Rx óptima

1. Introducción

2. Igualación óptima según diversos criterios de calidad

- **2.1. Criterio MAP: receptor Bayesiano**
- **2.2. Criterio ML: receptor Viterbi**
- **2.3. Receptores subóptimos:**
    - **MMSE: - Arquitectura, Diseño**
        - **Filtro FIR con número finito de coeficientes**
        - **Filtro transversal síncrono**
        - **Ecualizador fraccionado**
    - **DFE: ecualizador realimentado por decisiones**
    - **DIR: *Desired truncated impulse response***

3. Igualación robusta: ciega, ruido no Gaussiano.

Introducción

Los igualadores y canceladores de ecos son una de las claves de los modems de alta velocidad o eficiciencia (bps/Hz

Por ejemplo, debido al fenómeno del “cross-talk”, el cable telefónico presenta un ancho de banda de unos 2.8 Khz para transmisión vocal. Teniendo en cuenta que la SNR es de unos 30 dB, su capacidad máxima es de 28 Kbps ($\log_2(1+10^3$ No obstante el “cross-talk” se puede solventar empleando técnicas de igualación. Estas aumentan el ancho de banda de 1MHz (para distancias habituales del bucle digital de abonado de 6 km). De este modo se pueden transmitir datos a va Mbps, tal y como contempla el estándar ADSL La transmisión ADSL evita el tener que sustituir los cables telefónicos cobre por fibra óptica y permite así la transmisión de datos a alta velocidad con bajo coste.

La implementación del V.34 (hasta 33.6 kbps en la línea telefónica) en un DSP consume:

- de 20 a 25 MIPS para la **recepción**
- del orden de 2.5 MIPS para la transmisión

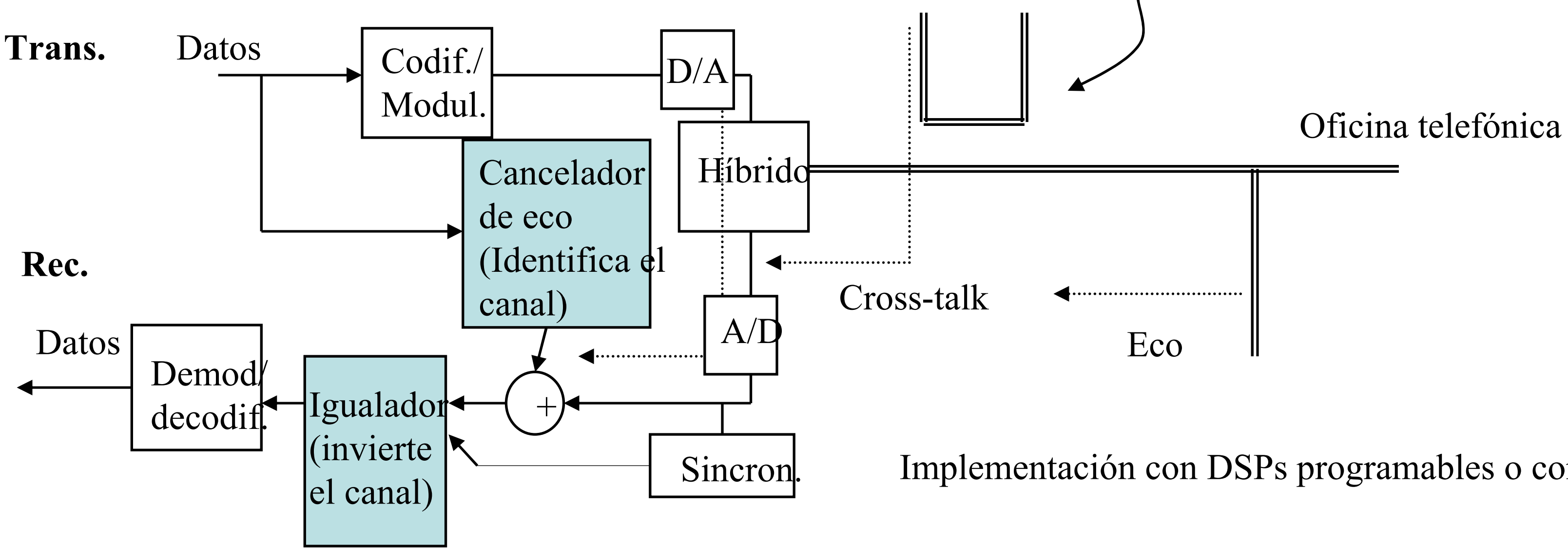
Ejemplo 1: modems (V.34 y ADSL)

33.6kpbs

Transmisión asimétrica : 1.5 Mbps hasta 6 Mbps

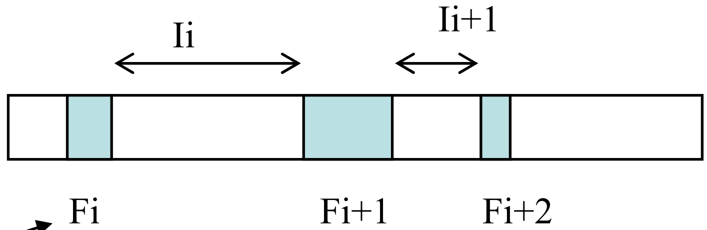
160 kbps hasta 640 kbps

Línea de abonado



Implementación con DSPs programables o con VLSI

Para facilitar la estimación de canal se impone una determinada estructura de la trama en la capa o nivel físico de la OSI



Para estimar el canal

$$ef = \frac{\bar{I}}{\bar{I} + \bar{F}}$$

La estructura se ha de ajustar a las características del canal para así llegar al mejor compromiso entre eficiencia y
(en canales invariantes no es necesario Fi salvo en una etapa inicial de sondeo; en canales variantes sí que es nec

Ejemplo : modem V.34

L1 y L2 son tonos de sondeo.

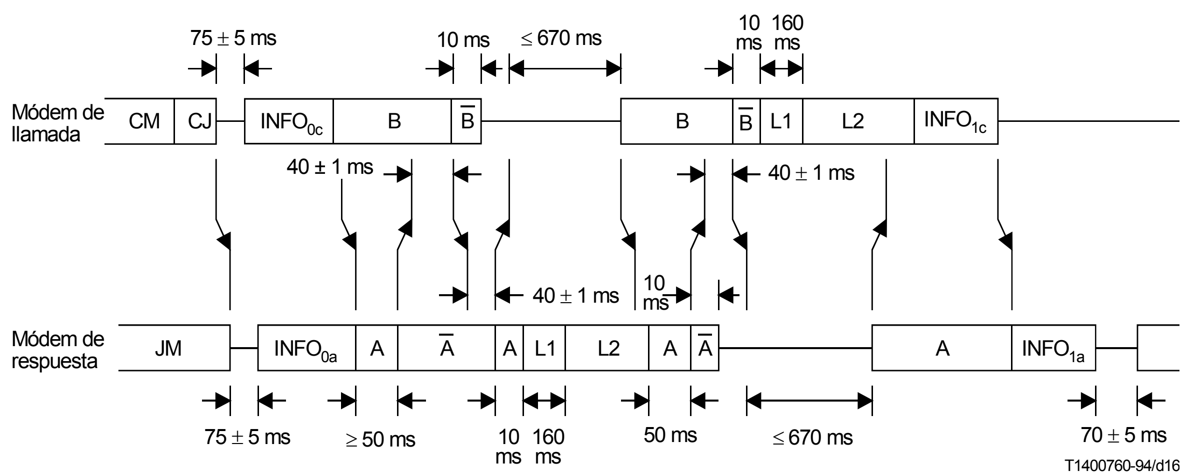


FIGURA 16/V.34

Fase 2 – Sondeo/determinación de distancia

Criterio de Máxima Verosimilitud (ML): Receptor de Viterbi

n un sistema de transmisión sería deseable el poder realizar un diseño óptimo de los filtros transmisor y receptor de modo ue se minimizara la probabilidad de error en presencia de ISI y ruido. No obstante dicho diseño de filtros terminales óptin equiere un canal de realimentación entre receptor y transmisor para que así el transmisor pueda conocer las características el canal y del ruido. Dicha realimentación complica la transmisión y no siempre es posible. Por ello se han de buscar iseños que minimicen la degradación introducida por el canal únicamente manipulando el receptor. A continuación preser nos dichos diseños clasificados de mayor a menor complejidad (de mejor a peores prestaciones):

- receptor no lineal de máxima verosimilitud
- receptores lineales y no lineales subóptimos

eceptor de Viterbi $\longrightarrow$ Es una forma de programación dinámica

n canal que introduce ISI, introduce memoria entre los símbolos y, por lo tanto, las decisiones de máxima verosimilitud se pueden realizar símbolo a símbolo, sino que se han de realizar sobre toda la secuencia de datos transmitida en base observar la secuencia recibida. En el caso de que la secuencia recibida tenga una longitud de N símbolos y el alfabeto npleado tenga un tamaño L, la búsqueda directa de la secuencia de máxima verosimilitud conlleva el cálculo de L^N tegrales de verosimilitud y sus correspondientes comparaciones. Dicha complejidad es inabordable (por ejemplo en una ansmisión binaria de N=1000 símbolos la complejidad es de 2^{1000}).

o obstante la recepción de máxima verosimilitud es posible gracias al **algoritmo de Viterbi** que hace que la complejidad a de L^M (M es la memoria del canal) y que esta complejidad <u>crezca linealmente, no exponencialmente, con la longitud N</u>.

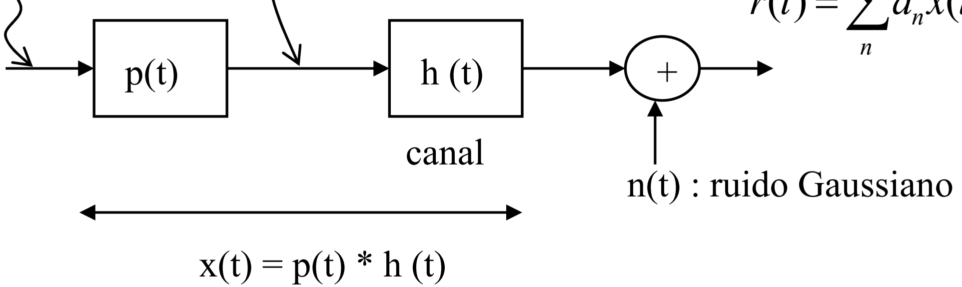
algoritmo de Viterbi es una forma de programación dinámica que se basa en el principio de optimalidad. Por ejemplo, se quiere encontrar la mínima distancia entre 2 puntos, según el principio de optimalidad, cualquier tramo del camino tal óptimo debe ser la mínima distancia entre los extremos de dicho tramo; ya que si no se podría reemplazar por otro.

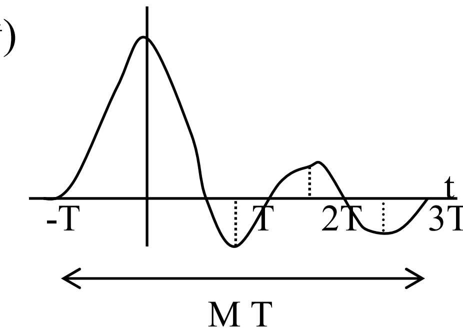
Como ejemplos de empleo, el receptor de Viterbi es el que se emplea en los receptores de comunicaciones móviles GSM así como en modems telefónicos de alta velocidad como el V.34.

Supongamos la transmisión de una señal PAM en banda base de L niveles

$$s(t)=\sum_n a_n \delta(t-nT) \qquad s(t)=\sum_n a_n p(t-nT)$$

$$r(t)=\sum_n a_n x(t-nT)+n(t)$$





El tiempo de observación es N1 T < t < (N2+M) T con N2 - N1 >> M

El receptor de máxima verosimilitud es el que maximiza:

$$f\left(r(t)\middle| a_{N1},\ldots,a_{N2},\, N_1T \le t \le (N_2+M)T\right)=\frac{1}{(2\pi N_o)^{k/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2N_o}\int_{T_{obs}}\left(r(t)-\sum_n a_n x(t-nT)\right)^2 dt\right\}$$

Dicha maximización equivale a minimizar la función denominada de verosimilitud

$$l\left(a_{N1},\ldots,a_{N2}\right)=\int_{T_{obs}}\left(r(t)-\sum_n a_n x(t-nT)\right)^2 dt$$

Desarrollando la función de verosimilitud se observa que su minimización se reduce a la minimización de

$$u_{N_2}=u(a_{N_1},\ldots,a_{N_2})=-2\sum_{k=N_1}^{N_2}a_k y_k+\sum_{l=N_1}^{N_2}\sum_{k=N_1}^{N_2}a_k a_l\, R_{k-l} \qquad (*)$$

Siendo yk la salida de un filtro adaptado al pulso recibido x(t) en el instante kT

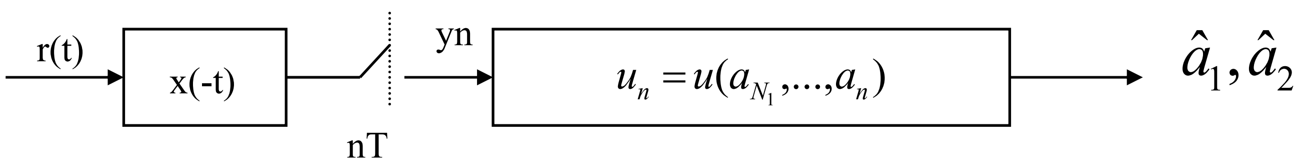
$$y_k=\int_{N_1T}^{(N_2+M)T}r(t)x(t-kT)dt=\sum_n a_n\, R_{k-n}+\eta_k$$

Es necesario conocer el canal

Ruido filtrado: $\eta_k=\int_{N_1T}^{(N_2+M)T}n(t)x(t-kT)dt$

Autocorrelación del pulso recibido $R_{k-l}=\int_{N_1T}^{(N_2+M)T}x(t-kT)x(t-lT)dt$

Una posible arquitectura de recepción es el receptor de Ungerboeck



Ejemplo: algoritmo de Viterbi para un canal Nyquist

$$R_k = E_x \delta_k \qquad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \qquad u_n = -2\sum_{k=1}^{n} a_k y_k + E_x \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = E_x \sum_{k=1}^{n}\left[\left(a_k - \frac{y_k}{E_x}\right)^2 - \frac{y^2{}_k}{E^2{}_x}\right]$$

a optimización se puede hacer símbolo a símbolo; ya que en un canal Nyquist las muestras son independientes y no se ga
ada por hacer un procesado en bloque

El algoritmo de Viterbi es un proceso iterativo para minimizar la función u_n expresada en (*)

$$\boxed{u_n = u_{n-1} - 2a_n y_n + 2a_n \sum_{k=n-M}^{n-1} a_k\, R_{n-l} + a_n^2 r_o} \qquad (**)$$

En donde se ha tenido en cuenta que $R_{k-l}=0$ para $/k-l/>$N

Se define el vector de estado **s**

$$\overbrace{\ldots\; a_{n-6}\; a_{n-5}\; a_{n-4}}^{s_{n-4}}\; a_{n-3}\; a_{n-2}\; a_{n-2}\; a_n\; a_{n+1}$$

$$\ldots\; a_{n-6}\; \underbrace{a_{n-5}\; a_{n-4}\; a_{n-3}}_{s_{n-3}}\; a_{n-2}\; a_{n-2}\; a_n\; a_{n+1}$$

$\mathbf{s}_n=\{a_{n-M+1} \ldots\ldots a_n\}$ para un canal de memoria M

Si L es el tamaño del alfabeto, $\mathbf{s}_n$ puede tener L^M valores

A partir de la definición del vector de estado, la ecuación recursiva (**) se puede escribir como

naturaleza aditiva

$$u_n = D(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..\mathbf{s}_n) = u_{n-1} + d(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_{n-1}; R_n) \quad \text{con} \quad d(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_{n-1}; R_n) = -2a_n R_n + 2a_n \sum_{k=n-M}^{n-1} a_k R_{n-k} + a_n^2 R_o$$

distancia de transición

Si a continuación se define

$$D(\mathbf{s}_n) = min_{\mathbf{s}_{n-M+1}...\mathbf{s}_{n-1}/\mathbf{s}_n} \underbrace{D(\mathbf{s}_{n-M+1}...\mathbf{s}_n)}_{u_n} = min_{\mathbf{s}_{n-1}/\mathbf{s}_n} \left\{ min_{\mathbf{s}_{n-M+1}...\mathbf{s}_{n-2}/\mathbf{s}_{n-1}} \left(D(\mathbf{s}_{n-M+1}...\mathbf{s}_{n-1}) + d(\mathbf{s}_{n-1}...\mathbf{s}_n; R_n) \right) \right\}$$

(se aplicará el principio de optimalidad)

Se obtiene que el mínimo de u $_n$ se puede obtener a partir del de u $_{n-1}$

$$D(\mathbf{s}_n) = min_{\mathbf{s}_{n-1}/\mathbf{s}_n} \left\{ D(\mathbf{s}_{n-1}) + d(\mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{s}_n; R_n) \right\} \quad (***)$$

Ello es la base del **algoritmo de Viterbi**:

- Para cada **s**n, determinar los L valores de $d(\mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{s}_n; R_n)$ Correspondientes a los L valores de **s**n-1

Ej.: si en nT **s** $_n$=(a $_{n-1}$ =-1, a $_n$=1) este estado sólo puede provenir del estado **s** $_{n-1}$=(a $_{n-2}$ =1, a $_{n-1}$= -1) o **s** $_{n-1}$=(a $_{n-2}$ =-1, a $_{n-1}$= -1)

- Para cada posible valor de los L estados **s** $_{n-1}$ añadir $D(\mathbf{s}_{n-1})$ de la trayectoria óptima hasta **s** $_{n-1}$

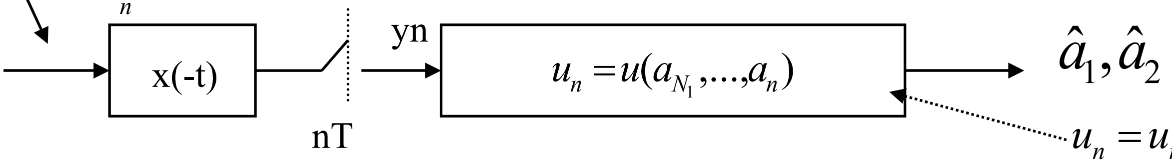
$d(\mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{s}_n; R_n)$

- Designar como candidato a "path" óptimo **s**n el que da la métrica menor de las L calculadas --> $D(\mathbf{s}_{n-1})$ y se guarda junto con el camino óptimo

Ejemplo: receptor móvil GSM

Implementación del receptor de Ungerboeck para canales móviles con propagación multicamino o “fading”

$$r(t)=\sum_n a_n x(t-nT)+n(t)$$



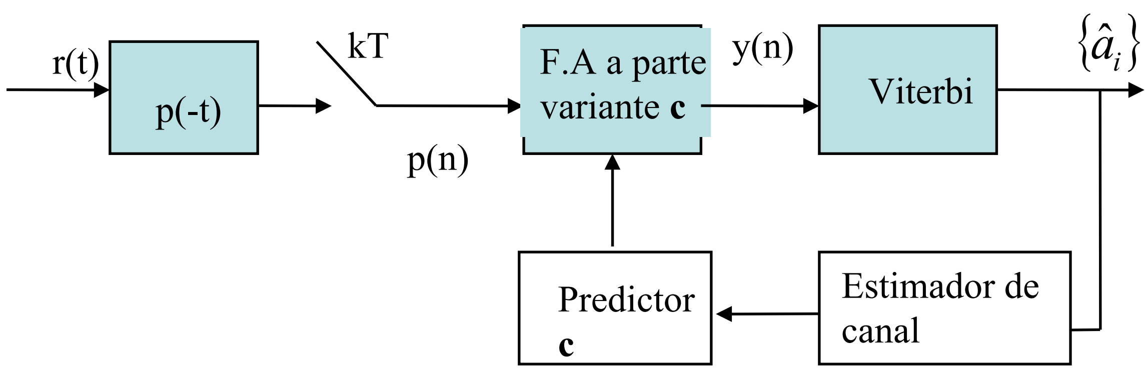
$$u_n = u_{n-1} - 2a_n y_n + 2a_n \sum_{k=n-M}^{n-1} a_k R_{n-l} + a_n^2 r$$

En este caso el pulso equivalente de la señal recibida es $x(\tau;t)=\sum_j c(jT;t)p(\tau-jT)$

$$y(n)=\sum_j \int_{t\in I} c^*(j;t)p^*(t-(j+n)T)r(t)dt \approx \sum_{j=0}^{J-1} c^*(j;n+j)g^*(j+n)$$

Si c(j;t) es lento respecto a p(t)

con $\quad g(n)=\int_{t\in I} p^*(t-nT)r(t)dt$



Observaciones

Ruido blanco

Si p(t) es raíz de Nyquist $g(n)=\sum_{j=0}^{J-1} a_{n-j}c(j;n)+w(n)$ $\longrightarrow$ Se simplifica la mética u_n

Por otra parte, para calcular la métrica u_n en el algoritmo de Viterbi se necesita

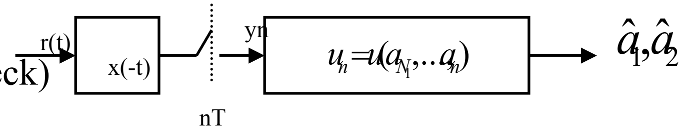
$$R(l,n)=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{J-1}\int_{t+nT\in I} c^*(j;t+nT)c(k;t+nT)p^*(t-jT)p(t+(l-k)T)dt \approx$$

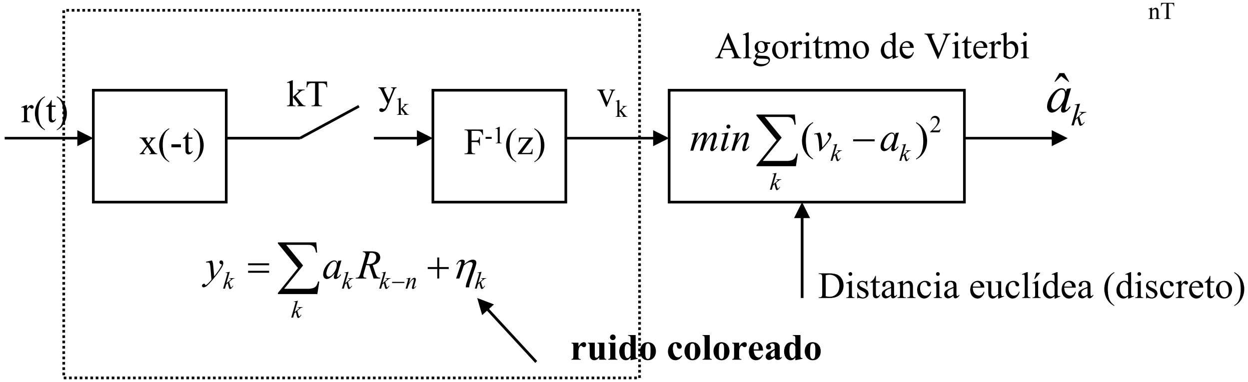
Nyquist

$$\approx \sum_{j}\sum_{k} c^*(j;n+j)c(k;n+k-l)R_p(l+j-k) \approx \sum_{j=0}^{J-1-l} c^*(j;n+j)c(j+l;n+j)$$

Variación lenta

Receptor de Forney (arquitectura alternativa a la de Ungerboeck)





Filtro adaptado

Esta arquitectura es útil a la hora de evaluar las prestaciones.

Estadística suficiente y_k

$$R_\eta(f) = T \sum_k R_k e^{-j2\pi fkT} = \sum_k \left| X(f + \frac{k}{T}) \right|^2 \qquad |f| \le \frac{1}{2T}$$

Ruido blanco

$$R_\eta(f) = F(f).F^*(f) \rightarrow R_k = f_k * f_{-k} \qquad v_k = \sum_l a_l f_{k-l} + w_k \qquad k = 0,1,2\ldots$$

Aplicando (*) el algoritmo de Viterbi se reduce a:

$$min_{\hat{a}_k} \sum_k (v_k - \hat{a}_k)^2$$

$$u_n = u_{n-1} - 2a_n y_n + 2a_n \sum_{k=n-M}^{n-1} a_k R_{n-l} + a_n^2 r_o$$

Data sequence

El fenómeno denominado “merge” permite tomar decisiones antes de recibir toda la secuencia. Experimentalmente s observa que en un tiempo 3 o 4 veces M sucede un “merge”: todos los “paths” óptimos pasan por un determinado val y se puede tomar la decisión y no es necesaria tanta memoria.

Prestaciones del algoritmo de Viterbi

El algoritmo de Viterbi es un problema de decisión entre L^N secuencias. Con este enfoque, la probabilidad de símbolo q se obtiene está acotada por

$$pe \underset{\approx}{<} kQ\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$ Para SNR grandes es la distancia entre secuencias la que determina la pe

$$d^2{}_{min} = min_{i\neq j} d_{ij}^2 \qquad d_{ij}^2 = \int_0^{NT} \varepsilon_{ij}^2(t)dt$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)} x(t-nT) + n(t) = s_m(t) + n(t) \qquad m = 1..L^N$$

Secuencia error suponiendo que se ha tx. sj

$$\varepsilon_{ij}(t) = s_j(t) - s_i(t) = \sum_{n=1}^{N} (a_n^{(i)} - a_n^{(j)}) x(t-nT) = \sum_n \varepsilon_n^{(ij)} x(t-nT)$$

1. ML

Estructuras ML subóptimas

En transmisión por canales telefónicos, M>9 fácilmente y por lo tanto se tiene un número elevado de vectores de esta

Ej: L=4 --> 4^{10}=1048576

Ello supone que se han de almacenar:

- Para cada estado: trayectorias de longitud M tramos

- Cada tramo necesita $\log_2 L^M \ bits$ bits de almacenamiento

$$\downarrow$$

$$L^M \ M \log_2 L^M = 2.10^8 bits \quad !!$$ Sin tener en cuenta las necesidades de cálculo

1ª Alternativa: - igualar parcialmente ---> reducir M

2ª Alternativa: - eliminar aquellos estados (y las trayectorias que llevan a los mismos) menos probables

El detector Bayesiano se diferencia del detector MLSE en que:

MLSE:

$$P_{x/y}\left(\{\mathbf{x}(k-d)=1\}\ \middle|\mathbf{y}(k)\right)=P_{x/y}\left(\{\mathbf{x}(k-d)=-1\}\ \middle|\mathbf{y}(k)\right)$$

Máximiza la probabilidad de una secuencia, en cambio Bayes maximiza la suma de las probabilidades condicionadas por todas las secuencias asociadas con el símbolo x(k-d). **Por lo tanto Bayes ofrece una menor probabilidad de error el MLSE (Viterbi).**

Aplicaciones:

* Interferencia co-canal:

$$\mathbf{y}(k)=\left[\mathbf{H}\ \mathbf{H}_c\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{x}_c(k)\end{bmatrix}+\mathbf{n}(k)$$

*Detectores multi-usuario en el móvil (enlace de bajada): Vector que contiene la información de cada usua

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{H}\begin{bmatrix}\mathbf{Cu}(k)\\ \mathbf{Cu}(k-1)\end{bmatrix}+\mathbf{n}(k)$$

Referencias: B. Mulgrew, “Applying Radial Basis Functions,” IEEE Signal Processing Magazine, March 1996.

Igualación óptima MAP: receptor de Bayes

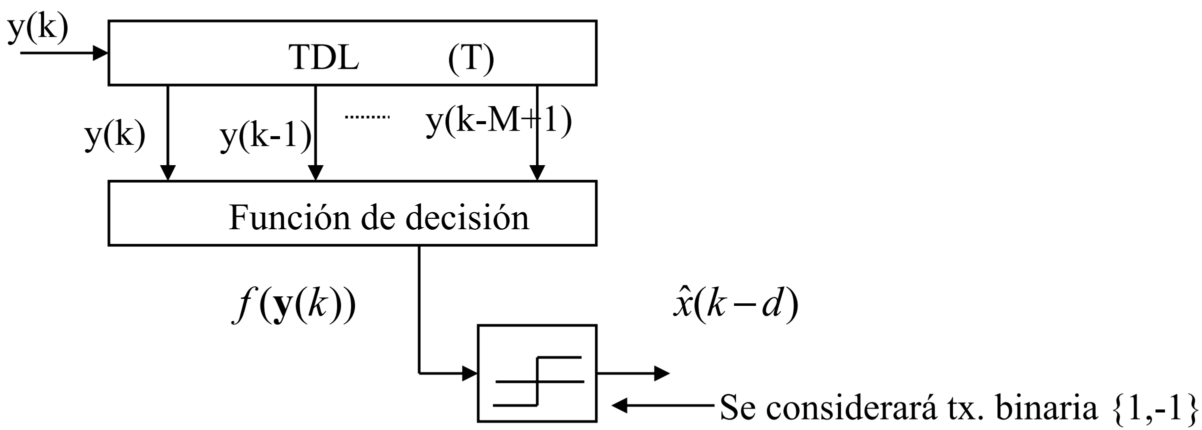
Son técnicas <u>no lineales</u> que minimizan la probabilidad de error a través de una detección símbolo a símbolo y técnicas adaptativas de gradiente.

Supóngase un modelo FIR para el canal $H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} h_i z^{-i} \longrightarrow y(k)=\sum_{i=0}^{N-1} h_i x(k-i)+n(k)$

Entrada al canal

Entrada igualador

Y un igualador "feedforward" como el de la figura



Todos los posibles estados del vector $\mathbf{y}$(k) vienen dados por la siguiente ecuación (caso de canal con dispersión de 2 símbolos N=2 y con TDL de 1 retardo)

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_o & h_1 & 0 \\ 0 & h_o & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(k) \\ n(k-1) \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{y}(k)=\mathbf{H}\mathbf{x}(k)+\mathbf{n}(k)$$

<u>Interpretación útil también para detección multi-usuario y para cancelar interferencias</u>

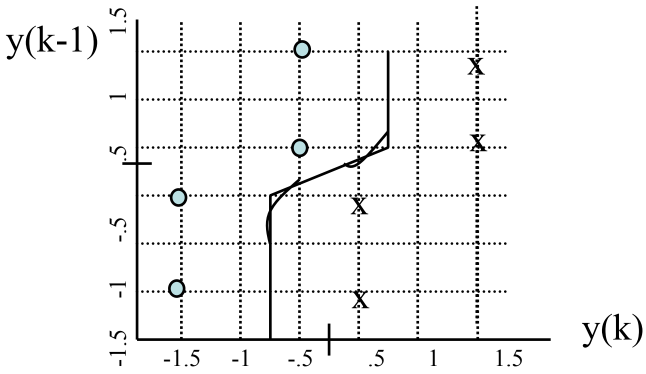
Para el caso general de que la ISI se extienda a N símbolos e **y**(k) tenga M elementos, la matriz **H** que contiene la respuesta impulsional del canal, será una matriz Toeptliz de dimensiones M x (M+N-1).

El vector **x**(k) con 3 componenentes presenta un total de 2^3 estados, y por lo tanto, en ausencia de ruido, **y**(k) presentará un total de 2^3 estados.

Ej: $H(z)= 1+0.5\ z^{-1}$

x(k)	x(k-1)	x(k-2)	y(k)	y(k-1)
-1	-1	-1	-1.5	-1.5
-1	-1	1	-1.5	-0.5
-1	1	-1	-.5	.5
-1	1	1	-.5	1.5
1	-1	-1	.5	-1.5
1	-1	1	.5	-.5
1	1	-1	1.5	.5
1	1	1	1.5	1.5

El problema de igualación se puede interpretar como un **problema de clasificación**



o El vector de salida **y**(k) es producido por x(k)=

x El vector de salida **y**(k) es producido por x(k)

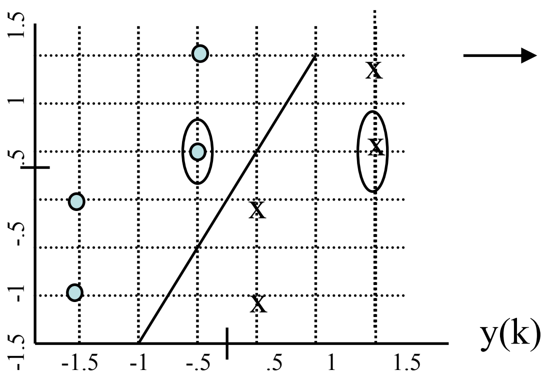
En el caso de una transmisión binaria polar {1,-1}, si el igualador es lineal con función de transferencia C(z), la frontera d
decisión viene determinada por los puntos en donde $\mathbf{c}^T \mathbf{y}(k)=0$ (hiperplanos)

Ej.: si el ígualador sólo tiene dos coeficientes, entonces la frontera de decisión viene dada por una recta $c_o\, y(k)+c_1\, y(k-1)$

Si estos coeficientes se calculan con el criterio MMSE se obtiene un igualador lineal síncrono a T.

Problemática del igualador lineal

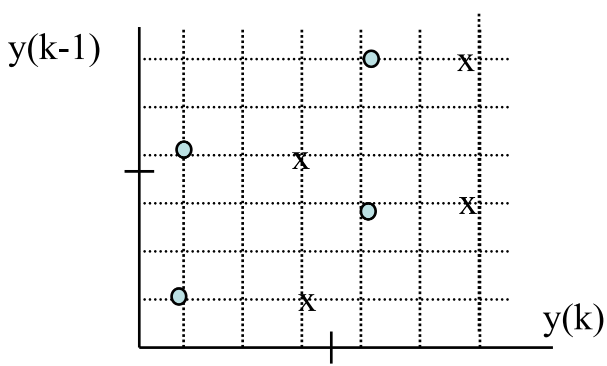
* No minimizan la probabilidad de error



La salida del canal $[-0.5, .5]^T$ tiene más probabili
de no ser detectada correctamente que $[1.5, .5]^T$

* En los canales de fase no mínima (ej.: comunicaciones "indoor") no se pueden separar las clases con una línea rec

$H(z)= 0.5+1\, z^{-1}$



La frontera de decisión óptima sería la que cumple

$$P_{x/y}\left(\{x(k-d)=1\}\ \middle|\ \mathbf{y}(k)\right)=P_{x/y}\left(\{x(k-d)=-1\}\ \middle|\ \mathbf{y}(k)\right)$$

Aplicando la regla de Bayes y suponiendo símbolos equiprobables, se obtiene la siguiente función de decisión

$$\boxed{f_b=\mathbf{y}(k)=f_{y/x}\left(\mathbf{y}(k)\ \middle|\ \{x(k-d)=1\}\right)-f_{y/x}\left(\mathbf{y}(k)\ \middle|\ \{x(k-d)=-1\}\right)}$$

IGUALADOR BAYESIANO

Con región de decisión asociada igual a: $f_b(\mathbf{y}(k))=0$. Si $f<0$ $\quad x(k-d)=-1$

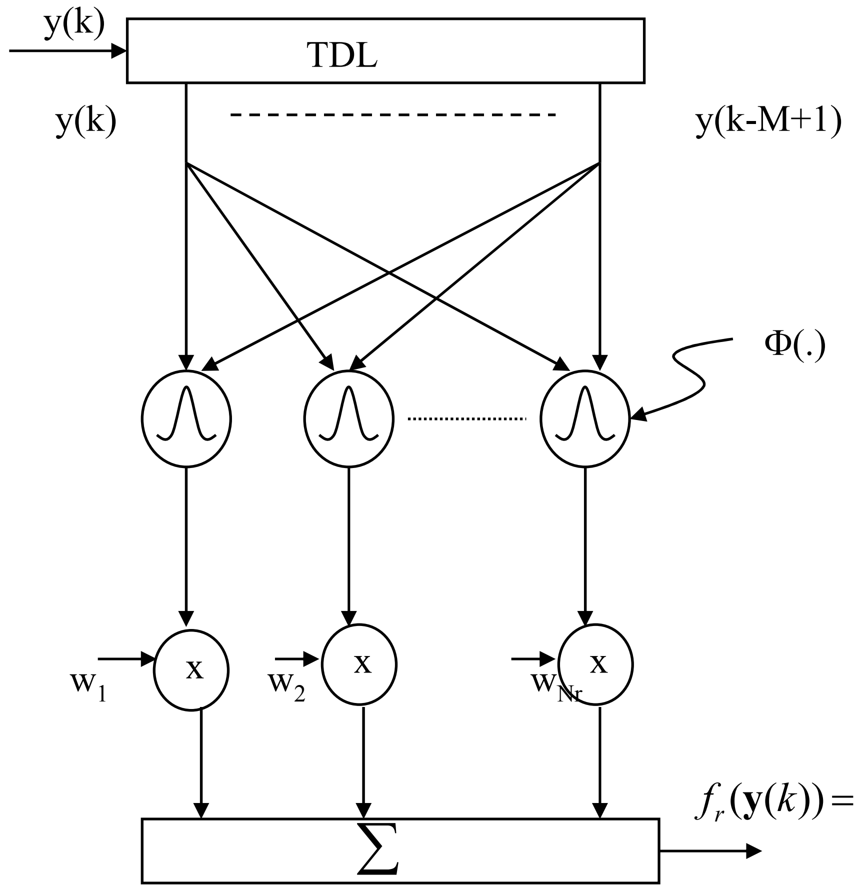
En el caso de que el ruido sea Gaussiano, la función de decisión Bayesiana tiene una expresión sencilla

$$f_b(y(k))=\sum_{y_i^{'}\in S^+}\frac{\exp\left(-\dfrac{\left|\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}_i^{'}\right|^2}{2\sigma_n^2}\right)}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{Nr/2}Nr}-\sum_{y_j^{'}\in S^-}\frac{\exp\left(-\dfrac{\left|\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}_j^{'}\right|^2}{2\sigma_n^2}\right)}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{Nr/2}Nr}=\sum_{i=1}^{2}w_i\Phi\left(\left|\mathbf{y}(k)-\mathbf{c}_i\right|\right)$$

En donde el conjunto de salidas sin ruido **y**'=**H x** se ha dividido en dos conjuntos

$$S^+=\{\mathbf{y}'(k)/x(k-d)=1\}\qquad S^-=\{\mathbf{y}'(k)/x(k-d)=-1\}$$

2.MAP



$$f_r(\mathbf{y}(k)) = \sum_{i=1}^{N_r} w_i \Phi\left(\left|\mathbf{y}(k) - \mathbf{c}_i\right|\right)$$

Función de Base Radial (RBF): inicialmen
surgió como interpolador

Los parámetros de la RBF pueden entrenarse con algoritmos adaptativos (LMS o RLS)