

Receptores lineales: igualadores transversales con referencia temporal

Permitirán una implementación sencilla con filtros transversales.

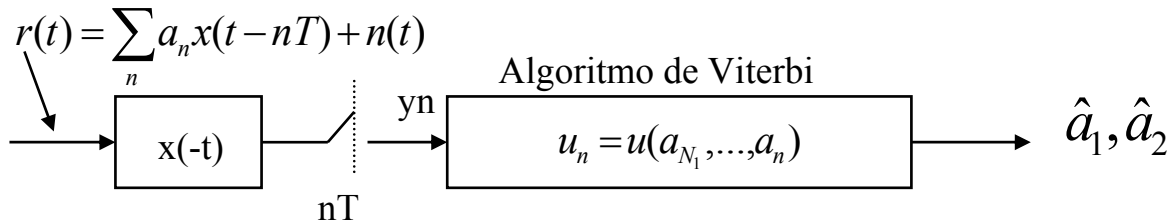
Motivación A continuación veremos que un receptor lineal es el mejor modo de estimar, en sentido de Máxima Verosimilitud una amplitud continua que modula pulsos en ruido Gaussiano.

El receptor ML minimiza

$$l(a_{N1}, \dots, a_{N2}) = \int_T \left(r(t) - \sum_n a_n x(t-nT) \right)^2 dt \longrightarrow \{ \hat{a}_n \}$$

Problema de detección

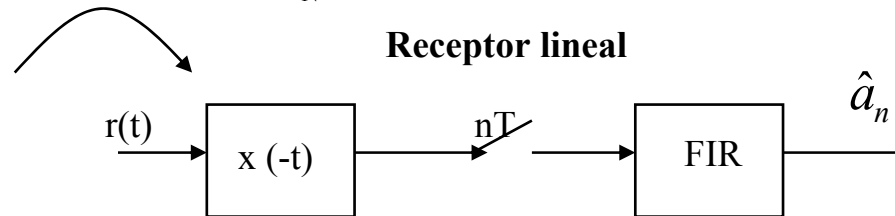
$$u_N = -2 \sum_{k=1}^N \hat{a}_k y_k + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \hat{a}_k \hat{a}_l R_{k-l} = -2 \mathbf{y}'_N \hat{\mathbf{a}}_N + \hat{\mathbf{a}}'_N \mathbf{R} \hat{\mathbf{a}}_N \quad [\mathbf{R}_{ij}] = R_{i-j}$$



Si suponemos que $\{ \hat{a}_n \}$ son variables continuas el problema de detección pasa a ser un problema de estimación

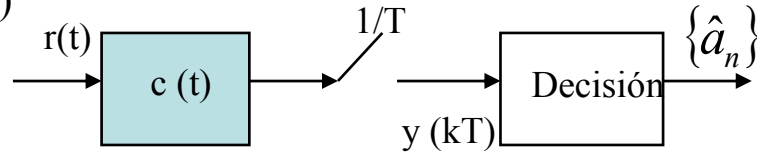
Para resolver el problema de minimización se puede entonces derivar $u_N = 0$

$$\frac{\delta u_N}{\delta \hat{\mathbf{a}}_N} = 0 \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_N = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_N \rightarrow [\hat{\mathbf{a}}_N]_j = \sum_{l=1}^M R_{j-l}^{(-1)} y_l$$



-Arquitectura del Igualador lineal óptimo según el criterio MSE: filtro transversal con referencia temporal

$$r(t) = \sum_n a_n x(t - nT) + n(t)$$

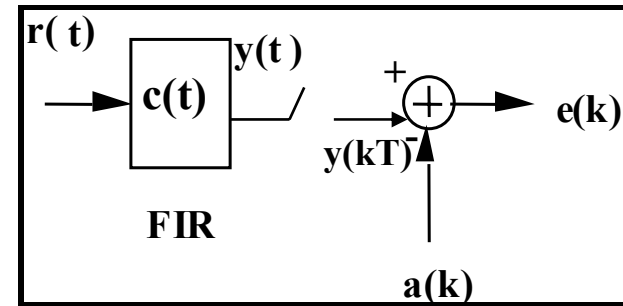


A diferencia del receptor de Viterbi, ahora la decisión se realiza símbolo a símbolo (menor complejidad de cálculos, menores necesidades de memoria).

Criterio de diseño de c(t) : MMSE

$$MSE = E\{[y(kT) - a_k]^2\}$$

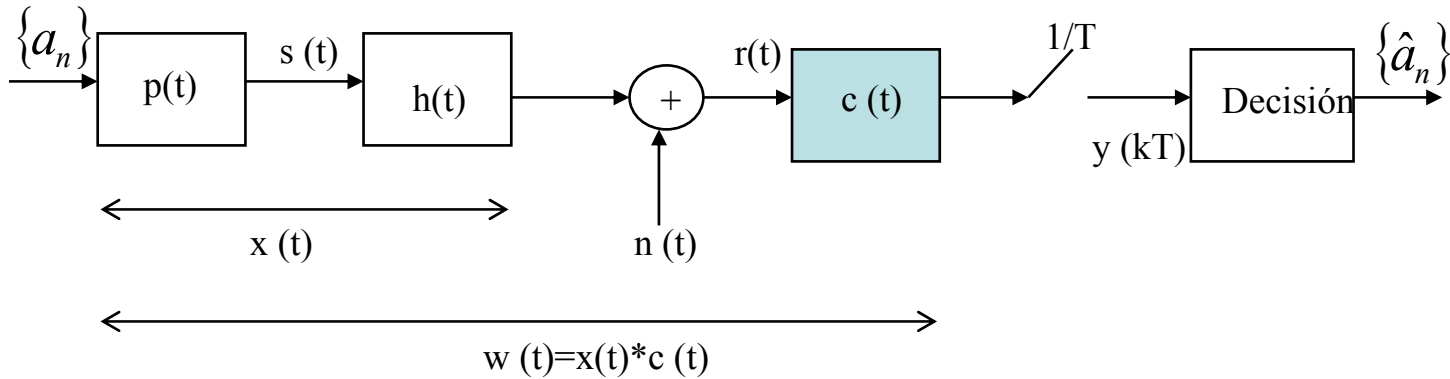
Es un diseño que necesita una referencia temporal



Este criterio es la base del diseño adaptativo. No obstante, según la cota de Saltzberg, el MSE interviene en la cota superior de la pe (luego MSE menor no implica necesariamente BER menor)

Formulación del MSE

$$MSE = \langle y^2(kT) - 2a_k y(kT) + a_k^2 \rangle$$



$$s(t) = \sum_n a_n p(t - nT) \longrightarrow r(t) = \sum_n a_n x(t - nT) + n(t) \longrightarrow y(kT) = \sum_m a_m w(kT - mT) + v(kT)$$

$$MSE = \langle \left[\sum_m a_m w_{k-m} + v_k \right]^2 - 2a_k \sum_m a_m w_{k-m} + a_k^2 \rangle$$

como $w(nT) = w_n = \int x(nT - t) c(t) dt$ ↓ Si $P = \langle a_k^2 \rangle$ y los símbolos están incorrelados

$$MSE/P = \iint \left[\sum_m x(mT - t) x(mT - \tau) + \sigma^2 \delta(t - \tau) \right] c(t) c(\tau) dt d\tau - 2 \int x(-t) c(t) dt + 1$$

$$\text{con } \langle n(t)n(\tau) \rangle = \frac{N_o}{2} \delta(t-\tau) \quad \sigma^2 = \frac{N_o}{P}$$

Minimización del MSE

$$\frac{\delta MSE}{\delta c(t)} = 0 \rightarrow \sum_n w_n x(nT-t) + \sigma^2 c(t) - x(-t) = 0$$

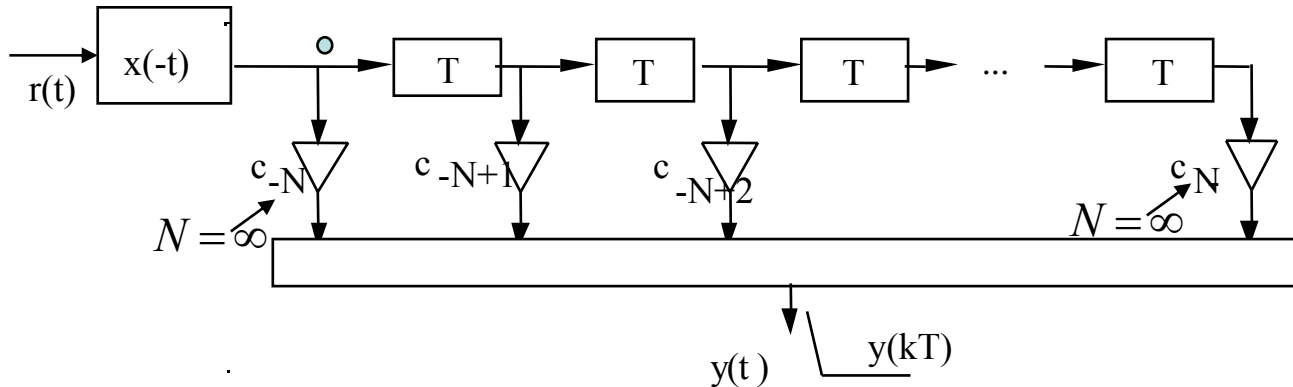
Se obtiene finalmente que el filtro $c(t)$ es

$$\boxed{c(t) = \sum_n c_n x(nT-t)} \quad \text{con} \quad c_o = (1-w_o) / \sigma^2 \quad c_n = -w_n / \sigma^2 \quad n \neq 0$$

↑
Depende del canal y del ruido

Esta solución sugiere una configuración o arquitectura de filtro transversal (TDL o “tapped delay line”) de interesante implementación

Implementación del igualador lineal óptimo: filtro transversal (TDL)



El A/D puede colocarse también en : esta solución es la preferible en la mayoría de casos; ya que permite implementar el filtrado con un DSP

Se puede demostrar que todo criterio “razonable” tiene una implementación del tipo: Filtro adaptado + TDL

Los coeficientes pueden calcularse adaptativamente sin necesidad de conocerlos a priori: implementación adaptativa que se verá más adelante.

Diseño óptimo de los coeficientes

La ecuación de diseño es $\frac{\delta MSE}{\delta c(t)} = 0 \rightarrow \sum_n w_n x(nT-t) + \sigma^2 c(t) - x(-t) = 0$

Teniendo en cuenta que $w(t) = x(t) * c(t)$, la ecuación anterior también se puede escribir como:

$$\int \sum_m x(mT-t)x(mT-\tau) \sum_n c_n x(nT-\tau) d\tau + \sigma^2 \sum_n c_n x(nT-t) = x(-t)$$

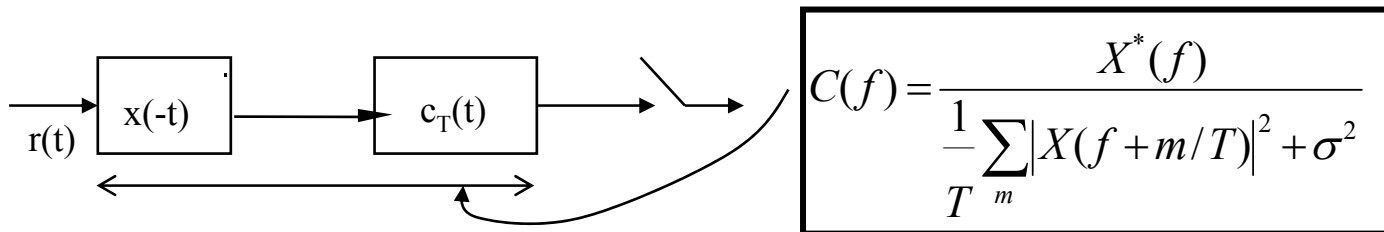
Realizando la Transformada de Fourier y dividiendo por $X(-f)$

$$X_T(f) C_T(f) + \sigma^2 C_T(f) = 1 \quad \text{con} \quad X_T(f) = \frac{1}{T} \sum_m |X(f + m/T)|^2$$

Por lo tanto el filtro transversal óptimo es

$$C_T(f) = \frac{1}{\frac{1}{T} \sum_m |X(f + m/T)|^2 + \sigma^2}$$

Teniendo en cuenta que éste viene precedido por un filtro adaptado al pulso recibido $x(t)$, la respuesta global del igualador

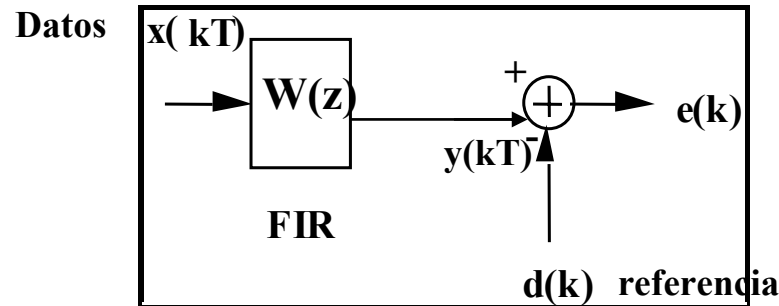


**Independencia con
retardo que
introduzca el canal**

Filtro FIR con un número finito de coeficientes

El diseño de los coeficientes del filtro transversal se obtiene a partir de la expresión vista (*) en la sección anterior. No obstante, dicho diseño requiere un número infinito de coeficientes, a continuación veremos el caso real de n° finito de coeficientes.

Este tipo de sistemas utilizan una secuencia conocida ‘a priori’ tanto por el receptor como por el transmisor: secuencia de entrenamiento. Consideremos la siguiente figura en donde se contempla un caso general de diseño de un FIR según MMS



Para cada símbolo de referencia recibido $d(k)=d(kT)$, se observa a la salida del ecualizador el ‘error de filtrado’ $e(k)=e(kT)$

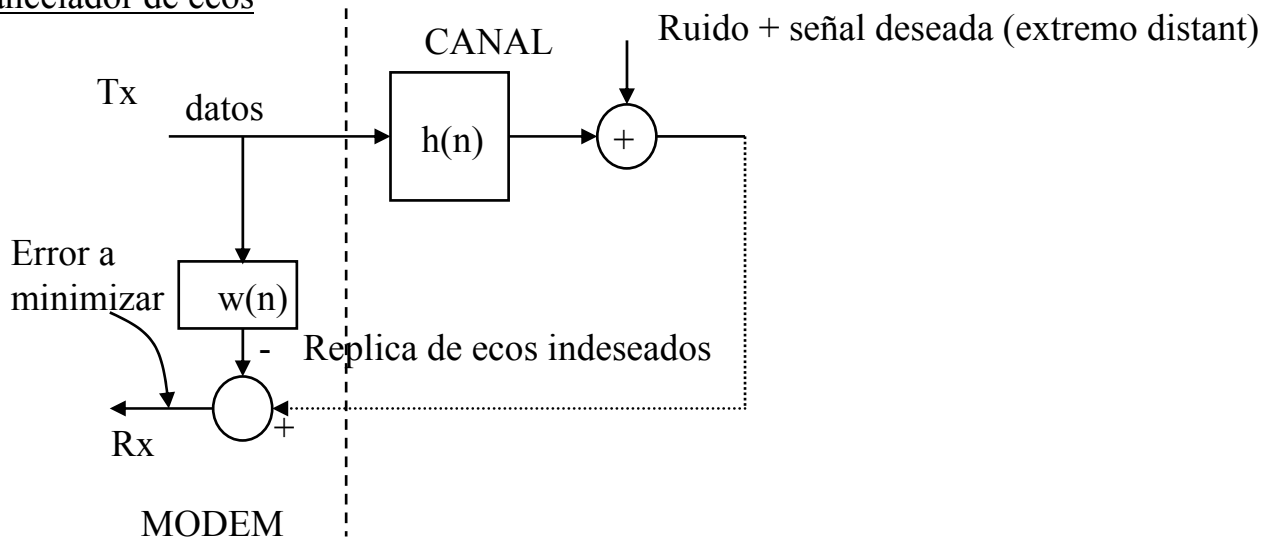
$$e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i)$$

El ecualizador óptimo será aquel que minimice el error cuadrático medio de filtrado:

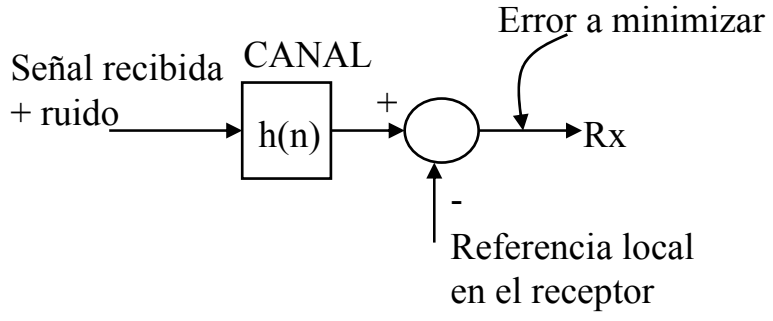
$$\min_w E \left[|e(k)|^2 \right] = E \left[\left| d(k) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i) \right|^2 \right]$$

El diseño de FIRs con el criterio MMSE no es únicamente útil para implementar igualadores, sino que sirve también para implementar canceladores de ecos y predictores

Cancelador de ecos



Igualador



- La solución óptima será tal que:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} E[e(k)^2] = \frac{\partial}{\partial w_j} E\left[\left|d(k) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i)\right|^2\right] = -2E\left[\left(d(k) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i)\right)x(k-j)\right] = 0$$

- Observando la ecuación anterior, se deduce que la solución óptima es la que incorrela el error con los datos utilizados ('Principio de Ortogonalidad'):

$$\frac{\partial}{\partial w_j} E[e(k)^2] = -2E(e(k)x(k-j)) = 0 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

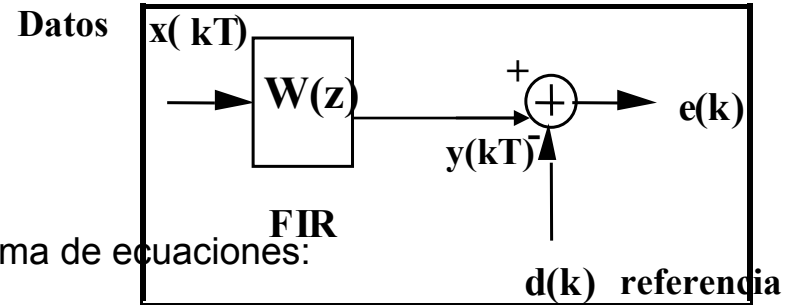
- Luego, la solución óptima la que anula el gradiente de la función de m.e.c.m.:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} E[e(k)^2] = -2\left(R_{dx}(j) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i R_{xx}(|i-j|)\right) = 0 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- donde:

$$R_{dx}(j) = E[d(k)x(k-j)] \quad \text{y} \quad R_{xx}(|i-j|) = E[x(k-i)x(k-j)]$$

Solución de Wiener



- La solución óptima se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones:

$$R_{dx}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i R_{xx}(|i-j|) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- O de otro modo:

Ajuste según "delay spread"

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) & \dots & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) & \dots & \dots \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & \dots \\ \dots & R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & \dots & \dots & R_{xx}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(N-1) & \dots & \dots & R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ \dots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) \\ R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ \dots \\ \dots \\ R_{xx}(N-1) \end{bmatrix}$$

- De forma compacta:

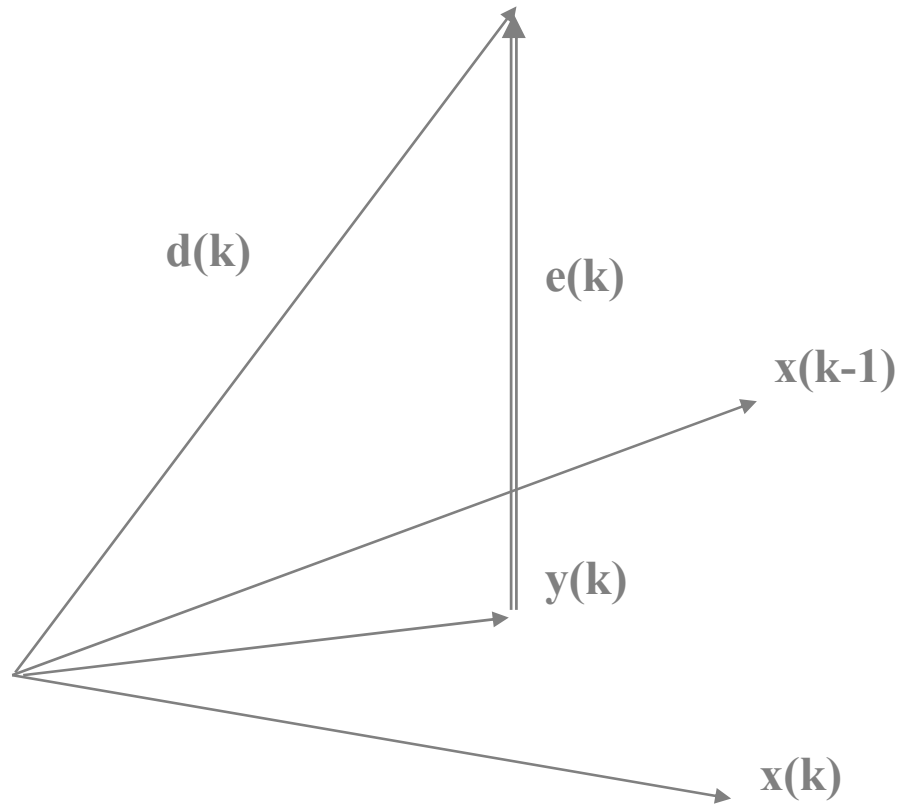
$$\underline{R} \underline{w}|_{opt} = \underline{P} \Rightarrow \underline{w}|_{opt} = \underline{R}^{-1} \underline{P}$$

Útil para diversas aplicaciones a parte de la de igualación.

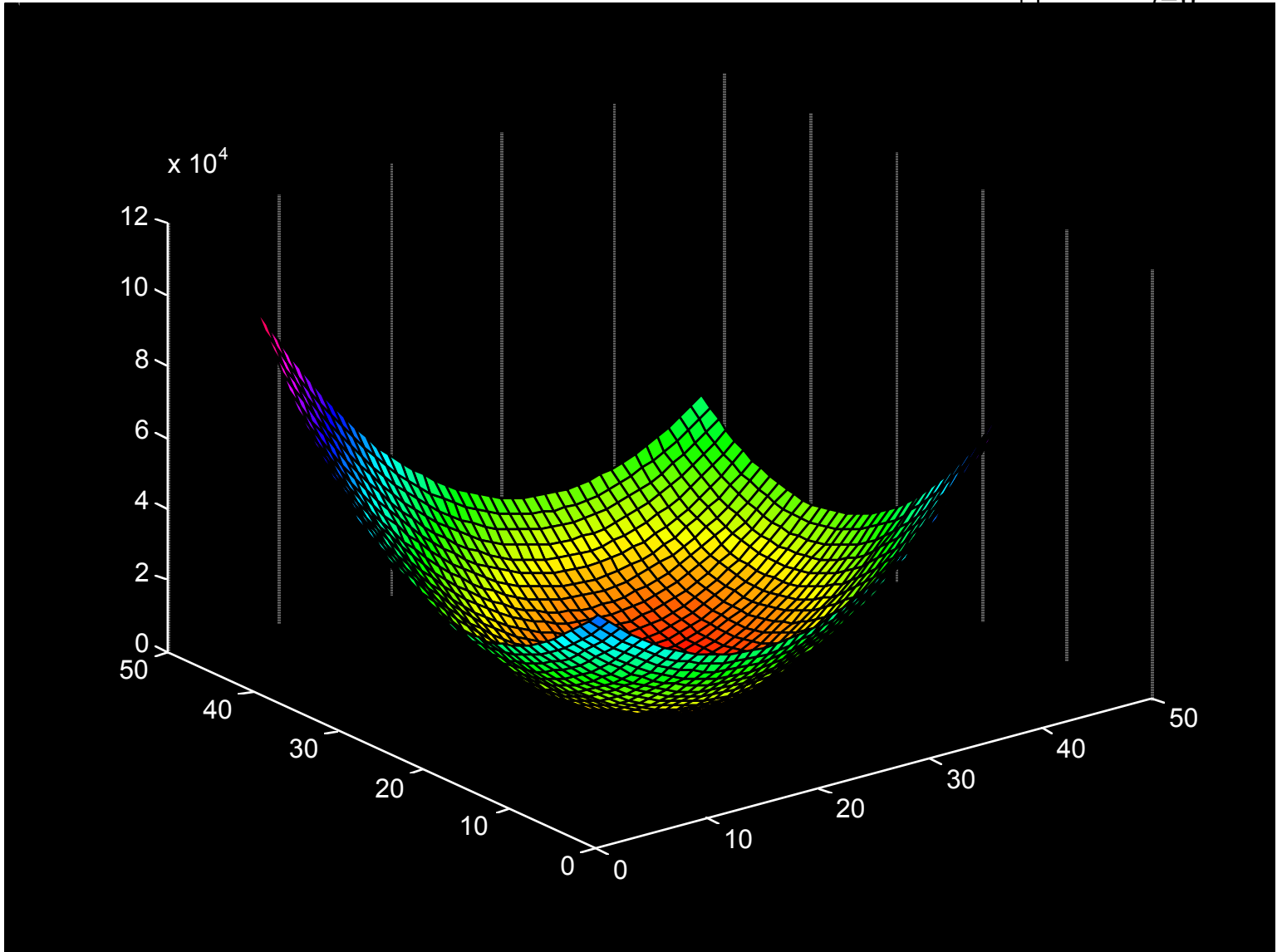
- Solución fundamental que se conoce como solución de Wiener.

Interpretaciones Geométricas

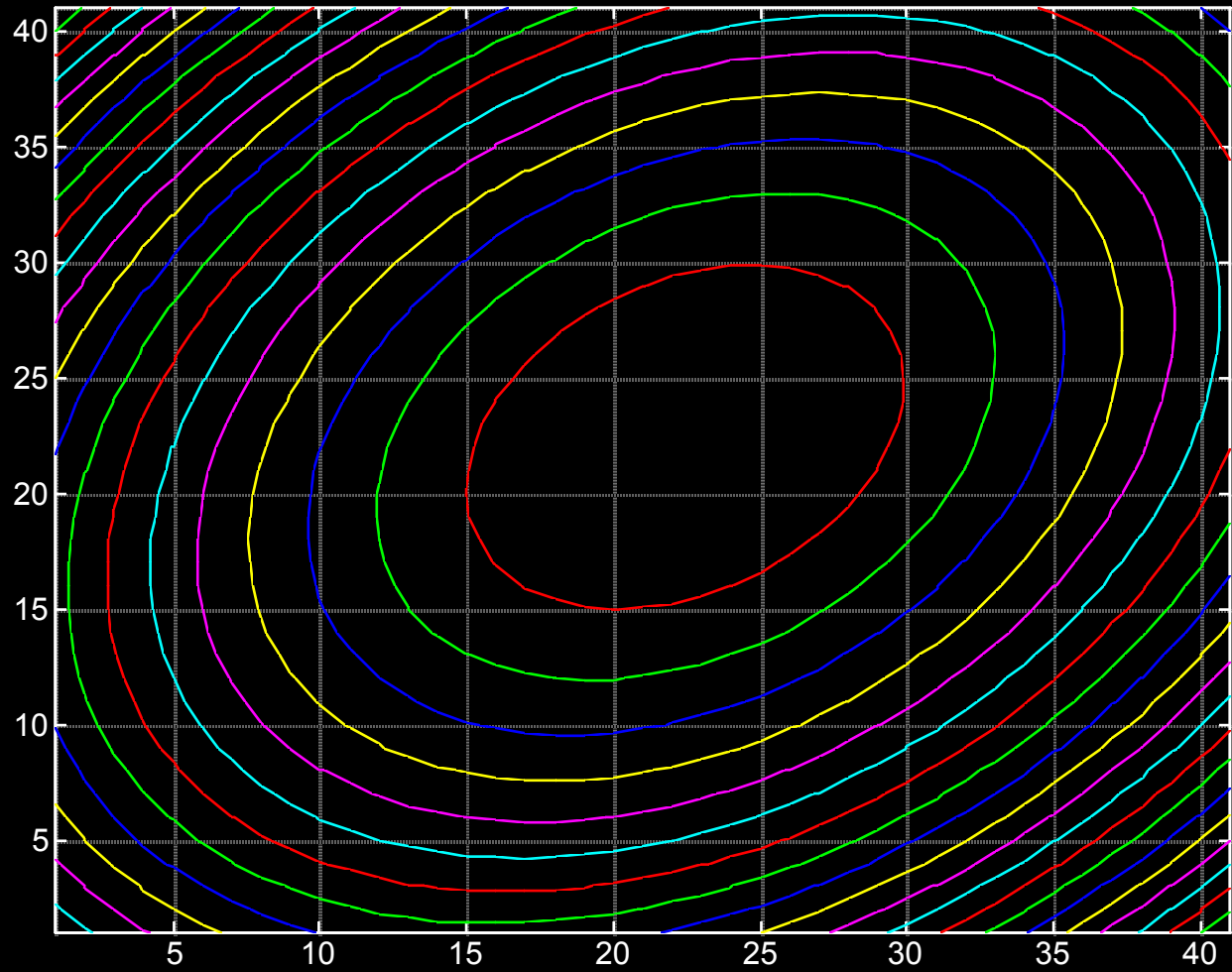
- Principio de Ortogonalidad:



$$\min_{\underline{w}} E[e(k)^2] = E \left| d(k) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i) \right|^2$$

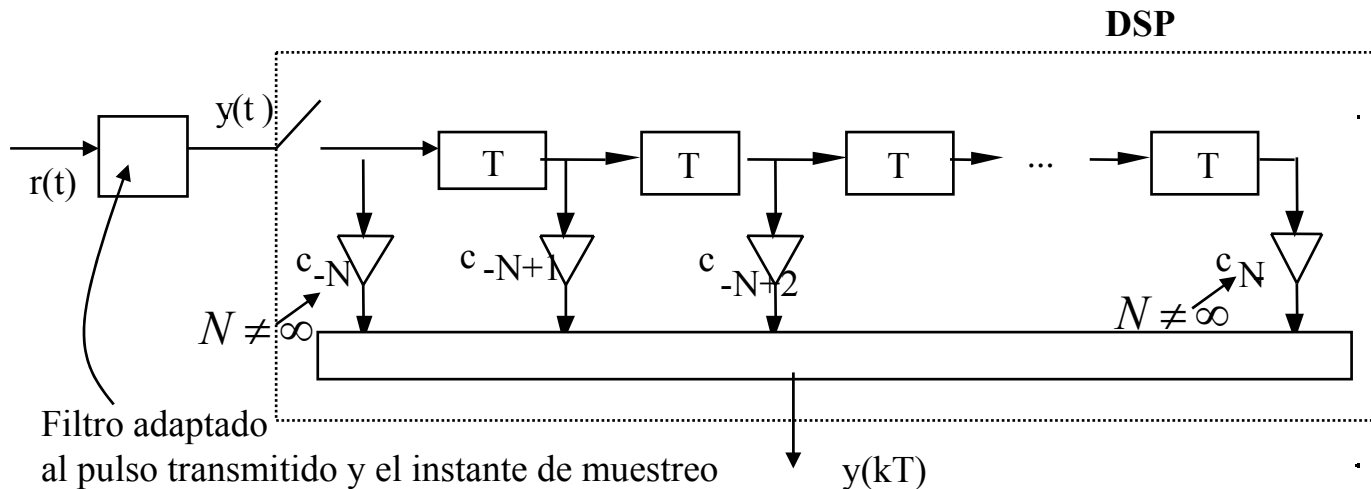


Contornos de MSE constante



Igualador síncrono a tiempo de símbolo

El igualador lineal que se implementa generalmente es el que se suele denominar como **igualador síncrono**



Filtro adaptado al pulso transmitido y el instante de muestreo se optimiza para este pulso subóptimo.

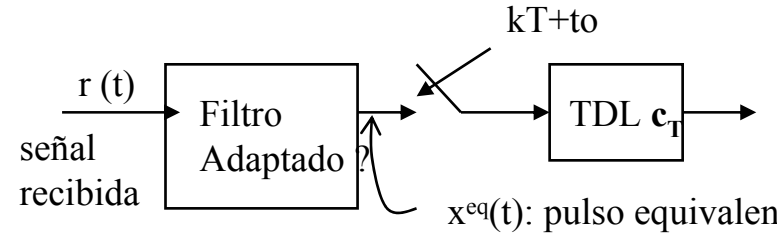
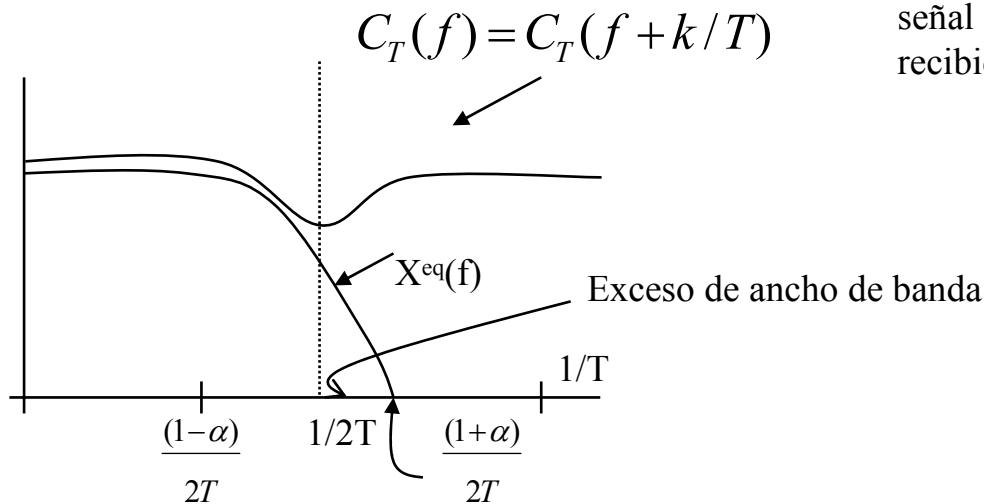
Aunque de sencilla implementación, sus prestaciones son muy sensibles al tiempo de muestreo.

El receptor con filtro transversal es óptimo si el filtro es adaptado al pulso recibido (además de tener un número infinito coeficientes N), para lo cual es necesario conocer exactamente la respuesta del canal.

En el caso de canales variantes, el filtro adaptado fijo, funciona razonablemente bien si se adapta a un promedio de la respuesta del canal. No obstante, en muchos casos el canal se desconoce y el filtro adaptado lo es al pulso transmitido y el instante de muestreo se optimiza para este filtro subóptimo. En general esta alternativa lleva a igualadores con prestaciones muy sensibles al tiempo de muestreo.

Para visualizar fácilmente las limitaciones del igualador síncrono a tiempo de símbolo, a continuación se interpreta respuesta en el dominio frecuencial.

Filtro síncrono $c_T(t)$



Como el filtro síncrono tiene periodo $1/T$
 ↓
 no puede controlar
 independientemente a ambos lados de $1/2T$

$$W_T(f) = \sum_l c_l e^{-j2\pi f l T} \sum_k X^{eq}(f + k/T) \exp[j2\pi(f - k/T)t_o] = C_T(f) X_T^{eq}(f)$$

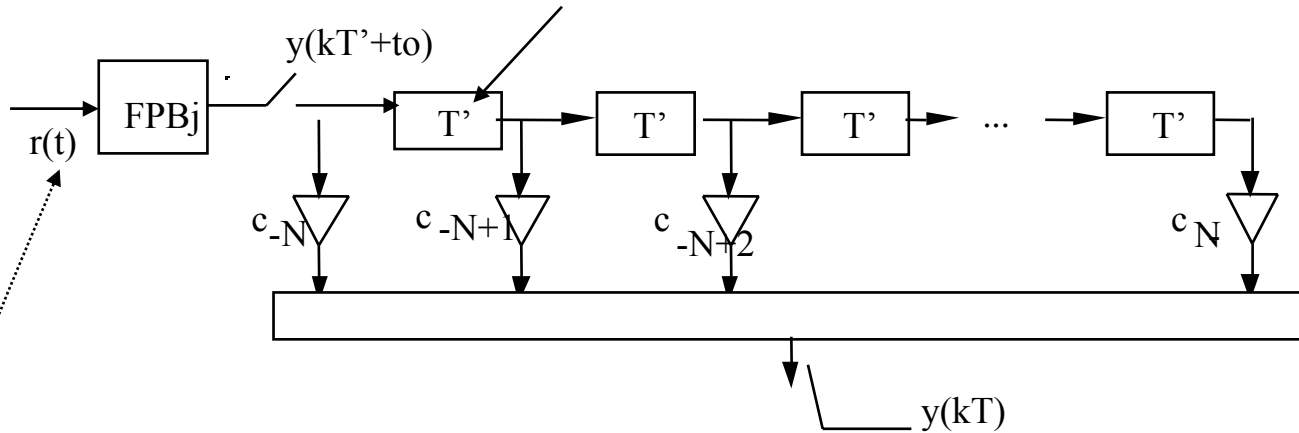
Influye en la forma de $W_T(f)$ Repetida a partir de $1/T$

El filtro síncrono sólo puede actuar sobre $X_T^{eq}(f)$ y no puede modificar directamente $X(f) \exp(j2\pi f t_o)$, es decir, iguala la suma de componentes con "aliasing".

Por lo tanto, no puede compensar el retardo de grupo o la distorsión de fase que introduce el canal.

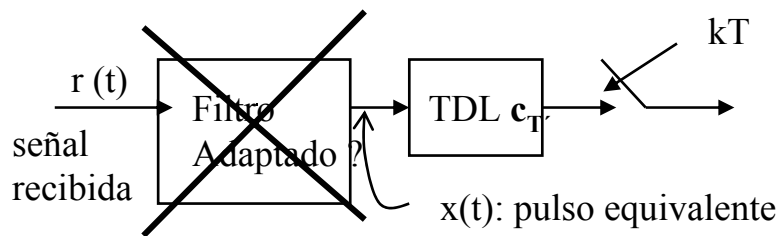
Por otra parte, generalmente $X_T(f)$ presenta elevadas atenuaciones en $1/2T$ que intentará compensar el igualador con la consiguiente amplificación del ruido.

Igualador fraccionado (FSE: "Fractionally spaced Equalizer")



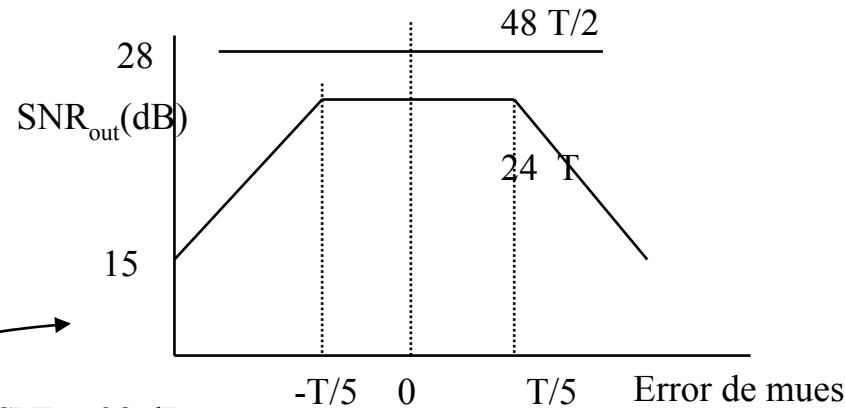
Este igualador muestrea a tiempos mayores que el tiempo de símbolo $T' < T$ Generalmente $T' = T/2$

Con esta configuración el filtro adaptado se calcula también adaptativamente. Por ello, en el front-end basta poner un filtro paso bajo.

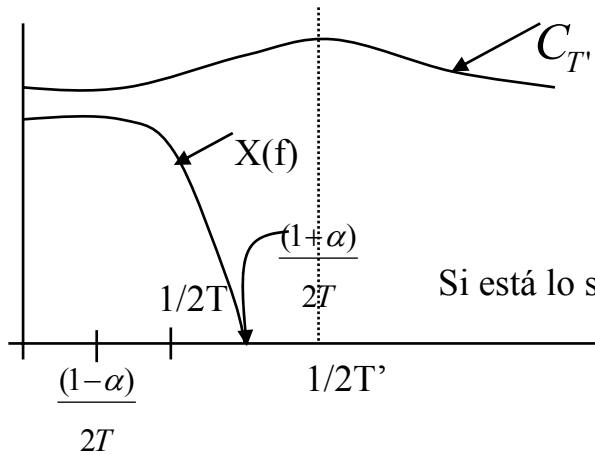
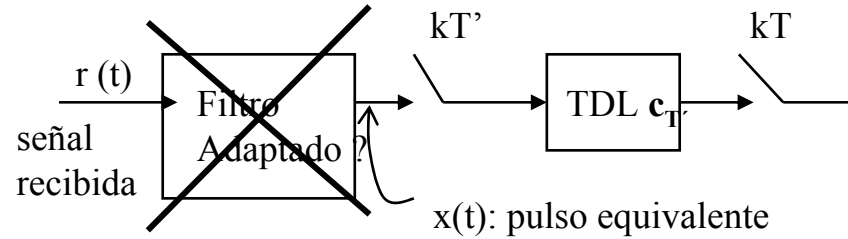


9.6 kbps (2.4 kbauds) QAM

SNR = 28 dB



FSE $c_{T'}(t)$



Si está lo suficientemente alejada $\rightarrow C_{T'}(f)$ actúa sobre $X(f) \exp(-j2\pi f t_o)$

Antes del muestreo por T se tiene

$$|f| \leq \frac{1}{2T'}$$

$$W_{T'}(f) = \sum_l c_l e^{-j2\pi l T'} \sum_k X(f + k/T') \exp[j(f - k/T')t_o] = C_{T'}(f) X(f) \exp[j2\pi f t_o]$$



Después del muestreo por T

El FSE compensa los retardos que introduzca el canal

$$W_T(f) = \sum_k W_{T'}(f + k/T) = \sum_l C_{T'}(f + l/T) X(f + l/T) \exp[j(f - k/T)t_o]$$

El FSE óptimo es equivalente al receptor lineal óptimo = F.A + FIR(T)

Suma con "aliasing" de componentes iguales

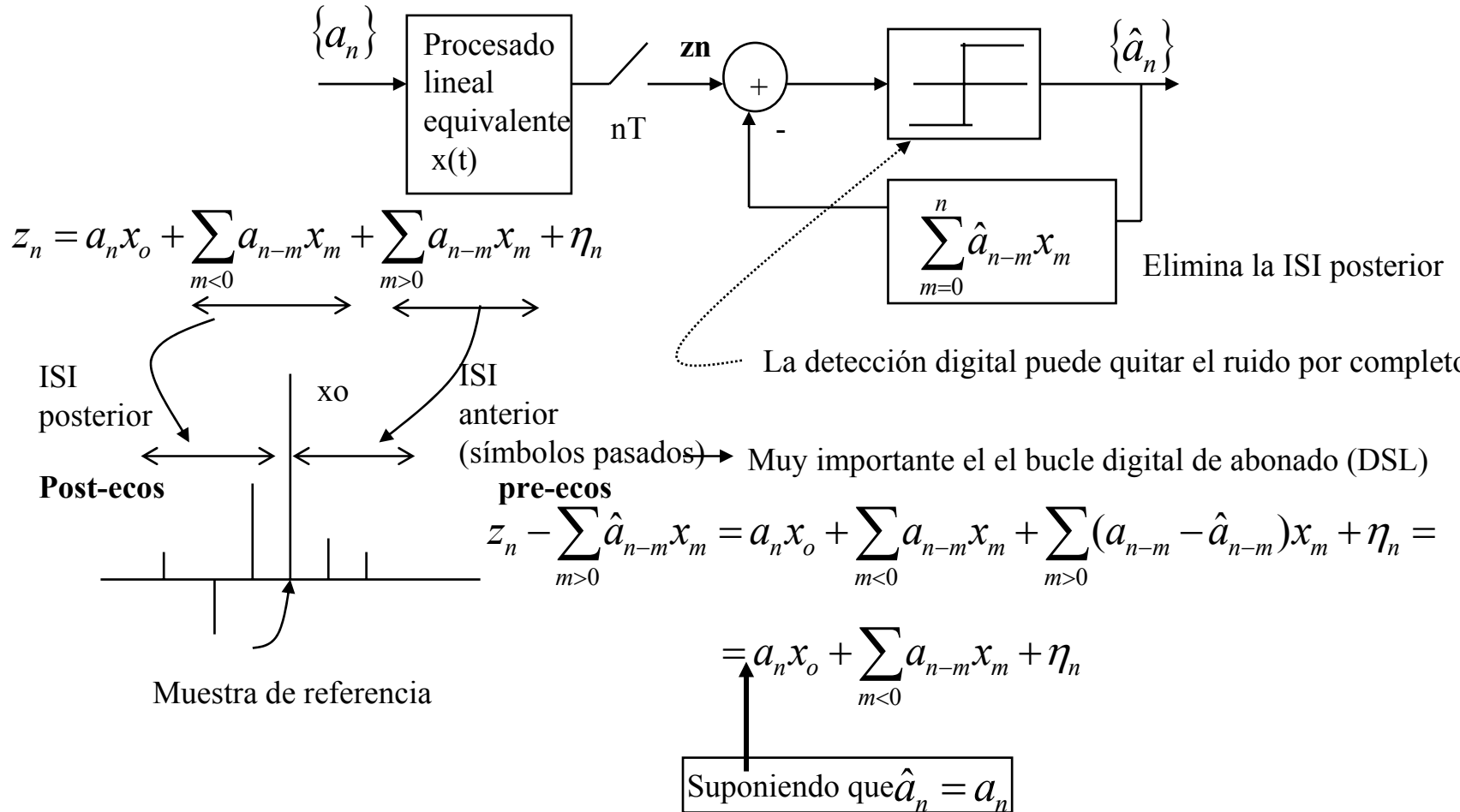
El igualador fraccionado (FSE) es la implementación más cercana al igualador lineal óptimo y, por lo tanto, permite compensar la distorsión lineal de fase que introduzca el canal. No obstante, los igualadores lineales no consiguen muchas veces el compensar totalmente la distorsión lineal de amplitud; ya que su diseño es un compromiso entre invertir la distorsión de amplitud y controlar la potencia de ruido a su salida.



Los igualadores no lineales subóptimos DFE (“Decision Feedback Equalizers”) solventan dicho problema siempre que la SNR a su entrada sea alta. Dicho igualador explota el hecho de que la secuencia transmitida a detectar proviene de un alfabeto finito e intenta eliminar la ISI residual.

“Decision Feedback Equalizer” (DFE)

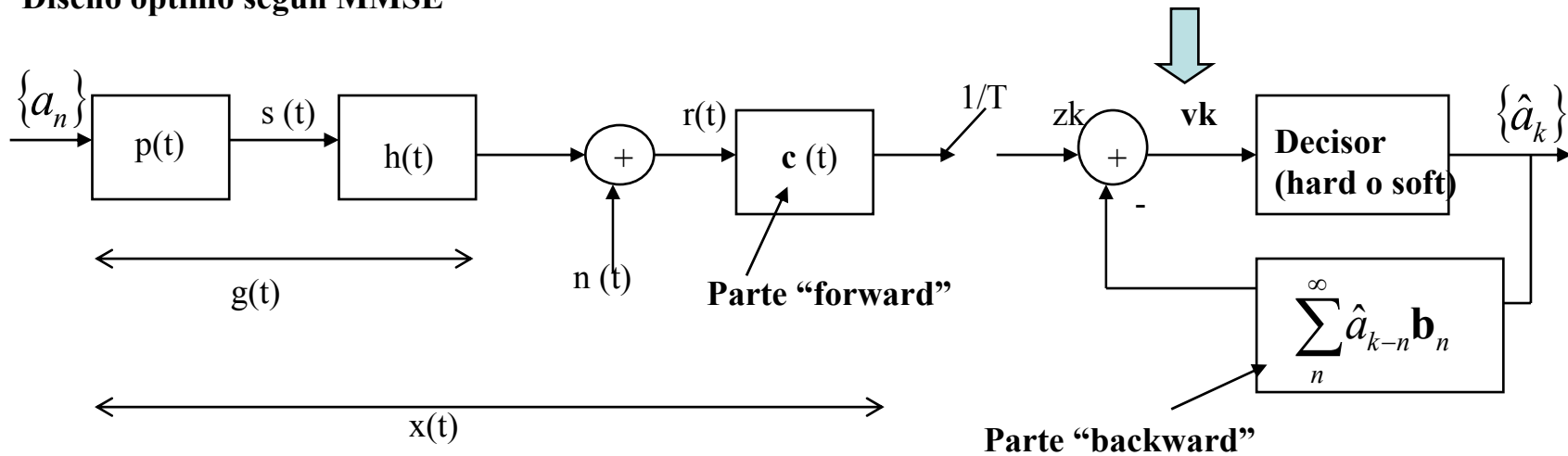
Emplea decisiones ya hechas para mejorar así las prestaciones, por lo tanto es un filtro no lineal. Se emplea en la mayoría de los transceptores existentes en el bucle de abonado que trabajan a 160 kbps full-duplex, de este modo se consiguen BER del orden de 10^{-7}



El filtro lineal óptimo puede compensar perfectamente la distorsión de fase, pero no la de amplitud sin muchas veces incrementar el ruido → el DFE soluciona este problema

Si $\hat{a}_n = a_n$ la parte "backward" no contiene ruido y este no es realizado

Diseño óptimo según MMSE



El criterio de diseño es minimizar, para una potencia transmitida dada, $MSE_1 = E[(v_k - \hat{a}_k)^2]$ (otros criterios como el minimizar la distorsión de pico también son factibles)

Eliminar la dependencia no lineal

Suponiendo que las decisiones son correctas dicha función de coste pasa a $MSE_2 = E[(v_k - a_k)^2]$

La cual es una cota inferior ya que $MSE_1 > MSE_2$

Solución óptima parte “backward”

$$v_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{k-n} b_n + n(t) * c(t) \Big|_{t=kT}$$

$$MSE_2 = \sigma_a^2 \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n^2 - \sigma_a^2 (x_o - 1)^2 + \sigma_a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - b_n)^2 + \sigma^2$$

El ruido depende sólo de la parte “forward”

$$\sigma_a^2 = E\{a_n^2\} = \frac{L^2 - 1}{3} \quad \sigma^2 = \frac{N_o}{2} \int c^2(t) dt$$

Observando MSE2 se concluye que su minimización se obtiene cuando $\mathbf{b}_n = \mathbf{x}_n$ (ISI o muestras pasadas de la resp global). Por lo tanto b_n dependen de la parte “forward” $x(t)$. La parte “backward” no ve el ruido.

Solución óptima parte “forward”

$$MSE_2 = \sigma_a^2 \left[\sum_{n=-\infty}^0 x_n^2 - 2x_o + 1 + \frac{\sigma^2}{\sigma_a^2} \right]$$

Luego $c(t)$ se puede escoger para minimizar: potencia de ruido e ISI posterior

$$S_i \quad \frac{MSE_2}{\sigma_a^2} = 1 + \sum_{n=-\infty}^0 \left[\int c(\xi) g(nT - \xi) d\xi \right]^2 - 2 \int c(\xi) g(-\xi) d\xi + \frac{N_o}{2\sigma_a^2} \int c^2(\xi) d\xi$$

Con $g(t) = p(t) * h(t)$

$$Entonces \quad \frac{\delta MSE_2}{\delta c(t)} = 0 \rightarrow g(-t) = N'_o c(t) + \int c(\xi) \left(\sum_{n=-\infty}^0 g(nT - \xi) g(nT - t) \right) d\xi \quad (*)$$

$$con \quad N'_o = \frac{N_o}{2\sigma_a^2}$$

$$Si \text{ se define } U_n = \int c(\xi) g(nT - \xi) d\xi$$

$$entonces \quad \boxed{c(t) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n g(nT - \xi)}$$

$$con \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{N'_o} (1 - U_0) & n = 0 \\ -U_n & n \leq -1 \\ N'_o & \end{cases}$$

Se escogen para minimizar ISI posterior y ruido

Requiere conocer el ruido

La parte “forward” se puede interpretar como un filtro adaptado al pulso recibido seguido de una línea de retardo (“anticausal”) de pesos gn. Si se quiere que el receptor sea insensible a errores de “timing” se puede emplear un igualador fraccionado (FSE).

Para obtener los valores $\{U_n\}$ necesarios para diseñar la parte “forward” basta con multiplicar la ecuación de diseño (*) por $p(kT-t)$ $k \leq 0$ a ambos lados e integrar

$$R_k = N_o' U_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{n-k} U_n \quad k = 0, -1, \dots \quad \longleftarrow \text{Ecuaciones de Wiener-Hopf}$$

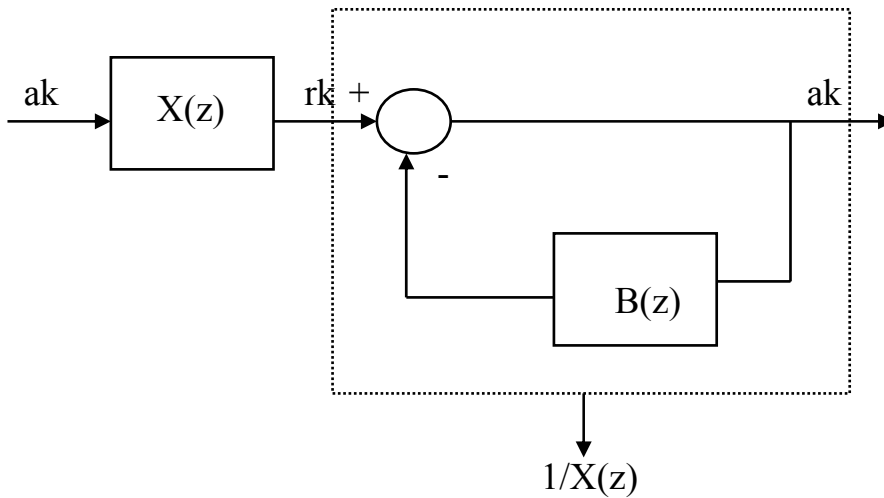
con $R_k = R_{-k} = \int g(-t)g(kT-t)dt$

Observaciones

- * Se puede demostrar que el DFE ofrece menor MSE que el filtro lineal óptimo. Únicamente cuando $x(t)$ es un pulso de Nyquist (no hay distorsión de amplitud) coinciden.
- * Si se impone que toda la ISI sea eliminada por la parte “backward” (imponiendo que la parte “forward” sea únicamente una ganancia, sin capacidad de filtrado), entonces:

- La parte “forward” actúa de CAG (Control Automático de Ganancia) y de desfasador

- La parte “backward” es un **forzador de ceros** que, debido a su estructura IIR es capaz de eliminar toda la ISI causada por símbolos pasados \longrightarrow Pero surge el problema de “noise enhancement”



B(z)?

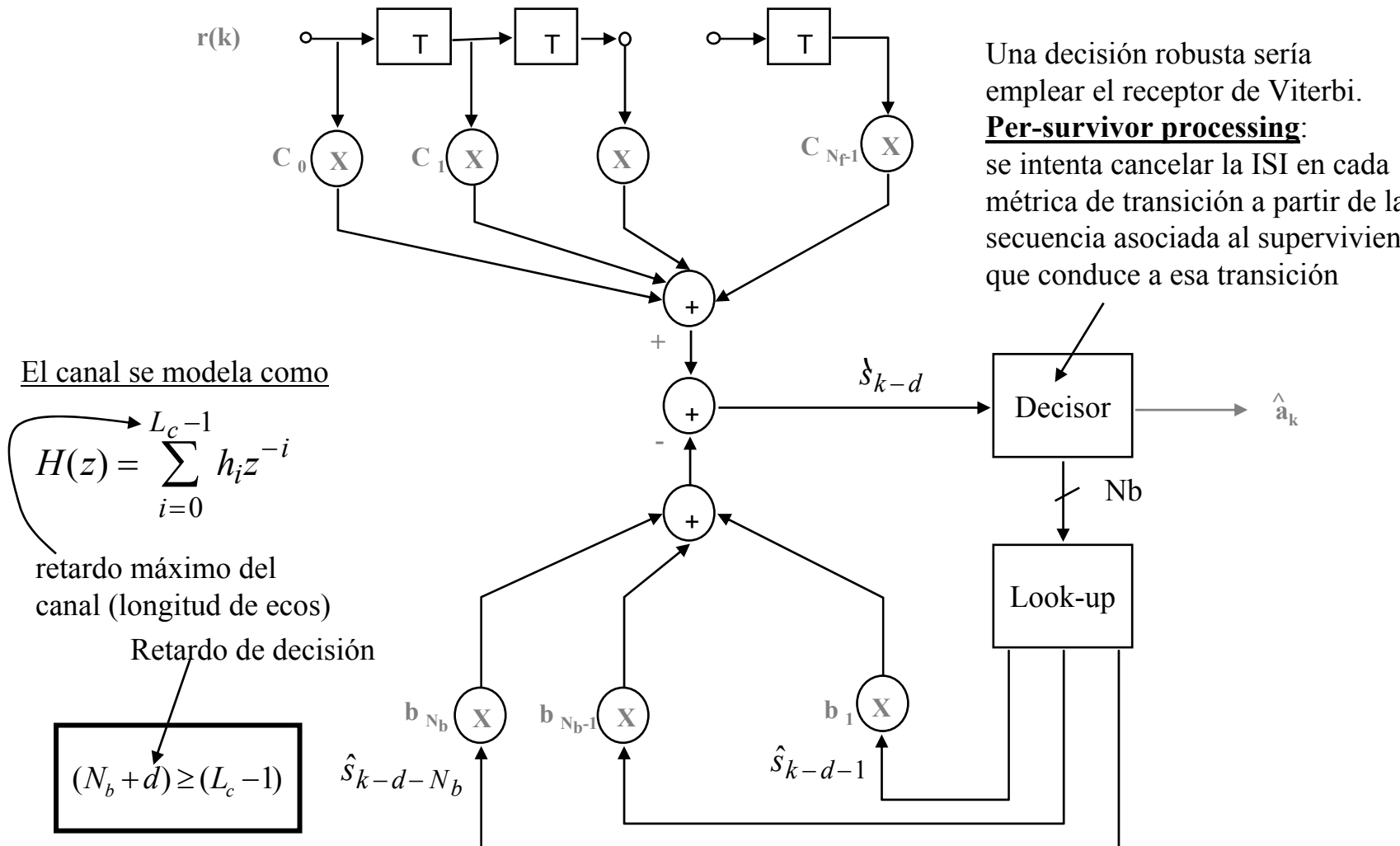
$$X(z) = 1 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots +$$

$$R(z) = A(z) + A(z)[x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots +]$$

$$A(z) = R(z) - A(z)[X(z) - 1] \rightarrow \boxed{B(z) = X(z) - 1}$$

Si se toman las decisiones sobre a_k existe el problema de “noise” enhancement

Implementación del DFE: número finito de coeficientes y retardo de la muestra de referencia



La respuesta del DFE viene dada por:

$$\hat{s}_{k-d} = \sum_{m=0}^{N_f-1} c_m x_{k+m} - \sum_{p=1}^{N_b} b_p \hat{s}_{k-d-p}$$

Con el conocimiento del canal, el DFE con m.e.c.m. tiene como coeficientes ‘forward’ (solución de Wiener):

$$\sum_{m=0}^{N_f-1} c_m \left[\sum_{\nu=0}^{l+d} h_{\nu}^* h_{\nu+m-l} + \sigma_n^2 \delta_{m-l} \right] = h_{l+d}^* \quad \text{para } l = 0, 1, \dots, (N_f - 1)$$

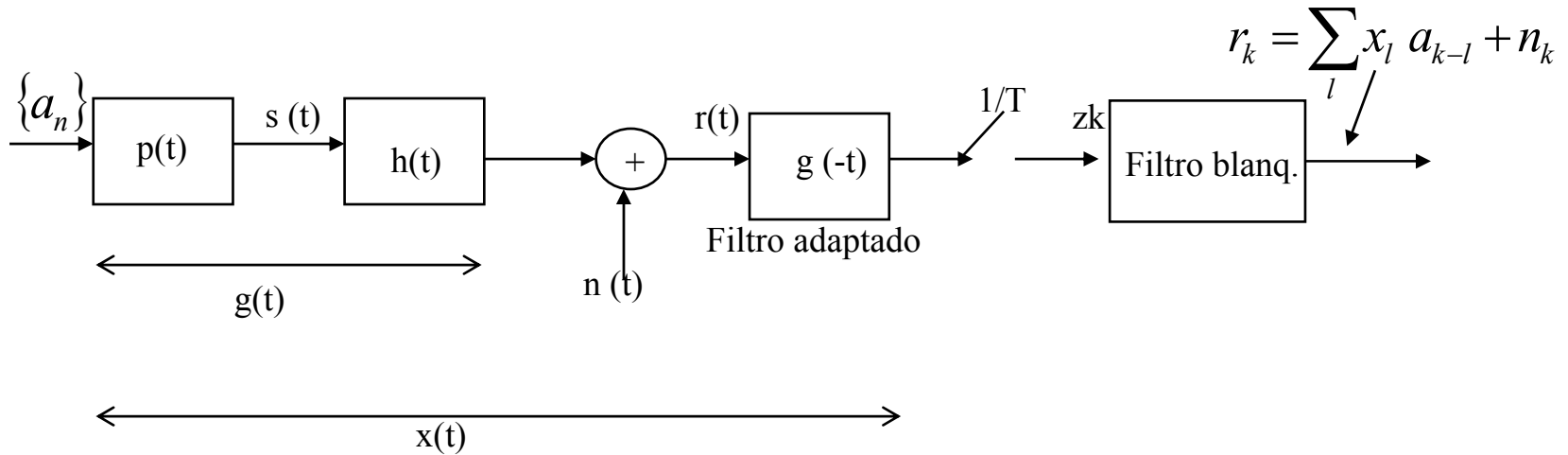
Los coeficientes ‘feedback’ se obtienen a partir de los ‘forward’:

$$\sum_{m=0}^{N_f-1} c_m h_{m+d+q} = b_q \quad \text{para } q = 0, 1, \dots, N_b$$

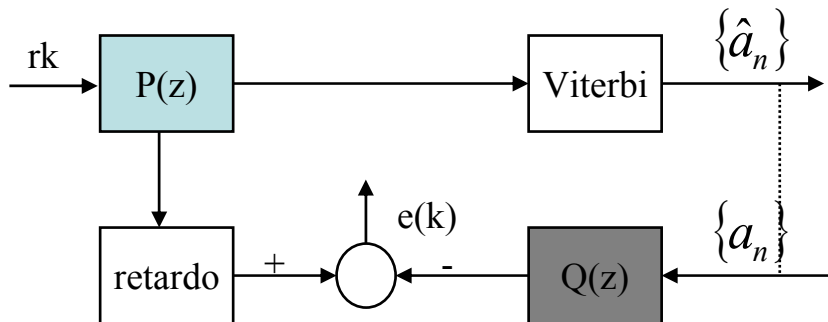
Caso particular

Si $c_0 = \frac{1}{h_0}$ \longrightarrow Entonces la parte “backward” es $B(z) = \frac{H(z) - h_0}{h_0} = \sum_{i=1}^{L_c-1} \left(\frac{h_i}{h_0} \right) z^{-i}$

“Desired truncated impulse response” y truncaje de la memoria del canal para estimación MLSE.



Se trata de diseñar un filtro $P(z)$ tal que la estimación directa del canal $Q(z)$ sea de una duración corta y así reduzca la complejidad del detector de Viterbi.



Observación: a diferencia del DFE, $e(k)$ no se emplea para realizar las decisiones.

$$e_k = \sum_{l=-M}^M p_l r_{k-l} - \sum_{l=0}^{LL} q_l a_{k-l} \quad E\{a_k a_j\} = \delta_{kj} \quad a_k = \hat{a}_k$$

$$E\{e_k^2\} = \mathbf{p}^H \mathbf{R} \mathbf{p} + \mathbf{q}^H \mathbf{q} - \mathbf{p}^H \mathbf{H} \mathbf{q} - \mathbf{q}^H \mathbf{H}^H \mathbf{p}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_M & \dots & h_{M+LL} \\ \vdots & & \vdots \\ h_0 & \dots & h_{LL} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{-M} & \dots & h_{-M+LL} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\delta E\{e_k^2\}}{\delta \mathbf{p}^H} = \mathbf{R} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{q} = 0 \rightarrow \mathbf{p}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{q}$$

$$\sigma_e^2 = \mathbf{q}^H \mathbf{q} - \mathbf{q}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{q} = \mathbf{q}^H [\mathbf{I} - \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}] \mathbf{q}$$

$$\sigma_e^2 \Big|_{\min} \longrightarrow \mathbf{q} \text{ es el autovector con } \lambda_{\min} \text{ de } [\mathbf{I} - \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$$

$$\mathbf{q}^H \mathbf{q} = 1 \quad \sigma_e^2 \Big|_{\min} = \lambda_{\min}$$

Si hay posibilidad de realimentación: se puede diseñar el transmisor para minimizar el error con potencia transmitida f

Diseño adaptativo

El canal no es conocido por el receptor al comienzo de la comunicación, por ello se propone el siguiente diseño adaptativo

$$\mathbf{p}^{l+1} = \mathbf{p}^l - \mu_1 e_l \mathbf{r}_l$$

El valor de \mathbf{p} depende implícitamente del de \mathbf{q} a través del error. Por ello se ha de obtener simultáneamente \mathbf{q} .

$$\mathbf{q}^{l+1} = \mathbf{q}^l - \mu_2 e_l \mathbf{a}_l$$

Para evitar la solución trivial se ha de imponer la restricción sobre \mathbf{q} de potencia unidad.

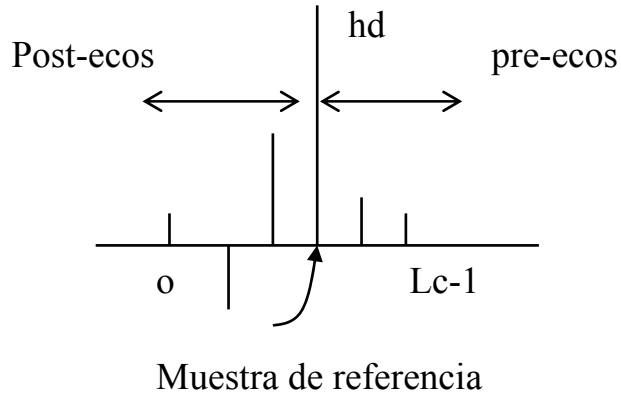
$$\tilde{\mathbf{q}}^{l+1} = \mathbf{q}^l - \mu_2 e_l \mathbf{a}_l \quad \mathbf{q}^{l+1} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}^{l+1}}{(\tilde{\mathbf{q}}^{l+1})^H \tilde{\mathbf{q}}^{l+1}}$$

Verificación de la solución final considerando que se emplea el gradiente exacto $\frac{\delta E\{e_k^2\}}{\delta \mathbf{q}^H} = \mathbf{q} - \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{q}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^{l+1} &= \mathbf{q}^l - \mu_2 (\mathbf{q}^l - \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{q}^l) \\ &= \mu_2 (\mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{q}^l) + \mathbf{q}^l (1 - \mu_2) \end{aligned}$$

Si $\mu_2=1$ se obtiene el autovector de $[\mathbf{I} - \mathbf{H}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$, sino el algoritmo para cuando \mathbf{q} deja de rotar respecto

Elección del retardo d



d=0: la muestra de referencia es la correspondiente a h_0 (es decir, la parte “forward” es un CAG) → “noise enhancement”

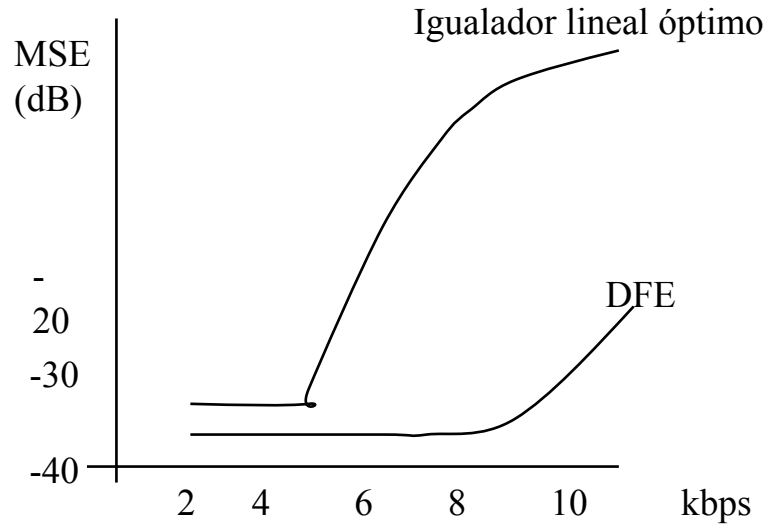
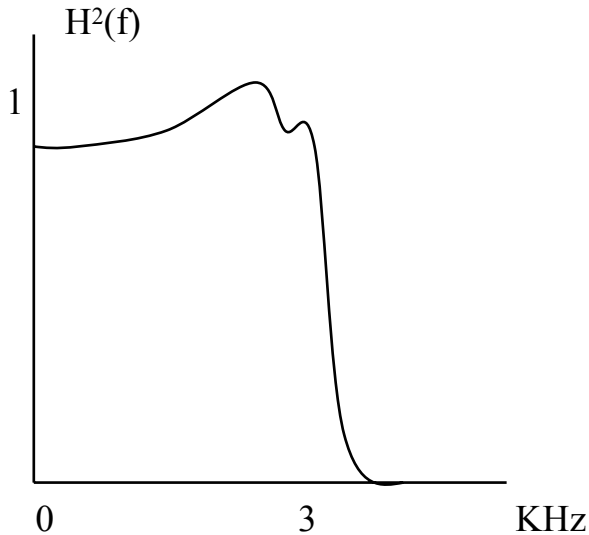
d ↑ Disminuye el número de coeficientes backward b_n y se observa empíricamente que se reduce su magnitud → menor propagación de errores

$(N_b+d)=L_c-1$

→ mayor ISI residual

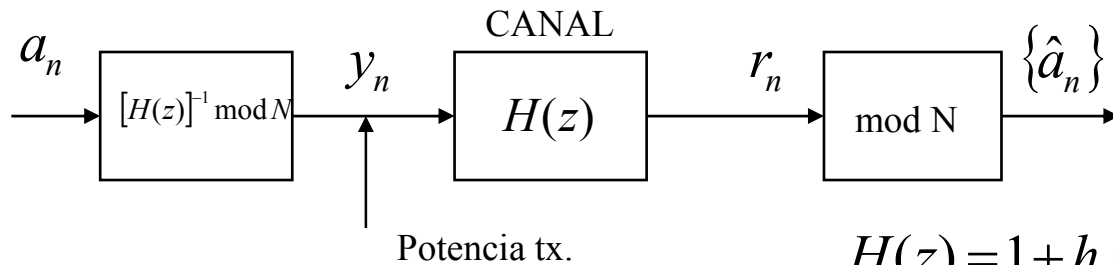
pues la energía de la muestra de referencia también disminuye

Ejemplo:



Técnicas de predistorsión: DFE en el transmisor con aritmética en módulo N (transmisor de Tomlinson)

Si la transmisión es duplex y permite que el transmisor conozca el canal, este puede invertirlo. No obstante, si el canal tiene ceros en su función de transferencia, al invertirse causará inestabilidades. Una solución es emplear un filtro que opere en módulo N, es decir, la salida del sumador está siempre comprendida entre $-N/2$ y $N/2$ y, por lo tanto, siempre es estable.



$$H(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_M z^{-M}$$

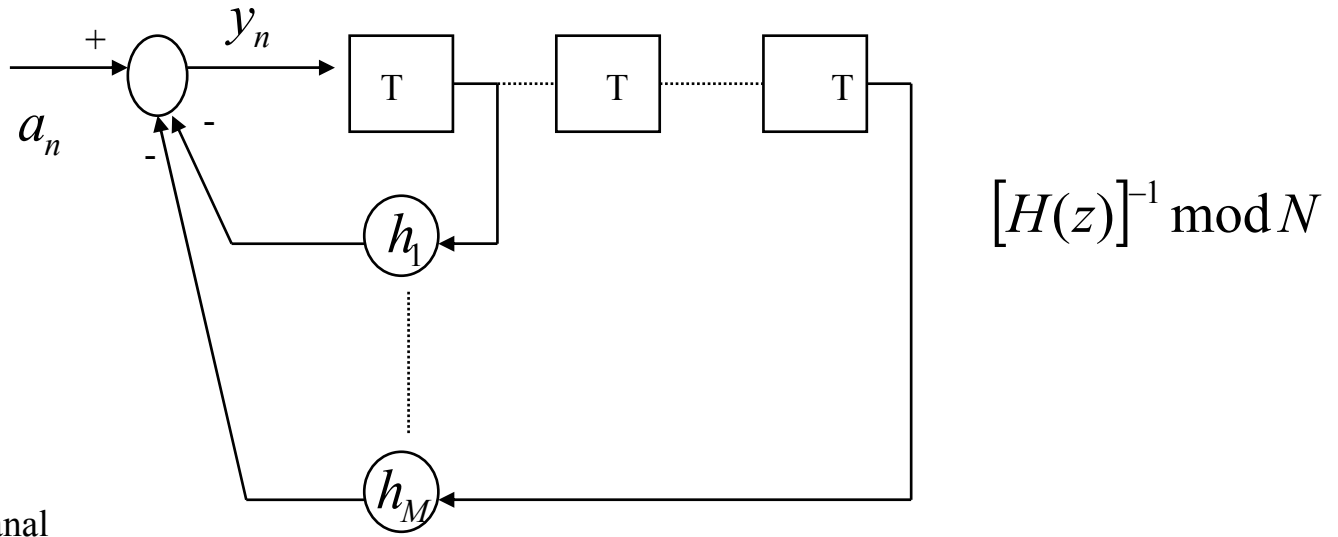
El parámetro N se escoge suficientemente grande para poder acomodar la dinámica de los símbolos transmitidos

A continuación se analizará toda la transmisión en el dominio z para mostrar que si se conoce el canal y no hay ruido

$$a_n = \hat{a}_n$$

A la entrada del canal $Y(z)H(z) = A(z)$

$$Y(z) = A(z) - Y(z)[h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_M z^{-M}] - bN = A(z) - Y(z)[H(z) - 1] - bN$$



A la salida del canal

$$R(z) = H(z)Y(z) = [1 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_Mz^{-M}]Y(z) = Y(z) + [h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_Mz^{-M}]Y(z)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} R(z) &= A(z) - Y(z)[h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_Mz^{-M}] - bN + Y(z)[h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_Mz^{-M}] = \\ &= A(z) - bN \end{aligned}$$

Si se realiza la operación módulo N sobre r_n se obtiene $a_n = \hat{a}_n$

Diseño óptimo de transmisor y receptor en sistemas con posibilidad de “feedback”

Transmisor de Tomlinson y recepción con un Filtro adaptado o DFE → ¿Diseño óptimo?

Principalmente, existen dos criterios óptimos de diseño:

A.- Diseño de Tx/Rx como filtros que garantizan ISI=0 en recepción (FZ) y mínima probabilidad de error, de este modo se puede hacer una detección símbolo a símbolo.

$$|H_T(f)|^2 = \frac{P_{NYQ}(f)\sqrt{S_w(f)}}{|H_c(f)|} \qquad |H_R(f)|^2 = \frac{P_{NYQ}(f)}{|H_c(f)|\sqrt{S_w(f)}}$$

B.- Diseño de Tx/Rx como filtros que minimizan el error cuadrático medio (MSE) y se emplea un detector de Viterbi para eliminar la ISI residual minimizando la probabilidad de error. Dicho detector de Viterbi puede dirigir las decisiones del filtro Rx en modo “per-survivor”.

Técnicas adaptativas para minimizar el error cuadrático

3.1.- Minimización del MMSE por técnicas de gradiente descendente

3.2.- Algoritmo LMS para estimar el gradiente descendente

3.3.- Algoritmos de rápida convergencia

En todas las técnicas de igualación anteriores se suponía el canal conocido; ello se hace posible gracias a las técnicas adaptativas que van ajustando (adaptando) los parámetros del igualador según el canal. De los diferentes criterios (mínima probabilidad de error, mínimo error cuadrático medio y mínima distorsión de pico o ISI) únicamente se contemplará el criterio MMSE por ser el más empleado al ofrecer un mejor compromiso prestaciones v.s. complejidad. No obstante se ha de comentar que el criterio de mínima distorsión de pico tiene cabida en comunicaciones ópticas a muy alta velocidad (Gbits), en donde el ruido presenta niveles muy bajos respecto al de señal y no degrada las prestaciones del forzador de c

Dentro de las técnicas que se presentan a continuación se distinguirán:

- automáticas: con una referencia temporal
 - dirigidas por decisiones
- } Ambas necesarias en transmisión a alta velocidad

Técnica de gradiente descendente

$$MSE(\mathbf{w}(n)) = MSE_{min} + (\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{opt})^H \mathbf{R}(\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{opt})$$

En base al comportamiento de la función de coste (m.e.c.m.), una estrategia de actualización de los coeficientes que evita la inversión de la matriz de correlación \mathbf{R}_{xx} $(2M + 1)^3$ productos es la de seguir localmente la trayectoria de máxima pendiente (gradiente), es decir:

$$\underline{\mathbf{w}}(n+1) = \underline{\mathbf{w}}(n) - \mu \nabla \left[E(|e(n)|^2) \right] \quad \nabla_j = \frac{\partial}{\partial w_j} E[|e(n)|^2] = -2 \left(R_{dx}(j) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n) R_{xx}(|i-j|) \right)$$

El gradiente se ha calculado anteriormente y puede expresarse de forma simplificada como:

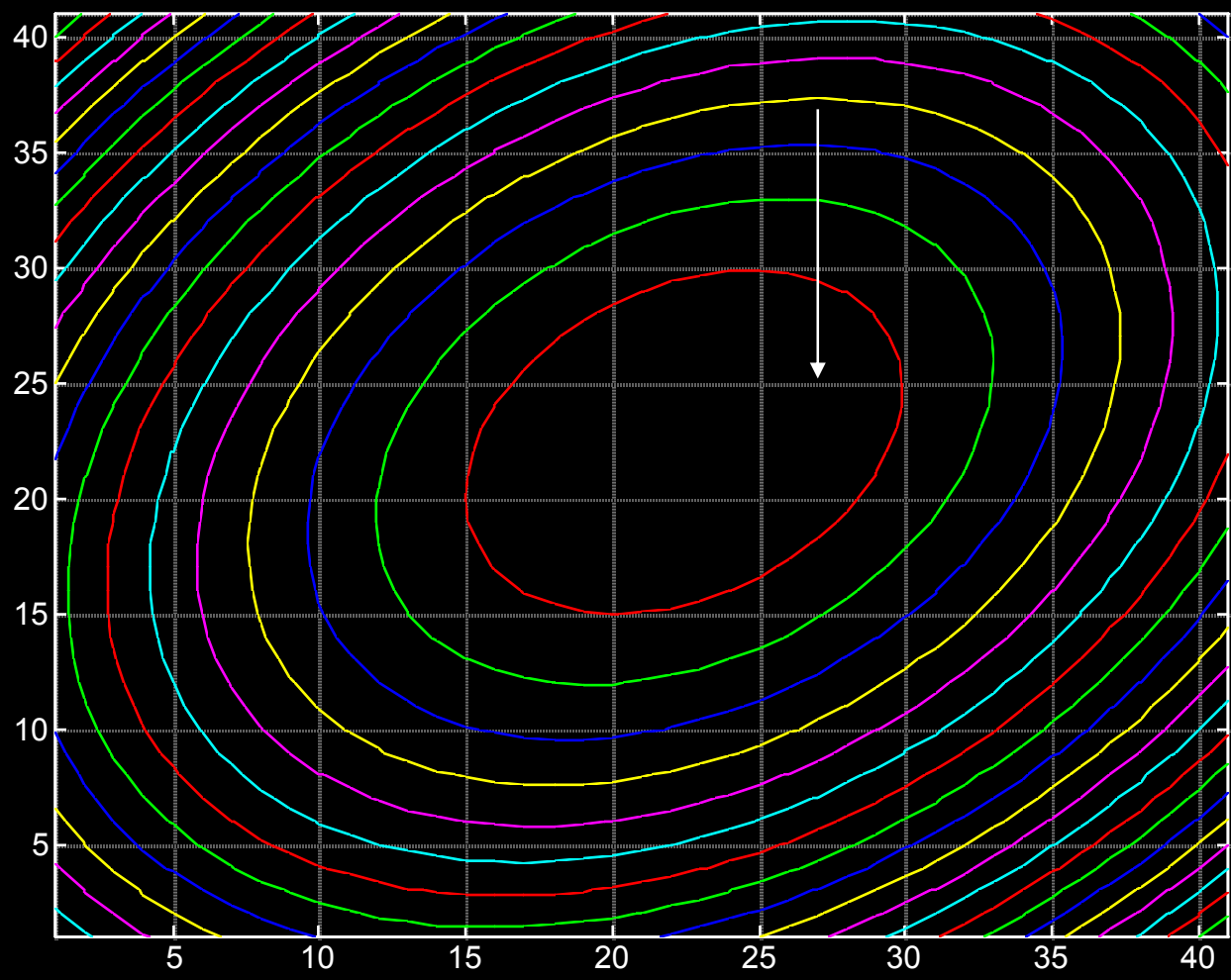
$$\nabla \left[E(|e(n)|^2) \right] = 2(\underline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{w}}(n) - \underline{\mathbf{P}}) \Rightarrow \underline{\mathbf{w}}(n+1) = \underline{\mathbf{w}}(n) - \mu \nabla \left[E(|e(n)|^2) \right]$$

La técnica es iterativa y aproxima sucesivamente los coeficientes del ecualizador hacia la solución óptima de Wiener.

Presenta una complejidad de un número de productos igual a $(2M+1) \times (L \text{ iteraciones})$

Este planteamiento tiene puntos débiles, entre otros:

- Conocer \mathbf{R}_{xx} y \mathbf{P} de forma exacta no es habitual.
- El canal y/o el ruido pueden ser no-estacionarios, en cuyo caso no tiene sentido hablar de \mathbf{R}_{xx} y \mathbf{P} .
- Computacionalmente sigue siendo un esquema relativamente complejo y la búsqueda poco inteligente.



Algoritmo LMS (“Least Mean Squares”)

El algoritmo L.M.S. tiene su origen en algoritmos de redes neuronales, pero su éxito se ha producido en el área de las comunicaciones.

La idea básica consiste en realizar **estimaciones instantáneas del gradiente**:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} [e(n)]^2 = -2(e(n)x((n-j))) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

↙ Calculado con referencia exacta o dirigido por decisiones.

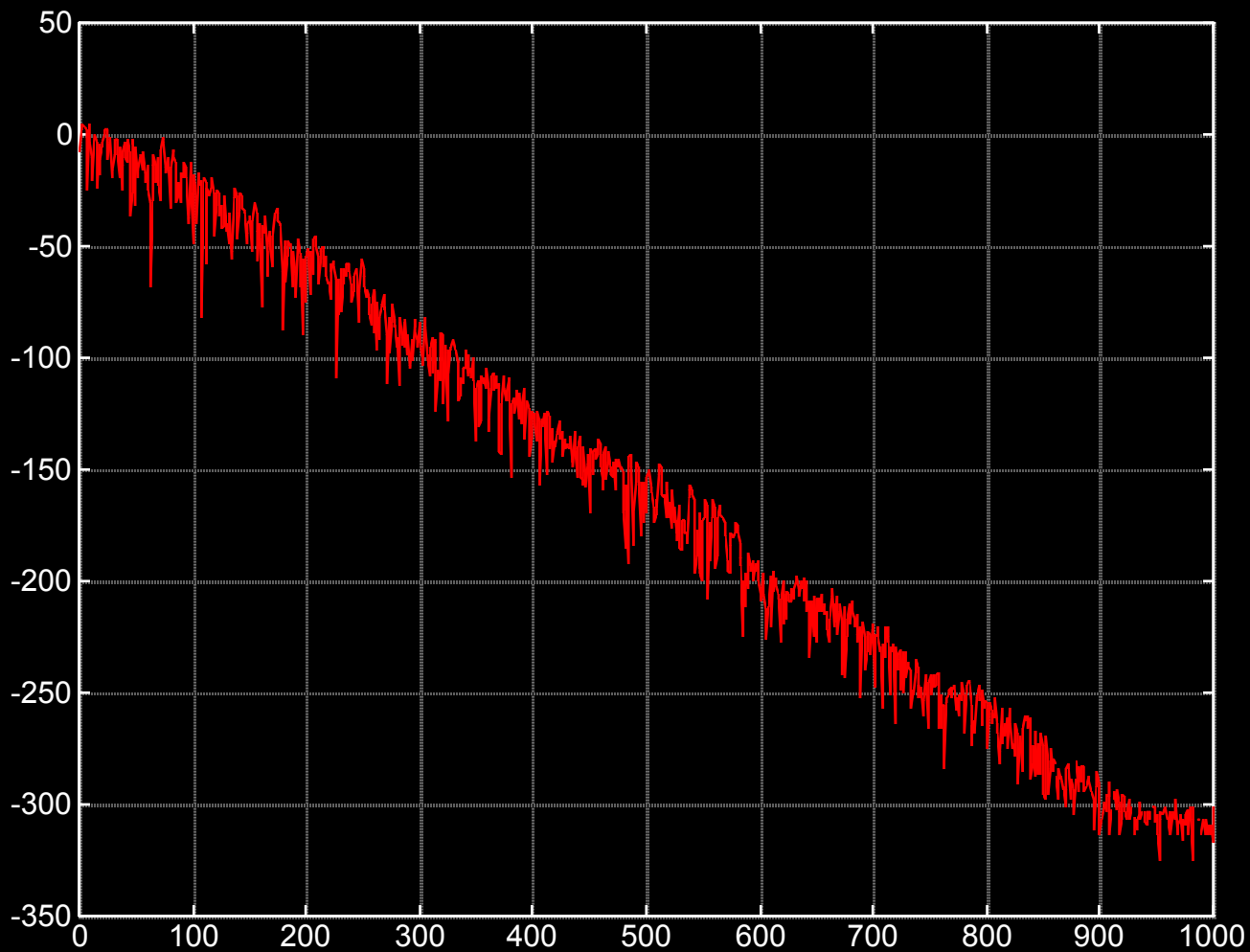
El algoritmo queda, finalmente, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \underline{w}(n+1) &= \underline{w}(n) + 2\mu e(n+1/n)\underline{X}(n+1) \\ e(n+1/n) &= d(n+1) - \underline{w}^T(n)\underline{X}(n+1) \end{aligned}$$

Como vemos, el algoritmo se comporta como un incorrelador del error $e(n+1/n)$ y los datos $\underline{X}(n+1)$.

Tipicamente, el ‘step-size’ (μ) se normaliza por la potencia de la señal (NLMS) para hacer que el comportamiento de algoritmo sea independiente de la potencia de la señal recibida (no tiene sentido en sistemas con Control Automático Ganancia-AGC-).

Curva de aprendizaje

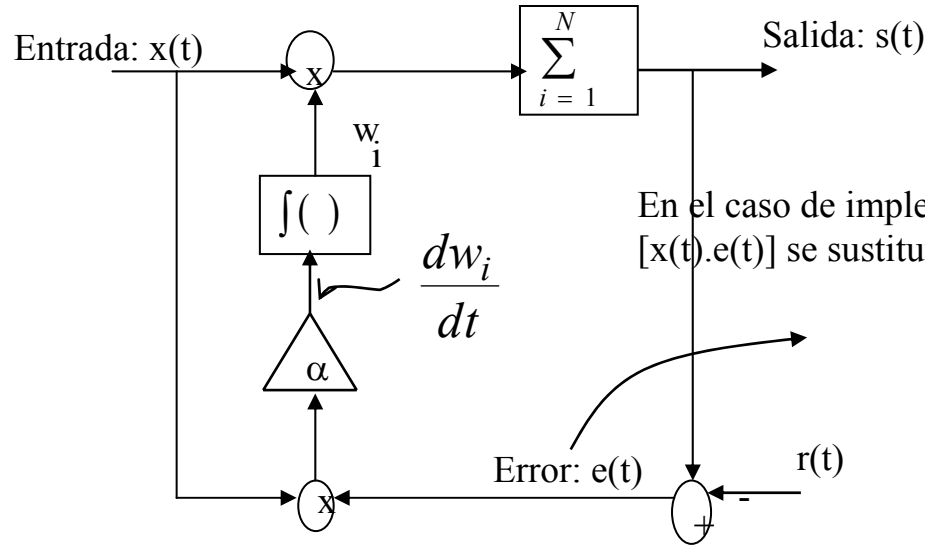


Implementación del LMS

$$\underline{w}(n+1) = \underline{w}(n) + 2\mu e(n+1/n)\underline{X}(n+1)$$

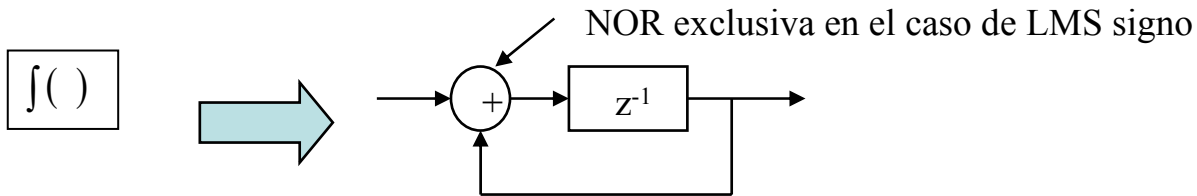
$$e(n+1/n) = d(n+1) - \underline{w}^T(n)\underline{X}(n+1)$$

Análogica



↑
Sólo se necesita 1 bit

Digital



En la implementación normalizada (NMLS) $\alpha = \frac{\mu}{P_x}$

A la hora de implementar el LMS en modems de alta velocidad se han de realizar ciertas simplificaciones para obtener modems de bajo coste y consumo.

$$\underline{w}(n+1) = \underline{w}(n) + 2\mu e(n+1/n)\underline{X}(n+1)$$

En lugar de emplear infinita precisión a la hora de calcular $2\mu e(n+1/n)\underline{X}(n+1)$ Se extrae el logaritmo en base 2

Y se implementa el producto con desplazamiento de registros. Una simplificación adicional es emplear el signo del error en lugar del error o el signo de x en lugar de x. No obstante, debido a la pérdida de información, disminuye entonces la velocidad de convergencia.

Efectos de no linealidades en el LMS

Debido a la naturaleza no lineal del LMS, este obtiene menor MSE que el filtro de Wiener en escenarios con ruido o interferencias de banda estrecha.

$$x(k) = d(k) + i(k) + n(k)$$



De banda mucho más estrecha que la señal deseada $d(k)$

Ello tiene gran aplicación en comunicaciones digitales de alta velocidad.

Algoritmos de rápida convergencia

Son útiles cuando se quiere aumentar la eficiencia de la transmisión ya que minimizan el tiempo que la referencia de ser transmitida.

Son útiles si el canal varía rápidamente con el tiempo

A continuación se presentará el algoritmo RLS cuya convergencia no es exponencial como ocurre con el LMS sino que es fija y proporcional al número de coeficientes a adaptar. En contrapartida la complejidad de cálculo es del orden $(2M+1)^2$ en lugar de $(2M+1)$ como ocurre con el LMS.

Algoritmo RLS (“Recursive Least Squares”)

El algoritmo RLS supera claramente las prestaciones del algoritmo LMS; ya que emplea información contenida en muestras pasadas, introduciendo, a cambio, un coste computacional mucho mayor. La función de coste será ahora

$$MSE(n) = (1 - \beta) \sum_{i=0}^n \beta^{n-i} |e(i/n)|^2 \quad \text{con } 0 < \beta \leq 1 \quad \text{y} \quad e(i/n) = d(i) - \underline{w}^T(n) \underline{X}(i)$$

Donde entendemos que $\underline{w}(n)$ es el ecualizador que minimiza la función anterior:

$$\underline{w}_n = \underline{R}_n^{-1} \underline{P}_n$$

siendo $\underline{R}_n = \beta \underline{R}_{n-1} + (1 - \beta) \underline{X}_n \underline{X}_n^H$ $\underline{P}_n = \beta \underline{P}_{n-1} + (1 - \beta) \underline{X}_n d_n^*$

La llegada de un nuevo dato $\underline{X}(n+1)$ y el uso de la referencia $d(n+1)$ modifica la función de coste:

$$MSE(n+1) = (1 - \beta) \sum_{i=0}^{n+1} \beta^{n-i+1} |e(i/n+1)|^2 = (1 - \beta) |e(n+1/n+1)|^2 + \beta MSE(n)$$

$$\text{con: } e(i/n+1) = d(i) - \underline{w}^T(n+1) \underline{X}(i)$$

Vemos que la función en el instante ‘n’ es ‘olvidada’ en el instante ‘n+1’ a través del factor de olvido ‘β’

Objetivo: Encontrar una relación entre la solución óptima en el instante ‘n’ y la óptima en el instante ‘n+1’:

$$\underline{w}(n) \Leftrightarrow \underline{w}(n + 1)$$

Para ello se aplicará el lema de la inversa:

$$\underline{A} = \underline{B} + \underline{C}\underline{D}\underline{C}^H$$

$$\underline{A}^{-1} = \underline{B}^{-1} - \underline{B}^{-1}\underline{C}\left[\underline{D} + \underline{C}^H \underline{B}^{-1}\underline{C}\right]^{-1}\underline{C}^H \underline{B}^{-1}$$

Al aplicar este lema a la matriz de autocorrelación de datos se obtiene:

$$\underline{R}_{n+1}^{-1} = \frac{1}{\beta} \underline{R}_n^{-1} - \frac{1}{\beta} \underline{R}_n^{-1} \underline{X}_n \left[\underline{I} + \underline{X}_n^H \underline{R}_n^{-1} \underline{X}_n \frac{1-\beta}{\beta} \right]^{-1} \frac{1-\beta}{\beta} \underline{X}_n^H \underline{R}_n^{-1}$$

Además

$$\underline{w}_{n+1} = \underline{R}_{n+1}^{-1} \left(\beta \underline{P}_n + (1-\beta) \underline{X}_n d^*(n) \right)$$

Lo que permite encontrar la forma de actualizar los pesos anteriores w_n para obtener los nuevos. Después de agrupar términos, se obtiene

con
$$\underline{K}_n = \left(\frac{\alpha}{1 + \phi} \right) \underline{R}^{-1} \underline{X}_n$$

Se observa que LMS y RLS coinciden cuando la matriz de autocorrelación de los datos es diagonal, es decir, son ruido blanco.

Ecuaciones recursivas básicas son:

$$\underline{w}(0) \text{ arbitrario y } \underline{R}^{-1}(0) = \sigma^2 \underline{I} \text{ con } \sigma^2 \gg 1$$

$$\underline{K}(n) = \frac{1}{\lambda + \underline{X}^T(n+1) \underline{R}^{-1}(n) \underline{X}(n+1)} \underline{R}^{-1}(n) \underline{X}(n+1)$$

$$e(n+1/n) = d(n+1) - \underline{w}^T(n) \underline{X}(n+1) \rightarrow \underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n + \underline{K}_n e^*(n+1/n)$$

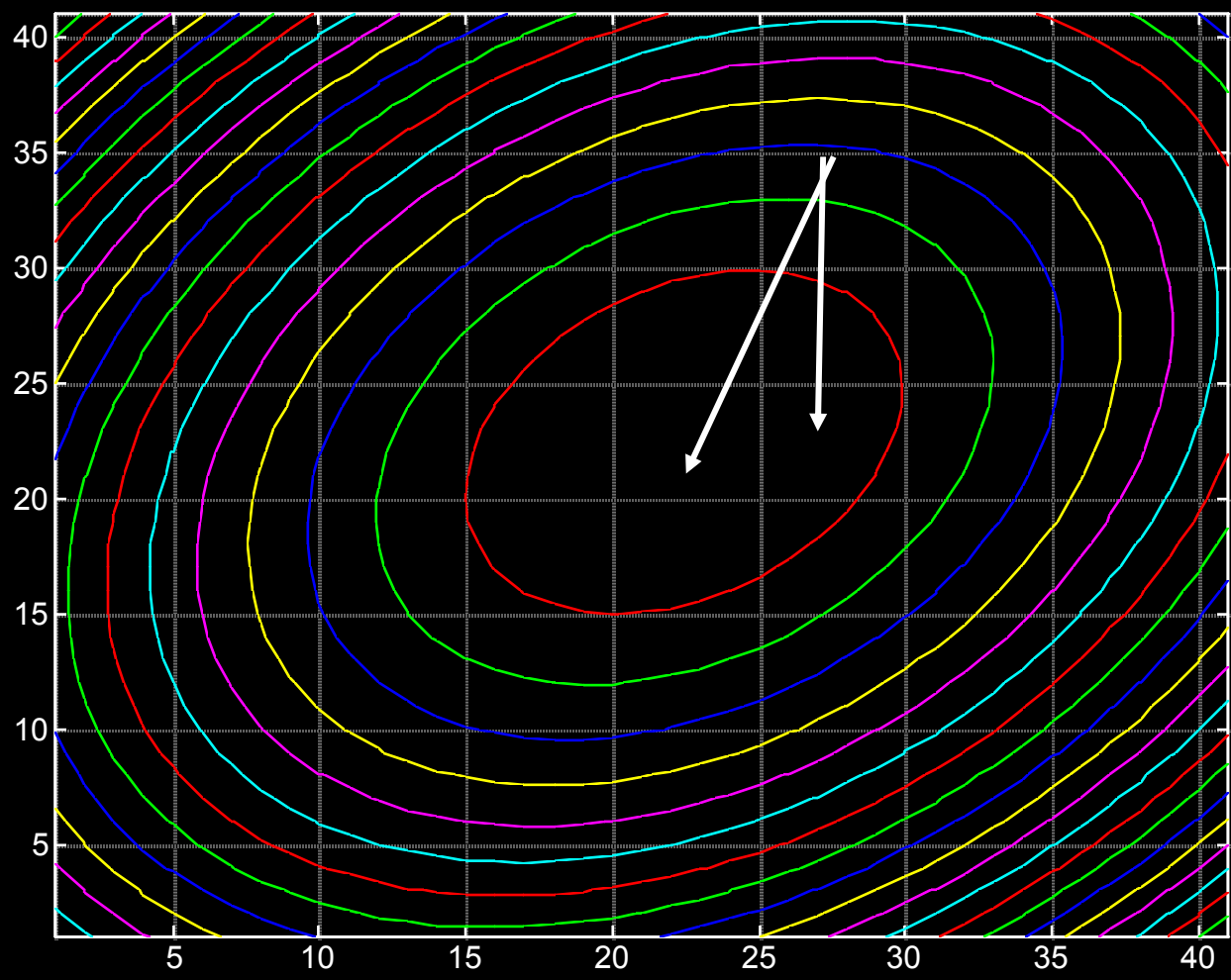
$$\underline{R}^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left[\underline{R}^{-1}(n) - \frac{\underline{R}^{-1}(n) \underline{X}(n+1) \underline{X}^T(n+1) \underline{R}^{-1}(n)}{\lambda + \underline{X}^T(n+1) \underline{R}^{-1}(n) \underline{X}(n+1)} \right]$$

con $0 < \lambda \leq 1$ Denominado factor de olvido, generalmente $\lambda=1$, que es el caso de memoria infinita.

$$MSE(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} |e(i/n)|^2$$

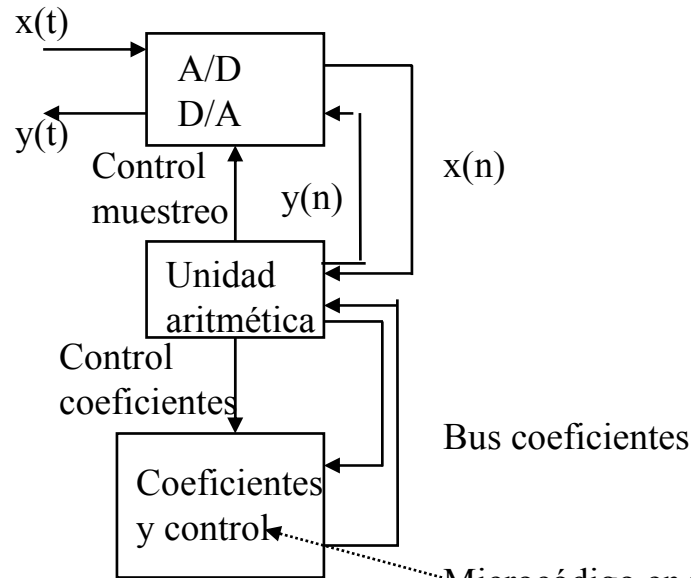
El mejor comportamiento del algoritmo RLS radica en la capacidad de ‘enfoco del gradiente’:

$$\underline{R}^{-1}(n)[e(n+1/n)\underline{X}(n+1)] = \underline{R}^{-1}(n)\left[\underline{\nabla}|e(n+1/n)|^2\right]$$



Ejemplo de diseño digital de un igualador adaptativo síncrono a T

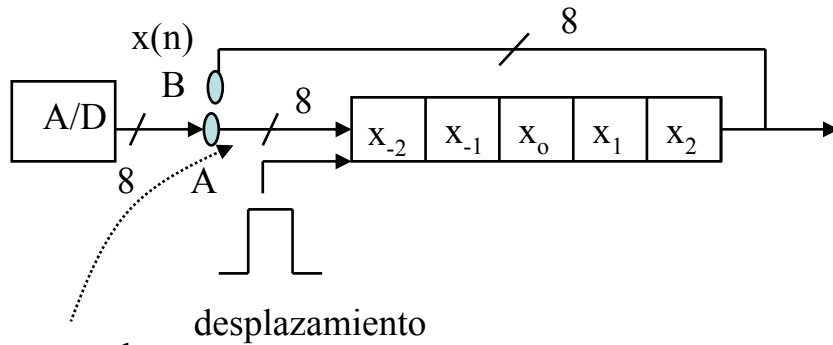
- Etapas:
- Acondicionamiento de señales analógicas y conversión A/D y D/A
 - Procesado aritmético (igualador transversal)
 - Memoria de coeficientes y cálculo adaptativo



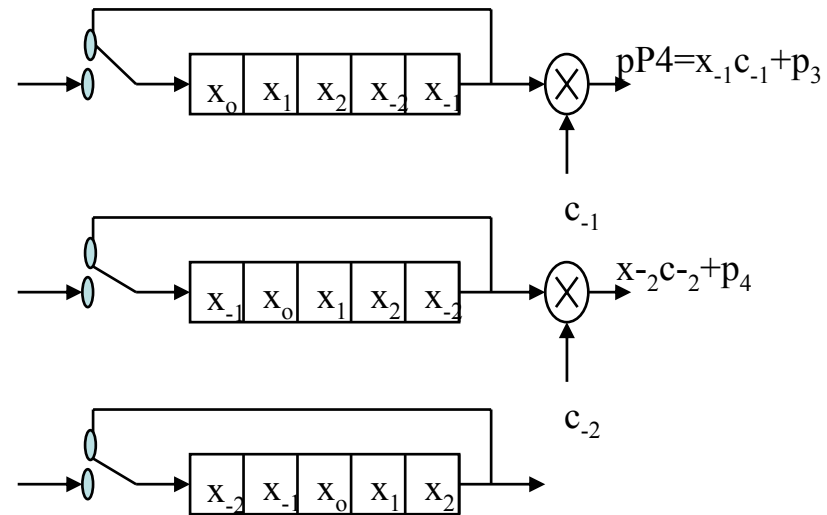
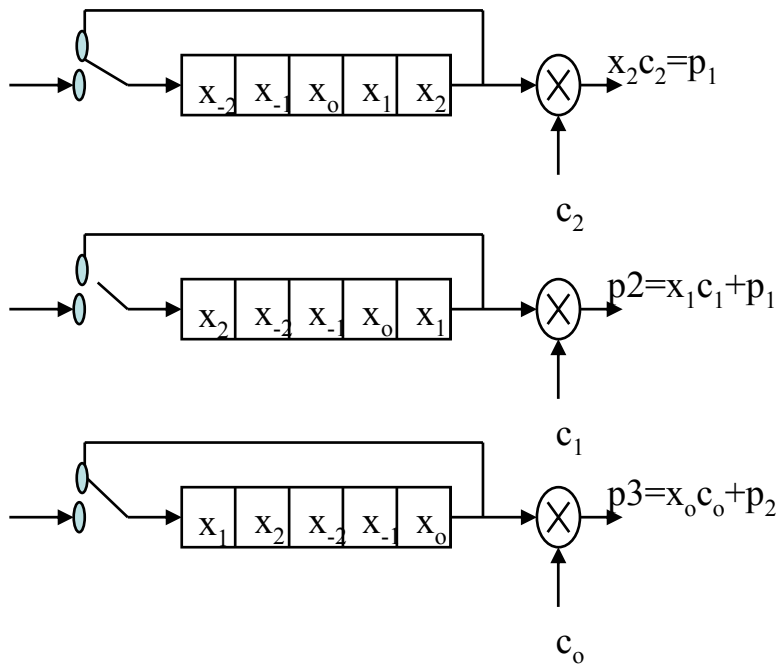
Microcódigo en una ROM: un ciclo completo se realiza cada

Adaptación cada T ($2.1 \mu\text{s}$), según algoritmo LMS

Procesador aritmético: La gestión de las muestras se efectúa mediante un registro de desplazamiento, combinado con un multiplexor que actúa como conmutador. En la siguiente figura se muestra el ciclo completo del movimiento de las muestras en el registro



conmutador
 que actúa de
 multiplexor



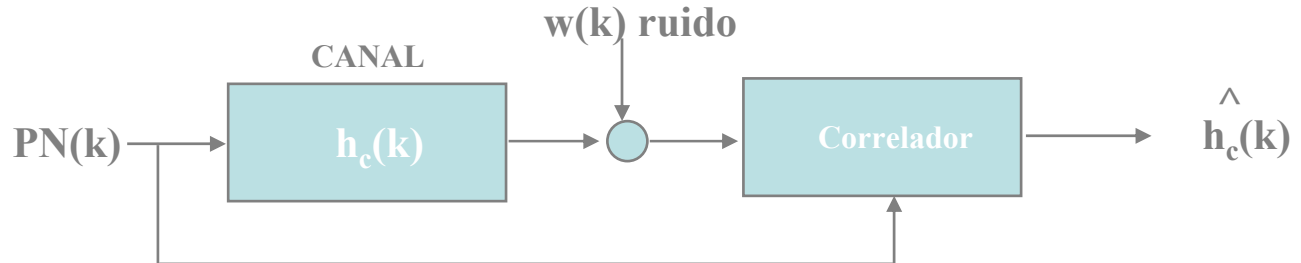
Técnicas de identificación de canal (cancelador de ecos)

5.1.- Correlativas

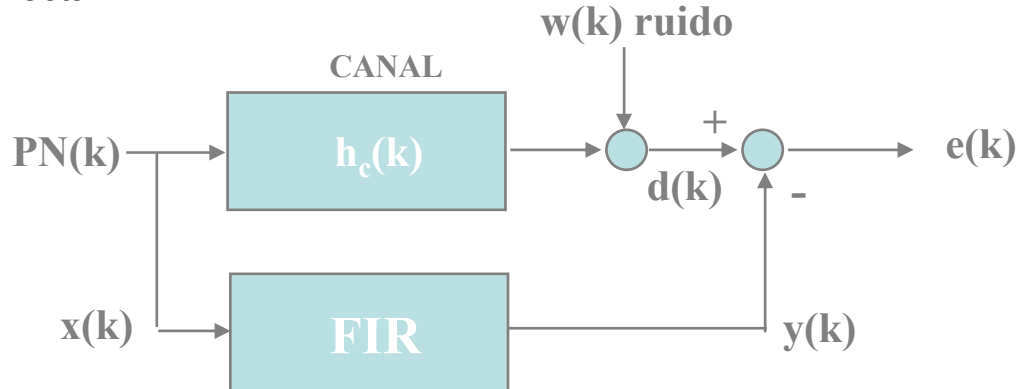
5.2.- Identificación Directa de MMSE

Estas técnicas de identificación de canal difieren ligeramente de las técnicas de ecualización vistas hasta ahora. Su utilidad principal es como cancelador de ecos aunque también se pueden emplear como un paso previo a la igualación (ej.: GSM)

- Identificación Correlativa ('sounding sequences'):

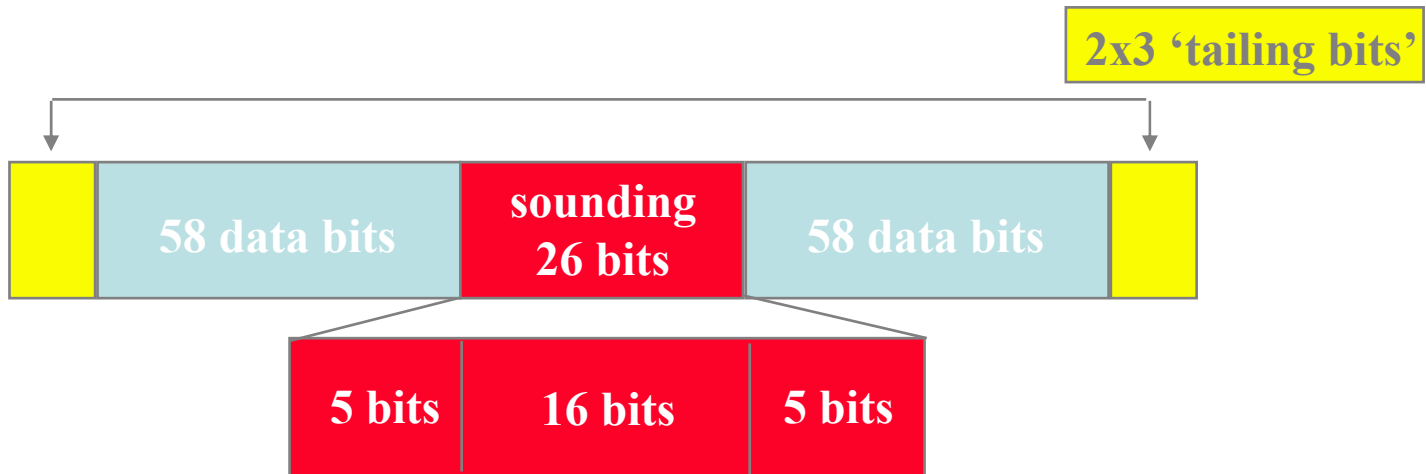


- Identificación Directa:



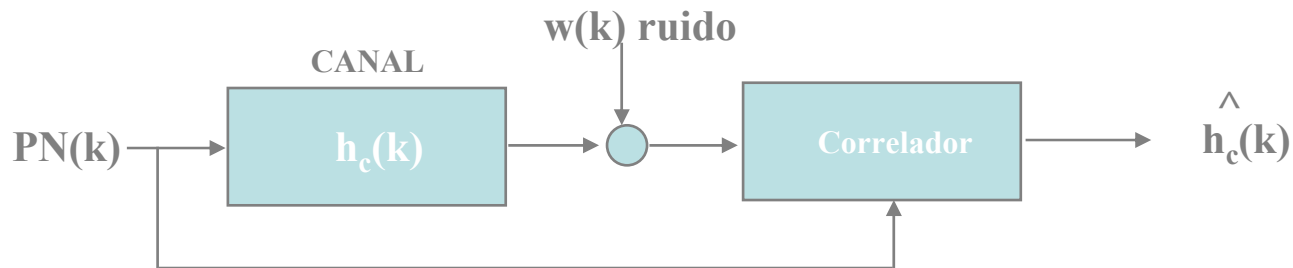
Identificación correlativa

- Se introduce una secuencia PN a la entrada del canal de forma periodica.
- En el sistema GSM se transmiten 26 bits de 'sounding' del canal. La distribución de los bits se organiza para que el sistema sea capaz de identificar respuestas impulsionales del canal de hasta 5 bits de duración. Estos bits se introducen en el centro de cada 'burst' (116 data bits+32 side information bits).
- El interés de centrar la secuencia PN radica en el mejor modelado del canal durante cada TDMA 'time slot'.
- La estructura de un 'burst' TDMA es de la forma:



Una vez identificado el canal, el receptor realiza una detección por Viterbi

Para el esquema de identificación:



Simplificando considerablemente, consideramos una secuencia PN(k) tal que:

$$R_{PN}(m) = \sum_{k(\text{cyclic})} PN(k+m)PN^*(k) = PN(k) \otimes_{\text{cyclic}} PN^*(-k) \cong \alpha\delta(k) = \begin{cases} \alpha & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

A la salida del canal se convoluciona la secuencia con la respuesta del canal:

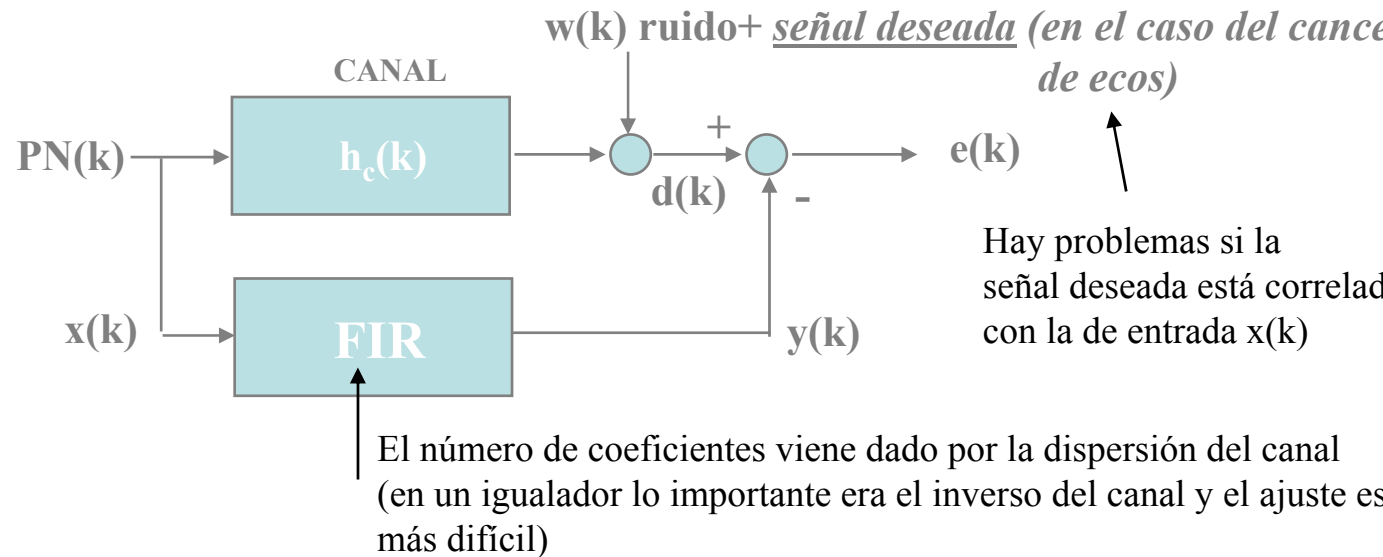
$$h_c(k) \otimes_{\text{linear}} PN(k)$$

Ignorando el término de ruido (muy razonable si tenemos en cuenta que los sistemas trabajan con buenas SNR o a la salida del correlador tendremos:

$$\hat{h}_c(k) = h_c(k) \otimes_{\text{linear}} [PN(k) \otimes_{\text{cyclic}} PN^*(-k)] \cong \alpha [h_c(k) \otimes_{\text{linear}} \delta(k)] = \alpha h_c(k)$$

Identificación directa por MMSE

La identificación del canal puede hacerse utilizando, de nuevo, el criterio de mínimo error cuadrático medio pero con una topología distinta. La secuencia de 'sounding' puede verse como de 'entrenamiento' al identificador.



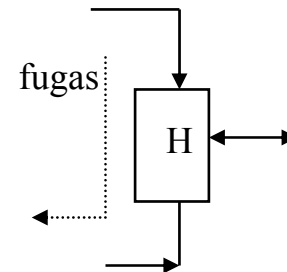
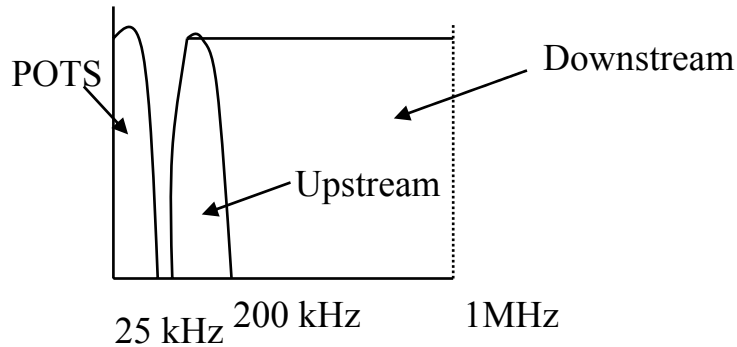
Los 26 bits de 'sounding' son conocidos por el receptor y se utilizan para entrenar al identificador para un criterio m.e.c.m., bien por inversión directa (filtro de Wiener) o mediante la aproximación recursiva R.L.S. Al igual que la técnica anterior, este nuevo procedimiento es sensible al ISI introducido por el canal pero no al ruido presente, (el ecualizador puede incrementar excesivamente el nivel de ruido).

En transmisión telefónica

*En el bucle digital de abonado la distancia suele estar limitada a unos 6 km y los ecos distantes no son tan problemáticos como el fenómeno del “cross-talk”.

*Antes de una conexión full-duplex (ej. V.34), cada transmisor sondea el canal por separado. A continuación durante la comunicación normal la identificación del canal se dificulta (“double talking”), no obstante, el problema no es grave porque el canal varía muy lentamente

*En ADSL hay una modalidad de transmisión (multicarrier ADSL) en la que tx. Ascendente y descendente comparten parte del ancho de banda



por ello es necesario emplear tanto canceladores de ecos como igualadores DFE (40 coeficientes)

*Los canceladores de memoria (look-up table) pueden reducir considerablemente el cálculo si el alfabeto es de poca dimensión y el canal presenta poco delay spread y es lentamente variante.