aleshores podem afirmar que

$$\begin{aligned} m_A(x) &= x-1 &&\Longleftrightarrow A - \mathrm{Id} = 0 \\ m_A(x) &= (x-1)^2 &&\Longleftrightarrow (A-\mathrm{Id})^2 = 0 \neq A - \mathrm{Id} \\ m_A(x) &= (x-1)^3 &&\Longleftrightarrow (A-\mathrm{Id})^3 = 0 \neq (A-\mathrm{Id})^2 \Longleftrightarrow (A-\mathrm{Id})^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Ara únicament hem de veure en quina d'aquestes tres situacions tenim la matriu A. Concretament nosaltres tenim

$$\begin{aligned} A - \mathrm{Id} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \\ (A-\mathrm{Id})^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

i per tant podem concloure que $(x-1)^2$ és el polinomi mínim d'aquesta matriu.

- *Comentari.* Recordem que el teorema de la pàgina 149 ens diu que totes les arrels del polinomi mínim $m_A(x)$ tenen multiplicitat 1 si i només si la matriu A és diagonalitzable. Així, com que en el cas en què estem sabem que la matriu A no és diagonalitzble, podem afirmar que el polinomi $x-1$ no pot ser el polinomi mínim de la matriu A.

- *Subespais invariants associats al primer teorema de descomposició.*

Recordem que la matriu A no és diagonalitzable. Per tant, no podrem determinar una base de vectors propis i, per tant, l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$ no és suma directa dels subespais de vectors propis. És a dir en aquest cas es té que:

$$\mathbb{K}^3 \neq \mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id}).$$

Per "transformar" aquesta "desigualtat" en una "igualtat", hem de modificar convenientment el subespai vectorial que hi intervé. Això ho farem aplicant el primer teorema de descomposició. En aquest cas la descomposició en factors irreductibles del polinomi mínim i del polinomi característic de la matriu A és

$$\begin{aligned} m_A(x) &= (x-1)^2 \\ p_A(x) &= -(x-1)^3 \end{aligned}$$

per tant, aplicant el primer teorema de descomposició a aquests polinomis tindrem que

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^3 &= \mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2 \\ &= \mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^3. \end{aligned}$$

Ara anem a determinar una base del subespai invariant $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$. Obesrvem que com que $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2 = \mathbb{K}^3$, aleshores qualsevol base de $\mathbb{K}^3$ és una base d'aquest subespai invariant. Així, per exemple, la base canònica $B_e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de l'espai $\mathbb{K}^3$ és una base del subespai $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$.

Ara bé, com hem dit en la resolució de l'apartat anterior, de "bases n'hi ha moltes" i en aquest cas també "n'hi ha una de millor". En efecte, recordem que es té la inclusió de subespais $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id}) \subseteq \mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$, (de fet, en aquest cas, aquesta inclusió és estricta). Per tant tot i que el subespai $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$ no és un subespai de vectors propis, podem afirmar que el subespai $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$ conté el subespai vectorial $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})$ que sí que és un subespai de vectors propis (els vectors propis de valor propi 1). Així podem obtenir una "bona" base del subespai $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$ completant una base del subespai de vectors propis $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})$ a una base del subespai $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2$. Farem això en el nostre cas. Com que el subespai de vectors propis és

$$\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id}) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

aleshores completant tindrem que

$$\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2 = \langle (1,1,0), (0,0,1), (0,1,0) \rangle$$

i, en conclusió, la descomposició de $\mathbb{K}^3$ en subespais invariants és

$$\mathbb{K}^3 = \mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id})^2 = \langle (1,1,0), (0,0,1), (0,1,0) \rangle$$

i una base de $\mathbb{K}^3$ associada a aquesta descomposició és la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ on

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0) \\ v_2 &= (0,0,1) \\ v_3 &= (0,1,0). \end{aligned}$$

- *Comentari.* L'argument que hem fet servir per tenir una "millor" base funciona sempre. Concretament, si en el cas general el subespai invariant que apareix en la descomposició de l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ és el subespai $\mathrm{Ker}(A-\lambda\,\mathrm{Id})^m$ amb $m \geq 2$, aleshores podem agafar com base del subespai vectorial $\mathrm{Ker}(A-\lambda\,\mathrm{Id})^m$ una base que s'obtingui completant una base de vectors propis de valor propi λ, és a dir, una base que s'obtingui completant una base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda\,\mathrm{Id})$ a una base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda\,\mathrm{Id})^m$. Els vectors amb els que completem, per tant, es prenen linealment independents amb els vectors propis trobats i, a més, tals que no pertanyin als subespai vectorials $\mathrm{Ker}(A-\lambda\,\mathrm{Id})^i$ per a $1 \leq i \leq m-1$. En el cas $m = 2$, ambdues condicions són equivalents.

- *Forma diagonal per blocs associada.*

Per finalitzar, fent servir la descomposició de $\mathbb{K}^3$ com suma directa de subespais invariants, calcularem una matriu $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ diagonal per blocs associada i una matriu $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ invertible tal que $A = PDP^{-1}$.

En el nostre cas l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$ descompon com suma directa d'un únic subespai invariant de dimensió 3. Per tant podem afirmar que la matriu D associada serà una matriu diagonal per blocs amb un únic bloc 3×3. A més, pel que hem fet a teoria sabem que com matriu invertible P podem considerar la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

que té per "columnes els vectors" de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ associada a la descomposició de l'espai vectorial $\mathbb{K}^3$. Anem a determinar les matrius D i P.

Com que abans ja hem calculat la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, podem agafar com matriu P la corresponent matriu canvi de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ara anem a calcular la matriu diagonal per blocs D associada.

Si fem sevir "canvis de base" únicament hem de pensar que $D = P^{-1}AP$ i, per tant, hem de calcular la inversa de la matriu P. Fent aquests càlculs tindrem:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una manera alternativa per calcular la matriu D és fer servir la "definició de matriu associada". Notem per f l'endomorfisme de $\mathbb{K}^3$ definit per la matriu A, és a dir l'endomorfisme que en la base canònica B_e de $\mathbb{K}^3$ té com matriu associada $M(f, B_e)$ la matriu A. Aleshores sabem que la matriu D és la matriu de l'endomorfisme f en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$. Per tant únicament hem de calcular les coordenades dels vectors $f(v_1)$, $f(v_2)$ i $f(v_3)$ en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. En el nostre cas tenim

$$f(v_1) = v_1 = (1, 0, 0)_B$$
$$f(v_2) = v_2 = (0, 1, 0)_B$$

ja que els vectors v_1 i v_2 són vectors propis de valor propi 1. Així únicament ens falta calcular les coordenades de $f(v_3)$ en la base B. Com que $v_3 = (0, 1, 0)$ aleshores

$$f(v_3) = f(0, 1, 0) = (1, 2, 1)$$

vector que podem escriure en la base B com

$$f(v_3) = (1, 2, 1) = v_1 + v_2 + v_3 = (1, 1, 1)_B.$$

Amb tot això obtenim la matriu diagonal per blocs:

$$D = M(f; B) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolució (d)

- *Polinomi característic i valors propis de la matriu A.*

Com en els apartats anteriors, comencem per calcular el polinomi característic de la matriu A a fi de determinar els seus valors propis. Calculant tenim

$$
\begin{aligned}
p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) &= \det\begin{pmatrix} -x & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1 \\ 0 & -2 & -x \end{pmatrix} \\
&= -x\det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -2 & -x \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \\
&= -x(x^2+2) - 2x \\
&= -x^3 - 2x - 2x \\
&= -x(x^2+4) = -x(x-2i)(x+2i).
\end{aligned}
$$

El primer que observem és que, en aquest apartat, la descomposició del polinomi característic no és independent del cos $\mathbb{K}$ en el que ens trobem. Per tant, en aquest apartat, hem de diferenciar dos casos. En el primer pensarem la matriu A com a matriu d'un $\mathbb{C}$-endomorfisme, mentre que en el segon la matriu A la intrepretarem com a matriu d'un $\mathbb{R}$-endomorfisme.

- **Com a endomorfisme complex**

- *Valors propis de la matriu A.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aleshores el polinomi característic descompon totalment en factors lineals:

$$p_A(x) = -x(x-2i)(x+2i)$$

i les arrels d'aquest polinomi són 0, $2i$, $-2i$. Per tant, sobre els complexos, tenim tres valors propis simples: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$.

- *Comentari.* Notem que els dos valors propis complexes no reals són conjugats l'un de l'altre, és a dir que $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$. El motiu és que els valors propis són les arrels del polinomi característic que és un polinomi amb coeficients reals per ser A una matriu amb coeficients reals. És d'esperar que els vectors propis associats a aquests valors propis siguin també conjugats. Veurem que, de fet, això també és cert.

- *És la matriu A una matriu $\mathbb{C}$-diagonalitzable?*

Recordem que una matriu $n \times n$ és diagonalitzable si i només si el polinomi característic descompon totalment en factors lineals i la multiplicitat algebraica n_{λ_i} de cada valor propi λ_i (el nombre de vegades que es repeteix l'arrel λ_i en el polinomi característic) coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica (la dimensió del subespai vectorial $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i\,\mathrm{Id})$). A més, recordem que, en general, es té la següent relació entre les multiplicitats algebraiques i geomètriques:

$$1 \le \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_i\,\mathrm{Id}) \le n_{\lambda_i}.$$

Per tant, si el valor propi λ_i és simple aleshores segur que aquestes dues multiplicitats coincideixen.

Aquesta és la situació de la matriu A que estem considerant. Com que el polinomi característic té totes les arrels simples, la multiplicitat algebraica de cada valor propi coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica i, per tant, podem afirmar que la matriu A és $\mathbb{C}$-diagonalitzable.

- *Forma diagonal associada.*

La forma diagonal associada D a la matriu A s'obté "escrivint en la diagonal" els valors propis $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de la matriu, mentre que els vectors $v_1, \ldots, v_n$ que ens donen el canvi de base P són una base de vectors propis de la matriu. És a dir, es té que $A = PDP^{-1}$ on la forma diagonal D és $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ i on les columnes de P determinen una base de vectors propis $v_1, \ldots, v_n$ de la matriu A (concretament el vector v_i és vector propi de la matriu A de valor propi μ_i).

Per tant en el nostre cas tenim $A = PDP^{-1}$ on la forma diagonal D és

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathrm{Diag}(0, 2i, -2i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

i on la matriu P és la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

que té per columnes una base de vectors propis v_1, v_2, v_3. Concretament el vector v_i és vector propi de valor propi λ_i. Ara, per tant, hem de calcular una base de vectors propis.

- *Vectors propis de la matriu A.*

Primer anem a calcular els vectors propis de valor propi $\lambda_1 = 0$. Per tant, hem de determinar el nucli de la matriu

$$A - 0 \cdot \mathrm{Id} = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que aquest valor propi té multiplicitat algebraica 1, només obtindrem un vector propi linealment independent a partir del nucli de A. Observem que la primera i tercera columnes són proporcionals per un factor -1, de manera que el nucli d'aquesta matriu ve donat per $\mathrm{Ker}\, A = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

Passem ara al càlcul dels vectors propis de valor propi complex (no real), i comencem per calcular els vectors propis de valor propi $\lambda_2 = 2i$. La matriu de la qual hem de determinar el nucli és

$$A - 2i\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2i & 2 & 0 \\ -1 & -2i & 1 \\ 0 & -2 & -2i \end{pmatrix}.$$

Fixem-nos que la suma de la primera columna amb la segona multiplicada per i ens dóna la tercera, d'on es dedueix que el nucli d'aquesta matriu és $\mathrm{Ker}(A - 2i\,\mathrm{Id}) = \langle (1, i, -1) \rangle$. Tot i que en aquesta resolució hem determinat els vectors propis "a vista", convé insistir en que, en tots els casos, els vectors propis es poden trobar usant el mètode habitual: resolent el sistema homogeni associat $(A - \lambda\,\mathrm{Id})\mathbf{x} = 0$. Això segueix sent cert en el cas dels complexos [24]. En el cas que aquí tenim, si volem determinar les solucions del sistema homogeni $(A - \lambda\,\mathrm{Id})\mathbf{x} = 0$, és interessant tenir present que la matriu del sistema té rang 2 i, per tant, només cal considerar dues equacions independents i "senzilles". En aquest cas, per tant, podem considerar la primera i la tercera equació. De la primera equació $-2ix + 2y = 0$ es dedueix que $y = ix$, mentre que de la tercera equació $-2y - 2iz = 0$ es dedueix que $y = -iz$. Per tant es té que $z = -x$. Així les solucions $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ del sistema homogeni $(A - \lambda\,\mathrm{Id})\mathbf{x} = 0$ són els elements de la forma $(x, y, z) = (x, ix, -x)$, d'on $\mathrm{Ker}(A - 2i\,\mathrm{Id}) = \langle(1, i, -1)\rangle$.

Finalment calculem els vectors propis de valor propi $\lambda_3 = -2i$. La matriu que considerem és la següent:

$$A + 2i\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2i & 2 & 0 \\ -1 & 2i & 1 \\ 0 & -2 & 2i \end{pmatrix}.$$

Com abans, la suma de la primera columna amb la segona multiplicada per $-i$ ens dóna la tercera, de manera que $\mathrm{Ker}(A + 2i\,\mathrm{Id}) = \langle(1, -i, -1)\rangle$.

- *Comentari*. Observem que el vector $v_2 = (1, i, -1)$ és un vector propi de la matriu A de valor propi $\lambda_2 = 2i$, mentre que $v_3 = (1, -i, -1)$ és un vector propi de valor propi $\lambda_3 = -2i$. De fet només feia falta calcular un d'aquests vectors ja que, com hem anunciat prèviament, vectors propis de valor propi conjugat són vectors conjugats. És a dir, com que $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, aleshores $v_3 = \overline{v_2}$. Aquest resultat val per a matrius amb coeficients reals. Concretament es pot demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i si $\lambda \in \mathbb{C}$, aleshores $\mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}) = \{\overline{v} \text{ on } v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id})\}$, (es deixa com a exercici al lector demostrar aquesta igualtat).

- *Base de vectors propis.*

Recordem que volem calcular una base B de vectors propis de la matriu A. Pel que hem fet fins ara sabem que els vectors $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, i, -1)$ i $v_3 = (1, -i, -1)$ són tres vectors propis d'aquesta matriu. A més, són vectors linealment independents ja que són vectors propis associats a valors propis diferents. Per tant $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ és una base i, a més, la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ens dóna el canvi de base de la matriu A a la matriu diagonal D donada per

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathrm{Diag}(0, 2i, -2i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

[24] Una manera de resoldre el sistema homogeni $(A - \lambda\,\mathrm{Id})\mathbf{x} = 0$ en els complexos és separar la part real de la part imaginària. Observeu que, d'aquesta manera, obtenim el doble d'equacions i el doble d'incògnites, ja que per a cada incògnita complexa hem de determinar la seva part real i la seva part imaginària. Dit d'una altra manera, enlloc de resoldre un sistema en els complexos passem a resoldre dos sistemes amb coeficients reals.

- *Polinomi mínim de la matriu A.*

Observem que, en general, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ aleshores podem afirmar que la descomposició factorial del polinomi característic $p_A(x)$ en l'anell de polinomis $\mathbb{C}[x]$ és de la forma

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$$

amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ diferents entre ells i, per tant, el polinomi mínim $m_A(x)$ de la matriu A és

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{m_r}$$

on $1 \leq m_i = \min\{m : \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i \operatorname{Id})^m = n_i\} \leq n_i$.

En particular, si el polinomi característic $p_A(x)$ d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ descompon en factors lineals de multiplicitat 1 a $\mathbb{C}[x]$, aleshores el polinomi mínim coincideix amb el polinomi característic (llevat d'un factor constant per fer-lo mònic).

Aquesta és exactament la situació que ara tenim.

És a dir, com que el polinomi característic de la matriu A és

$$p_A(x) = -x(x - 2i)(x + 2i)$$

aleshores el polinomi mínim de la matriu A és

$$m_A(x) = x(x + 2i)(x - 2i).$$

- *Comentari.* Notem que, de fet, aquest resultat també el podem obenir aplicant el teorema de diagonalització de la pàgina 149 que diu que una matriu és diagonalitzable si i només si tots els factors del polinomi mínim són lineals i de multiplicitat 1. En el nostre cas, per tant, com que sabem que la matriu A és diagonalitzable amb valors propis $0, 2i, -2i$ aleshores podem afirmar que el polinomi mínim de A és $m_A(x) = x(x + 2i)(x - 2i)$.

- *Subespais invariants associats al primer teorema de descomposició.*

Aplicant el primer teorema de descomposició al polinomi mínim de la matriu A tindrem que, com que la descomposició en factors irreductibles del polinomi mínin en $\mathbb{C}[x]$ és:

$$m_A(x) = x(x - 2i)(x + 2i)$$

aleshores l'espai vectorial $\mathbb{C}^3$ té associada la següent descomposició en suma directa de subespais vectorials invariants:

$$\begin{gathered} \mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A - 2i \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(A + 2i \operatorname{Id}) \\ \langle (1,0,1) \rangle \oplus \langle (1,i,-1) \rangle \oplus \langle (1,-i,-1) \rangle. \end{gathered}$$

- *Comentari.* Observem que els tres subespais vectorials que obtenim en aquesta descomposició són tots ells subespais de vectors propis. De fet això només es pot tenir quan la matriu A sigui una matriu diagonalitzable (aquest és el nostre cas).

- *Forma diagonal per blocs associada.*

Per acabar, fent servir la descomposició de $\mathbb{C}^3$ com suma directa de subespais invariants, calcularem una matriu diagonal per blocs associada $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ i una matriu invertible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $A = QD'Q^{-1}$.

En aquest cas la matriu D' és una matriu amb tres blocs 1×1 (ja que cada bloc correspon a cada un dels tres sumands de la descomposició). És a dir, en aquest cas la matriu D' és una matriu diagonal. Mentre que la matriu invertible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ és la matriu formada per una base de vectors propis (ja que cada un dels tres sumands és un subespai de vectors popis). Per tant tenim el mateix resultat que abans, $A = QD'Q^{-1}$ on:

$$D' = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix},$$

$$Q = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **Com a endomorfisme real**

- *Valors propis de la matriu A.*

El polinomi característic de la matriu A l'hem calculat en la pàgina 167. Concretament hem vist que aquest polinomi és
$$p_A(x) = -x^3 + 4x = -x(x^2 + 4).$$

Per tant, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, aleshores el polinomi característic només té una arrel $\lambda_1 = 0$ i aquesta arrel és simple. Així, com a matriu d'un $\mathbb{R}$-endomorfisme, la matriu A té un únic valor propi real $\lambda_1 = 0$ (i aquest valor propi és simple).

- *És la matriu A una matriu $\mathbb{R}$-diagonalitzable?*

Recordem que una matriu $n \times n$ és diagonalitzable si i només si el polinomi característic descompon totalment en factors lineals i la multiplicitat algebraica de cada valor propi coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica.

En aquest cas, doncs, la matriu A no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable ja que el polinomi característic $p_A(x)$ no descompon en factors lineals en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$.

- *Comentari.* La idea és que si el polinomi característic d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no descompon totalment en factors lineals en $\mathbb{K}[x]$ aleshores no podem trobar suficients escalars en el cos $\mathbb{K}$ per obtenir una forma diagonal associada a la matriu (ja que ens en calen n). Per tant, en aquest cas, segur que la matriu A no és una matriu $\mathbb{K}$-diagonalitzable.

- *Vectors propis de la matriu A.*

En aquest cas únicament tenim vectors propis de valor propi $\lambda_1 = 0$. Aquests vectors són els elements no nuls del nucli de la matriu

$$A - 0 \cdot \mathrm{Id} = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El càlcul d'aquest nucli és independent del fet de pensar la matriu A com a matriu d'un $\mathbb{C}$-endomorfisme, o de pensar-la com a matriu d'un $\mathbb{R}$-endomorfisme. Per tant, tenim el mateix que abans, $\operatorname{Ker} A = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

- *Comentari.* Observem que, com a $\mathbb{R}$-endomorfisme, el màxim nombre de vectors propis linealment independents que té la matriu A és un. En particular no existeix una base de vectors propis associada a la matriu A i, per tant, recuperem el que ja sabem: que la matriu A no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable.

- *Polinomi mínim de la matriu A.*

Per calcular el polinomi mínim farem servir la proposició que hem recordat en la pàgina 149 la qual ens relaciona la descomposició factorial dels polinomis característic i mínim. En el nostre cas sabem que la descomposició factorial de $p_A(x)$ en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$ és

$$p_A(x) = -x(x^2 + 4)$$

és a dir, en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$ el polinomi característic $p_A(x)$ té dos factors primers $p_1 = x$ i $p_2 = x^2 + 4$ de multiplicitat $n_1 = 1$ i $n_2 = 1$ respectivament. Per tant, la descomposició factorial del polinomi mínim $m_A(x)$ en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$ és $m_A(x) = p_1^{m_1} p_2^{m_2}$ on $1 \leq m_i = \min\{m : \dim \operatorname{Ker} p_i^m(A) = n_i \deg p_i\} \leq n_i$. Com que $n_i = 1$ per a $i = 1, 2$, aleshores $m_i = 1$ si $i = 1, 2$ i, per tant, el polinomi mínim és

$$m_A(x) = x(x^2 + 4).$$

- *Comentari.* En la pàgina 171 hem vist que, com a matriu d'un $\mathbb{C}$-endomorfisme, el polinomi mínim de la matriu A és $m_A(x) = x(x - 2i)(x + 2i)$. Observem que $x(x - 2i)(x + 2i) = x(x^2 + 4)$. Per tant, independentment del cos que considerem, podem afirmar que polinomi mínim de la matriu A és $m_A(x) = x^3 + 4x$. Dit d'una altra manera, tot i que podríem pensar a priori que el polinomi mínim pot dependre del cos on estem treballant, això no és així. Com en el cas del polinomi característic, el polinomi mínim és únic, independentment de si les seves arrels estan o no estan en el cos de coeficients de la matriu[25].

[25] Un aclariment que cal fer respecte aquesta afirmació és que els polinomis característic i mínim de la matriu sí depenen del cos on treballem, que és el cos on pren valors la matriu. És a dir, que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ aleshores $p_A(x) \in \mathbb{K}[x]$ i $m_A(x) \in \mathbb{K}[x]$. Ara bé amb l'afirmació que hem fet ens referim a que no és rellevant si, donat el cos $\mathbb{K}$, les arrels d'aquests polinomis estan en el cos $\mathbb{K}$ o en un altre cos $\mathbb{L}$ que el conté (aquests cossos $\mathbb{L}$ s'anomenen *extensions del cos* $\mathbb{K}$). Per exemple, si treballem amb una matriu a coeficients en el cos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ dels nombres racionals, els polinomis mínim i característic són únics i tenen coeficients racionals, tot i que les seves arrels poden estar en el cos $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ o en el cos $\mathbb{L} = \mathbb{C}$.

- *Subespais invariants associats al primer teorema de descomposició.*

Un cop tenim el polinomi mínim, aplicarem el primer teorema de descomposició a aquest polinomi per determinar la descomposició de $\mathbb{K}^3$ en suma directa de subespais invariants. Observem que tot i que el polinomi mínim és independent del cos $\mathbb{K}$, la seva factorització sí que depèn del cos $\mathbb{K}$ en el que estem treballant. Per tant, a diferència del que succeïa amb les matrius dels apartats anteriors, la descomposició associada a la matriu A que ara estem considerant és diferent si la pensem com a matriu d'un $\mathbb{C}$-endomorfisme o si la pensem com a matriu d'un $\mathbb{R}$-endomorfisme. El cas d'endomorfisme complex l'hem estudiat abans (veure pàgina 171). Ara estudiem el cas d'endomorfisme real.

Si $\mathbb{K}$ és el cos dels nombres reals $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (i de fet també si agafem com cos $\mathbb{K}$ el cos dels nombres racionals $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), la descomposició en factors irreductibles del polinomi mínim en l'anell de polinomis $\mathbb{K}[x]$ és

$$m_A(x) = x(x^2 + 4).$$

Per tant, aplicant el primer teorema de descomposició obtenim la següent descomposició de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A^2 + 4\operatorname{Id})$$

on cada un dels subespais és invariant [26]. Les dimensions d'aquests dos subespais es determinen mirant el grau del factor corresponen en el polinomi característic. Així:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} A &= \deg(x) = 1 \\ \dim \operatorname{Ker}(A^2 + 4\operatorname{Id}) &= \deg(x^2 + 4) = 2. \end{aligned}$$

Anem a determinar una base de cada un d'aquests subespais. El subespai $\operatorname{Ker} A$ és el subespai dels vectors propis de valor propi 0 del qual abans ja n'hem calculat una base

$$\operatorname{Ker} A = \langle (1, 0, 1) \rangle.$$

Així, ara únicament hem de calcular una base del subespai dos dimensional $\operatorname{Ker}(A^2+4\operatorname{Id})$. Anem a fer-ho. La matriu $A^2 + 4\operatorname{Id}$ és la matriu

$$\begin{aligned} A^2 + 4\operatorname{Id} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observem que la segona columna d'aquesta matriu és una columna de zeros, d'on tenim que $(0, 1, 0) \in \operatorname{Ker}(A^2 + 4\operatorname{Id})$. A més, les altres dues columnes són idèntiques, de manera que també es té $(1, 0, -1) \in \operatorname{Ker}(A^2 + 4\operatorname{Id})$. Per una banda la matriu té rang 1 i per tant el seu nucli té dimensió 2. Per l'altra els dos vectors que acabem de determinar són clarament linealment independents. Per tant podem concloure que $\operatorname{Ker}(A^2 + 4\operatorname{Id}) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$.

[26] Tindríem "el mateix" si estiguéssim considerant el cas racional, és a dir, com $\mathbb{Q}$-endomorfisme tindríem la descomposició $\mathbb{Q}^3 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A^2 + 4\operatorname{Id})$.

En conclusió, tenim la descomposició de $\mathbb{R}^3$ en subespais invariants és

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A^2 + 4\,\mathrm{Id})\\ &= \langle(1,0,1)\rangle \oplus \langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle\end{aligned}$$

i una base de $\mathbb{R}^3$ associada a aquesta descomposició és la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ on

$$\begin{aligned}v_1 &= (1,0,1)\\ v_2 &= (1,0,-1)\\ v_3 &= (0,1,0).\end{aligned}$$

- *Comentari.* Anem a relacionar la descomposició real i la descomposició complexa. Observem que tenim la següent igualtat de polinomis $x^2+4 = (x-2i)(x+2i)$. Per tant en "certa manera" es té la següent descomposició de subespais[27]

$$\operatorname{Ker}(A^2 + 4\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(A - 2i\,\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(A + 2i\,\mathrm{Id})$$

és a dir es té que

$$\langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle = \langle(1,i,-1)\rangle \oplus \langle(1,-i,-1)\rangle.$$

De fet notem que els dos vectors de $\operatorname{Ker}(A^2 + 4\,\mathrm{Id})$ són exactament (llevat de signe) els dos vectors que s'obtenen en separar qualsevol dels vectors propis complexos en la seva part real i la seva part imaginària

$$\begin{aligned}(1,i,-1) &= (1,0,-1) + i(0,1,0)\\ (1,-i,-1) &= (1,0,-1) + i(0,-1,0).\end{aligned}$$

Aquest fet es dóna en general: en considerar el nucli corresponent a un factor irreductible real de grau 2, els seus dos vectors generadors són exactament els vectors que s'obtenen en separar la part real i la part imaginària de qualsevol dels dos vectors propis complexos conjugats corresponents. Formalment, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és una matriu amb coeficients reals, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és un complex no real, i si $p_\lambda \in \mathbb{R}[x]$ és el polinomi de grau dos amb coeficients reals $p_\lambda = (x-\lambda)(x-\overline{\lambda})$, aleshores la part real $\operatorname{Re}(v)$ i la part imaginària $\operatorname{Im}(v)$ d'un vector v del nucli de la matriu $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ ens determina dos vectors del nucli de la matriu $p_\lambda(A)$. És a dir, si $v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ aleshores segur que $\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v) \in \operatorname{Ker} p_\lambda(A)$.

- *Forma diagonal per blocs associada.*

Pel que hem fet ara sabem que l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ descompon com suma directa d'un subespai invariant de dimensió 1 i d'un subespai invariant de dimensió 2. Per tant podem afirmar que la matriu diagonal per blocs $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associada a aquesta descomposició tindrà dos blocs: un bloc 1×1 i un bloc 2×2 (ja que cada bloc correspon a cada un dels dos sumands de la descomposició). A més, pel que hem fet a teoria sabem que $A = PDP^{-1}$ on $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ és la matriu invertible que té per "columnes els vectors" de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ associada a la descomposició de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. En aquest cas, per tant, la matriu P és

[27] Com a mínim com a subespais vectorials de $\mathbb{C}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ara anem a calcular la matriu diagonal per blocs D associada. Això es pot fer de dues maneres: o bé fent servir "canvis de base" o bé fent servir la "definició de matriu associada".

Primer calcularem la matriu D fent servi "canvis de base". Per a això únicament hem de pensar que $D = P^{-1}AP$ i, per tant, hem de calcular la inversa de la matriu P. Fent aquests càlculs tindrem:

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ara, finalment, anem a calcular la matriu D fent servir la "definició de matriu associada". Notem per f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per la matriu A, és a dir l'endomorfisme que en la base canònica B_e de $\mathbb{R}^3$ té com matriu associada $M(f, B_e)$ la matriu A. Aleshores sabem que la matriu D no és més que la matriu $M(f; B)$ de l'endomorfisme f en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, és a dir D és la matriu que "té per columnes les coordenades de les imatges d'aquesta base". Per tant, hem de calcular les coordenades dels vectors $f(v_1)$, $f(v_2)$ i $f(v_3)$ en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. En el nostre cas tenim

$$f(v_1) = 0 \cdot v_1 = (0, 0, 0)_B$$

ja que el vector v_1 és un vector propi de la matriu A de valor propi 0. Com que $v_2 = (1, 0, -1)$ i com que $v_3 = (0, 1, 0)$ aleshores

$$\begin{aligned} f(v_2) &= f(1, 0, -1) = (0, -2, 0) \\ f(v_3) &= f(0, 1, 0) = (2, 0, -2) \end{aligned}$$

vectors que podem escriure en la base B com [28]

$$\begin{aligned} f(v_2) &= (0, -2, 0) = -2v_3 = (0, 0, -2)_B \\ f(v_3) &= (2, 0, -2) = 2v_2 = (0, 2, 0)_B. \end{aligned}$$

Amb tot això obtenim la matriu diagonal per blocs:

$$D = M(f; B) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[28] Recordeu que el subespai vectorial $\langle v_2, v_3 \rangle$ és un subespai invariant per la matriu A i, per tant, és un subespai invariant per l'endomorfisme f. Així podem afirmar que $f(v_i) \in \langle v_2, v_3 \rangle$ si $i = 1, 2$. Per tant, per a $i = 1, 2$ segur que existeixen escalars α_i, β_i verificant $f(v_i) = \alpha_i v_2 + \beta_i v_3$. Dit d'una manera informal, per a $i = 1, 2$ el vector $f(v_i)$ no dependrà del primer vector de la base B. Per tant l'única dificultat és determinar els escalars α_i i β_i. En general, aquests valors es poden determinar "fàcilment".

- 21.

Determineu els valors dels paràmetres reals per als quals les següents matrius són diagonalitzables i, en aquest cas, doneu la seva forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solució

(a) En $\mathbb{R}$ diagonalitza si i només si $b = 0$. En aquest cas, té forma diagonal $\mathrm{Diag}(a, a)$.
En $\mathbb{C}$ diagonalitza per a tot valor del paràmetre a i del paràmetre b, i la forma diagonal de la matriu és $\mathrm{Diag}(a + ib, a - ib)$.

(b) Si $a = 0$, aleshores la matriu és diagonalitzable per a tot valor de b i c. La seva forma diagonal és $\mathrm{Diag}(1, 1, 2)$.
Si $a \neq 0$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.

(c) Si $a \neq -1, 5$, aleshores la matriu és diagonalitzable per a tot valor de b. La seva forma diagonal és $\mathrm{Diag}(-1, 5, a)$.
Si $a = 5$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.
Si $a = -1$ i $b = 0$, aleshores la matriu és diagonalitzable. La seva forma diagonal és $\mathrm{Diag}(-1, -1, 5)$.
Si $a = -1$ i $b \neq 0$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.

(d) Mai és diagonalitzable.

Resolució

- Sabem que una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si el polinomi característic $p_A(x)$ de la matriu A descompon en factors lineals en l'anell de polinomis $\mathbb{K}[x]$ i, a més, la multiplicitat algebraica dels valors propis de A coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica [29]. A més, sabem que si $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de la matriu A de multiplicitat algebraica n_λ aleshores la seva multiplicitat geomètrica verifica $1 \leq \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \leq n_\lambda$. D'aquests dos resultats obtenim el següent teorema de diagonalització que, essencialment, és el que farem servir en la resolució d'aquest exercici:

  - **Teorema.** *Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu $\mathbb{K}$-diagonalitzable si i només si la descomposició factorial del seu polinomi característic $p_A(x)$ en l'anell de polinomis $\mathbb{K}[x]$ és de la forma $p_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r}$ amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ diferents entre ells i*

[29] Recordeu que la multiplicitat algebraica d'un valor propi λ és la multiplicitat de λ com arrel del polinomi característic $p_A(x)$, mentre que la multiplicitat geomètrica del valor propi λ és la dimensió del subespai vectorial $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id})$, que és el subespai dels vectors propis de valor propi λ.

per a tot $i \in \{1, \ldots, r\}$ *amb* $n_i \geq 2$ *es té que* $n_i = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \,\mathrm{Id})$. *A més, en aquest cas la forma diagonal associada és* $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \overset{n_1}{\ldots}, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r, \overset{n_r}{\ldots}, \lambda_r) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Passem ara a la resolució d'aquest exercici. Atès que els quatre apartats són independents, al llarg de tota la resolució denotarem per A la matriu corresponent a l'apartat que estem resolent.

Resolució (a)

- Comencem per calcular els valors propis de A. Per fer-ho determinarem el polinomi característic $p_A(x)$ de la matriu A, ja que els valors propis són les arrels d'aquest polinomi.
- El polinomi característic $p_A(x)$ de la matriu A és el polinomi

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ -b & a-x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot x + \det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

- Observem que, per tant, les arrels del polinomi $p_A(x)$ són les solucions d'una equació de segon grau amb discriminant

$$\Delta = (-2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = 4a^2 - 4a^2 - 4b^2 = -4b^2$$

  i, per tant, aquesta equació tindrà una arrel doble real si $b = 0$, i tindrà dues arrels complexes conjugades per a qualsevol altre valor del paràmetre real b.
- Així hem de discutir dos casos: quan $b = 0$ i quan $b \neq 0$.
- Primer estudiem el cas $b = 0$. En aquest cas el polinomi característic té la forma

$$p_A(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

  que ja està factoritzat. Així el polinomi característic té l'arrel doble a i, per tant, a és l'únic valor propi. Per veure si la matriu A és o no és una matriu diagonalitzable hauríem de calcular la multiplicitat geomètrica del valor propi a (i la matriu serà diagonalitzable si i només si aquesta multiplicitat val 2, que és la multiplicitat algebraica). Ara bé, quan $b = 0$ la matriu A que estem considerant és

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

  de manera que ja la tenim diagonalitzada i, per tant, no cal fer res més.
- Ara hem d'estudiar la diagonalització de la matriu A en el cas $b \neq 0$. Per a $b \neq 0$ les arrels del polinomi característic de la matriu A són els nombres complexos no reals

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{2a + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2a + \sqrt{-4b^2}}{2} = a + |b|i \\ \mu_2 &= \frac{2a - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2a - \sqrt{-4b^2}}{2} = a - |b|i \end{aligned}$$

d'on la descomposició factorial de $p_A(x)$ en l'anell de polinomis $\mathbb{C}[x]$ és

$$p_A(x) = (x - (a + bi))(x - (a - bi)).$$

Com que en aquest cas tenim dues arrels simples, tindrem dos valors propis diferents de multiplicitat algebraica 1. Així la matriu A és una matriu $\mathbb{C}$-diagonalitzable per a qualsevol valor de a i de $b \neq 0$. Ara bé, la matriu no és $\mathbb{R}$-diagonalitzable ja que el polinomi característic no descompon en factors lineals en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$.

- En definitiva, d'una banda hem vist que la matriu A és $\mathbb{R}$-diagonalitzable si i només si $b = 0$, i a més, en aquest cas, la forma diagonal és

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

D'altra banda hem vist que la matriu A és una matriu $\mathbb{C}$-diagonalitzable per a tot valor dels paràmetres a i b, i a més, en aquest cas, la forma diagonal és

$$D = \begin{pmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & a - bi \end{pmatrix}.$$

Resolució (b)

- Com en l'apartat anterior, comencem per determinar els valors propis de la matriu A com arrels del polinomi característic. Observem que, com que la matriu A és triangular, també ho és la matriu $A - x\,\mathrm{Id}$, de manera que el polinomi característic es calcularà de manera immediata i l'obtindrem directament factoritzat. En efecte:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - x\,\mathrm{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ a & 1-x & 0 \\ b & c & 2-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)^2(2-x) \\ &= -(x-1)^2(x-2). \end{aligned}$$

- Per tant, els valors propis de A són $\mu_1 = \mu_2 = 1$ i $\mu_3 = 2$, independentment dels valors dels paràmetres a, b, c. Observem que això pot induir a pensar que el valor dels paràmetres no influeixen en el procés de diagonalització, ja que si la matriu A és diagonalitzable aleshores segur que la seva forma diagonal serà

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Tanmateix no sabem si la matriu A sempre és diagonalitzable, ja que un dels valors propis té multiplicitat algebraica 2 i, per tant, hem de comprovar si la seva multiplicitat geomètrica coincideix. Dit d'una altra manera, com que en aquest cas tenim

$$p_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$$

aleshores, per al valor propi 2 no cal fer res ja que la seva multiplicitat algebraica és 1 i, per tant, la geomètrica també. Mentre que per al valor propi 1, que té multiplicitat algebraica 2, hem de veure si la seva multiplicitat geomètrica val 2. És a dir es té que:

$$\text{A és diagonalitzable} \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id}) = 2.$$

- Així ara hem de calcular la dimensió del nucli de la matriu $A - \mathrm{Id}$. Aquesta matriu té la següent expressió

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Observem que aquesta matriu ja està esglaonada (inferiorment). Per tant el rang l'obtindrem simplement comptant el nombre de files no nul·les. En aquest cas, independentment del valor dels paràmetres b i c, el rang de la matriu val 1 per a $a = 0$ i val 2 si $a \neq 0$. Per tant tenim

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rang}(A - \mathrm{Id}) = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

d'on la multiplicitat algebraica i geomètrica del valor propi 1 coincideixen si i només si $a = 0$, de manera que la matriu és una matriu diagonalitzable en aquest cas. Altrament, la matriu no és diagonalitzable.

- Resumint, si $a \neq 0$ aleshores la matriu A no és diagonalitzable, mentre que si $a = 0$ aleshores, per a qualsevol valor de b i de c, la matriu A és diagonalitzable tant a $\mathbb{R}$ com a $\mathbb{C}$. A més, si $a = 0$ la forma diagonal és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolució (c)

- Com abans, comencem per determinar els valors propis de la matriu A com les arrels del polinomi característic de la matriu. En aquest cas el polinomi característic també es calcula fàcilment

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - x\,\mathrm{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & b \\ 3 & 0 & a-x \end{pmatrix} \\ &= (5-x)(-1-x)(a-x) \\ &= -(x+1)(x-5)(x-a) \end{aligned}$$

i, per tant, els valors propis de la matriu A són -1, 5 i a.

- És clar que si el paràmetre a no pren els valors -1 o 5 aleshores la matriu A serà una matriu diagonalitzable (independentment del valor de b), ja que tots els valors propis de la matriu són diferents. A més, en aquest cas la forma diagonal serà

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Observem, per tant, que si a no pren els valors -1 o 5 aleshores el valor del paràmetre b no afecta a la condició de diagonalització de la matriu, (ara bé el valor de b segurament sí que ens canviarà els vectors propis associats).

- Considerem, a continuació, els dos casos que hem exclòs: el cas $a = 5$ i el cas $a = -1$.

- Si $a = 5$ aleshores els valors propis de la matriu A són $-1, 5, 5$. Amb el valor propi -1 no tindrem "problemes" ja que té multiplicitat algebraica 1. Per tant només hem d'analitzar el valor propi 5 que té multiplicitat algebraica 2.

  Així per a $a = 5$ es té que, la matriu A és diagonalitzable si i només si les multiplicitats algebraica i geomètrica del valor propi 5 coincideixen, és a dir, si i només si $\dim \operatorname{Ker}(A - 5\,\mathrm{Id}) = 2$. Calculem, per tant, la dimensió d'aquest nucli. La matriu que estem considerant és

$$A - 5\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  que té rang 2 independentment del valor del paràmetre real b. Per tant $\dim \operatorname{Ker}(A - 5\,\mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rang}(A - 5\,\mathrm{Id}) = 1$, de manera que les dues multiplicitats no coincideixen i, en conseqüència, la matriu A no és una matriu diagonalitzable.

- Si $a = -1$ aleshores els valors propis de la matriu A són $-1, -1, 5$. En aquest cas no tindrem "problemes" amb el valor propi 5 ja que té multiplicitat algebraica 1. Ara, per tant, només hem d'analitzar el valor propi -1 que té multiplicitat algebraica 2.

  Així per a $a = -1$ es té que, la matriu A és diagonalitzable si i només si les multiplicitats algebraica i geomètrica del valor propi -1 coincideixen, és a dir, si i només si $\dim \operatorname{Ker}(A + \mathrm{Id}) = 2$. Calculem, doncs, la multiplicitat geomètrica del valor propi -1. La matriu $A + \mathrm{Id}$ és

$$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  que és una matriu de rang 1 si $b = 0$ i de rang 2 si $b \neq 0$. Per tant, la multiplicitat geomètrica del valor propi -1 val

$$\dim \operatorname{Ker}(A + \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rang}(A + \mathrm{Id}) = \begin{cases} 2 & \text{si } b = 0 \\ 1 & \text{si } b \neq 0 \end{cases}$$

  d'on, la matriu A és una matriu diagonalitzable si i només si $b = 0$, essent

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  la forma diagonal associada en aquest cas.

- En conclusió, hem vist que la matriu A és una matriu diagonalitzable si es dóna alguna de les dues situacions següents: o bé si $a \neq -1, 5$, cas en què la matriu A és diagonalitzable independentment del valor del paràmetre b i la forma diagonal associada és

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix};$$

  o bé si $a = -1$ i $b = 0$, cas en què la forma diagonal associada a la matriu A és

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En qualsevol altre cas, la matriu A no és diagonalitzable.

Resolució (d)

- Comencem per determinar el polinomi característic d'aquesta matriu, que es calcula com

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 1 & 4-x & a \\ 1 & 0 & 5-x \end{pmatrix} \\ = -(x-4)\det \begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ 1 & 5-x \end{pmatrix} \\ = -(x-4)(x^2 - \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot x + \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}) \\ = -(x-4)(x^2 - 8x + 16) \\ = -(x-4)^3. \end{aligned}$$

- D'aquí es té que la matriu A té un únic valor propi $\lambda = 4$ amb multiplicitat algebraica 3 i, per tant, A és una matriu diagonalitzable si i només si la multiplicitat geomètrica és també 3. Dit, d'una altra manera, A és una matriu diagonalitzable si i només si $\dim \mathrm{Ker}(A - 4\,\mathrm{Id}) = 3$.

- Per tant hem de calcular la dimensió del nucli de la matriu $A - 4\,\mathrm{Id}$. La matriu que estem considerant és la següent
$$A - 4\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
que té rang com a mínim 1 independentment del valor del paràmetre a, (doncs hi ha almenys un element no nul). Així es té que $\dim \mathrm{Ker}(A - 4\,\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rang}(A - 4\,\mathrm{Id}) \leq 3 - 1 = 2$ independentment del valor del paràmetre a.

- En conclusió, la matriu A no és una matriu diagonalitzable en cap cas.

- **Comentari.** Aquest fet es dóna en general: si tenim una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quadrada $n \times n$ amb coeficients en un cos $\mathbb{K}$, i si aquesta matriu té un únic valor propi λ amb multiplicitat algebraica n, aleshores la matriu A és una matriu diagonalitzable si i només si ja era una matriu diagonal, (ja que, en aquest cas, la condició necessària i suficient per diagonalitzar és que la matriu $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ tingui rang 0, que és equivalent a que la matriu $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ sigui nul·la i, per tant, a que $A = \lambda\,\mathrm{Id}$, que és una matriu diagonal).

- 22.

Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (x + y, x + ay - z, -x + y + bz)$.

(a) Determineu els valors de a i de b per als quals el vector $(1, 1, 0)$ és un vector propi de f i el subespai $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ és un subespai invariant per f.

(b) Determineu els valors de a i de b per als quals 1 és un valor propi de f. Per a quins valors 1 és valor propi de f amb multiplicitat algebraica 2?

Solució

(a) $a = 1$, $b = 3$.

(b) a arbitrari, $b = 2$. Té multiplicitat algebraica 2 si $a = 1$ i $b = 2$.

Resolució (a)

- Primer anem a determinar per a quins valors dels paràmetres reals a i b el vector $(1, 1, 0)$ és un vector propi de l'endomorfisme f.
- Una primera manera d'enfocar aquest problema consistiria a calcular la matriu associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$, calcular-ne el polinomi característic, determinar els valors propis com les arrels d'aquest polinomi i calcular els corresponents vectors propis. Un cop tenim aquests vectors propis, hauríem de trobar condicions sobre a i b per tal que el vector $(1, 1, 0)$ sigui un dels vectors que hem determinat.
- Aquesta manera d'atacar el problema seria correcta i, si ho fem, sense cap dubte arribaríem a la solució que busquem. Tanmateix és un procediment llarg i que no és necessari per a fer el que ens demanen.
- Recordem que si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E aleshores, un vector no nul v de l'espai E es diu que és vector propi de l'endomorfisme h de valor propi λ si $h(v) = \lambda v$.
- Per tant en el nostre cas no ens cal determinar tot el llistat de vectors propis de l'endomorfisme f i després comprovar si el vector $(1, 1, 0)$ és un d'ells, sinó que n'hi ha prou amb verificar si aquest vector donat satisfà la definició de vector propi:

$$f(1, 1, 0) = \lambda(1, 1, 0).$$

- Anem a fer-ho.
- Aplicant l'endomorfisme f al vector $(1, 1, 0)$ tenim

$$f(1, 1, 0) = (1 + 1, 1 + a \cdot 1 - 0, -1 + 1 + b \cdot 0) = (2, a + 1, 0)$$

i imposant que $(1, 1, 0)$ sigui vector propi d'algun valor propi λ tenim la igualtat

$$(2, a + 1, 0) = \lambda(1, 1, 0)$$

d'on, operant, obtenim la igualtat vectorial

$$(2, a+1, 0) = (\lambda, \lambda, 0)$$

que podem reescriure, fixant-nos en cadascuna de les components dels vectors, com el sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & \lambda \\ a+1 & = & \lambda \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

De la primera equació en deduïm que el valor propi és $\lambda = 2$, i posant-l'ho en la segona equació obtenim $a = 1$, (observeu que la tercera equació és una identitat que ens assegura que el sistema pot tenir solució).

- Per tant de moment hem demostrat que el vector $(1, 1, 0)$ és un vector propi de l'endomorfisme f si i només si $a = 1$.

- Vegem, a continuació, quines condicions obtenim per a a i b per tal que el subespai vectorial F que ens donen

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y + z = 0\}$$

sigui un subespai invariant per f.

- Recordem que si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E aleshores, un subespai vectorial H de E es diu que és un subespai invariant per l'endomorfisme h si la seva imatge està continguda en el subespai de partida, és a dir, si $h(H) \subseteq H$.

- Així hem de determinar per a quins valors de a i de b es té que $f(F) \subseteq F$.

- Anem a fer-ho.

- Comencem per determinar una base de F, ja que ens resultarà més senzill treballar amb bases per tal de determinar $f(F)$. Com que F ve donat en equacions per

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = -z\}$$

en deduïm que F té dimensió 2 i una base és

$$F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, -1) \rangle.$$

Aleshores, $f(F)$ està generat per la imatge d'aquesta base, és a dir, es té que

$$f(F) = \langle f(1, 0, 0), f(0, 1, -1) \rangle$$

d'on, calculant, tenim

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1 + 0, 1 + a \cdot 0 - 0, -1 + 0 + b \cdot 0) = (1, 1, -1) \\ f(0, 1, -1) &= (0 + 1, 0 + a \cdot 1 - (-1), 0 + 1 + b \cdot (-1)) = (1, a + 1, 1 - b) \end{aligned}$$

i per tant

$$f(F) = \langle (1, 1, -1), (1, a + 1, 1 - b) \rangle.$$

Ara, per tant, per comprovar que $f(F) \subseteq F$ n'hi ha prou amb veure que els generadors de $f(F)$ estan en F, i per a això únicament hem de comprovar que els generadors de $f(F)$ verifiquen les equacions que defineixen el subespai vectorial F. D'una banda el vector $(1, 1, -1) \in F$ ja que per a aquest vector es té que

$$y+z=1+(-1)=0$$

que és una equació que es compleix sempre. D'altra banda per a $(1,a+1,1-b)$ es té que

$$y+z=(a+1)+(1-b)=a-b+2$$

i per tant

$$(1,a+1,1-b)\in F \Longleftrightarrow a-b+2=0 \Longleftrightarrow b=a+2.$$

- Per tant podem concloure que el subespai vectorial F és un subespai invariant per l'endomorfisme f si i només si $b=a+2$.
- Ara, per acabar, únicament hem d'ajuntar ambdues condicions.
- Així es té que, el vector $(1,1,0)$ és un vector propi de f i el subespai $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y+z=0\}$ és un subespai invariant per f si i només si $a=1$ i $b=a+2$. Òbviament ambdues condicions es compleixen simultàniament si i només si $a=1$ i $b=3$.

- *Comentari.* Notem que si en la segona part haguéssim trobat alguna condició per al valor del paràmetre a diferent del que hem trobat en la primera part, aleshores les dues condicions no serien compatibles i, per tant, no es podrien donar de manera simultània.

Resolució (b)

- Primer de tot anem a determinar els valors dels paràmetres reals a i b per als quals 1 és un valor propi de l'endomorfisme f.

- *Quan $\lambda=1$ és un valor propi de f?*

- Com en l'apartat anterior, la manera més directa d'atacar aquest problema consistiria en calcular la matriu associada a f, determinar-ne el polinomi característic i calcular-ne les arrels. D'aquesta manera obtindrem tots els valors propis de f. Un cop fet això hauríem de trobar condicions sobre a i b per tal que de 1 sigui un dels valors que hem determinat. Tanmateix, com abans, tot i que el procediment és correcte és innecessari pel que volem provar.
- D'una banda recordem que un escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ és un valor propi de l'endomorfisme f si i només si λ és una arrel del polinomi característic de l'endomorfisme f. Per tant, per veure que un escalar λ és un valor propi de f no cal calcular totes les arrels del polinomi característic $p_f(x)$ ja que únicament hem de veure que $p_f(\lambda)=0$.

  D'altra banda recordem que si $M(f;B)$ és la matriu associada a l'endomorfisme f en una base B de l'espai aleshores $p_f(x)=\det(M(f;B)-x\,\mathrm{Id})$.

  Per tant, un escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ és un valor propi de l'endomorfisme f si i només si $p_f(\lambda)=0$ si i només si $\det(M(f;B)-\lambda\,\mathrm{Id})=0$.
- Farem servir aquesta darrera caracterització per provar que $\lambda=1$ és un valor propi de f i, per simplicitat, prendrem com base B la base canònica B_e de $\mathbb{R}^3$.

- Sigui doncs $B_e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$, i considerem la matriu $M_f = M(f; B_e)$ associada a f en la base B_e que és la matriu

$$M_f = M(f; B_e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Com que volem que $\lambda = 1$ sigui un valor propi, hem d'imposar que el determinant de la matriu $M_f - \mathrm{Id}$ sigui nul. La matriu que estem considerant és

$$M_f - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & -1 \\ -1 & 1 & b-1 \end{pmatrix}$$

i el seu determinant val

$$\begin{aligned} \det(M_f - \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & -1 \\ -1 & 1 & b-1 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b-1 \end{pmatrix} \\ &= -(1 \cdot (b-1) - (-1) \cdot (-1)) \\ &= 2 - b \end{aligned}$$

d'on traiem que, sigui quin sigui el valor del paràmetre a, la condició necessària i suficient per tal que $\lambda = 1$ sigui un valor propi de f és que b valgui $b = 2$.

- *Comentari.* El polinomi característic de l'endomorfisme f és el polinomi

$$\begin{aligned} p_f(x) = \det(M_f - x\,\mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & a-x & -1 \\ -1 & 1 & b-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)(a-x)(b-x) + 1 + (1-x) - (b-x) \\ &= -(x-1)(x-a)(x-b) + 2 - b \end{aligned}$$

i, per tant, es té que $\lambda = 1$ és un valor propi de f si i només si $\lambda = 1$ és una arrel de $p_f(x)$ si i només si $p_f(1) = 0$ si i només si $b = 2$. Observem que si $b \neq 2$ no resulta fàcil calcular totes les arrels del polinomi $-(x-1)(x-a)(x-b) + 2 - b$.

- Així de moment hem vist que 1 és un valor propi de f si i només si $b = 2$. Per acabar hem de determinar per a quins valors de a aquest valor propi té multiplicitat algebraica igual a 2. A continuació presentarem tres maneres diferents de fer-ho.

- *Quan $\lambda = 1$ és un valor propi de f de multiplicitat algebraica 2?*

- La primera manera que presentem consisteix a fer servir la definició de multiplicitat algebraica. Recordeu que la multiplicitat algebraica d'un valor propi λ és la multiplicitat de λ com arrel del polinomi característic. Per tant, hem de veure quan $\lambda = 1$ és una arrel doble de $p_f(x)$.

Com que $p_f(x) = -(x-1)(x-a)(x-b) + 2 - b$ aleshores, $\lambda = 1$ és una arrel doble de $p_f(x)$ si i només si $p_f(1) = 0$ i a més $p_f(x) = -(x-1)^2(x-\xi)$ per a cert $\xi \in \mathbb{R}$ amb $\xi \neq 1$ [30]. Per tant, $\lambda = 1$ és una arrel doble de $p_f(x)$ si i només si $b = 2$ i $a = 1$.

- Observem que en aquesta primera resolució ens cal calcular el polinomi carcaterístic. Ara anem a presentar una manera alternativa on no cal calcular explícitament aquest polinomi.

  Volem determinar per a quins valors dels paràmetres reals a i b el polinomi característic de f és $p_f(x) = -(x-1)^2(x-\xi)$ per a cert $\xi \in \mathbb{R}$ amb $\xi \neq 1$.

  Pel que hem fet abans sabem que $\lambda = 1$ és una arrel de $p_f(x)$ si i només si $b = 2$. Així podem suposar que $b = 2$ i, ara, hem de determinar els valors de a per als quals $p_f(x) = -(x-1)^2(x-\xi)$ per a cert $\xi \in \mathbb{R}$ amb $\xi \neq 1$.

  En aquest punt la segona manera alternativa de procedir consisteix a adonar-se que la matriu $M_f - \mathrm{Id}$ té rang 2 independentment del valor del paràmetre real a. Per tant, per tal que el valor propi 1 tingui multiplicitat algebraica 2 és necessari i suficient que $\dim \mathrm{Ker}(M_f - \mathrm{Id})^2 = \dim \mathrm{Ker}(M_f - \mathrm{Id})^3 = 2$. No hem optat per aquesta manera de resoldre el problema per evitar haver de fer potències d'una matriu amb paràmetres. Es deixa com a exercici pel lector comprovar que, en efecte, l'exercici queda resolt també d'aquesta manera.

- La tercera manera que presentem consisteix a tenir present que el determinant i la traça d'una matriu són invariants per canvis de base i que, a més, aquests invariants estan relacionats amb el polinomi característic. Concretament farem servir que si $p_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{n_r}$ és la descomposició factorial en $\mathbb{C}[x]$ del polinomi característic d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, aleshores la traça i el determinant de la matriu A valen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A) &= n_1\lambda_1 + \cdots + n_r\lambda_r,\\ \det(A) &= \lambda_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{n_r}.\end{aligned}$$

  En el nostre cas tenim:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M_f) &= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & b \end{pmatrix} = 1 + a + b,\\ \det(M_f) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & b \end{pmatrix} = ab - b + 2.\end{aligned}$$

  Per una banda sabem que $\lambda = 1$ és un valor propi de f si i només si $b = 2$. Per tant si $\lambda = 1$ és un valor propi de f aleshores tenim que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M_f) &= 1 + a + 2 = a + 3,\\ \det(M_f) &= 2a - 2 + 2 = 2a.\end{aligned}$$

  Per altra banda volem que el valor propi 1 tingui multiplicitat algebraica exactament 2, és a dir, volem que $p_f(x) = -(x-1)^2(x-\xi)$ per a cert nombre real $\xi \in \mathbb{R}$ amb $\xi \neq 1$. Per tant hem de demanar que:

[30] Aquí estudiem la multiplicitat de l'arrel d'un polinomi fent servir la divisibilitat. Alternativament podem fer servir la derivació. Concretament en aquest cas podem fer servir que, $\lambda = 1$ és una arrel doble del polinomi $p_f(x)$ si i només si $p_f(1) = p_f'(1) = 0$ i $p_f''(1) \neq 0$.

$$\mathrm{Tr}(M_f) = \xi + 1 + 1,$$
$$\det(M_f) = \xi \cdot 1 \cdot 1.$$

D'aquesta manera tenim el sistema de dues equacions:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+3 & = & \xi + 2 \\ 2a & = & \xi \end{array} \right.$$

amb incògnites a i ξ. Resolent aquest sistema obtenim $a = 1$ i $\xi = 2$.

Així podem concloure que si el valor propi 1 té multiplicitat algebraica 2 aleshores $a = 1$ i $b = 2$. Per acabar hauríem de comprovar que aquesta condició necessària també és suficient. És a dir hauríem de demostrar que, de fet, aquesta implicació és un equivalència (que aquesta implicació és un "si i només si"). Es deixa com a exercici pel lector comprovar que, en efecte, si $a = 1$ i $b = 2$ aleshores $\lambda = 1$ és un valor propi de f amb multiplicitat algebraica 2.

- 23.

Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ definit per $f(x,y,z,t) = (y, -x+2y, z, -x+y-z+2t)$, i considerem els vectors $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (0,1,1,0)$ i $v_4 = (0,0,0,1)$.

(a) Comproveu que l'endomorfisme f no és diagonalitzable, que els vectors v_1, v_2, v_4 són vectors propis de f, i que v_3 no és vector propi de f.

(b) Sigui F el subespai invariant $F = \langle v_1, v_2 \rangle$, i considerem l'endomorfisme $\widetilde{f}$ induït per f en l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$. Comproveu que $\widetilde{f}$ és un endomorfisme diagonalitzable i que els vectors $[v_3], [v_4]$ determinen una base de $\mathbb{R}^4/F$ formada per vectors propis de $\widetilde{f}$.

Solució

—

Resolució (a)

- Comencem per calcular el polinomi característic $p_f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$. Recordem que el polinomi característic de f es defineix com $p_f(x) = \det(f - x\,\mathrm{Id})$ i que el podem calcular a partir del polinomi característic de la matriu $M(f;B)$ associada a f en alguna base B de l'espai, (ja que també hem vist a teoria que aquest polinomi és independent de la base que triem).

- Sigui, doncs, $B_e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$, i considerem la matriu $A = M(f;B_e)$ associada a f en aquesta base, que és la matriu:

$$A = M(f;B_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Aleshores, el polinomi característic de l'endomorfisme f és:

$$\begin{aligned} p_f(x) = p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)(1-x)\det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)(1-x)(x^2-2x+1) = (2-x)(1-x)(1-x)^2 \\ &= (2-x)(1-x)^3 = (x-2)(x-1)^3. \end{aligned}$$

- Atès que $\mathbb{R}^4$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita, podem aplicar el teorema de diagonalització (veure pàgina 148) i tenim que l'endomorfisme f és diagonalitzable si i només si el seu polinomi característic descompon en factors lineals en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$ i, a més, la multiplicitat algebraica dels valors propis de f coincideix amb la seva multiplicitat geomètrica [31].

- Hem vist que el polinomi característic de l'endomorfisme f és:

$$p_f(x) = (x-2)(x-1)^3.$$

  Per tant, el polinomi característic de f descompon en factors lineals en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$. Ara, pel teorema de diagonalització, ens falta veure si les multiplicitats algebraica i geomètrica dels valors propis de f coincideixen o no [32].

- Els valors propis de l'endomorfisme f són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$, que tenen multiplicitats algebraiques 1 per al valor propi $\lambda_1 = 2$, i 3 per al valor propi $\lambda_2 = 1$. Així només ens falta calcular les seves multiplicitats geomètriques i veure si coincideixen o no amb les algebraiques. En altres paraules, hem de veure si es compleixen les igualtats:

$$\dim \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = 1,$$
$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3.$$

- Anem a veure que es té la primera igualtat però que no es té la segona. Si demostrem això aleshores podrem concloure que l'endomorfisme f no és diagonalitzable.

- Recordem que a teoria hem vist que, per a tot valor propi λ de l'endomorfisme f, es compleix la següent desigualtat que ens relaciona la multiplicitat algebraica n_λ del valor propi λ i la seva multiplicitat geomètrica $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$:

$$1 \leq \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \leq n_\lambda.$$

- Per tant, per al valor propi $\lambda = 2$ tenim $1 \leq \dim \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) \leq n_\lambda = 1$ d'on es dedueix que $\dim \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = 1$, i per tant les multiplicitats algebraica i geomètrica del valor propi $\lambda = 2$ coincideixen.

- Analitzem ara si la igualtat entre les multiplicitats també es compleix per al valor propi $\lambda = 1$. En principi per a aquest valor propi tenim la desigultat $1 \leq \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \leq n_\lambda = 3$ que, en aquest cas, no ens determina la dimensió. Així hem de calcular $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ directament. Per a això, tenint en compte que

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 4 - \operatorname{rang} M(f - \mathrm{Id}; B_e),$$

  n'hi ha prou que calculem el rang de la matriu associada a l'endomorfisme $f - \mathrm{Id}$ en la base canònica B_e de $\mathbb{R}^4$. Aquesta matriu és:

---

[31] Recordem que la idea intuïtiva del teorema de diagonalització és la següent. Per diagonalitzar un endomorfisme d'un espai vectorial de dimensió finita n volem exactament n valors propis comptats amb multiplicitats (que són els que ens donen la forma diagonal de l'endomorfisme) i, a més, volem exactament n vectors propis (que ens determinen una base en la qual tindrem la forma diagonal). La primera condició és la descomposició en factors lineals del polinomi característic de l'endomorfisme. La segona condició és la igualtat entre les multiplicitats algebraiques i geomètriques dels valors propis de l'endomorfisme.

[32] En aquest cas, i de manera intuïtiva, tenim un endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ (espai vectorial de dimensió finita $n = 4$), i de moment sabem que tenim 4 valors propis: $2, 1, 1, 1$. Per tant, perquè f sigui un endomorfisme diagonalitzable ens calen 4 vectors propis que formin la base: un vector per al valor propi 2 i tres vectors per al valor propi 1.

$$M(f-\mathrm{Id};B_e)=M(f;B_e)-M(\mathrm{Id};B_e)=A-\mathrm{Id}_4=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

d'on fent Gauss tenim:

$$M(f-\mathrm{Id};B_e)=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

i per tant el seu rang val 2. D'aquí deduïm que

$$\dim\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})=4-\mathrm{rang}\,M(f-\mathrm{Id};B_e)=2\neq 3,$$

de manera que la multiplicitat geomètrica del valor propi $\lambda=1$ no coincideix amb la seva multiplicitat algebraica.

- Per tant, pel teorema de diagonalització, l'endomorfisme f no és diagonalitzable.

- *Observació.* El que acabem de veure és que el nombre màxim de vectors propis linealment independents és tres: un vector propi de valor propi 2 i dos vectors propis de valor propi 1. Per tant no podem determinar una base de $\mathbb{R}^4$ formada per vectors propis i, per tant, l'endomorfisme f no és diagonalitzable[33].

- Comprovem a continuació que els vectors v_1, v_2 i v_4 donats a l'enunciat són realment tres vectors propis de l'endomorfisme f.
- Recordem que un vector no nul v es diu vector propi de f de valor propi λ si $f(v)=\lambda v$.
- Per tant, per comprovar que els vectors donats són vectors propis d'algun valor propi de f, simplement aplicarem l'endomorfisme f a cada vector. Fent-ho, tenim:

$$\begin{aligned}f(v_1)&=f(1,1,0,0)=(1\ ,\ -1+2\cdot1\ ,\ 0\ ,\ -1+1-0+2\cdot0)=(1,1,0,0)=1\cdot v_1\\f(v_2)&=f(0,0,1,1)=(0\ ,\ -0+2\cdot0\ ,\ 1\ ,\ -0+0-1+2\cdot1)=(0,0,1,1)=1\cdot v_2\\f(v_4)&=f(0,0,0,1)=(0\ ,\ -0+2\cdot0\ ,\ 0\ ,\ -0+0-0+2\cdot1)=(0,0,0,2)=2\cdot v_4\end{aligned}$$

d'on podem concloure que v_1 i v_2 són vectors propis de valor propi 1, mentre que v_4 és un vector propi de valor propi 2.

- *Observació.* Notem que del que hem provat en podem concloure que $\langle v_1,v_2\rangle=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ i que $\langle v_4\rangle=\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})$. En general, a diferència del que succeeix en aquest problema, no coneixerem els vectors propis d'un valor propi λ, de manera que els haurem de calcular com una base del nucli de l'endomorfisme $f-\lambda\,\mathrm{Id}$.

[33]Fixem-nos que, tot i que l'endomorfisme no és diagonalitzable, podríem dir de manera "naïf" que "gairebé és diagonalitzable". En els casos en els que un endomorfisme no és diagonalitzable s'aplica la *forma reduïda de Jordan* obtenint una matriu que és "diagonal" llevat d'alguns uns en la diagonal inferior (o en la diagonal superior segons com agafem les bases). Més endavant estudiareu com obenir la *forma reduïda de Jordan* d'una matriu.

- Per acabar aquest primer apartat, comprovem que v_3 no és un vector propi de f.
- Per veure que v_3 no és un vector propi de f procedirem igual que abans: aplicarem f sobre el vector v_3 i veurem que no satisfà la definició de vector propi. Calculant tenim:

$$f(v_3) = f(0,1,1,0) = (1\ ,\ -0+2\cdot 1\ ,\ 1\ ,\ -0+1-1+2\cdot 0) = (1,2,1,0)$$

  i, per tant, per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$ es té que $f(v_3) \neq \lambda v_3$, d'on v_3 no és un vector propi de f. De fet observem que la seva imatge $f(v_3)$ és una combinació lineal dels vectors v_1 i v_3, concretament es té que $f(v_3) = v_1 + v_3$.

- *Observació.* Una manera alternativa de veure que v_3 no és un vector propi de f l'exposem a continuació. Hem vist que $\langle v_1, v_2\rangle = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ i que $\langle v_4\rangle = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$. D'altra banda, com que v_3, v_4 són linealment independents tenim que $v_3 \notin \langle v_4\rangle = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$, i per tant v_3 no és vector propi de valor propi 2. Anàlogament, com que v_1, v_2, v_3 són linealment independents, es té que $v_3 \notin \langle v_1, v_2\rangle = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, de manera que el vector v_3 no és vector propi de valor propi 1. Per tant, com que els únics valors propis de f són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$, podem concloure que v_3 no és un vector propi de f.

Resolució (b)

- En primer lloc justifiquem que, en efecte, el subespai vectorial $F = \langle v_1, v_2\rangle$ és un subespai invariant per f. És a dir, hem de veure que $f(F) \subseteq F$.
- Sigui $v \in F$. Aleshores v es pot escriure de manera única com $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Aplicant f sobre v i usant la linealitat de l'endomorfisme, tenim

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

  Ara recordem que en l'apartat anterior hem vist que els vector v_1 i v_2 són vectors propis de f valor propi 1 i, per tant, es tenen les igualtats

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1, \\ f(v_2) &= v_2. \end{aligned}$$

  Substituint-ho en l'expressió anterior, ens queda

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

  i, per tant, $f(v) \in F$. D'aquí podem concloure la inclusió $f(F) \subseteq F$. És a dir, podem concloure que el subespai F és un subespai invariant per l'endomorfisme f.

- *Observació.* Fixem-nos que en realitat hem demostrat més, ja que el que hem provat és que $f(v) = v$ per a tot $v \in F$. És a dir, el subespai F no és només un subespai invariant per f, sinó que tots els seus vectors són fixos per l'endomorfisme f. Això es deu a que $F = \langle v_1, v_2\rangle$ i que els dos vectors v_1 i v_2 que generen F són vectors propis de valor propi 1. Si el valor propi fos diferent, només podríem assegurar la invariància de F per f.

- Aquesta observació es completa amb els següents comentaris:

  - **Comentari.** En general, si tenim un endomorfisme $f : E \to E$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E, si λ és un valor propi de f, i si prenem $F = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ un subespai vectorial generat per vectors propis de valor propi λ, aleshores es té que $f(F) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_r) \rangle = \langle \lambda v_1, \ldots, \lambda v_r \rangle \subseteq F$, és a dir, F és invariant per f. De fet, si $\lambda = 0$ tindrem $f(F) = \langle 0 \rangle \subseteq F$, i si $\lambda \neq 0$ tindrem $f(F) = F$. A més es té que, $f(v) = v$ per a tot $v \in F$ si i només si $\lambda = 1$.

  - **Comentari.** En general, si tenim un endomorfisme $f : E \to E$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E i si prenem $q \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi arbitrari, aleshores el subespai vectorial $F = \operatorname{Ker} q(f)$ és un subespai invariant per f. En particular, si $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi de l'endomorfisme f, i si considerem el polinomi $q = x - \lambda \in \mathbb{K}[x]$, aleshores obtenim com subespai invariant per f el subespai $F = \operatorname{Ker} q(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ generat pels vectors propis de valor propi λ.

- Ara que ja hem vist que el subespai vectorial F és invariant per f, considerem l'endomorfisme induït en el quocient, que és:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\colon \mathbb{R}^4/F &\longrightarrow \mathbb{R}^4/F \\ [u] &\longmapsto \widetilde{f}([u]) = [f(u)] \end{aligned}$$

és a dir, l'endomorfisme $\widetilde{f}$ és l'aplicació lineal que fa commutatiu el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_F"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "\pi_F"] \\ \mathbb{R}^4/F \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \mathbb{R}^4/F \end{tikzcd}$$

és a dir, es té la igualtat $\pi_F \circ f = \widetilde{f} \circ \pi_F$, on l'aplicació $\pi_F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/F$ és l'aplicació de pas al quocient (és la projecció canònica).

- **Observació.** Remarquem especialment que el fet que el subespai F sigui invariant per f és fonamental per tal que l'aplicació induïda $\widetilde{f}$ estigui ben definida, és a dir, que no depengui del representant triat. Com a exemple, suposem que existeix $v \in F$ tal que $f(v) \notin F$. Aleshores, donat $[u] \in \mathbb{R}^4/F$, considerem els representants u i $u + v$ de $[u]$. Fixem-nos que ambdós són representants de $[u]$, doncs $v \in F$ i, per tant, $[u] = [u + v]$. Si ara apliquem $\widetilde{f}$ tal i com l'hem definit, tenim

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}([u]) = [f(u)] \\ &\widetilde{f}([u+v]) = [f(u+v)] = [f(u) + f(v)] = [f(u)] + [f(v)] \end{aligned}$$

i com que $f(v) \notin F$, per tant $[f(v)] \neq [0]$ en l'espai quocient $\mathbb{R}^4/F$, d'on es té que la imatge de $[u]$ per $\widetilde{f}$ depèn del representant triat i, per tant, $\widetilde{f}$ no està ben definida en el quocient (de fet, no és una aplicació).

- **Comentari.** Aquesta construcció d'aplicació induïda es pot fer en general. Siguin E_1 i E_2 dos $\mathbb{K}$-espais vectorials, i sigui $f\colon E_1 \to E_2$ una aplicació $\mathbb{K}$-lineal entre ells. Aleshores, donats dos subespais vectorials $F_1 \subseteq E_1$ i $F_2 \subseteq E_2$, la condició necessària i suficient per tal que existeixi una aplicació lineal induïda ben definida

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\colon E_1/F_1 &\longrightarrow E_2/F_2 \\ [u] &\longmapsto \widetilde{f}([u]) = [f(u)] \end{aligned}$$

és que $f(F_1) \subseteq F_2$. L'argument per justificar-ho és el mateix que acabem de fer servir en l'observació anterior.

- Tornem a la resolució del nostre problema.

- Un cop sabem que $\widetilde{f}$ és un endomorfisme ben definit, hem de comprovar que aquest endomorfisme és diagonalitzable.

- Fixem-nos que, si només ens demanessin això, hauríem de buscar una base B_q de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4/F$, calcular la matriu $M(\widetilde{f}; B_q)$ associada a l'endomorfisme $\widetilde{f}$ en aquesta base, determinar el polinomi característic, calcular-ne els valors propis i aplicar el teorema de diagonalització a l'endomorfisme $\widetilde{f}$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4/F$. Tanmateix, en aquest cas no ens cal fer tot això, ja que també ens demanen comprovar que els vectors $[v_3]$ i $[v_4]$ són una base de $\mathbb{R}^4/F$ formada per vectors propis de $\widetilde{f}$. Per tant, procedirem de manera alternativa. En primer lloc, comprovarem que $[v_3]$ i $[v_4]$ són, en efecte, vectors propis de $\widetilde{f}$. Tot seguit, i només si és necessari[34], comprovarem que $[v_3]$ i $[v_4]$ són linealment independents. Un cop hàgim comprovat això, $\widetilde{f}$ serà diagonalitzable pel teorema de diagonalització, ja que $\mathbb{R}^4/F$ tindrà una base de vectors propis.

- Comencem, doncs, per comprovar que els vectors $[v_3]$ i $[v_4]$ són vectors propis de $\widetilde{f}$. Com en l'apartat anterior, ho veurem aplicant $\widetilde{f}$ a ambdós vectors. Fent-ho, tenim

$$\begin{aligned} \widetilde{f}([v_3]) &= [f(v_3)] = [v_1 + v_3] = [v_1] + [v_3] = [v_3] \\ \widetilde{f}([v_4]) &= [f(v_4)] = [2v_4] = 2[v_4] \end{aligned}$$

  on hem aprofitat els càlculs que hem fet en l'apartat anterior i en la igualtat $[v_1] + [v_3] = [v_3]$ hem usat que $[v_1] = [0]$ perquè $v_1 \in F$.

- Per tant, en deduïm que $[v_3]$ és un vector propi de valor propi 1, i que $[v_4]$ és un vector propi de valor propi 2. Això ens dóna, sense cap argument addicional, que els vectors $[v_3]$ i $[v_4]$ són linealment independents per ser vectors propis de valors propis diferents.

- Per tant, com que $\mathbb{R}^4/F$ té dimensió 2 (ja que $\dim \mathbb{R}^4/F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 4 - 2 = 2$), en deduïm que $[v_3]$ i $[v_4]$ formen una base de $\mathbb{R}^4/F$. D'on, aplicant el teorema de diagonalització (veure pàgina 148), tenim que $\widetilde{f}$ és un endomorfisme diagonalitzable de $\mathbb{R}^4/F$.

[34] Recordem que dos vectors propis de valors propis diferents sempre són linealment independents. Per tant, si $[v_3]$ i $[v_4]$ són vectors propis de valors propis diferents tindrem, automàticament, la independència lineal sense necessitat de fer cap càlcul addicional.

- 24.

Determineu $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $B^5 = \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix}$.

Solució

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Resolució

- La manera més elemental i directa d'atacar aquest problema seria prendre una matriu arbitrària $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donada per
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
fer el càlcul llarg i tediós de la matriu B^5, i imposar la igualtat amb la matriu que ens donen en l'enunciat. D'aquesta manera, de l'equació matricial
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix}$$
obtenim el sistema de quatre equacions amb quatre incògnites:
$$\left\{ \begin{array}{rcr} a^5 + 4\,bca^3 + 3\,c^2ab^2 + 3\,bdca^2 + 2\,bd^2ca + 2\,dc^2b^2 + bd^3c & = & 65 \\ ba^4 + 3\,a^2b^2c + b^3c^2 + 4\,ab^2dc + 3\,b^2d^2c + da^3b + a^2bd^2 + abd^3 + bd^4 & = & 33 \\ ca^4 + 3\,c^2a^2b + dca^3 + 4\,adc^2b + d^2ca^2 + ad^3c + 3\,bd^2c^2 + b^2c^3 + cd^4 & = & -66 \\ bca^3 + 2\,c^2ab^2 + 2\,bdca^2 + 3\,dc^2b^2 + 3\,bd^2ca + 4\,bd^3c + d^5 & = & -34 \end{array} \right.$$

- Tanmateix, el sistema de quatre equacions per a a, b, c, d que hem obtingut en fer aquest càlcul no és un sistema d'equacions lineal, de manera que els diferents mètodes de resolució de sistemes que hem vist fins ara no ens serveixen en aquest cas. En general, la resolució d'un sistema d'equacions no lineals no és gens trivial i, de fet, tampoc tenim garantit que el sistema tingui solució o, en el cas en què en tingui, en principi no podem dir res sobre quantes solucions té.

- Així, doncs, és convenient canviar el nostre enfocament del problema i buscar algun mètode alternatiu per resoldre'l.

- Una propietat important i molt útil de les matrius diagonals que convé recordar en aquest moment és que, si

$$D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

és una matriu diagonal d'ordre $n \geq 2$ amb coeficients en un cos $\mathbb{K}$ aleshores la potència i-èsima de D es calcula trivialment de la següent manera:

$$D^i = \mathrm{Diag}(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_{n-1}^i, \mu_n^i) = \begin{pmatrix} \mu_1^i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{n-1}^i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n^i \end{pmatrix}.$$

És a dir, per obtenir la potència i-èsima D^i de la matriu D n'hi ha prou amb calcular la potència i-èsima dels elements de D.

- Fent servir aquest resultat podem calcular "més fàcilment" les potències i-èsimes de les matrius diagonalitzables, ja que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu $\mathbb{K}$-diagonalitzable amb forma diagonal $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

  $$A = PDP^{-1}$$

  i, per tant, la potència i-èsima de la matriu A la podem obtenir calcular la potència i-èsima de la matriu diagonal D i fent servir la següent igualtat:

  $$\begin{aligned} A^i &= (PDP^{-1})^i \\ &= (PDP^{-1}) \overset{i}{\ldots} (PDP^{-1}) \\ &= PDP^{-1}P \ldots P^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^iP^{-1}. \end{aligned}$$

- Ara la idea és la següent: com que sabem calcular "potències" i-èsimes de matrius diagonalitzables, podrem calcular "arrels" i-èsimes de matrius diagonalitzables (sempre i quan existeixin).

  Concretament, donada una matriu $\mathbb{K}$-diagonalitzable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, per determinar una matriu $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $B^i = A$ el que podem fer és, primer, calcular una matriu diagonal $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

  Un cop fet això determinem una matriu diagonal $D_i = \mathrm{Diag}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $D_i^i = D$. Observeu que aquesta matriu existeix si i només si en el cos $\mathbb{K}$ existeixen les arrels i-èsimes dels escalars $\mu_1, \ldots, \mu_n$, ja que volem $\xi_j^i = \mu_j$ per a $j = 1, \ldots, n$.

  Finalment considerem la matriu $B = PD_iP^{-1}$ que, pel dit abans, té per poténcia i-èsima la matriu A ja que:

  $$\begin{aligned} B^i &= (PD_iP^{-1})^i \\ &= PD_i^iP^{-1} \\ &= PDP^{-1} \\ &= A. \end{aligned}$$

- Per tant, per resoldre aquest problema, aplicarem aquesta idea a la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix}.$$
- El primer que anem a fer és mirar si la matriu A és una matriu diagonalitzable i, si ho és, calcularem la seva forma diagonal.

  Comencem per calcular el polinomi característic $p_A(x)$ de la matriu A. Com és habitual, el polinomi característic es calcula com
$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 65 - x & 33 \\ -66 & -34 - x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix} \cdot x + \det \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 31x - 32 \\ &= (x+1)(x-32). \end{aligned}$$
  Com que el polinomi característic factoritza en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$ amb factors lineals simples, la matriu A és $\mathbb{R}$-diagonalitzable. A més, la forma diagonal associada és la matriu diagonal D que té a la seva diagonal els dos valors propis de la matriu A, és a dir la matriu
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$
- Ara anem a justificar l'existència d'una matriu $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verificant $B^5 = A$.

  Pel resultat teòric que hem explicat únicament hem de justificar que existeix una matriu diagonal $D_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $D_5^5 = D$. Això ara és evident ja que
$$\begin{cases} -1 & = & (-1)^5 \\ 32 & = & 2^5 \end{cases}$$
  i per tant
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5.$$
- Un cop justificada la seva existència, anem a determinar una matriu B verificant $B^5 = A$.
- Pel dit abans, si tenim $A = PDP^{-1}$ aleshores la matriu $B = PD_5P^{-1}$ és tal que $B^5 = A$. Per tant únicament ens falta determinar la matriu de canvi de base P mitjançant la qual podrem recuperar la matriu A de la matriu D. Aquesta matriu P canvi de base vindrà donada pels vectors propis de A. Anem, doncs, a calcular-los.
- Els vectors propis de la matriu A de valor propi -1 són els elements no nuls del subespai vectorial $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{Id})$. Com que
$$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 66 & 33 \\ -66 & -33 \end{pmatrix},$$
  aleshores el nucli d'aquesta matriu el podem determinar solucionant el sistema homogeni corresponent. Tanmateix, fixem-nos que les dues columnes de $A + \mathrm{Id}$ són proporcionals per un factor 2, de manera que el nucli no és més que:
$$\mathrm{Ker}(A + \mathrm{Id}) = \langle (1, -2) \rangle.$$

- Anàlogament, per al valor propi 32, els vectors propis de la matriu A associats a aquest valor propi són els elements no nuls del subespai $\mathrm{Ker}(A - 32\,\mathrm{Id})$. La matriu $A - 32\,\mathrm{Id}$ és

$$A - 32\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 33 & 33 \\ -66 & -66 \end{pmatrix}$$

i, com abans, per determinar el nucli d'aquesta matriu hauríem de resoldre el sistema homogeni corresponent. Observem, però, que les dues columnes de la matriu són idèntiques, d'on es dedueix immediatament que el nucli d'aquesta matriu és

$$\mathrm{Ker}(A - 32\,\mathrm{Id}) = \langle (1, -1) \rangle.$$

- Per tant, la matriu de canvi de base P ve donada per

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- En conclusió, tenim $A = PDP^{-1}$ i per tant la matriu

$$\begin{aligned} B &= PD_5P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

és una matriu verificant $B^5 = A$, (deixem com a exercici al lector comprovar que en efecte es té aquesta igualtat).

- 25.

Determineu quines de les següents aplicacions $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defineixen un producte escalar en $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle(x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.
(b) $\langle(x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.

Solució

És producte escalar l'aplicació de l'apartat (a).

Resolució

- Primer de tot, abans de passar a la resolució d'aquest problema, anem a recordar la noció de producte escalar en l'espai vectorial real n-dimensional $\mathbb{R}^n$, la representació matricial d'aquests productes i, finalment, repassarem la caracterització de les matrius que els defineixen.

1. *La noció de producte escalar en* $\mathbb{R}^n$.

   Un producte escalar en $\mathbb{R}^n$ és, per definició, una aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal en el primer factor, simètrica i definida positiva no degenerada. És a dir, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és una aplicació verificant les següents condicions:

   - per a tot $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es té que $\langle\lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$,
   - per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$ es té que $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$,
   - per a tot $u \in \mathbb{R}^n$ es té que $\langle u, u\rangle \geq 0$ i, a més, $\langle u, u\rangle = 0$ si i només si $u = 0$.

2. *Representació matricial dels productes escalars de* $\mathbb{R}^n$.

   Els productes escalars en $\mathbb{R}^n$ admeten una representació matricial. Concretament es demostra que si $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és un producte escalar en $\mathbb{R}^n$ aleshores existeix una única matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de manera que

$$\langle(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

   per a tot $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Aquesta matriu A és la matriu que té per coeficients els productes dels elements de la base canònica de $\mathbb{R}^n$. És a dir,

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \cdots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}$$

on $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Òbviament la matriu A és una matriu simètrica.

3. *Matrius que defineixen productes escalars de* $\mathbb{R}^n$.

   Les matrius simètriques que defineixen productes escalars es poden caracteritzar fent servir els seus valors propis o fent servir el criteri de Sylvester. Concretament, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és una matriu amb coeficients reals aleshores l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida per

   $$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

   és un producte escalar real si i només si la matriu A és una matriu simètrica i tots els seus valors propis són nombres reals estrictament positius, si i només si la matriu A és simètrica i $\det A_i > 0$ per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$ on A_i és el menor format per les i primeres files i les i primeres columnes de la matriu A, és a dir:

   $$A_1 = (a_{1,1}),\ \ldots,\ A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Passem, ara, a la resolució d'aquest exercici.

Resolució (a)

- En aquest primer apartat tenim l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

- Per comprovar que aquesta aplicació ens defineix un producte escalar a $\mathbb{R}^2$, el que farem serà treballar tant amb la definició com amb la representació matricial.

- Primer anem a veure que l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és lineal en el primer factor. És a dir, anem a comprovar que per a tot $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es té que $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$.

  Siguin, doncs, $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2), w = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ i siguin $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aleshores, fent servir la definició de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i calculant es té que:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u + \mu v, w\rangle &= \langle \lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle \\
&= \langle (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2), (z_1, z_2)\rangle \\
&= 2(\lambda x_1 + \mu y_1)z_1 + (\lambda x_1 + \mu y_1)z_2 + (\lambda x_2 + \mu y_2)z_1 + 4(\lambda x_2 + \mu y_2)z_2 \\
&= \lambda(2x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 4x_2z_2) + \mu(2y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 4y_2z_2) \\
&= \lambda\langle (x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle + \mu\langle (y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle \\
&= \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Per tant, l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és lineal en el primer factor, com volíem demostrar.

- Ara anem a veure que l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és simètrica. És a dir, anem a demostrar que per a tot $u, v \in \mathbb{R}^2$ es té que $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$.

  Siguin $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. Aleshores tenim:

$$\begin{aligned}
\langle v, u\rangle &= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle \\
&= 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 4y_2x_2 \\
&= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 \\
&= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle \\
&= \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

  Per tant, aquesta aplicació és simètrica.

- De moment hem demostrat que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és una forma lineal en el primer factor i simètrica. Per acabar hem de demostrar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és definida positiva no degenerada. És a dir, hem de veure que per a tot $u \in \mathbb{R}^n$ es té que $\langle u, u\rangle \geq 0$ i que, a més, $\langle u, u\rangle = 0$ si i només si $u = 0$.

  Considerem, doncs, un element arbitrari $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Aleshores:

$$\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &= \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle \\
&= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 4x_2^2 \\
&= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2.
\end{aligned}$$

  En aquest punt tenim diverses maneres de procedir per tal de demostrar que $\langle u, u\rangle \geq 0$ i que, a més, $\langle u, u\rangle = 0$ si i només si $u = 0$. Una manera senzilla de comprovar-ho és completar quadrats, de manera que ens quedi una expressió on tots els sumands siguin quadrats. En el nostre cas, fixem-nos que el factor $2x_1x_2$ ens suggereix intentar aconseguir el terme $(x_1 + x_2)^2$. Així, com que el desenvolupament d'aquest terme és

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,$$

  per tant podem escriure

$$\begin{aligned}
2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 &= x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \\
&= x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1 + x_2)^2,
\end{aligned}$$

  d'on es conclou que

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

D'aquesta manera ara tenim el producte escalar $\langle(x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle$ expressat com suma de quadrats. En particular podem concloure que el producte $\langle(x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle$ és positiu o nul per a tot $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. A més, recordem que una suma de quadrats igualada a zero implica que tots els sumands són zero, és a dir, si posem $x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0$, aleshores es té que $x_1 = x_2 = x_1 + x_2 = 0$, és a dir que $x_1 = x_2 = 0$. Per tant, també es compleix que es té la igualtat $\langle(x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = 0$ si i només si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

- **Comentari.** Aquest procediment de completació de quadrats pot ser no trivial quan la dimensió creix, ja que cal tenir habilitat en la manipulació d'expressions d'aquests tipus. A mida que la dimensió creix, aquestes expressions poden ser més complicades, així com la seva manipulació a vista, de manera que desaconsellem aquest mètode si la dimensió de l'espai vectorial és $n \geq 3$. En aquest cas, per demostrar que una aplicació simètrica i lineal en el primer factor $\langle\cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és definida positiva no degenerada, resulta molt més fàcil fer servir la seva representació matricial. Tot seguit, com a exemple, anem a aplicar aquesta idea en el nostre cas.

- Com hem dit, una manera alternativa de procedir en la resolució d'aquest tipus d'exercicis és fent servir matrius. Anem a fer-ho.

- Tenim l'aplicació $\langle\cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$\langle(x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

- Associada a aquesta aplicació podem considerar la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

on els coeficients $a_{i,j}$ de la matriu es calculen a partir de la base canònica $B_e = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ de la següent manera:

$$a_{i,j} = \langle e_i, e_j\rangle.$$

- En el nostre cas, com $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$, aleshores:

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= \langle e_1, e_1\rangle = \langle(1, 0), (1, 0)\rangle = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0^2 = 2 \\
a_{1,2} &= \langle e_1, e_2\rangle = \langle(1, 0), (0, 1)\rangle = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \\
a_{2,1} &= \langle e_2, e_1\rangle = \langle(0, 1), (1, 0)\rangle = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1 \\
a_{2,2} &= \langle e_2, e_2\rangle = \langle(0, 1), (0, 1)\rangle = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1^2 = 4
\end{aligned}$$

i, per tant, la matriu A associada a l'aplicació $\langle\cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Ara hem de comprovar [35] que la matriu A realment ens defineix l'aplicació $\langle\cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

[35] Si suposem que prèviament hem demostrat que l'aplicació $\langle\cdot, \cdot\rangle$ és simètrica i lineal en el primer factor aleshores aquesta comprovació seria innecessària. A més, en aquest cas, per calcular la matriu A n'hi hauria prou amb calcular els coeficients $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ i $a_{2,2}$ ja que, per simetria, $a_{2,1} = a_{1,2}$.

donada. És a dir, hem de veure que per a tot $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ es té que:

$$(x_1, x_2)A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle.$$

Agafem, doncs, dos elements $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ara, calculant, s'obté la igualtat que volem demostrar:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} \\
&= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 \\
&= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle.
\end{aligned}$$

- Així, doncs, l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ realment és l'aplicació definida per la matriu A. Per tant podem concloure que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és lineal en el primer factor. A més, del fet que la matriu A és una matriu simètrica en deduïm que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és simètrica. Amb això de moment hem demostrat que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és lineal en el primer factor i simètrica [36].

- Finalment anem a veure que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és definida positiva no degenerada. Ara aquesta condició la podem demostrar fent servir la matriu A i veient, o bé que tots els seus valors propis són estrictament positius, o bé que són estrictament positius els seus menors principals.

- Anem a fer-ho d'aquestes dues maneres.

- Primer anem a demostrar-ho a partir dels valors propis de la matriu A. Recordem que els valors propis d'una matriu A es poden calcular com les arrels del polinomi característic $p_A(x)$ de la matriu [37]. En aquest cas el polinomi característic és:

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \det(A - x\,\mathrm{Id}) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 - x & 1 \\ 1 & 4 - x \end{pmatrix} \\
&= (2 - x)(4 - x) - 1 \cdot 1 \\
&= x^2 - 6x + 7.
\end{aligned}$$

  Aquest polinomi té per arrels $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}$ i $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$, ambdues estrictament positives. Per tant tots els valors propis de la matriu A són estrictament positius. En conclusió, l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és definida positiva no degenerada.

- Ara demostrem-ho d'una manera alternativa aplicant, per a això, el criteri de Sylvester. Hem de calcular els determinants de tots els menors principals de la matriu i comprovar que són estrictament positius. En aquest cas, com que la matriu A és una matriu 2×2 només ens cal

[36] Observem que com que la matriu A és una matriu simètrica, si ens hagués sortit que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no és l'aplicació definida per la matriu A, aleshores podríem concloure que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no és lineal en el primer factor.

[37] Aquí resideix la dificultat d'aquest mètode, ja que si tenim $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aleshores haurem de calcular les arrels d'un polinomi de grau n. En el nostre cas no hi ha problemes ja que $n = 2$.

comprovar dos menors:

$$\begin{aligned}\det(A_1) &= \det(2) = 2 > 0,\\ \det(A_2) &= \det(A) = \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix} = 2\cdot 4 - 1\cdot 1 = 7 > 0.\end{aligned}$$

Per tant, pel criteri de Sylvester podem concloure que l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és definida positiva no degenerada.

Resolució (b)

- Ara tenim l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_2y_2.$$

- Aquesta aplicació té matriu associada:

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \langle(1,0),(1,0)\rangle & \langle(1,0),(0,1)\rangle\\ \langle(0,1),(1,0)\rangle & \langle(0,1),(0,1)\rangle\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Observem que aquesta matriu és simètrica i, a més, que si $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ aleshores:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)A\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} &= (x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\\ &= x_1y_1 - x_2y_2\\ &= \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle.\end{aligned}$$

- Així, doncs, l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ realment és l'aplicació definida per la matriu simètrica A. Per tant podem concloure que l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és lineal en el primer factor i simètrica. (Es deixa com a exercici per al lector comprovar aquestes dues propietats fent servir, únicament, la definició de l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

- Ara bé, en aquest cas, la matriu A té valors propis $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, i té menors principals $\det(A_1) = 1$ i $\det(A_2) = \det(A) = -1$. Per tant, tant si mirem els valors propis de la matriu A, com si apliquem el criteri de Sylvester a la matriu A, podem concloure que l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ no és definida positiva no degenerada [38]. Observem que a aquesta conclusió també podem arribar-hi a partir de la definició de l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ja que si $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ aleshores

[38] De fet si una matiu simètrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ té un element a la diagonal menor o igual que zero aleshores segur que la matriu A no és matriu d'un producte escalar de $\mathbb{R}^n$. En efecte, si tenim $a_{i_0,i_0} \leq 0$ aleshores l'aplicació $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida per la matriu A és lineal en el primer factor i simètrica i, com que $\langle e_{i_0}, e_{i_0}\rangle = a_{i_0,i_0} \leq 0$, per tant segur que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ no és definida positiva no degenerada. Aquesta és la situació de la matriu que estem considerant en aquest apartat.

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2,$$

i òbviament no podem afirmar ni que $x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ (agafeu, per exemple, qualsevol element $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ amb $|x_1| < |x_2|$), ni podem afirmar que es té la igualtat $x_1^2 - x_2^2 = 0$ si i només si $x_1 = x_2 = 0$ (agafeu, per exemple, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ amb $x_2 = \pm x_1 \neq 0$).

- En conclusió, l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ens defineix un producte escalar a $\mathbb{R}^2$.

- **Comentari.** En general, les propietats de linealitat en el primer factor i de simetria són propietats senzilles de comprovar, mentre que la condició de ser definida positiva no degenerada és la que, en general, dóna problemes per no tenir una comprovació immediata. En el següent exercici veurem un exemple de producte escalar transportat per una aplicació on la linealitat i la simetria es compleixen trivialment, però la condició de no degeneració imposa una restricció addicional sobre l'aplicació lineal que considerem.

- 26.

Siguin E_1, E_2 dos $\mathbb{K}$-espais vectorials (on $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), i sigui $f : E_1 \to E_2$ una aplicació $\mathbb{K}$-lineal. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_2 \times E_2 \to \mathbb{K}$ un producte escalar en E_2 i sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle_f : E_1 \times E_1 \to \mathbb{K}$ l'aplicació definida per $\langle u, v \rangle_f = \langle f(u), f(v) \rangle$ per a tot $u, v \in E_1$. Demostreu que $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és un producte escalar en E_1 si i només si f és un monomorfisme.

Solució

—

Resolució

- Abans de passar a la resolució d'aquest problema anem a recordar la noció de producte escalar en un espai vectorial real o complex, (en l'exercici anterior només hem comentat el cas de producte escalar real en l'espai vectorial $E = \mathbb{R}^n$).

- Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul (on $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Aleshores un producte escalar en E és, per definició, una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ verificant:

  i. és lineal en el primer factor, i.e.:
    - per a tot $u, v, w \in E$ es té que $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
    - per a tot $u, v \in E$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$ es té que $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

  ii. és simètrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, i és hermítica si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, i.e:
    - si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, aleshores per a tot $u, v \in E$ es té que $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.
    - si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aleshores per a tot $u, v \in E$ es té que $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

  iii. és definida positiva i no degenerada, i.e.:
    - per a tot $u \in E$ es té que $\langle u, u \rangle$ és un nombre real positiu, és a dir $\langle u, u \rangle \geq 0$.
    - i, a més, $\langle u, u \rangle = 0$ si i només si $u = 0$.

- *Comentari.* En l'exercici anterior hem parlat de la representació matricial dels productes escalars en l'espai vectorial real $\mathbb{R}^n$ (pàgines 199 i 200). De la mateixa manera es pot donar una representació matricial per a productes escalars $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en espais vectorials E reals o complexos de dimensió finita (només cal fixar una base de l'espai). Ara, però, no recordarem aquesta construcció ja que, en aquest problema, no tenim cap condició sobre la finitud de la dimensió dels espais vectorials E_1 i E_2 que hi intervenen.

- Volem demostrar que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és un producte escalar en E_1 si i només si f és un monomorfisme. Per provar aquesta equivalència es poden demostrar, com sempre, les dues implicacions per separat. Aquí, però, el que farem serà imposar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és un producte escalar, i veure quines són les condicions necessàries i suficients sota les quals es compleix aquesta condició.

- Observem que $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ es defineix a partir del producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i d'una aplicació lineal f. Això fa pensar que es conservaran d'una banda la propietat de linealitat en el primer factor i, de l'altra, el fet de ser simètrica (en el cas real) o hermítica (en el cas complex). Anem a comprovar-ho.

- Primer anem a demostrar que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és lineal en el primer factor. Siguin, doncs, $u, v, w \in E_1$ i siguin $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Aleshores, tenim:

$$\begin{aligned} \langle \lambda u + \mu v, w \rangle_f &= \langle f(\lambda u + \mu v), f(w) \rangle \\ &\overset{(1)}{=} \langle \lambda f(u) + \mu f(v), f(w) \rangle \\ &\overset{(2)}{=} \lambda \langle f(u), f(w) \rangle + \mu \langle f(v), f(w) \rangle \\ &= \lambda \langle u, w \rangle_f + \mu \langle v, w \rangle_f \end{aligned}$$

  on en (1) hem usat que f és una aplicació $\mathbb{K}$-lineal i en (2) hem usat que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és un producte escalar en E_2 i que, per tant, és lineal en el primer factor. Així doncs, $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és lineal en el primer factor.

- Ara anem a veure que $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és simètrica (en el cas real) o hermítica (en el cas complex). Siguin $u, v \in E_1$. Aleshores, en el cas real es té que:

$$\langle u, v \rangle_f = \langle f(u), f(v) \rangle \overset{(3)}{=} \langle f(v), f(u) \rangle = \langle v, u \rangle_f$$

  on en (3) hem usat la simetria de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ per ser producte escalar en E_2. Mentre que en el cas complex es té que:

$$\langle u, v \rangle_f = \langle f(u), f(v) \rangle \overset{(4)}{=} \overline{\langle f(v), f(u) \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle_f}$$

  on ara en (4) hem usat que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és hermítica. En conclusió, hem demostrat que $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és simètrica en el cas real i hermítica en el cas complex.

- Observem que de moment no ens cal cap hipòtesi addicional sobre f. Ara anem a veure si l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és o no és definida positiva no degenerada. És a dir, hem de veure si la desigualtat $\langle u, u \rangle_f \geq 0$ és o no és certa certa per a tot $u \in E_1$ i, a més, hem de veure si la igualtat $\langle u, u \rangle_f = 0$ únicament es té per a $u = 0$.

  Sigui $u \in E_1$ un vector qualsevol. D'una banda, per definició, $\langle u, u \rangle_f = \langle f(u), f(u) \rangle$. D'altra banda, com que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és un producte escalar en E_2, en particular és definit positiu no degenerat i, per tant, es té que $\langle f(u), f(u) \rangle \geq 0$ i, a més, que $\langle f(u), f(u) \rangle = 0$ si i només si $f(u) = 0$. Amb això podem concloure que $\langle u, u \rangle_f \geq 0$ i que es té la igualtat $\langle u, u \rangle_f = 0$ si i només si $u \in \operatorname{Ker} f$. Observem que necessitem poder deduir que $u = 0$ per tal que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ sigui definida positiva no degenerada. Com que $u \in \operatorname{Ker} f$, la condició necessària i suficient per tal que $u = 0$ és que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, és a dir que, que f sigui un monomorfisme. Així doncs, $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és definida positiva no degenerada si i només si f és un monomorfisme.

- Per tant, $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ és un producte escalar en E_1 si i només si f és un monomorfisme, com volíem demostrar.

- 27.

En $\mathbb{R}^3$ considerem el producte escalar usual. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (y + z, -x - y - z, x + y)$.

(a) Determineu $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ subespais complementaris i invariants per f amb $\dim F_1 = 1$. És F_2 el complementari ortogonal de F_1?

(b) Doneu una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ amb $v_1 \in F_1$. Per a $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculeu les coordenades w i de $f(w)$ en aquesta base.

(c) Sigui $w = (1, 2, -3)$. Demostreu que w i $f(w)$ estan a la mateixa distància del subespai F_2. Al fer la imatge de w per f, ens allunyem o ens apropem al subespai F_1?

Solució

(a) $F_1 = \mathrm{Ker}(A + \mathrm{Id}) = \langle(1, 0, -1)\rangle$ i $F_2 = \mathrm{Ker}(A^2 + \mathrm{Id}) = \langle(0, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle$. Són subespais complementaris i ortogonals.

(b) Una base ortonormal és $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.
Les coordenades de w en aquesta base són $(\frac{1}{\sqrt{2}}(x - z), y, \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z))$.
Les coordenades de $f(w)$ en aquesta base són $(\frac{1}{\sqrt{2}}(-x + z), -x - y - z, \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2y + z))$.

(c) $d(w, F_2) = 2\sqrt{2} = d(f(w), F_2)$.
$d(w, F_1) = \sqrt{6} > \sqrt{2} = d(f(w), F_1)$.

Resolució

- *Notació 1.* Com que totes les matrius associades a endomorfismes que considerarem en aquest problema les calcularem en la base canònica B_e de $\mathbb{R}^3$, denotarem la matriu associada a un endomorfisme $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base B_e per M_h enlloc de $M(h; B_e)$.

- *Notació 2.* En aquest problema, i per evitar confusions, donats r vectors $v_1, \ldots, v_r$ de $\mathbb{R}^3$ denotarem per $\langle v_1, \ldots, v_r\rangle_{\mathbb{R}}$ el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ que aquests vectors generen. Així, $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$ és el subespai vectorial generat pels vectors u i v de $\mathbb{R}^3$ (per tant, $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$ és un subespai de $\mathbb{R}^3$), mentre que $\langle u, v\rangle$ és el producte escalar d'aquests dos vectors (per tant, $\langle u, v\rangle$ és un nombre real).

Resolució (a)

- Atès que volem determinar dos subespais invariants per l'endomorfisme f, usarem el primer teorema de descomposició per al polinomi característic de f. Recordem que aquest teorema ens diu que si h és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial no nul E de dimensió finita n i si $p_h(x)$ és el polinomi característic de h, aleshores la descomposició factorial

$$p_h(x) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

del polinomi $p_h(x)$ en $\mathbb{K}[x]$, ens proporciona la següent descomposició de l'espai vectorial E com suma directa de subespais invariants per h

$$E = \operatorname{Ker} p_1^{n_1}(h) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_r^{n_r}(h).$$

A més, els subespais $\operatorname{Ker} p_1^{n_1}(h), \ldots, \operatorname{Ker} p_r^{n_r}(h)$ són no nuls, i tenen dimensió

$$\dim \operatorname{Ker} p_i^{n_i}(h) = n_i \deg p_i.$$

- Així, si h és un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$, el seu polinomi característic $p_h(x)$ és un polinomi de grau 3 i, per tant, descompon en factors irreductibles a $\mathbb{R}[x]$ d'una de les següents maneres:

$$\begin{aligned}
&\text{o bé } \ p_h(x) = -(x-\lambda)^3,\\
&\text{o bé } \ p_h(x) = -(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)^2 \ \text{ amb } \ \lambda_1 \neq \lambda_2,\\
&\text{o bé } \ p_h(x) = -(x-\lambda)(x^2+\alpha x+\beta) \ \text{ amb } \ \alpha^2 < 4\beta,\\
&\text{o bé } \ p_h(x) = -(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \ \text{ amb } \ \lambda_i \neq \lambda_j \ \text{ si } \ i \neq j.
\end{aligned}$$

Per tant, si estem en la segona o en la tercera situació aleshores, aplicant el primer teorema de descomposició, tindrem que l'espai $\mathbb{R}^3$ descompondrà com suma directa d'un subespai invariant de dimensió u i d'un de dimensió dos [39] [40]. Així, per resoldre aquest apartat el primer que anem a fer és veure que el polinomi característic de l'endomorfisme f que ens donen està en una d'aquestes dues situacions.

- Començarem, doncs, per calcular el polinomi característic de l'endomorfisme f. Sigui $B_e = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Aleshores, tenim:

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= f(1,0,0) = (0,-1,1),\\
f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,-1,1),\\
f(e_3) &= f(0,0,1) = (1,-1,0),
\end{aligned}$$

i, per tant, la matriu associada a f en la base B_e és:

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, com que el polinomi característic de l'endomorfisme f coincideix amb el polinomi

[39] Recordeu que poden existir subespais invariants F per un endomorfisme h que no són del tipus $\operatorname{Ker} q(h)$ per a cap polinomi q. Per tant, en principi, el primer teorema de descomposició ens presenta una situació en la qual podem descompondre l'espai com suma directa d'un subespai invariant de dimensió u i d'un de dimensió dos. De fet es pot demostrar que si h és un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ aleshores, existeixen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ subespais complementaris i invariants per h amb $\dim F_1 = 1$ si i només si o bé $p_h(x) \neq -(x-\lambda)^3$ o bé $p_h(x) = -(x-\lambda)^3$ i $\dim \operatorname{Ker}(h-\lambda \operatorname{Id}) \neq 1$. Deixem com a exercici al lector la demostració d'aquest resultat.

[40] Observeu que els subespais vectorials invariants de dimensió 1 d'un endomorfisme són exactament els subespais generats per un vector propi de l'endomorfisme. És a dir, si h és un endomorfisme d'un espai vectorial E, aleshores un subespai F de dimensió $\dim F = 1$ és invariant per h si i només si $F = \langle v \rangle$ amb v vector propi de h.

característic de la matriu associada a f en qualsevol base, en particular tindrem que:

$$\begin{aligned} p_f(x) = p_{M_f}(x) &= \det(M_f - x\,\mathrm{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ -1 & -1-x & -1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} \\ &= -(x^3 + x^2 + x + 1), \end{aligned}$$

polinomi que descompon en $\mathbb{R}[x]$ de la següent manera:

$$p_f(x) = -(x^3 + x^2 + x + 1) = -(x+1)(x^2+1).$$

- Així, aplicant el primer teorema de descomposició, obtenim la següent descomposició de $\mathbb{R}^3$ com suma directa de subespais invariants per f:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$$

on els subespais vectorials tenen dimensions:

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) &= \deg(x+1) = 1, \\ \dim \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) &= \deg(x^2+1) = 2. \end{aligned}$$

- Per tant, prenent $F_1 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ i $F_2 = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$, hem determinat dos subespais complementaris i invariants per f amb $\dim F_1 = 1$.

- Ens falta veure si els subespais F_1 i F_2 són o no són ortogonals. Per a fer-ho, n'hi ha prou amb veure que si $F_1 = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle_{\mathbb{R}}$ i si $F_2 = \langle w_1, \ldots, w_s \rangle_{\mathbb{R}}$ aleshores $\langle v_i, w_j \rangle = 0$ per a tot i, j [41] [42].

- Comencem per determinar un sistema de generadors del subespai $F_1 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. Per les propietats de les matrius associades a aplicacions lineals, tenim que:

$$\begin{aligned} M_{f+\mathrm{Id}} &= M_f + M_{\mathrm{Id}} = M_f + \mathrm{Id} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observem que la primera i darrera columnes d'aquesta matriu són iguals i, per tant, un vector del nucli d'aquest endomorfisme és el vector $(1, 0, -1)$. Així $(1, 0, -1) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = F_1$ i, com que aquest subespai té dimensió 1, per tant es té la igualtat $F_1 = \langle (1, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}}$.

[41] Recordeu que si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ és un un espai euclidià o unitari aleshores, es diu que dos vectors v i w de E són ortogonals si $\langle v, w \rangle = 0$, i es diu que dos subespais F_1 i F_2 de E són ortogonals si per a tot $v \in F_1$ i per a tot $w \in F_2$ es té que $\langle v, w \rangle = 0$. És fàcil demostrar que si $\{v_i\}_i$ és un sistema de generadors de F_1 i si $\{w_j\}_j$ és un sistema de generadors de F_2 aleshores, F_1 i F_2 són ortogonals si i només si $\langle v_i, w_j \rangle = 0$ per a tot i, j.

[42] En aquest cas, com que F_1 i F_2 són subespais complementaris, aleshores F_1 i F_2 són ortogonals si i només si $F_2 = F_1^{\perp}$ si i només si $F_1 = F_2^{\perp}$.

- Determinem, a continuació, un sistema de generadors del subespai $F_2 = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$. Com abans, per les propietats de les matrius associades a aplicacions lineals tenim:

$$\begin{aligned} M_{f^2+\mathrm{Id}} &= M_{f^2} + M_{\mathrm{Id}} = M_{f\circ f} + \mathrm{Id} = M_f \cdot M_f + \mathrm{Id} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  D'una banda observem que aquesta matriu té la columna central plena de 0, d'on es té que $(0, 1, 0) \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$. D'altra banda, la primera i tercera columnes són iguals però amb el signe canviat, d'on es dedueix que $(1, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$. Com que $F_2 = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ té dimensió 2, i com que aquests dos vectors són linealment independents, podem concloure que $F_2 = \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle_{\mathbb{R}}$.

- Un cop tenim un sistema de generadors de F_1 i de F_2 (de fet, el que tenim són bases), vegem que tots els generadors de F_1 són ortogonals a tots els generadors de F_2. Denotem

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, -1), \\ u_2 &= (0, 1, 0), \\ u_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

  Aleshores $F_1 = \langle u_1\rangle_{\mathbb{R}}$, $F_2 = \langle u_2, u_3\rangle_{\mathbb{R}}$, i fent els càlculs tenim:

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2\rangle &= \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0)\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0, \\ \langle u_1, u_3\rangle &= \langle (1, 0, -1), (1, 0, 1)\rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0. \end{aligned}$$

  Per tant, com que u_1 és ortogonal a u_2 i u_3, en deduïm que el subespai generat per u_1 és ortogonal al subespai generat per u_2 i u_3. És a dir, que els subespais F_1 i F_2 són subespais complementaris ortogonals.

Resolució (b)

- Per l'apartat anterior sabem que $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ amb $u_1 \in F_1$. A més, d'una banda hem vist que u_1 és ortogonal a u_2 i a u_3, i d'altra banda es té que els vectors u_2 i u_3 també són ortogonals ja que

$$\langle u_2, u_3\rangle = \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 + 0 = 0.$$

En conclusió, de moment sabem que la base $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ amb $u_1 \in F_1$. Així, doncs, només ens cal normalitzar la base B_u per obtenir una base ortonormal $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ amb $v_1 \in F_1$ [43].

- Normalitzar un vector és multiplicar-lo per l'invers de la seva norma. En el nostre cas els vectors de la base B_u tenen normes:

$$\begin{aligned}
\|u_1\| &= \sqrt{\langle u_1, u_1\rangle} = \sqrt{\langle (1,0,-1),(1,0,-1)\rangle} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2},\\
\|u_2\| &= \sqrt{\langle u_2, u_2\rangle} = \sqrt{\langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle} = \sqrt{0+1+0} = 1,\\
\|u_3\| &= \sqrt{\langle u_3, u_3\rangle} = \sqrt{\langle (1,0,1),(1,0,1)\rangle} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

i, per tant, els seus vectors normalitzats són:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\\
v_2 &= \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \frac{1}{1}(0,1,0) = (0,1,0) = u_2,\\
v_3 &= \frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

- Així, la base que s'obté al normalitzar la base B_u és la base $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$. Aquesta és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ amb $v_1 \in F_1$ (ja que $u_1 \in F_1$ i $v_1 = \lambda u_1$ per a cert escalar λ).

- Vegem com calcular les coordenades de $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Això ho podem fer de dues maneres diferents: coeficients de Fourier o canvi de base. Anem a fer-ho d'ambdues maneres.

- Recordem que les coordenades d'un vector w en una base ortonormal B són els coeficients de Fourier del vector w respecte de la base B. És a dir, si $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ és una base ortonormal d'un espai euclidià o unitari $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimensió finita n, i si $w \in E$ és un vector arbitrari, aleshores les coordenades de w en la base ortonormal B són:

$$w = (\langle w, w_1\rangle, \dots, \langle w, w_n\rangle)_B.$$

Per tant, en el nostre cas, com que:

$$\begin{aligned}
\langle w, v_1\rangle &= \langle (x,y,z), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\rangle = (x-z)/\sqrt{2},\\
\langle w, v_2\rangle &= \langle (x,y,z), (0,1,0)\rangle = y,\\
\langle w, v_3\rangle &= \langle (x,y,z), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\rangle = (x+z)/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

aleshores, les coordenades del vector $w = (x, y, z)$ en la base ortonormal $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ són:

$$\begin{aligned}
w &= (\langle w, v_1\rangle, \langle w, v_2\rangle, \langle w, v_3\rangle)_{B_v}\\
&= \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}, y, \frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)_{B_v}.
\end{aligned}$$

[43] En el cas en què la base que B_u no fos ortogonal, el primer que hauríem de fer és aplicar el mètode de Gram-Schmidt per transformar la base B_u en una base ortogonal $B_{u'} = \{u_1', u_2', u_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ amb $u_1' \in F_1$. Dit de manera intuïtiva, aquest mètode consisteix a anar "redreçant" els vectors de la base. En aquest cas, per "redreçar" s'entén projectar un vector sobre tots els que hem obtingut anteriorment amb el mètode i eliminar totes les contribucions que fan que no sigui ortogonal amb ells. Ens remetem als apunts per a una explicació més detallada.

- Una manera alternativa de fer-ho és usar la matriu de canvi de base. Com que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), \\ v_2 &= (0, 1, 0), \\ v_3 &= (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

per tant, la matriu de canvi de base de la base B_v a la base B_e és:

$$M(B_v \to B_e) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Notem que aquesta matriu és una matriu de canvi de base entre dues bases ortonormals. Per tant, aquesta matriu és una matriu ortonormal, és a dir, compleix $M(B_v \to B_e)^{-1} = M(B_v \to B_e)^T$. Així, com que $M(B_e \to B_v) = M(B_v \to B_e)^{-1}$, aleshores $M(B_e \to B_v) = M(B_v \to B_e)^T$. Per tant, per determinar les coordenades en la base B_v del vector $w = (x, y, z)$, n'hi ha prou amb fer el següent producte:

$$\begin{aligned} M(B_e \to B_v) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x-z)/\sqrt{2} \\ y \\ (x+z)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'on s'obté que:

$$w = \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}, y, \frac{x+z}{\sqrt{2}} \right)_{B_v}.$$

- Per acabar, hem de determinar les coordenades de $f(w)$ en la base B_v.
- Per fer-ho podem aplicar qualsevol dels procediments que hem usat per determinar el vector w, o bé podem aprofitar els càlculs que tenim fets. Com acabem de veure, donat un vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, les seves coordenades en la base B_v són

$$(a, b, c) = \left(\frac{a-c}{\sqrt{2}}, b, \frac{a+c}{\sqrt{2}} \right)_{B_v}.$$

Ara, tenint en compte que

$$f(w) = f(x, y, z) = (y + z, -x - y - z, x + y)$$

n'hi ha prou amb prendre $a = y+z$, $b = -x-y-z$ i $c = x+y$ i substituir en l'expressió anterior, obtenint, així, les coordenades de $f(w)$ en la base B_v:

$$\begin{aligned} f(w) &= \left(\frac{(y+z)-(x+y)}{\sqrt{2}}, -x-y-z, \frac{(y+z)+(x+y)}{\sqrt{2}} \right)_{B_v} \\ &= \left(\frac{-x+z}{\sqrt{2}}, -x-y-z, \frac{x+2y+z}{\sqrt{2}} \right)_{B_v}. \end{aligned}$$

Resolució (c)

- Abans de començar amb la resolució d'aquest apartat recordem com calculem la distància d'un element a un subespai vectorial.

- Donat un subespai vectorial F d'un espai euclidià o unitari $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimensió finita n, considerem el seu complementari ortogonal $F^\perp$. Aleshores, com que $E = F \oplus F^\perp$, per a tot $w \in E$ existeixen uns únics elements $P_F(w) \in F$ i $C_F(w) \in F^\perp$ tals que:

$$w = P_F(w) + C_F(w)$$

  i, com que són ortogonals, podem aplicar el teorema de Pitàgores i concloure que:

$$\|w\|^2 = \|P_F(w)\|^2 + \|C_F(w)\|^2.$$

  L'element $P_F(w) \in F$ es diu que és la projecció ortogonal de w sobre F i es caracteritza per ser l'element de F més proper a w (és a dir, és l'aproximació òptima de w per combinacions lineals d'elements de F). L'element $C_F(w) \in F^\perp$ és la component ortogonal i la seva norma ens determina la distància de w al subespai F. Per tant:

$$d(w, F) = \|C_F(w)\| = \|w - P_F(w)\|.$$

- D'aquesta manera, si tenim $E = F_1 \oplus F_2$ amb F_1 i F_2 ortogonals aleshores, per a tot $w \in E$ es té que existeixen uns únics elements $w_1 \in F_1$ i $w_2 \in F_2$ tals que:

$$w = w_1 + w_2.$$

  Aquests elements verifiquen:

$$\|w\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2$$

  i ens permeten calcular les distàncies del vector w als subespais F_1 i F_2 ja que:

$$\begin{aligned} d(w, F_1) &= \|w_2\| = \|w - w_1\|, \\ d(w, F_2) &= \|w_1\| = \|w - w_2\|, \\ d(w, F_1)^2 + d(w, F_2)^2 &= \|w\|^2. \end{aligned}$$

- Un cop recordats aquests resultats, anem a aplicar-los en la resolució d'aquest apartat.

- Primer anem a veure que $w = (1, 2, -3)$ i $f(w)$ estan a la mateixa distància del subespai F_2.

- En els dos apartats anteriors hem vist que els subespais F_1 i F_2 són subespais complementaris ortogonals, que $F_1 = \langle u_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}$, que $F_2 = \langle u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$, que el conjunt de vectors $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, i que si (a, b, c) és un element arbitrari de $\mathbb{R}^3$ aleshores:

$$(a, b, c) = \left(\frac{a-c}{\sqrt{2}}, b, \frac{a+c}{\sqrt{2}} \right)_{B_v} = \frac{a-c}{\sqrt{2}} v_1 + b v_2 + \frac{a+c}{\sqrt{2}} v_3.$$

  Per tant, pel resum teòric que hem fet podem concloure que:

$$d((a, b, c), F_2) = \left\| \frac{a-c}{\sqrt{2}} v_1 \right\| = \frac{|a-c|}{\sqrt{2}}.$$

Fent servir això, les distàncies dels vectors $w = (1, 2, -3)$ i $f(w) = f(1, 2, -3) = (-1, 0, 3)$ al subespai F_2 es calculen com:

$$d(w, F_2) = d((1, 2, -3), F_2) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$
$$d(f(w), F_2) = d((-1, 0, 3), F_2) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Per tant, en fer la imatge del vector w per l'endomorfisme f ens quedem a la mateixa distància del subespai F_2 ja que
$$d(w, F_2) = d(f(w), F_2).$$

- Ara anem a veure si en fer la imatge de w per f ens allunyem o ens apropem al subespai F_1. Per a això hem de calcular les distàncies de w i $f(w)$ a F_1. D'una banda es té que:

$$\begin{aligned} d(w, F_1) &= \sqrt{\|w\|^2 - d(w, F_2)^2} \\ &= \sqrt{\langle (1, 2, -3), (1, 2, -3)\rangle - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 9 - 4 \cdot 2} \\ &= \sqrt{6}, \end{aligned}$$

i d'altra banda:

$$\begin{aligned} d(f(w), F_1) &= \sqrt{\|f(w)\|^2 - d(f(w), F_2)^2} \\ &= \sqrt{\langle (-1, 0, 3), (-1, 0, 3)\rangle - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1 + 9 - 8} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Per tant, en fer la imatge del vector w per l'endomorfisme f ens apropem al subespai F_1 ja que es té la desigualtat estricta
$$d(f(w), F_1) < d(w, F_1).$$