Escola Superior d’Agricultura de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

PROBLEMES RESOLTS D’EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES i MÈTODES NUMÈRICS

MÒNICA BLANCO
MARTA GINOVART

MAIG, 2002

CONTINGUTS

1. GENERALITATS DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS

2. EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES DE VARIABLES SEPARABLES

3. EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES HOMOGÈNIES

4. EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS DE PRIMER ORDRE, BERNOULLI I RICATTI

5. EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS DE SEGON ORDRE A COEFICIENTS CONSTANTS

6. EQUACIONS DIFERENCIALS EXACTES

7. APLICACIONS

8. MÈTODES NUMÈRICS

***Nota**: Esperem comprensió per part del lector dels possibles errors no detectats i també agrairem qualsevol suggeriment o comentari sobre aquesta publicació.*

G: GENERALITATS DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS

G1. Comproveu que $y = y(x) = C\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ és solució de $y' + 2y = e^x$. Trobeu la solució de l'equació donada tal que $y(0)=1$.

Per comprovar que $y = y(x) = C\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ és solució de $y' + 2y = e^x$, hem de substituir aquesta expressió i la seva derivada en l'edo i verificar la igualtat.

(1) $y = y(x) = C\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$

$$y' + 2y = e^x \xrightarrow{\text{Substituïm}} \underbrace{-2C\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x}_{y'} + 2\underbrace{\left(C\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x\right)}_{y} = e^x \Rightarrow e^x = e^x \quad \text{OK!}$$

(2) $y(0) = 1 \to y(0) = C\cdot e^{-2\cdot 0} + \frac{1}{3}e^0 = 1 \Rightarrow C + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Solució particular: $y = \frac{2}{3}\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$

G2. Si tirem una pedra enlaire, verticalment, a quina altura arribarà?. Considereu la pedra com un punt, i només actuant el camp gravitatori.

La funció que descriu el moviment és: $x=x(t)$=posició (altura) de la pedra en l'instant t.

L'edo plantejada és: $F = m\cdot a \Rightarrow -m\cdot g = m\cdot a \Rightarrow a = \frac{d^{2x}}{dt^2} = -g \xrightarrow{\text{Integrem}} \frac{dx}{dt} = -gt + K_1 \xrightarrow{\text{Integrem}}$

$\to x = x(t) = -\frac{1}{2}g\cdot t^2 + K_1 t + K_2$

S'han de verificar les condicions:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \to K_2 = 0 \\ v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \to v_0 = K_1 \end{cases}$$

Per tant : $x(t) = -\frac{1}{2}g\cdot t^2 + v_0\cdot t$

L'altura màxima s'assoleix quan $v(t) = 0 \Rightarrow -g\cdot t + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = g\cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$ instant en què s'assoleix l'altura màxima:

$$x\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{1}{2}g\frac{v^2{}_0}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = -\frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{g^2} + \frac{v^2{}_0}{g} = \frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{g}$$

La solució és $\frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{g}$, essent $v^2{}_0$ la velocitat inicial i g la gravetat.

G3. Trobeu les funcions que satisfan l'equació diferencial $y(x)y''(x) = (y'(x))^2$.
Indicació: Utilitzeu el canvi de funció $z(x) = \ln y(x)$, i trobeu primer quines funcions $z(x)$ compleixen l'equació.

$y = y(x) \to yy'' = (y')^2$

Canvi: $z = \ln x \Rightarrow y = e^z \to y' = z'e^z \to y'' = z''e^z + (z')^2 e^z = e^z\left(z'' + (z')^2\right)$

Substituint *y,y´.y´´* s'obté una edo expressada en funció de *z,z´,z´´:*

$yy'' = (y')^2 \xrightarrow{\text{Substituïm}} e^z\left(z''e^z + (z')^2 e^z = e^z\left(z'' + (z')^2\right)z\right) = \left(z'e^z\right)^2 \Rightarrow e^{2z}\left(z'' + (z')^2\right) = (z')^2 e^{2z} \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' + (z')^2 = (z')^2 \Rightarrow z'' = 0 \xrightarrow{\text{Integrem}} z' = K \xrightarrow{\text{Integrem}} z = Kx + C$

$y = e^z \xrightarrow{\text{Substituïm}} y = e^{Kx+C}$

Solució general: $y(x) = e^{Kx+C}$

G4. Donada la família de corbes $y = \dfrac{a}{x}$ (*a* és el paràmetre), doneu l'equació diferencial associada.

$y' = -\dfrac{a}{x^2} \xrightarrow{a=xy} y' = -\dfrac{xy}{x^2} \Rightarrow y' = -\dfrac{y}{x}$ Edo associada a la família de corbes uniparamètrica $y = \dfrac{a}{x}$.

G5. Doneu l'e.d.o. associada a la família de corbes $y = a{\cdot}e^{\frac{x}{a}}$.

$$\left.\begin{aligned} y' &= a{\cdot}e^{\frac{x}{a}}\frac{1}{a} \Rightarrow y' = e^{\frac{x}{a}} \\ y &= a{\cdot}e^{\frac{x}{a}} \end{aligned}\right\} \to \frac{y'}{y} = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a{\cdot}e^{\frac{x}{a}}} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{a}$$

$y' = e^{x\left(\frac{y'}{y}\right)} = e^{\frac{xy'}{y}} \Rightarrow \ln y' = \dfrac{xy'}{y} \Rightarrow y\ln y' - xy' = 0$ Edo associada a la família de corbes uniparamètrica $y = a{\cdot}e^{\frac{x}{a}}$.

G6. Donada la família de corbes $y^2 + x^2 - Ky = 0$, doneu-ne l'equació diferencial associada.

$y^2 + x^2 - Ky = 0 \xrightarrow[\text{implícitament}]{\text{Derivem}} 2yy' + 2x - Ky' = 0$

$y^2 + x^2 - Ky = 0 \Rightarrow K = \dfrac{y^2 + x^2}{y}$

Substituïm:

$2yy' + 2x - \left(\dfrac{y^2 + x^2}{y}\right)y' = 0 \Rightarrow 2yy' + 2x - yy' - \dfrac{x^2}{y}y' = 0 \Rightarrow \left(y - \dfrac{x^2}{y}\right)y' + 2x = 0$ Edo associada a la família de corbes uniparamètrica $y^2 + x^2 - Ky = 0$.

G7. Comproveu que $x(t) = t{\cdot}e^t$ i $y(t) = e^{-t}$ és una solució parametritzada de l'e.d.o. $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

$x = t{\cdot}e^t = h_1(t)$

$y = e^{-t} = h_2(t)$

$$y \overset{?}{=} \varphi(x) = h_2\left(h_1^{-1}(x)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dh_2(t)}{dt}\cdot\frac{dh_1^{-1}(x)}{dx} = -e^{-t}\frac{1}{\frac{dh_1}{dt}} = -e^{-t}\frac{1}{e^t + te^t} = -e^{-t}\frac{1}{e^t(1+t)} = -e^{-2t}\frac{1}{1+t}$$

o bé: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\left(1+te^t\cdot e^{-t}\right)\left(-e^{-2t}\frac{1}{1+t}\right) + e^{-2t} = -(1+t)\frac{1}{1+t}e^{-2t} + e^{-2t} = -e^{-2t} + e^{-2t} = 0 \quad \text{OK!}$$

G8. Trobeu les trajectòries ortogonals a cadascuna de les famílies de corbes planes donades:

a) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = c^2}$

$x^2 + y^2 = c^2$ Família de circumferències de centre (0,0) i radi *c*.
Derivem implicitament:

1er) $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ Edo associada a la família de corbes $x^2 + y^2 = c^2$.

D'aquesta forma coneixem el pendent de la tangent en qualsevol punt, de cada membre.

Les trajectòries ortogonals s'obtenen resolent aquesta edo $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + K \Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = e^K|x| \Rightarrow y = K_1 x$ (on $K_1 \neq 0$) de la família de trajectòries ortogonals.

b) $\boldsymbol{y = c\cdot x^2}$

$y = c\cdot x^2 \Rightarrow c = \frac{y}{x^2}$

1er) $y' = 2c\cdot x = 2\frac{y}{x^2}x = 2\frac{y}{x}$

2on) $y' = -\frac{1}{2\frac{y}{x}} = -\frac{x}{2y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow 2ydy = -xdx \xrightarrow{\text{Integrem}} 2\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K \Rightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} = K \Rightarrow 2y^2 + x^2 = K^2$$

c) $\boldsymbol{y = \frac{c\cdot x}{1+x}}$

$y = \frac{c\cdot x}{1+x} \Rightarrow \frac{(1+x)y}{x} = c$

1er) $y' = \frac{c(1+x) - c\cdot x}{(1+x)^2} = \frac{c + c\cdot x - c\cdot x}{(1+x)^2} = \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{\frac{(1+x)y}{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)y}{x(1+x)^2} = \frac{y}{x(1+x)}$

2on) $y' = \frac{x(1+x)}{y}$ separable

$$ydy=-(x+x^2)dx \rightarrow \frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+K \Rightarrow \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}=K \Rightarrow \frac{3y^2+3x^2+2x^3}{6}=K \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y^2+3x^2+2x^3=6K=C$$

G9. Trobeu l'equació diferencial de segon ordre que és satisfeta per les funcions $\boldsymbol{y=Ae^x+Be^{2x}}$.

$y=Ae^x+Be^{2x} \Rightarrow Be^{2x}=y-Ae^x$
$y'=Ae^x+2Be^{2x}$
$y''=Ae^x+4Be^{2x}$

$$\begin{cases} y'=Ae^x+2(y-Ae^x) \\ y''=Ae^x+4(y-Ae^x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=2y-Ae^x \\ y''=4y-3Ae^x \end{cases} \xRightarrow{\text{Multipliquem la } 1^{\text{a}} \text{ equació per 3}} \begin{cases} -3y'=-6y+3Ae^x \\ \underline{y''=4y-3Ae^x} \end{cases}$$
$$y''-3y'=-2y \Rightarrow y''-3y+2y'=0$$

$y''-3y+2y'=0$ edo associada a la família biparamètrica $y=Ae^x+Be^{2x}$.

G10. En coordenades cartesianes, trobeu l'e.d.o. que representa totes les circumferències que podem tenir en el pla.

L'equació general de les circumferències del pla és:
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Com que aquesta equació presenta tres paràmetres, l'hem de derivar tres cops:
I) $2(x-a)+2y'(y-b)=0$
II) $2+2y''(y-b)+2y'\cdot y'=0 \Rightarrow 1+y''(y-b)+(y')^2=0 \Rightarrow y''(y-b)=-(y')^2-1 \Rightarrow$
$$\Rightarrow y-b=\frac{-(y')^2-1}{y''}$$
III) $y'''(y-b)+y''y'+2y'y''=0 \Rightarrow y'''(y'-b)+3y''y=0 \xrightarrow{\text{Substituïm}}$
$$\rightarrow y'''\left(\frac{-(y')^2-1}{y''}\right)+3y''y'=0 \Rightarrow -y'''(y')^2-y'''+3(y'')^2y'=0$$ edo associada a les circumferències del pla.

G11. Trobeu una solució de tipus polinòmic per a l'equació diferencial:
$$\boldsymbol{y'(x)=\frac{y(x)}{x}+x^3(y(x))^2-x^5}$$

<u>1er intent</u>: $y=k \rightarrow y'=0$
$\forall x$ s'ha verificar la identitat:
$0=\frac{k}{x}+x^3k^2-x^5 \Rightarrow 0=k+x^4k^2-x^6$. Perquè l'expressió polinòmica $-x^6+k^2x^4+k$ fos idènticament nul·la tots els coeficients haurien de ser 0: $\begin{cases} k=0 \\ k^2=0 \\ -1=0 \text{ Absurd} \end{cases}$

Per tant, $y=k$ queda descartada.

<u>2on intent</u>: $y=ax+b \rightarrow y'=a$

$$a = \frac{ax+b}{x} + x^3(ax+b)^2 - x^5 \Rightarrow ax = ax + b + x^4\left(a^2x^2 + b^2 + 2abx\right) - x^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = b + a^2x^6 + b^2x^4 + abx^5 - x^6 \Rightarrow 0 = \left(a^2 - 1\right)x^6 + 2abx^5 + b^2x^4 + b$$

Perquè l'expressió polinòmica $\left(a^2 - 1\right)x^6 + 2abx^5 + b^2x^4 + b$ sigui idènticament nul·la cal que tots els coeficients siguin 0: $\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ ab = 0 \\ b^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Per tant $y = \pm x$ és solució (de tipus polinòmic) de l'edo proposada.

S: EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES DE VARIABLES SEPARABLES.

S1. Resoleu:

a) $\mathbf{(1+x)dy - ydx = 0}$

$$(1+x)dy - ydx = 0 \Rightarrow (1+x)dy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|1+x| + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\ln|1+x|+C_1} \Rightarrow \underbrace{e^{C_1}}_{\text{Sempre}+} |1+x| \Rightarrow y = C(1+x)$$

b) $\mathbf{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ amb la condició $y(4)=3$

$$y\cdot dy = -x\cdot dx \to \int y\cdot dy = \int -x\cdot dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

Solució general:

$x^2 + y^2 = 2C = K^2 \to$ família de circumferències concèntriques.

Si $x = 4 \to y = 3 : 16 + 9 = 25 = K^2 (\to K = 5)$

Solució particular:

$x^2 + y^2 = 25 \to$ circumferència de centre (0,0) i radi 5.

Pel teorema Picard, aquesta solució és única.

c) $\mathbf{x(\sin x)e^{-y}dx - ydy = 0}$

$e^y x(\sin x)e^{-y}dx - e^y ydy = 0 \Rightarrow x\sin xdx - e^y dy = 0 \Rightarrow x\sin xdx = e^y dy$ (*)

PARTS:

(I)

$$\int x\sin xdx = \left(\begin{array}{c} u = x \to du = dx \\ dv = \sin xdx \to v = -\cos x \end{array} \right) = -x\cos x - \int -\cos xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x$$

(II)

$$\int ye^y dy = \left(\begin{array}{c} u = x \to du = dx \\ dv = \sin xdx \to v = -\cos x \end{array} \right) = ye^y - \int e^y dy = ye^y - e^y$$

(*) $(y-1)e^y = -x\cos x + \sin x + C$

d) $\mathbf{y' = y^2 - 4}$ **amb** $\mathbf{y(0) = -2}$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{y^2-4} = dx$$

$\left\{ \begin{array}{l} y = -2 \to y' = 0 \\ y' = y^2 - 4 = 2 - 2 = 0 \end{array} \right. \to y = -2$, és solució singular.

$$\int \frac{dy}{y^2-4} \longrightarrow \frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2} = \frac{A(y+2)+B(y-2)}{y^2-4} = \frac{Ay+2A+By-2B}{y^2-4} =$$

$$=\frac{Ay+2A+By-2B}{y^2-4}=\frac{(A+B)y+(2A-2B)}{y^2-4}\to\begin{cases}A+B=0\Rightarrow B=-A & \Rightarrow B=-\frac{1}{4}\\ 2A-2B=1 & \Rightarrow 2A+2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\int\frac{dy}{y^2-4}=\int\frac{1/4}{y-2}+\int\frac{-1/4}{y+2}=\frac{1}{4}\ln|y-2|-\frac{1}{4}\ln|y+2|=\frac{1}{4}\ln\frac{|y-2|}{|y+2|}$$

$$\int\frac{dy}{y^2-4}=\int dx\Rightarrow\frac{1}{4}\ln\frac{|y-2|}{|y+2|}=x+C\Rightarrow\ln\frac{|y-2|}{|y+2|}=4x+4C\Rightarrow\frac{|y-2|}{|y+2|}=e^{4x}\cdot e^{4C}\Rightarrow\frac{y-2}{y+2}=K\cdot e^{4x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y-2)=K\cdot e^{4x}(y+2)\xrightarrow{\text{Si } y(0)=-2}(-2-2)=K\cdot e^{4\cdot 0}(-2+2)\Rightarrow\frac{-4}{0}=K\to\text{No hi ha cap valor de } K$$

tal que $y(0)$= -2 i pe tant la solució singular és y= - 2

S2. Utilitzeu un canvi escaient per resoldre l'e.d. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y+1)}$.

Aquesta e.d. no és separable directament, necessitem fer un canvi prèviament:

$$u=x+y+1\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\\ \xrightarrow{\text{derivem respecte } x}\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{du}{dx}-1=\frac{dy}{dx}\xrightarrow{\text{Subtituïm}}\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u}\Rightarrow\end{cases}$$

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1=\frac{1+u}{u}$ (separables)

$$\Rightarrow\frac{u}{1+u}du=dx\Rightarrow\int\frac{u}{1+u}du=\int dx\Rightarrow\int\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du=\int dx\Rightarrow u-\ln|u+1|=x+C_1$$

Definir el canvi:

$$x+y+1-\ln|x+y+2|=x+C_1\Rightarrow-\ln|x+y+2|=-y\underbrace{-1+C_1}_{-K}\Rightarrow\ln|x+y+2|=y+K\Rightarrow x+y+2=C\cdot e^{y}$$

S3. Resoleu:

a) $xy'+(1-y)=0$

$$xy'+1-y=0\Rightarrow xy'=y-1\Rightarrow x\frac{dy}{dx}=y-1\Rightarrow\frac{dy}{y-1}=\frac{dx}{x}\xrightarrow{\text{Integrem}}\ln|y-1|=\ln|x|+C\Rightarrow|y-1|=e^{\ln|x|+c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|y-1|=|x|\cdot e^{C}\Rightarrow y-1=Kx\Rightarrow y=Kx+1$$

b) $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ passant per (0,1) **Indicació: $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$**

$y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}\to\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}\Rightarrow\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$ separables

$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow\arctan y=\arctan x+C\Rightarrow y=\tan\left(\underbrace{\arctan x}_{a}+\underbrace{C}_{b}\right)$ Solució general

Si $y(0)=1 \longrightarrow 1=\tan(\arctan 0+C) \Rightarrow \tan C=1$

$$\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$$

$$y=\tan\left(\underbrace{\arctan x}_{a}+\underbrace{C}_{b}\right)\Rightarrow y=\frac{\tan(\arctan x)+\tan C}{1-\tan(\arctan x)\tan C}=\frac{x+\tan C}{1-x\tan C}=\frac{x+1}{1-x}$$

c) $y'=\dfrac{\sin(2x)}{\cos(3y)}$ **on** $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

$$y'=\frac{\sin(2x)}{\cos(3y)}\to\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(2x)}{\cos(3y)}\Rightarrow\cos 3y\cdot dy=\sin 2x\cdot dx\xrightarrow{\text{Integrem}}\frac{1}{3}\sin 3y=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

$\dfrac{1}{3}\sin 3y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$ Solució general

Si $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}\longrightarrow\dfrac{1}{3}\sin\pi=-\dfrac{1}{2}\cos\pi+C\Rightarrow C=-\dfrac{1}{2}$

La Solució particular és $\dfrac{1}{3}\sin 3y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{1}{3}\sin 3y+\dfrac{1}{2}$

d) $y'=\dfrac{2x}{y+x^2y}$ **de manera que** $y(0)=-2$

$$y'=\frac{2x}{y+x^2y}\to\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{y}\Rightarrow y\cdot dy=\frac{2x}{1+x^2}dx\xrightarrow{\text{Integrem}}\frac{y^2}{2}=\ln\left(1+x^2\right)+C$$

Si $y(0)=-2\xrightarrow{\text{Substituïm}}2=\ln 1+C\Rightarrow C=2$

La solució particular és $\dfrac{y^2}{2}=\ln\left(1+x^2\right)+2$

S4. Resoleu $y'=\dfrac{e^x}{(1+e^x)y}$ **amb** $y(x_0)=y_0$**.**

$$y'=\frac{e^x}{(1+e^x)y}\to y\cdot dy=\frac{e^x\cdot dx}{(1+e^x)}\to\frac{y^2}{2}=\int\frac{e^x\cdot dx}{(1+e^x)}=\begin{pmatrix}t=e^x\\ dt=e^x\cdot dx\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{(1+t)}=\ln|1+t|+C$$

$\dfrac{y^2}{2}=\ln\left|1+e^x\right|+C\Rightarrow y^2=2\left(\ln\left|1+e^x\right|+C\right)\Rightarrow y^2=2\ln\left|1+e^x\right|+C$ solució general

c.i.: $y_0{}^2=2\ln\left(1+e^{x_0}\right)+C\Rightarrow y_0{}^2-2\ln\left(1+e^{x_0}\right)=C$

$$y^2=2\ln\left|1+e^x\right|+y_0{}^2-2\ln\left(1+e^{x_0}\right)\Rightarrow y^2=2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)+y_0{}^2\Rightarrow y=\underset{(*)}{\pm}\sqrt{2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)+y_0{}^2}$$

$$(*)\ \frac{y_0}{|y_0|}\longrightarrow\begin{cases}\text{Si } y_0>0, \text{ a prop de } y_0\to y>0\\ \text{Si } y_0<0, \text{ a prop de } y_0\to y<0\end{cases}$$

S5. Resoleu $y'=y+y^2$ **amb** $y(x_0)=y_0$**.**

$$\frac{dy}{dx}=y+y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y+y^2}=dx$$

$$\frac{1}{y+y^2}=\frac{A}{y}+\frac{B}{1+y}=\frac{A+Ay+By}{y(1+y)}=\frac{(A+B)y+A}{y(1+y)}$$

$$\left\langle \begin{array}{l} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{array}\right.$$

$$\int\frac{dy}{y+y^2}=\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y+1}=\ln|y|-\ln|y+1|=\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

$$\int\frac{dy}{y+y^2}=\int dx \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=x+C \Rightarrow \left|\frac{y}{y+1}\right|=e^C\cdot e^x \Rightarrow \frac{y}{y+1}=K\cdot e^x \Rightarrow 1-\frac{1}{y+1}=K\cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-K\cdot e^x=\frac{1}{y+1} \Rightarrow y+1=\frac{1}{1-K\cdot e^x} \Rightarrow y=\frac{1}{1-K\cdot e^x}-1=\frac{1-1+K\cdot e^x}{1-K\cdot e^x} \Rightarrow y=\frac{K\cdot e^x}{1-K\cdot e^x}$$

$y=\dfrac{K\cdot e^x}{1-K\cdot e^x} \rightarrow$ Solució general

Si $y(x_o)=y_o \longrightarrow \dfrac{y_0}{y_0+1}=Ke^{x_0} \Rightarrow K=e^{-x_0}\,\dfrac{y_0}{y_0+1}$

$y=\dfrac{e^{-x_0}\,\dfrac{y_0}{y_0+1}\cdot e^x}{1-e^{-x_0}\,\dfrac{y_0}{y_0+1}\cdot e^x}=\dfrac{\dfrac{y_0}{y_0+1}\cdot e^{x-x_0}}{1\dfrac{y_0}{y_0+1}\cdot e^{x-x_0}}=\dfrac{y_0\cdot e^{x-x_0}}{1+y_o-y_o\cdot e^{x-x_0}} \rightarrow$ Solució particular

H: EDOS HOMOGÈNIES

H1. Resoleu: $\boldsymbol{(x-y)+(x+y)y' = 0}$

1er) $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ edo homogènia perquè $f(x,y) = \dfrac{y-x}{y+x}$ és funció homogènia de grau 0.

2on) $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \xrightarrow{\text{derivem}} y' = u'x + u$

Substituïm,

$$y' = \frac{ux-x}{ux+x} \Rightarrow y' = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow u'x = \frac{u-1}{u+1} - u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{u-1-u^2-u}{u+1} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-1-u^2}{u+1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{u+1}{-1-u^2}du$$

3er) $-u^2-1$ no s'anul·la mai: $-u^2-1=0 \Leftrightarrow u^2 \neq -1$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{u+1}{+1+u^2}du = -\int\frac{u\cdot du}{1+u^2} - \int\frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\int\frac{2u\cdot du}{1+u^2} - \int\frac{du}{1+u^2}$$

Integrem, $\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) - \operatorname{arctg}(u) + C \Rightarrow \ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + \operatorname{arctag}(u) = C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln\left(|x|\left(1+u^2\right)^{1/2}\right) + \operatorname{arctg}(u) = C$$

4art) Desfem el canvi: $u = \dfrac{y}{x}$

$$\Rightarrow \ln\left(\sqrt{\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2}}\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C \Rightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$$

H2: Donada una família de corbes del pla representada per l'equació diferencial $\boldsymbol{y' = \dfrac{\left(y^2-x^2\right)}{2xy}}$**, trobeu:**

a) les corbes solució de l'e.d.o.

1er) $y' = \dfrac{\left(y^2-x^2\right)}{2xy}$ és edo homogènia perquè $f(x,y) = \dfrac{\left(y^2-x^2\right)}{2xy}$ és funció homogènia de grau 0.

2on) $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \xrightarrow{\text{derivem}} y' = u'x + u$

$$y' = \frac{\left(y^2-x^2\right)}{2xy} \xrightarrow{\text{Substituïm } y=ux} y' = \frac{u^2x^2-x^2}{2xux} = \frac{u^2-1}{2u}$$

$$y' = \frac{u^2-1}{2u} \xrightarrow{\text{Substituïm } y'=u'x+u} u'x + u = \frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow u'x = \frac{u^2-1}{2u} - u = \frac{u^2-1-2u^2}{2u} = \frac{-u^2-1}{2u}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-u^2-1}{2u} \Rightarrow \frac{2u\cdot du}{-u^2-1} = \frac{dx}{x}$$

3er) $-u^2-1$ no s'anul·la mai: $-u^2-1=0 \Leftrightarrow u^2 \neq -1$

$$-\frac{2u\cdot du}{u^2+1}=\frac{dx}{x}\xrightarrow{\int}-\ln\left(u^2+1\right)=\ln|x|+C\Rightarrow \ln\frac{1}{u^2+1}=\ln|x|+C\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{u^2+1}}_{\text{Sempre}+}=\underbrace{e^C}_{\text{Sempre}+}\cdot|x|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^2+1}=K_1x\,(K_1\neq 0)\Rightarrow u^2+1=\frac{1}{K_1}\frac{1}{x}=K\frac{1}{x}$$

4art) Desfem el canvi: $u=\dfrac{y}{x}$

$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1=K\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{y^2}{x^2}+1=K\dfrac{1}{x}\Rightarrow y^2+x^2=Kx\Rightarrow y^2+x^2-Kx=0$ sumem i restem $\dfrac{K}{2}$ per poder completar el quadrat.

$y^2+\left(x-\dfrac{K}{2}\right)^2=\left(\dfrac{K}{2}\right)^2$ circumferència de centre $\left(\dfrac{K}{2},0\right)$ i radi $\dfrac{K}{2}$

b) les seves trajectòries ortogonals.

Trajectòries ortogonals?

$$y^2+x^2-Kx=0\Rightarrow K=\frac{y^2+x^2}{x}=2C$$

Derivem implícitament $2yy'+2x-K=0\Rightarrow y'=\dfrac{K-2x}{2y}$ podem rescriure $K=2C$ per tal de poder simplificar.

(1) El pendent de la família de corbes. $y^2+x^2-Kx=0$:

$$y'=\frac{K-2x}{2y}=\frac{2C-2x}{2y}=\frac{C-x}{y}=\frac{\left(\frac{y^2+x^2}{2x}\right)-x}{y}=\frac{\frac{y^2+x^2-2x^2}{2x}}{y}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

(2) El pendent de la família de trajectòries ortogonals.

$y'=-\dfrac{1}{\frac{y^2-x^2}{2xy}}=-\dfrac{2xy}{y^2-x^2}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ edo homogènia

(3) $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=ux\xrightarrow{\text{derivem}}y'=u'x+u$

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}\xrightarrow{y=ux}y'=\frac{2ux^2}{x^2-(ux)^2}\xrightarrow{y'=u'x+u}u'x+u=\frac{2u}{1-u^2}\Rightarrow u'x=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}=\frac{u+u^3}{1-u^2}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u(1+u^2)}{1-u^2}\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{dx}{x}$$

Si $u\neq 0$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}=(\text{ descomposició en fraccions simples})=\frac{A}{u}+\frac{Mu+N}{1+u^2}=\frac{A+Au^2+Mu^2+Nu}{u(1+u^2)}=$$

$$\frac{(A+M)u^2+Nu+A}{u(1+u^2)}\longrightarrow\begin{cases}A=1\\N=0\\A+M=-1\Rightarrow M=-2\end{cases}$$

$$\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{1}{u}du-\int\frac{2u}{1+u^2}du=\ln|u|-\ln\left(1+u^2\right)=\ln\left|\frac{u}{(1+u^2)}\right|=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\ln\left|\frac{u}{(1+u^2)}\right| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{x(1+u^2)}\right| = C \Rightarrow \left|\frac{u}{x(1+u^2)}\right| = e^C \Rightarrow \frac{u}{x(1+u^2)} = \pm e^C = K \quad (K \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = Kx(1+u^2)$$

Desfem canvi: $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = Kx\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \Rightarrow y = Kx^2 + Ky^2 = K(x^2+y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{K}y = 0 \quad (K \neq 0) \rightarrow$$

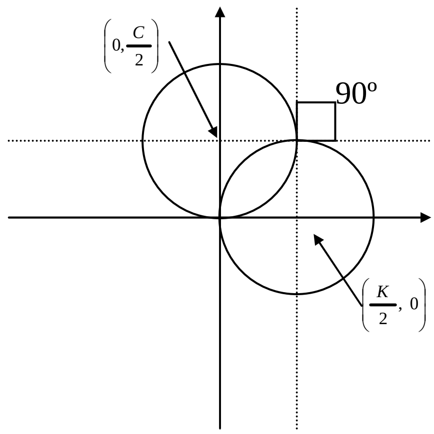
reescrivim la constant $C = \frac{1}{K}$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - Cy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\left(\frac{1}{2}C\right)y + \frac{1}{4}C^2 - \frac{1}{4}C^2 = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$$

$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$ circumferència de centre $\left(0, \frac{C}{2}\right)$ i radi $\frac{C}{2}$.

Si $u = 0 \rightarrow u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = 0$ No té sentit perquè $xy \neq 0$

Per tant, la família de trajectòries ortogonals de la família de circumferències de centre $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ i radi $\frac{K}{2}$ és la família de circumferències de centre $\left(0, \frac{C}{2}\right)$ i radi $\frac{C}{2}$.



LP: EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS DE PRIMER ORDRE, BERNOULLI I RICATTI

LP1. Resoleu les següents equacions:

a) $\boldsymbol{y' + 2y = x}$

$y' + 2y = x \rightarrow$ e.d.o. lineal no homogènia $y' + p(x)y = q(x)$.
Trobarem primer la solució de la equació lineal homogènia associada.

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2dx \xrightarrow{\text{Integrem}} \ln|y| = -2x + C \Rightarrow y = e^{-2x+C} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = e^{-2x} \cdot e^{C} \Rightarrow y = K \cdot e^{-2x}$ Solució de l'equació homogènia

Buscarem la solució general de la forma $y = K(x)e^{-2x}$, utilitzant el mètode de variació de la constant.

$y' = K'(x)e^{-2x} + K(x)(-2)e^{-2x}$

Substituint:

$$\underbrace{K'(x)\cdot e^{-2x} + K(x)(-2)e^{-2x}}_{y'} + \underbrace{2K(x)\cdot e^{-2x}}_{2y} = x \Rightarrow K'(x)\cdot e^{-2x} = x \Rightarrow K'(x) = \frac{x}{e^{-2x}} \xrightarrow{\text{Integrem}}$$

$$\rightarrow K(x) = \int xe^{2x}dx = \left(\text{integració per parts} \begin{pmatrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{pmatrix} \right) = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Per tant la solució és:

$$y = \left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \right)e^{-2x} = \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right)}_{y_p} + \underbrace{Ce^{-2x}}_{y_H}$$

Si $C = 0$ una solució particular seria $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{Derivem}} y' = \frac{1}{2}$

$$y' + 2y = x \rightarrow \frac{1}{2} + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) = x \Rightarrow \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = x \Rightarrow x = x \text{ OK!}$$

<u>Altrament:</u>

$$y = e^{-\int 2dx}\left(\int xe^{\int 2dx}dx + C \right) = e^{-2x}\left(\int xe^{\int 2dx}dx + C \right) = e^{-2x}\left(\int xe^{2x}dx + C \right) = (\text{per parts}) = e^{-2x}\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4} + C \right)$$

b) $\boldsymbol{y' + y\cos x = \sin x \cos x}$**, amb** $\boldsymbol{y(0)=1}$

$y' + p(x)y = q(x) \rightarrow y' + y\cos x = \sin x \cos x$ i $y(0) = 1$

La solució de l'homogènia associada serà:

$$y' + y\cos x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y\cos x \Rightarrow \frac{dy}{-y\cos x} = dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\cos x dx \xrightarrow{\text{Integrem}} \ln|y| = -\sin x + C \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = Ke^{-\sin x} = y_h$

Buscarem una solució particular de la forma: $y = K(x)e^{-\sin x}$, utilitzant el mètode de variació de la constant.

$y' = K'(x)\cdot e^{-\sin x} + K(x)(-\cos x)e^{-\sin x}$

Substituint:

$\underbrace{K'(x)\cdot e^{-\sin x} + K(x)(-\cos x)e^{-\sin x}}_{y'} + \underbrace{K(x)\cdot e^{-\sin x}\cos x}_{y\cos x} = \sin x\cos x \Rightarrow K'(x) = \sin x\cos x\cdot e^{\sin x} \xrightarrow{\text{Integrem}}$

$$\to K(x) = \int \sin x\cos x e^{\sin x}dx = \left(\text{integració per parts}\left(\begin{array}{l} u = \sin x \to du = \cos x dx \\ dv = \cos x\cdot e^{\sin x} \to v = e^{\sin x}\end{array}\right)\right) =$$

$\sin x\cdot e^{\sin x} - \int \cos x\cdot e^{\sin x}dx = \sin x\cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C$

Substituïm: $y = \left(\sin x\cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right)e^{-\sin x} = \underbrace{\sin x - 1}_{y_p} + \underbrace{C\cdot e^{-\sin x}}_{y_H}$

La solució particular de $y' + y\cos x = \sin x\cos x$ verificant la condició $y(0)=1$ és:

$y(0) = 1 \to 1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$, per tant $y(x) = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

(Comprovació: $y(0) = 1 = \sin 0 - 1 + 2e^{-\sin 0} = 0 - 1 + 2e^{0} = -1 + 2 = 1$)

LP2. Resoleu les següents equacions de Bernoulli:

a) $\boldsymbol{y' + y^2 = \frac{y}{x}}$**, amb** $\boldsymbol{y(1)=1}$

$y' + y^2 = \frac{y}{x} \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = -y^2 \Rightarrow y'\cdot y^{-2} - \frac{1}{x}\cdot y^{-1} = -1$

Canvi: $\begin{cases} z = y^{-1} = \dfrac{1}{y} \\ z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'y^{-2} \end{cases}$

$-z' - \frac{1}{x}z = -1 \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = 1$ edo lineal

1er) $z' + \frac{1}{x}z = 0 \Rightarrow z' = -\frac{1}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|x| + C \Rightarrow$

$\Rightarrow z\cdot x = K \quad (K \neq 0) \Rightarrow z = \frac{K}{x}$

2on) <u>Mètode variació de la constant</u>. $z = \frac{1}{x}K(x) \longrightarrow z' = -\frac{1}{x^2}K(x) + \frac{1}{x}K'(x)$

$\Rightarrow K'(x) = x \xrightarrow{\text{Integrem}} K(x) = \frac{x^2}{2} + K_1$

Substituïm: $z' + \frac{1}{x}z = 1 \to \underbrace{-\frac{1}{x^2}K + \frac{1}{x}K'}_{z'} + \frac{1}{x}\underbrace{\frac{1}{x}K(x)}_{z} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2}K + \frac{1}{x}K' + \frac{1}{x^2}K(x) = 1 \Rightarrow$

3er) $z = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + K_1\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}K_1$

Desfem el canvi: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}K_1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{\frac{x}{2} + \frac{1}{x}K_1}$

Busquem la solució particular que verifica la condició $y(1)=1$: $1=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+K_1}\rightarrow K_1=\dfrac{1}{2}$

$$y=\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{x^2+1}{2x}}=\frac{2x}{x^2+1}$$

b) $\boldsymbol{3xy'-2y=\dfrac{x^3}{y^2}}$

$$3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}\Rightarrow 3xy'-2y=x^3\cdot y^{-2}\Rightarrow 3xy^2y'-2y^3=x^3$$

Canvi: $\begin{cases} z=y^3 \\ z'=3y^2y'\Rightarrow y'=\dfrac{z'}{3y^2}\end{cases}$

$$xz'-2z=x^3\Rightarrow z'-\frac{2}{x}z=x^2$$

1er) $z'-\dfrac{2}{x}z=0\Rightarrow z'=\dfrac{2}{x}z\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2}{x}z\Rightarrow \dfrac{dz}{z}=2\dfrac{dx}{x}\xrightarrow{\text{Integrem}}\ln|z|=2\ln|x|+C\Rightarrow$

$\Rightarrow z=Kx^2$

2on) <u>Mètode variació de les constants</u>. $z=K(x)x^2\longrightarrow z'=K'(x)x^2+2xK(x)$

Substituïm: $K'x^2+2xK-2Kx=x^2\rightarrow K'=1\rightarrow K(x)=x+C$

3er) $z=(x+C)x^2$

4art) Desfem el canvi: $z=y^3\rightarrow y^3=(x+C)x^2=x^3+Cx^2$

LP3. Feu un canvi a l'equació $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{f(y)x+g(y)x^n}}$ per passar-la a una equació coneguda.

Apliqueu-lo a: $\boldsymbol{y'=\dfrac{\cos y}{1-x\sin y}}$

En l'equació inicial la variable independent és *x*, la dependent és *y*, *y(x)*, és a dir, ara considerem com a variable independent *y* i com a dependent *x*, *x*(*y*).

Fem el canvi: $\begin{cases} x=x(y) \\ x'=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{y'}\end{cases}$

$$\frac{1}{y'}=f(y)x+g(y)x^n\Rightarrow x'=f(y)x+g(y)x^n\longrightarrow\begin{cases}\text{Serà Bernoulli si } n\neq 0 \text{ o } 1\\ \text{Serà una edo lineal si } n=0 \text{ o } 1\end{cases}$$

Aplicant y' a l'edo $=\dfrac{\cos y}{1-x\sin y}\longrightarrow x'=\dfrac{1-x\sin y}{\cos y}=\dfrac{1}{\cos y}-x\dfrac{\sin y}{\cos y}\Rightarrow x'+x\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{1}{\cos y}$ edo lineal

1er) $x'+x\dfrac{\sin y}{\cos y}=0\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=-x\dfrac{\sin y}{\cos y}\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy(-\sin y)}{\cos y}\rightarrow\ln|x|=\ln|\cos y|+C\Rightarrow$

$\Rightarrow x=K\cos y$

2on) <u>Mètode de la variació de les constants</u>:

$x(y)=K(y)\cos y \longrightarrow x'=K'(y)\cos y-\sin y\cdot K(y)$

Substituïm:

$$K'(y)\cos y-\sin y\cdot K(y)+K(x)\cos y\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{1}{\cos y}\Rightarrow K'(y)\cos y-\sin y\cdot K(y)+\sin y\cdot K(y)=\frac{1}{\cos y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(y)=\frac{1}{\cos^2 y}\Rightarrow K(y)=\mathrm{tg}y+C$$

3er) $x(\mathrm{y})=(\mathrm{tg}(y)+C)\cos y=\sin y+C\cos y$ La solució general (donada de forma implícita) és: $x-\sin y-C\cos y=0$.

LP4. Resoleu la següent equació de Ricatti: $x(x-1)y'-(1-2x)y+y^2=2x$

La forma general d'una equació de Ricatti és, $A(x)y^2+B(x)y+C(x)=y'$.

I la seva solució particular és, $y=y_p+\dfrac{1}{z}$.

Una solució particular és $y_p=1$.

Comprovem-ho, $-(1-2x)1+1=2x\Rightarrow\ -1+2x+1=2x\Rightarrow 0=0$ OK!

$$\rightarrow \text{canvi}\begin{cases} y=1+\dfrac{1}{z} \\ y'=-\dfrac{z'}{z^2}\end{cases}$$

Substituïm: $x(x-1)\left(-\dfrac{z'}{z^2}\right)-(1-2x)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)+\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^2=2x\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1-2x}{x(x-1)}\left(1+\frac{1}{z}\right)+\frac{-1}{x(x-1)}\left(1+\frac{1}{z}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1-2x}{x(x-1)}+\frac{1-2x}{x(x-1)}\frac{1}{z}+\frac{-1}{x(x-1)}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{x-1}+\frac{1-2x}{x(x-1)}+\frac{1-2x}{x(x-1)}\frac{1}{z}-\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{x(x-1)}\frac{1}{z}-\frac{1}{x(x-1)}\frac{1}{z^2}=$$

$$=\frac{2}{x-1}+\left(\frac{1-2x}{x(x-1)}\frac{1}{z}-\frac{2}{x(x-1)}\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{x(x-1)}\frac{1}{z^2}+\frac{1-2x}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{2x+1-2x-1}{x(x-1)}+\frac{1}{z}\left(\frac{-1-2x}{x(x-1)}\right)-\frac{1}{x(x-1)}\frac{1}{z^2}\Rightarrow -z'=z\left(\frac{-1-2x}{x(x-1)}\right)-\frac{1}{x(x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'=\frac{1}{x(x-1)}+z\left(\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x}{x(x-1)}\right)\Rightarrow z'=\frac{1}{x(x-1)}+z\frac{1+2x}{x(x-1)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow z'-\dfrac{1+2x}{x(x-1)}z=\dfrac{1}{x(x-1)}$ edo lineal (en *z*)

1er) $\Rightarrow z'-\dfrac{2x+1}{x(x-1)}z=0\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)}z\Rightarrow\dfrac{dz}{z}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)}dx\rightarrow$

Integrem $\rightarrow \displaystyle\int\frac{2x+1}{x(x-1)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x-1}dx=\int\frac{Ax+Bx-A}{x(x-1)}dx\rightarrow\begin{cases}A+B=2 & \rightarrow B=3\\ -A=1\rightarrow A=-1\end{cases}$

$$\rightarrow \ln|z|=\int\frac{-dx}{x}+\int\frac{3dx}{x-1}=-\ln|x|+3\ln|x-1|+C\Rightarrow z\cdot x(1-x)^{-3}=K\quad (K\neq 0)$$

2on) <u>Mètode variació de les constants</u>:

$$z\cdot x(x-1)^{-3} = K(x) \Rightarrow z = K(x)\frac{(x-1)^3}{x} \longrightarrow z' = K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} + K(x)\frac{3(x-1)^2 x - (x-1)^3}{x^2} =$$

$$= K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} + K(x)\frac{(x-1)^2}{x^2}(+3x+1-x) = K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} + K(x)\frac{(x-1)^2}{x^2}(2x+1)$$

$$z' - \frac{2x+1}{x(x-1)}z = \frac{1}{x(x-1)} \xrightarrow{\text{Substituïm}}$$

$$\left(K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} - K(x)\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}\right) - \frac{2x+1}{x(x-1)}\cdot\left(K(x)\frac{(x-1)^3}{x}\right) = \frac{1}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} + K(x)\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2} - \frac{(2x+1)(x-1)^3}{x^2(x-1)}K(x) = \frac{1}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} + K(x)\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2} - \frac{(2x+1)(x-1)^2}{x^2}K(x) = \frac{1}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x)\frac{(x-1)^3}{x} = \frac{1}{x(x-1)} \Rightarrow K'(x) = \frac{x}{x(x-1)(x-1)^3} \Rightarrow K'(x) = \frac{1}{(x-1)^4} \xrightarrow{\text{Integrem}} K(x) = \frac{(x-1)^{-3}}{-3} + C$$

Llavors:

$$z = \frac{K(x)}{x(x-1)^{-3}} \to z = \frac{\frac{(x-1)^{-3}}{-3} + C}{x(x-1)^{-3}} = \left(\frac{(x-1)^{-3}}{-3} + C\right)\left(\frac{(x-1)^3}{x}\right) = \frac{-1}{3x} + C\frac{(x-1)^3}{x} = \frac{-1+3C(x-1)^3}{3x}$$

3er) Desfem el canvi:

$$y = 1 + \frac{1}{z} \to y = 1 + \frac{3x}{-1+3C(x-1)^3}$$

LS: EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS DE SEGON ORDRE A COEFICIENTS CONSTANTS

EQUACIONS LINEALS HOMOGÈNIES AMB COEFICIENTS CONSTANTS

LS1. Resoleu les següents equacions diferencials:

-Cas general:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_i = \text{constants}$

-Cas 2on ordre:

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Equació auxiliar (o característica):

$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$

(i) Dos arrels reals diferents (m_1, m_2):

$y_H = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x} \quad C_i \in C$

(ii) Dos arrels reals iguals (arrel doble, m_1):

$y_H = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 x \cdot e^{m_1 x} \quad C_i \in C$

(iii) Dues arrels complexes (conjugades, $\alpha \pm \beta i$):

$$y_H = C_1 \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 \cdot e^{(\alpha - i\beta)x} = C_1 \cdot e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) + C_2 \cdot e^{\alpha x}\left(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\right) =$$

$$\overset{(*)}{=} e^{\alpha x}\left(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)\right) \quad K_i \in C$$

$$(*)\begin{pmatrix} \cos(-\beta x) = \cos(\beta x) \\ \sin(-\beta x) = \sin(\beta x) \end{pmatrix}$$

(a) $\mathbf{2y'' - 5y' - 3y = 0}$

És una equació lineal de 2on ordre amb coeficients constants, homogènia.

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \Rightarrow (2m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m-3) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ll} m_1 = -\frac{1}{2} & \text{Són dues arrels} \\ m_2 = 3 & \text{reals simples.} \end{array} \right.$$

	3	-5	-3
3		6	3
	2	1	0

La solució general de l'edo és: $y = A \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

b) $\mathbf{y'' - 10y' + 25y = 0}$

$m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow m^2 - 2 \cdot 5m + 5^2 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m = 5$ (arrel real doble)

La solució general de l'edo és: $y = A \cdot e^{5x} + Bxe^{5x}$

c) $\mathbf{y'' - 4y + 13y' = 0}$

$$m^2 - 4m + 13 = 0 \Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \underbrace{2}_{\alpha} \pm \underbrace{3}_{\beta} i \text{ (dues arrels complexes)}$$

La solució general de l'edo és: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

EQUACIONS LINEALS NO HOMOGÈNIES AMB COEFICIENTS CONSTANTS

LS2. Resoleu $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$.

$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$

1er) y_H? (Solució de l'equació homogènia associada)

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -2 \end{cases} \quad \text{Dues arrels reals simples.}$$

$y_H = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-2x}$

2on) y_p? Com que el segon membre de l'edo és $4x^2$ busquem solució particular de tipus polinòmic, de grau 2.

$y_p = ax^2 + bx + c$

$y'_p = 2ax + b$

$y''_p = 2a$

Substituïm: $2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 4x^2 \Rightarrow 2a + 6ax + 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (6a + 2b)x + (2a + 3b + 2c) = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ 6a + 2b = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 + 2b = 0 \Rightarrow b = -6 \\ 2a + 3b + 2c = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-6) + 2c = 0 \Rightarrow c = 7 \end{cases}$$

$y_p = 2x^2 - 6x + 7$

3er) Solució general: $y = y_H + y_p = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-2x} + 2x^2 - 6x + 7$

LS3. Resoleu $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\sin x$.

1er) $y'' - 3y' = 0$

$$m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 0 \end{cases} \rightarrow y_H = A + B \cdot e^{3x}$$

2on) $y_p = K \cdot e^{3x} + a\cos x + b\sin x$

$y'_p = 3K \cdot e^{3x} - a\sin x + b\cos x$

$y''_p = 9K \cdot e^{3x} - a\cos x - b\sin x$

$9K \cdot e^{3x} - a\cos x - b\sin x - 3\left(3K \cdot e^{3x} - a\sin x + b\cos x\right) = 8 \cdot e^{3x} + 4\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow 9K \cdot e^{3x} - a\cos x - b\sin x - 9K \cdot e^{3x} - 3a\sin x + 3b\cos x = 8 \cdot e^{3x} + 4\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow -a\cos x - b\sin x - 3a\sin x + 3b\cos x = 8 \cdot e^{3x} + 4\sin x$

Són dues expressions idèntiques. El coeficient de l'exponencial a l'esquerra és 0 i hauria de ser igual al de la dreta, que és 8. Així doncs falla la solució particular proposada. Provem ara amb:

$y_p = Kx{\cdot}e^{3x} + a\cos x + b\sin x$

$y'_p = K{\cdot}e^{3x} + 3Kx{\cdot}e^{3x} - a\sin x + b\cos x$

$y''_p = 3K{\cdot}e^{3x} + 3K{\cdot}e^{3x} + 9Kx{\cdot}e^{3x} - a\cos x - b\sin x \Rightarrow 6K{\cdot}e^{3x} + 9Kx{\cdot}e^{3x} - a\cos x - b\sin x$

Substituïm:

$6K{\cdot}e^{3x} + 9Kx{\cdot}e^{3x} - a\cos x - b\sin x - 3\left(K{\cdot}e^{3x} + 3Kx{\cdot}e^{3x} - a\sin x + b\cos x\right) = 8e^{3x} + 4\sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3K{\cdot}e^{3x} - (a+3b)\cos x + (3a-b)\sin x = 8e^{3x} + 4\sin x \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 3K = 8 \Rightarrow K = \dfrac{8}{3} & \\ -a-3b = 0 \Rightarrow a = -3b & \Rightarrow a = \dfrac{6}{5} \\ 3a - b = 4 \quad \Rightarrow 3(\text{-}3b) - b = 4 \Rightarrow b = -\dfrac{2}{5} & \end{array} \right.$$

$y_p = \dfrac{8}{3}x{\cdot}e^{3x} + \dfrac{6}{5}\cos x - \dfrac{2}{5}\sin x$

3er) Aleshores: $y = y_H + y_p = A + B{\cdot}e^{3x} + \dfrac{8}{3}x{\cdot}e^{3x} + \dfrac{6}{5}\cos x - \dfrac{2}{5}\sin x$

<u>Observació</u>: Com que $m = 3$ és arrel simple de l'equació característica i apareix a e^{3x}, provem amb $y_p = Kx{\cdot}e^{3x}$.

LS4. Resoleu $y'' + 8y = 5x + 2e^{-x}$.

1er) $y'' + 8y = 0$

$m^2 + 8 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-8} = \pm i\sqrt{8} = \pm i{\cdot}2\sqrt{2}$

$y_H = C_1\cos\left(2\sqrt{2}x\right) + C_2\sin\left(2\sqrt{2}x\right)$

2on)

$y_p = ax + b + m{\cdot}e^{-x}$

$y'_p = a - m{\cdot}e^{-x}$

$y''_p = m{\cdot}e^{-x}$

Substituïm $m{\cdot}e^{-x} + 8\left(ax + b + m{\cdot}e^{-x}\right) = 5x + 2{\cdot}e^{-x} \Rightarrow m{\cdot}e^{-x} + 8ax + 8b + 8m{\cdot}e^{-x} = 5x + 2{\cdot}e^{-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (m+8m)e^{-x} + 8ax + 8b = 5x + 2{\cdot}e^{-x} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 9m = 2 \Rightarrow m = \dfrac{2}{9} \\ 8a = 5 \Rightarrow a = \dfrac{5}{8} \quad \longrightarrow y_p = \dfrac{5}{8}x + \dfrac{2}{9}e^{-x} \\ 8b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

3er) $y = y_H + y_p = C_1\cos\left(2\sqrt{2}x\right) + C_2\sin\left(2\sqrt{2}x\right) + \dfrac{5}{8}x + \dfrac{2}{9}e^{-x}$

LS5. Resoleu $y'' + 4y = \cos 2x$.

1er) $y'' + 4y = \cos \underset{*}{2}x$

$m^2+4=0 \Rightarrow m=\pm 2i \longrightarrow y_H = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

2on)

$y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$

$y'_p = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$

$y''_p = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

Substituïm, $-4a\cos 2x - 4b\sin 2x + 4(a\cos 2x + b\sin 2x) = \cos 2x$ No funciona.
Provem amb:

$y_p = ax\cos 2x + bx\sin 2x$

$y'_p = a\cos 2x - 2ax\sin 2x + b\sin 2x + 2bx\cos 2x$

$y''_p = -2a\sin 2x - 2a\sin 2x - 4ax\cos 2x + 2b\cos 2x + 2b\cos 2x - 4bx\sin 2x =$

$= -4a\sin 2x - 4ax\cos 2x + 4b\cos 2x - 4bx\sin 2x$

Substituïm: $4a\sin 2x - 4ax\cos 2x + 4b\cos 2x - 4bx\sin 2x + 4(ax\cos 2x + bx\sin 2x) = \cos 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a\sin 2x - 4ax\cos 2x + 4b\cos 2x - 4bx\sin 2x + 4ax\cos 2x + 4bx\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow -4a\sin 2x + 4b\cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} -4a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 4b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$

$y_p = \dfrac{1}{4}x\sin 2x$

3er) $y = y_H + y_p = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}x\sin 2x$

<u>Observació</u>: Com que $m=\pm 2i$ són arrels de l'equació característica i 2 apareix a $\cos 2x$. Provem amb $y_p = ax\cos 2x + bx\sin 2x$.

E: EQUACIONS DIFERENCIALS EXACTES. FACTOR INTEGRANT

E1. Resoleu les següents equacions exactes:

a) $\boldsymbol{(2x+y)dx+(x+2y)dy=0}$

$(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$

1er) Mirem si és exacta.

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y)=2x+y \to \dfrac{\partial M}{\partial y}=1 \\ N(x,y)=x+2y \to \dfrac{\partial N}{\partial x}=1 \end{array}\right\} 1=1 \text{ Sí}$$

2on) $F(x,y)$?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+y \to \int \dfrac{\partial F}{\partial x}dx=\int(2x+y)dx \Rightarrow F(x,y)=x^2+yx+C(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x+C'(y)=N(x,y)=x+2y \Rightarrow C'(y)=2y \to \int C'(y)dy=\int 2ydy \Rightarrow C(y)=y^2+C$$

3er) $F(x,y)=x^2+yx+y^2=K$

b) $\boldsymbol{(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3y^2x+1)dy=0}$

1er) Comprovem si és exacta:

$$\underbrace{(3x^2y+y^3)}_{M}dx+\underbrace{(x^3+3y^2x+1)}_{N}dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y}=3x^2+3y^2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=3x^2+3y^2 \end{array}\right\} \text{Com són iguals, aquesta edo és exacta}$$

2on)

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^3+3xy^2+C'(y)=N(x,y) \Rightarrow x^3+3xy^2+C'(y)=x^3+3xy^2+1 \Rightarrow C'(y)=1$$

$$\xrightarrow{\text{Integrem}} C(y)=y+C$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M \to \frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+y^3 \to F=x^3y+y^3x+C(y)$$

$$F(x,y)=x^3y+y^3x+y+C=C_1$$

3er) $x^3y+xy^3+y=K$

E2. Trobeu un factor integrant per a $(y^2+2xy)dx - x^2dy = 0$ de la forma $\mu(y) = y^m$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 2y+2x\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -2x\end{aligned}\right\}\text{ Com no són iguals, no és una edo exacta.}$$

$$\underbrace{y^m(y^2+2xy)}_{M}dx - \underbrace{y^m x^2}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = (m+2)y^{m+1} + (m+1)2xy^m$$

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} = -2xy^m$$

Imposem:

$$(m+2)y^{m+1} + (m+1)2xy^m = -2xy^m \Rightarrow (m+2)y^{m+1} + (m+2)2xy^m = 0, \quad \forall(x, y(x)) \Rightarrow$$

$$(m+2)\left[y^{m+1} + 2xy^m\right] = 0 \to m+2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\mu(y) = y^m \to \mu = y^{-2}$$

E3. Resoleu $(4x^2+2xy+6y)dx + (2x^2+9y+3x)dy = 0$ sabent que existeix un factor integrant de la forma $(x+y)^n$.

$$\underbrace{(4x^2+2xy+6y)}_{M}dx + \underbrace{(2x^2+9y+3x)}_{N}dy = 0$$

Factor integrant $=(x+y)^n$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 2y+6\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 4x+3\end{aligned}\right\}\text{ Com no són iguals, no és una edo exacta.}$$

$$\underbrace{(x+y)^n(4x^2+2xy+6y)}_{\overline{M}}dx + \underbrace{(x+y)^n(2x^2+9y+3x)}_{\overline{N}}dy = 0$$

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = n(x+y)^{n-1}(4x^2+2xy+6y) + (x+y)^n(2x+6) =$$

$$= (x+y)^{n-1}\left[4nx^2+2nxy+6ny+(x+y)(2x+6)\right] = (x+y)^{n-1}\left[(4n+2)x^2+(2n+2)xy+(6n+6)y+6x\right]$$

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} = n(x+y)^{n-1}(2x^2+9y+3x) + (x+y)^n(4x+3) = (x+y)^{n-1}\left[2nx^2+9ny+3nx+(x+y)(4x+3)\right] =$$

$$= (x+y)^{n-1}\left[(2n+4)x^2+(3n+3)x+(9n+3)y+4xy\right]$$

Imposem que $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$

$$(x+y)^{n-1}\left[(4n+2)x^2+(2n+2)xy+(6n+6)y+6x\right] = (x+y)^{n-1}\left[(2n+4)x^2+(3n+3)x+(9n+3)y+4xy\right]$$

Expressions idèntiques $\Rightarrow$ els coeficients dels monomis semblants són iguals, per tant:

$$\left.\begin{array}{l} 4n+2=2n+4 \Rightarrow 2n+2=4 \Rightarrow n=1 \\ 6n+6=9n+3 \Rightarrow 3n+3=6 \Rightarrow n=1 \end{array}\right\}\text{Un qualsevol cas s'obté } n=1$$

Factor integrant: $\mu(x,y)=x+y$

Resolució de: $(x+y)(4x^2+2xy+6y)dx+(x+y)(2x^2+9y+3x)dy=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\overline{M}(x,y)=(x,y)(4x^2+2xy+6y)=4x^3+2x^2y+6xy+4x^2y+2xy^2+6y^2=$$

$$=4x^3+6x^2y+6xy+2xy^2+6y^2 \rightarrow \int \frac{\partial F}{\partial x}dx=\int \overline{M}(x,y)dx=$$

$$x^4+6\frac{x^3}{3}y+6\frac{x^2}{2}y+2\frac{x^2}{2}y^2+6xy^2+C(y)=x^4+2x^3y+3x^2y+x^2y^2+6xy^2+C(y)$$

E4. Comproveu que les següents equacions no són exactes. Busqueu un factor integrant adient per a cadascuna d'elles.

a) $\boldsymbol{\frac{y^2}{2}+2ye^x+(y+e^x)y'=0}$

$$\underbrace{\frac{y^2}{2}+2ye^x}_{M}+\underbrace{(y+e^x)}_{N}y'=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y=\dfrac{\partial M}{\partial y}=y+2e^x \\ N_x=\dfrac{\partial N}{\partial x}=e^x \end{array}\right\}\text{Com no són iguals, no és una edo exacta.}$$

$$\mu M+\mu Ny'=0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \rightarrow \mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x$$

Notació: $\mu_x=\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$ $\quad \mu_y=\dfrac{\partial \mu}{\partial y}$ $\quad M_x=\dfrac{\partial M}{\partial x}$ $\quad$ etc.

$$\mu(x,y)=\frac{\mu_x N-\mu_y M}{M_y-N_x}=\mu_x\frac{y+e^x}{y+2e^x-e^x}-\mu_y\frac{\frac{y^2}{2}+2ye^x}{y+2e^x-e^x}=\mu_x\frac{y+e^x}{y+e^x}-\mu_y\frac{\frac{y^2+4ye^x}{2}}{y+e^x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\mu_x-\mu_y\frac{1}{2}\frac{y^2+4ye^x}{y+e^x}$$

Si $\mu_y=0$ aleshores $\mu=\mu(x)$, $\mu_x=\mu'$

$\mu=\mu' \Rightarrow \mu(x)=e^x$ (podem suposar la constant d'integració igual a 1)

b) $\boldsymbol{(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0}$

$$\underbrace{(2xy^4e^y+2xy^3+y)}_{M}dx+\underbrace{(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)}_{N}dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y=\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x(4y^3e^y+y^4e^y)+6xy^2+1=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1 \\ N_x=\dfrac{\partial N}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Com no són iguals,}\\ \text{no és una edo exacta}\end{array}$$

$$\mu(x,y)=\mu_x \frac{N}{M_y-N_x}-\mu_y \frac{M}{M_y-N_x}=\mu_x \frac{x^2y^4e^y-x^2y^2-3x}{8xy^3e^y+8xy^2+4}-\mu_y \frac{2xy^4e^y+2xy^3+y}{8xy^3e^y+8xy^2+4}=$$

$$=\mu_x \frac{x^2y^4e^y-x^2y^2-3x}{8xy^3e^y+8xy^2+4}-\mu_y \frac{y\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}{4\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}=\mu_x \frac{x^2y^4e^y-x^2y^2-3x}{8xy^3e^y+8xy^2+4}-\mu_y \frac{y}{4}$$

només depèn de *y*. Prenem: $\mu(x,y)=\mu(y)$, $\mu' = \mu_y$.

$$\mu=\mu(x,y)=-\mu_y \frac{y}{4}(x)=-\mu' \frac{y}{4} \Rightarrow \mu=-\frac{d\mu}{dy}\frac{y}{4} \Rightarrow -\frac{4dy}{y}=\frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow -4\ln|y|=\ln|\mu| \to \mu=y^{-4}=\frac{1}{y^4}$$

(podem suposar la constant d'integració igual a 1).

A: APLICACIONS

A1. Un home té una fortuna que augmenta a una velocitat proporcional a la quantitat actual. Si tenia 1 milió fa un any i ara té 2 milions, quant tindrà dintre de sis mesos?, i dintre de 2 anys?

$C(t) =$ Capital en l'instant t.

$$\frac{dC(t)}{dt} = KC(t)$$

$\rightarrow C(0) = 2$ milions

$\rightarrow C(-1) = 1$ milions

t	-1	**0**	-0,5	2
\$	1	**2**	?	?

Es tracta d'una edo separable.

$$\frac{dC}{C} = Kdt \Rightarrow \ln|C| = K \cdot t + C_1 \Rightarrow |C| = e^{K \cdot t} \cdot e^{C_1} \Rightarrow C = C_2 e^{Kt}$$

$$C(0) = C_2 = 2$$

$$C(-1) = 1 = 2e^{-K} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-K} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -K \Rightarrow K = 0{,}69314718$$

$C(t) = 2e^{0{,}693t}$ Amb la fórmula ja podem fer prediccions.

$$\begin{cases} C(0{,}5) = 2{,}8282 \text{ milions} \\ C(2) = 8 \text{ milions} \end{cases}$$

A2. Sabent que la temperatura superficial d'un objecte canvia amb una velocitat proporcional a la diferencia entre la seva temperatura i la seva temperatura ambient (que suposem constant), es demana:

a) Trobeu l'evolució temporal de la temperatura corresponent a la condició inicial $T(0)=T_0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K(T - T_A) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Es tracta d'una edo separable.

$$\frac{dT}{T - T_A} = Kdt \Rightarrow \ln|T - T_A| = Kt + C \Rightarrow |T - T_A| = e^C e^{Kt} \Rightarrow T - T_A = C \cdot e^{Kt}$$

$$T_0 - T_A = C \cdot e^0 = C$$

Solució particular $T - T_A = (T_0 - T_A) \cdot e^{Kt} \Rightarrow T(t) == (T_0 - T_A) \cdot e^{Kt} + T_A$

b) Suposant que la temperatura d'una tassa de cafè és de 200ºF quan s'acaba de servir i que un minut després és de 190ºF en una habitació que està a 70ºF, quin temps ha de passar perquè el cafè estigui a 150ºF?

$$\left.\begin{array}{l} T_0 = 200^{\circ} \\ T(1) = 190^{\circ} \\ T_A = 70^{\circ} \end{array}\right\} \rightarrow t\,? \text{ tal que } T = 150^{\circ}$$

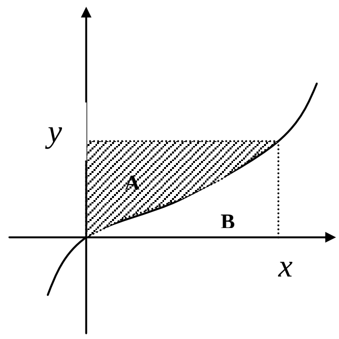
$$T(1)=(200-70)e^{K}+70=190\Rightarrow 130e^{K}=120\Rightarrow e^{K}=\frac{12}{13}\Rightarrow T(t)=130\left(\frac{12}{13}\right)^{t}+70$$

$$T(t)=150=130\left(\frac{12}{13}\right)^{t}+70\Rightarrow 80=130\left(\frac{12}{13}\right)^{t}\Rightarrow\frac{8}{13}=\left(\frac{12}{13}\right)^{t}\Rightarrow\ln\frac{8}{13}=\ln\left(\frac{12}{13}\right)^{t}\Rightarrow\ln\frac{8}{13}=t\ln\left(\frac{12}{13}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{8}{13}\right)}{\ln\left(\frac{12}{13}\right)}=6{,}06$$

Sota les condicions del problema han de passar 6,06 minuts perquè el cafè estigui a 150°F.

A3. Per un punt arbitrari d'una corba que passa per l'origen es consideren dues rectes paral·leles als eixos. La corba divideix el rectangle que es forma en dues parts A i B tal que l'àrea d'A és *k* vegades l'àrea de B, amb *k* >0. Trobeu les corbes que verifiquen aquesta condició.



Corba per (0,0). Dues rectes paral·leles als eixos que formen un rectangle i la corba divideix aquest rectangle amb dues parts de tal manera que:
$A=K\cdot B,\qquad K>0$

Busquem les corbes que verifiquen aquesta condició: $y=y(x)$?

$B=\int_0^x y(s)ds$

L'àrea A és igual a l'àrea del rectangle menys l'àrea B:

$$A=x\cdot y-B=K\cdot B\Rightarrow x\cdot y=K\cdot B+B\Rightarrow x\cdot y=(K+1)B\xrightarrow{\text{Substituïm}}x\cdot y=(K+1)\int_0^x y(s)ds$$

Derivem per obtenir l'EDO $\rightarrow y+x\cdot y'=(K+1)(y(x)-y(0))\Rightarrow$ Amb les condicions $\begin{cases}y(0)=0\\ y(x)=y\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow y+x\cdot y'=(K+1)y\Rightarrow y+x\cdot y'=Ky+y$

EDO separable:

$$x\cdot y'=Ky\Rightarrow x\frac{dy}{dx}=Ky\Rightarrow\frac{dy}{y}=K\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|y|=K\ln|x|+C\Rightarrow|y|=|x|^{K}e^{C}\Rightarrow y=C'|x|^{K},\quad C'\neq 0$$

Una altra possibilitat:

$A=\int_0^x y(s)ds$

$$y'=\frac{y}{K\cdot x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{K\cdot x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{K\cdot x}\Rightarrow\ln|y|=\frac{1}{K}\ln|x|+C\Rightarrow y=C^{*}|x|^{\frac{1}{K}}$$

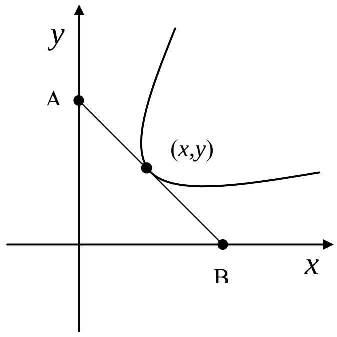
A4. Trobeu les corbes que satisfan que la part de tangent entre els eixos de coordenades és bisecada pel punt de tangència.

Recta tangent per un punt (*x*,*y*):
$Y-y=y'(X-x)\qquad y'\neq 0$ si no, no tallaria l'eix de les X
Tall amb els eixos:

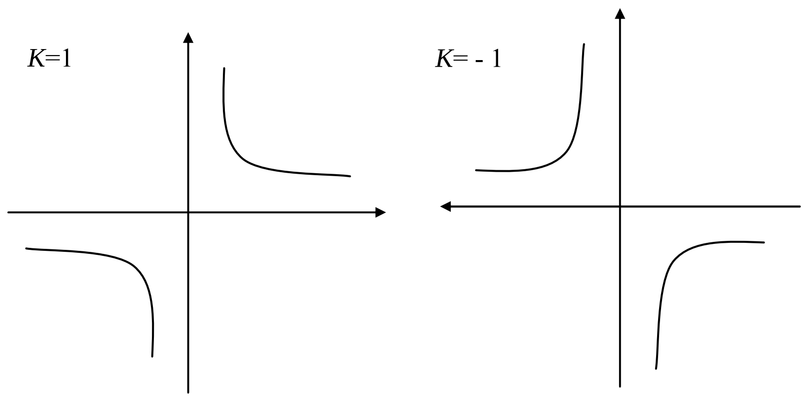
$X=0: Y-y=y'(-x) \Rightarrow Y=y-xy' \rightarrow A$

$Y=0: -y=y'(X-x) \Rightarrow x+\dfrac{-y}{y'}=X \rightarrow B$

$A=(0, y-xy'),\ B=\left(x+\dfrac{-y}{y'}, 0\right)$



$$(x,y)=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{x+\frac{-y}{y'}}{2}, \frac{y-xy'}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x=x-\dfrac{y}{y'} \\ 2y=y-xy' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{y}{y'} \\ y=-xy' \end{cases} \Rightarrow y'=-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y|=-\ln|x|+C \Rightarrow \ln(|xy|)=C \Rightarrow |xy|=e^C \Rightarrow xy=K \qquad (K \neq 0)$$

$y=\dfrac{K}{x}$ Família d'hipèrboles equilàteres (veure la figura, que representa els casos K=1 i K=-1).

A5. En un tanc hi ha 40 l d'aigua-sal que contenen 2,5 kg de sal dissolta. Després s'introdueix en el tanc, a raó de 8 l/min aigua-sal que conté 0,4 kg/l i la barreja, ben agitada, surt del tanc amb la mateixa raó. Trobeu la quantitat de sal en funció del temps. Quina quantitat de sal hi aura després d'un temps molt gran?

Sigui x(t) la quantitat sal en funció de temps. Es verifica $x(0)=2,5$.
Calculem la variació de la quantitat de sal (velocitat)

$\dfrac{dx}{dt}=(\text{Velocitat de sal que entra})-(\text{Velocitat de sal que surt})$

Velocitat de sal que entra = $8\dfrac{1}{\text{min}} \cdot 0,4\dfrac{\text{Kg}}{1}=3,2\dfrac{\text{Kg}}{\text{min}}$

Velocitat de sal que surt = $8\dfrac{1}{\text{min}}\dfrac{x(t)}{40}\dfrac{\text{Kg}}{1}=\dfrac{1}{5}\dfrac{\text{Kg}}{\text{min}}$

$\dfrac{x(t)}{40}\dfrac{\text{Kg}}{1}$ = Concentració de sal per litre (tanc)

Obtenim una edo separable:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3{,}2 - \dfrac{1}{5}x = \dfrac{16-x}{5} \Rightarrow -\dfrac{-dx}{16-x} = \dfrac{1}{5}dt \Rightarrow -\ln|16-x| = \dfrac{1}{5}t + C \Rightarrow \\ \Rightarrow |16-x| = -\dfrac{1}{5}t - C \Rightarrow x(t) = 16 - Ke^{-(1/5)t} \\ x(0) = 2{,}5 \longrightarrow 2{,}5 = 16 - K \Rightarrow K = 13{,}5 \Rightarrow x(t) = 16 - 13{,}5e^{-(1/5)t} \end{cases}$$

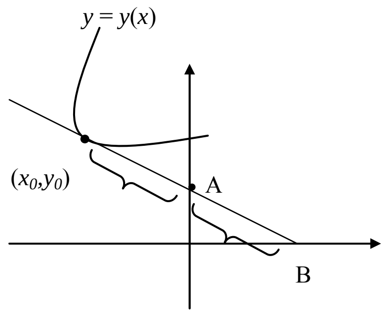
Després d'un temps molt gran (és a dir, quan t tendeix a infinit):

$$x(t) = 16 - 13.5e^{-\frac{1}{5}t} \xrightarrow{t=\infty} 16\text{Kg (sal)}$$

A6. La part de la tangent a una corba compresa entre l'eix de les abscisses i el punt de tangència és dividida en dues parts iguals per l'eix de les ordenades. Trobeu la seva equació suposant que la corba passa pel punt (1 , 2).

1er) Tangent:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$



2on) Tall amb els eixos:

$$x = 0 \longrightarrow y - y_0 = y'_0(-x_0) \Rightarrow y = y_0 - y'_0 \cdot x_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (0, y_0 - x_0 y'_0) = A$$

$$y = 0 \longrightarrow -y_0 = y'_0(x - x_0) \Rightarrow \frac{-y_0}{y'_0} = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, 0 \right) = B$$

3er) $\dfrac{(x_0, y_0) + B}{2} = A$

$$\frac{(x_0\ ,\ y_0) + \left(x_0 - \dfrac{y_0}{y'_0}\ ,\ 0 \right)}{2} = (0\ ,\ y_0 - x_0 y'_0) \Rightarrow \left(2x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, y_0 \right) = (0\ ,\ 2y_0 - 2x_0 y'_0)$$

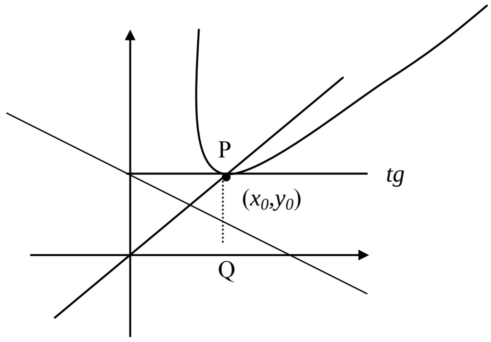
$$\begin{cases} 2x_0 - \dfrac{y_0}{y'_0} = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{y}{y'} = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{y}{y'} \Rightarrow 2xy' = y \Rightarrow y = 2xy' \quad \text{EDO separable} \\ y_0 = 2y_0 - 2x_0 y'_0 \rightarrow -y = -2xy' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{2x} \Rightarrow \ln|y| = \dfrac{1}{2}\ln|x| + C \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\sqrt{x}\right| + C \Rightarrow y = K_1\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = K \cdot x \\ y(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = K \cdot x \\ y(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow 4 = K \cdot 1 = K \longrightarrow y^2 = 4x$$

A7. Per a cada punt P d'una corba considerem la recta *r* determinada per la condició de passar pel punt Q, projecció de P sobre les *x* i ésser perpendicular a la recta OP, essent O l'origen de coordenades. Trobeu les corbes que compleixen que aquesta recta *r* es talla amb la recta tangent a al corba en el punt P a un punt de l'eix OY, per a cada punt P de la corba.

$x{\cdot}y \neq 0$, sinó no podem projectar sobre l'eix x tal com diu problema.



$y = f(x)$? tal que $r \cap tg \in OY$

1er) Tangent per (x_0, y_0): $y - y_0 = y'(x - x_0)$

2on) Recta per l'origen de coordenades i pel punt P,

OP: $y = Kx \to y_0 = Kx_0 \Rightarrow K = \dfrac{y_0}{x_0}$

OP: $x_0 y = y_0 x \Rightarrow x_0 y - y_0 x = 0$

3er) Com que r ha de ser perpendicular a OP el seu pendent és $-\dfrac{x_0}{y_0}$. Passa per $(x_0, 0)$.

$y = mx + n \qquad 0 = -\dfrac{x_0}{y_0}x_0 + n \Rightarrow n = \dfrac{x_0^2}{y_0}$

$r : y = \dfrac{-x_0}{y_0}x + \dfrac{x_0^2}{y_0} \Rightarrow r : y_0 y + x_0 x - x_0^2 = 0$

4art) $r \cap tg$:

$$\begin{cases} y - y_0 = y'(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + y'(x - x_0) \\ y_0 y + x_0 x - x_0^2 = 0 \end{cases}$$

$y_0(y_0 + y'(x - x_0)) + x_0 x - x_0^2 = 0 \Rightarrow y_0^2 + y' y_0 x - y' x_0 y_0 + x_0 x - x_0^2 = 0$ La solució ha de ser de la forma (0,b), per tant:

$y_0^2 - y' x_0 y_0 - x_0^2 = 0$

$-y' x_0 y_0 = x_0^2 - y_0^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y_0^2 - x_0^2}{x_0 y_0}$. Aquesta relació s'ha de verificar per tot punt (x,y) en general.

Per tant:

5er) Edo plantejada: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{x\,y}$, que és homogènia.

$u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$\dfrac{y^2 - x^2}{xy} = \dfrac{u^2 x^2 - x^2}{x^2 u} = \dfrac{u^2 - 1}{u}$

$u'x + u = \dfrac{u^2 - 1}{u} \Rightarrow u'x = \dfrac{u^2 - 1}{u} - u = \dfrac{u^2 - 1 - u^2}{u} = -\dfrac{1}{u}$

Si $u \neq 0$

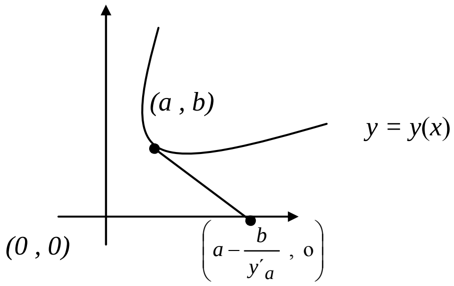
$\dfrac{du}{dx}x = -\dfrac{1}{u} \Rightarrow u{\cdot}du = -\dfrac{dx}{x} \to \dfrac{u^2}{2} = -\ln|x| + C$

Desfem el canvi:

$\dfrac{y^2}{2x^2} + \ln|x| = C \longrightarrow y^2 + 2x^2(\ln|x| + C_1) = 0 \;\; (C_1 = -C)$

Si $u = 0$, aleshores $y = 0$, cas que no es pot donar ja que perquè tingui sentit el problema $xy \neq 0$.

A8. Trobeu les corbes tals que el segment entre l'origen i el punt de tall de la tangent amb l'eix *x* és igual a la distància entre aquest últim i el punt de tangència.



L'equació de la tangent:

$$y-b=y'_a(x-a)$$

Si $y=0 \rightarrow x=a-b\dfrac{b}{y'_a}$

$$d\left((0{,}0),(a-\frac{b}{y'_a},0)\right)^2=d\left((a,b),(a-\frac{b}{y'_a},0)\right)^2$$

$$\left(a-\frac{b}{y'_a}\right)^2=\left(\frac{b}{y'_a}\right)^2+b^2$$

Aquesta relació s'ha de verificar per a tot punt (x,y) de la corba buscada:

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2=\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2 \Rightarrow x^2-\frac{2xy}{y'}=y^2 \Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}\ \text{ Edo homogènia}$$

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=u\cdot x\Rightarrow y'=u+u\cdot x=\sigma(u)$$

$$y'=\frac{2x\cdot u\cdot x}{x^2-u^2x^2}=\frac{2u\cdot x^2}{x^2(1-u^2)}=\frac{2u}{1-u^2}=u+u'x\Rightarrow u'x=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}=\frac{u+u^3}{1-u^2}\Rightarrow$$

$$u'x=\frac{u+u^3}{1-u^2}\longrightarrow\frac{du}{dx}x=\frac{u+u^3}{1-u^2}\Rightarrow\frac{(1-u^2)du}{u+u^3}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1-u^2}{u(u^2+1)}du=\frac{dx}{x}$$

Si $u=0\rightarrow y=0$ Que és solució de l'edo, però no compleix l'enunciat d'aquest problema. En canvi, si $u\neq 0$:

$$\frac{1-u^2}{u(u^2+1)}=\frac{A}{u}+\frac{Mu+N}{u^2+1}=\frac{Au^2+A+Mu^2+Nu}{u(u^2+1)}=\frac{(A+M)u^2+N\cdot u+A}{u(u^2+1)}$$

$$\begin{cases}A+M=-1\\ N=0\\ A=-1\rightarrow M=-2\end{cases}$$

$$\int\frac{1-u^2}{u(u^2+1)}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1}{u}du+\int\frac{-2u}{u^2+1}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|x|=\ln|u|-\ln(u^2+1)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|x|=\ln\left|\frac{u}{u^2+1}\right|+C\Rightarrow C=\ln|x|-\ln\left|\frac{u}{u^2+1}\right|=\ln\left|\frac{x}{\frac{u}{u^2+1}}\right|\Rightarrow C=\ln\left|\frac{x(u^2+1)}{u}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=\ln\left|\frac{x(u^2+1)}{u}\right|\Rightarrow e^C=\left|\frac{x(u^2+1)}{u}\right|\Rightarrow K=\frac{x(u^2+1)}{u}\quad,\quad K\neq 0$$

Desfent el canvi:

$$K=\frac{x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)}{\frac{y}{x}}=\frac{x\frac{y^2+x^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}=\frac{y^2+x^2}{y}$$

$$y^2+x^2-Ky=0 \qquad K\neq 0$$

A9. Un dipòsit conté 50 l d'una solució composta per un 90% d'aigua i un 10% d'alcohol. S'aboca en el dipòsit a un ritme de 4 l/min una segona solució que conté un 50% d'alcohol. Al mateix temps, es buida el dipòsit a una velocitat de 5l/min. Suposant que la solució del dipòsit s'agita constantment, quant alcohol queda en el dipòsit després de 10 minuts?

$y(10)=?\qquad y=y(t)=\text{quantitat alcohol en temps } t$

$$\frac{dy}{dt}=\text{Velocitat d'entrada - Velocitat de sortida}$$

Entra: $4\frac{\text{l}}{\text{min}}\frac{0{,}5\text{l d'alcohol}}{1\ \text{l}}=2\frac{\text{l d'alcohol}}{\text{min}}$

Surt: $5\frac{\text{l}}{\text{min}}\frac{y(t)\,\text{l d'alcohol}}{50-t\ \ \text{l}}=\frac{5y}{50-t}\frac{\text{l d'alcohol}}{\text{min}}$

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=2-\frac{5y}{50-t} & \text{edo lineal de primer ordre}\quad y'+\frac{5}{50-t}y=2\\ \text{amb } y(0)=5\ \text{l}\end{cases}$$

1er) $y'+\frac{5}{50-t}y=0\Rightarrow y'=-\frac{5}{50-t}y\rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{-5dt}{50-t}\Rightarrow \ln|y|=5\ln|50-t|+C\Rightarrow y=K(50-t)^5$

2on) <u>Mètode Variació de les constants:</u>

$y(t)=K(t)(50-t)^5$

$y'(t)=K'(t)(50-t)^5-5K(t)(50-t)^4$

Substituïm:

$$K'(t)(50-t)^5-5K(t)(50-t)^4+\frac{5}{50-t}K(t)(50-t)^5=2\Rightarrow K'(t)=\frac{2}{(50-t)^5}=2(50-t)^{-5}=(-2)\left(-(50-t)^{-5}\right)$$

$$K(t)=(-2)\frac{(50-t)^{-4}}{-4}+C=\frac{1}{2}(50-t)^{-4}+C$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}(50-t)^{-4}+C\right)(50-t)^5=\frac{1}{2}(50-t)+C(50-t)^5\quad \underline{\text{Solució general}}$$

<u>Solució particular</u>: $y(0)=5$

$$5=\frac{1}{2}50+C\cdot 50^5\Rightarrow 5=25+C\cdot 50^5\Rightarrow\frac{-20}{50^5}=C$$

$$y=\frac{1}{2}(50-t)-20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5$$

$$y(10)=\frac{40}{2}-20\left(\frac{40}{50}\right)^5=20-20\left(\frac{4}{5}\right)^5=20-20\cdot 0{,}32768=13{,}4464\ \text{l alcohol}$$

MÈTODES NUMÈRICS

IN: INTEGRACIÓ NUMÈRICA

IN1. Calculeu $\int_0^1 e^{-x^2}dx$:

a) Aplicant la fórmula de trapezis (*n*=4)

$$n=4 \to h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{h}{2}\left[f(0)+2f(0{,}25)+2f(0{,}5)+2f(0{,}75)+f(1)\right]=$$

$$=\frac{0{,}25}{2}\left[1+2e^{-0{,}25^2}+2e^{-0{,}5^2}+2e^{-0{,}75^2}+e^{-1}\right]=0{,}742984097$$

b) Aplicant la fórmula de Simpson (*n*=4)

$$n=4 \to h=\frac{1}{4}=0{,}25$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{0{,}25}{3}\left[f(0)+4f(0{,}25)+2f(0{,}5)+4f(0{,}75)+f(1)\right]=$$

$$=\frac{0{,}25}{3}\left[e^{-0}+4e^{-0{,}25^2}+2e^{-0{,}5^2}+4e^{-0{,}75^2}+e^{-1}\right]=$$

$$=\frac{0{,}25}{3}\left[1+4\cdot 0{,}93941306+2\cdot 0{,}77880078+4\cdot 0{,}56978282+0{,}36787944\right]=0{,}746855379$$

c) Quin ha de ser el nombre de subdivisions *n* de l'interval perquè l'error no sigui més gran que 10^{-4} fent servir la fórmula dels trapezis?

Una fita de l'error:

$$|\text{error}| \le \frac{b-a}{12}h^2 \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

$$\frac{1}{12}h^2 \underset{\otimes}{2} \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{12}\frac{1}{n^2}2 \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{6}10^4 \le n^2 \Rightarrow n \ge 40{,}82 \cong 50$$

$n=50$, s'ha d'utilitzar ordinador per obtenir $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}7467996$

$\otimes$ Fita de $|f''| \le 2\cdot 1 = 2$ en $[0,1]$

$$f=e^{-x^2}$$

$$f'=-2xe^{-x^2}$$

$$f''=-2xe^{-x^2}-2x(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)$$

$$|f''|=\left|e^{-x^2}\right|\left|-2+4x^2\right| \le 1\cdot 2$$

d) Quin ha de ser el nombre de subdivisions *n* de l'interval perquè l'error no sigui més gran que 10^{-4} fent servir la fórmula de Simpson?

Una fita de l'error:

$$|\text{error}| \le \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x\in[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$$

$$\frac{1}{180} \cdot h^4 \cdot \underset{\otimes}{20} \le 10^{-4} \rightarrow h^4 < 9 \cdot 10^{-4} \rightarrow h < \sqrt{3} \cdot 10^{-1}$$

$$\frac{1}{n} = h \rightarrow n = 6 \longrightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}74683039$$

$\otimes$ Fita de $\left| f^{IV} \right| \le 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$ en $[0,1]$

$$f = e^{-x^2}$$

$$f' = -2xe^{-x^2}$$

$$f'' = -2xe^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(-2 + 4x^2\right)$$

$$f''' = -2xe^{-x^2}\left(-2 + 4x^2\right) + e^{-x^2}(8x) = e^{-x^2}\left(4x - 8x^3 + 8x\right) = e^{-x^2}\left(12 - 8x^3\right)$$

$$f^{IV} = -2xe^{-x^2}\left(12 + 8x^3\right) + e^{-x^2}\left(12 - 24x^2\right) = e^{-x^2}\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right)$$

$$\left| f^{IV} \right| = \left| e^{-x^2} \right| \left| 16x^4 - 48x^2 + 12 \right| \le \left| 16x^4 - 48x^2 + 12 \right|$$

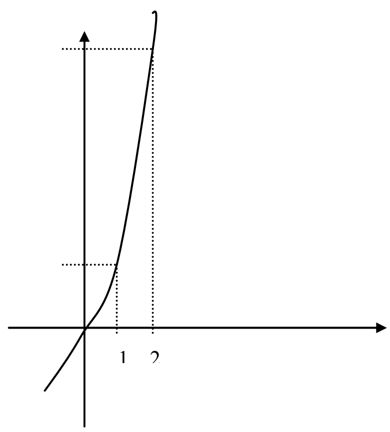
$$16x^4 - 48x^2 + 12 \text{ és decreixent en } [0,1] : \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow |12| = 12 \\ x = 1 \rightarrow |-20| = 20 \end{array} \right.$$

IN2. Apliqueu el mètode de trapezis a la funció $\frac{1}{x}$ dintre de l'interval $[1,2]$ fent quatre subdivisions de l'interval. Doneu una fita de l'error comès.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \left(\frac{2-1}{4}\right) \frac{1}{2} \left[f(1) + 2f(1{,}25) + 2f(1{,}5) + 2f(1{,}75) + f(2) \right] = \frac{0{,}25}{2} \left[1 + \frac{2}{1{,}25} + \frac{2}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}75} + \frac{1}{2} \right] =$$

$= 0.6932539...$

$$|\text{error}| \le \frac{b-a}{12} h^2 \quad \text{màx} \quad |f''|$$



$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

En $[1,2]$:

$$1 \le x^3 \le 8$$

$$\frac{1}{8} \le \frac{1}{x^3} \le 1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \le \frac{2}{x^3} \le 2$$

$$|\text{error}| \le \frac{1}{12} 0{,}25^2 \cdot 2 = 0{,}01041$$

RN: RESOLUCIÓ NUMÈRICA D'EDOS: MÈTODE D'EULER

RN1. Es té l'edo $y' = 2y + 3x$ amb $y(1) = 3$. Trobeu $y(2)$:

a) Exactament

$$\begin{cases} y' = 2y + 3x \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Es tracta d'una edo lineal de primera ordre.

1er) $y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = 2y \rightarrow \dfrac{dy}{y} = 2dx \xrightarrow{\text{Integrem}} \ln|y| = 2x + C \Rightarrow y_H = Ke^{2x}$

2on) $y = K(x)e^{2x} \xrightarrow{\text{Derivem}} y' = K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x}$

Substituïm:

$$\boldsymbol{K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x} - 2\left(K(x)e^{2x}\right) = 3x \Rightarrow K'(x)e^{2x} = 3x \Rightarrow K'(x) = 3xe^{2x} \xrightarrow{\textbf{Integrem}} K(x) = 3\int xe^{-2x} \overset{(*)}{=}}$$

$$\boldsymbol{= 3\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx\right] = 3\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C\right]}$$

$$\textbf{(*)} \quad \boldsymbol{\begin{pmatrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x}dx \rightarrow v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}}$$

3er) $y = e^{2x} \cdot 3\left[-\dfrac{1}{2}xe^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + C\right] = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4} + 3C.e^{2x}$

$y_p \quad y(1) = 3 \rightarrow 3 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4} + 3C\cdot e^2 \Rightarrow 3 + \dfrac{9}{4} = 3C\cdot e^2 \Rightarrow \dfrac{21}{4} = 3C\cdot e^2 \Rightarrow \dfrac{7}{4}e^{-2} = C$

$y_p = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4} + \dfrac{21}{4}e^{2x-2}$

$\boldsymbol{y(2)?? = -3 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{21}{4}e^2 = 35{,}0425}$ Valor exacte

b) Aproximadament per Euler (pas h = 0,5)

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$f(x, y) = 2y + 3x$

$y(x_0) = y_0 \rightarrow y(1) = 3$

$x_0 = 1 \longrightarrow y_1 = 3 + 0{,}5(2\cdot 3 + 3) = 3 + 0{,}5\cdot 9 = 7{,}5$

$x_1 = 1{,}5 \longrightarrow y_2 = 7{,}5 + 0{,}5(2\cdot 7{,}5 + 3\cdot 1{,}5) = 17{,}25$

$x_2 = 2 \longrightarrow y_3 = 17{,}25 + 0{,}5(2\cdot 17{,}25 + 3\cdot 2) = 37{,}5$

RN2. Considereu el problema de valors inicials $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Fent servir el mètode d'Euler doneu una aproximació de $y(1{,}5)$:

Es tracta d'una edo separable. Resolem-la primer de forma exacta:

$$y' = 2xy \rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\cdot dx \rightarrow \ln|y| = x^2 + C \Rightarrow y = K\cdot e^{x^2} \xrightarrow{y(1)=1} K\cdot e = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{e}e^{x^2} = e^{x^2-1} \Rightarrow y(1{,}5)?? = e^{1{,}5^2-1} = 3{,}49034$$

Utilitzem ara Euler per obtenir una aproximació de $y(1{,}5)$:

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n y_n)$$

$$f(x,y) = 2xy$$

a) Amb *h* = 0,1.

Si $h = 0{,}1$:

$$h = 0{,}1 = \frac{0{,}5}{N} \Rightarrow N = 5 \text{ passos}$$

x_n	y_n	Valor real
1	1	
1,1	1,2	
1,2	1,4640	
1,3	1,854	
1,4	2,2874	
1,5	2,9278	3,49034

$y_1 = y_0 + 0{,}1(2x_0 y_0) = 1 + 0{,}1(2\cdot1\cdot1) = 1{,}2 \leftarrow$ que dóna estimació de $y(1{,}1)$.

$y_2 = 1{,}2 + 0{,}1[2(1{,}1)(1{,}2)] = 1{,}4640$

$y_3 = 1{,}4640 + 0{,}1[2(1{,}2)(1{,}4640)] = 1{,}8154$

$y_4 = 1{,}8154 + 0{,}1[2(1{,}3)(1{,}8154)] = 2{,}2874$

$y_5 = 1{,}2874 + 0{,}1[2(1{,}4)(2{,}2874)] = 2{,}9278$ Estimació de $y(1{,}5)$

Valor real: 3,49034

Error real %: $\dfrac{|\text{Valor real - Valor aproximat}|}{|\text{Valor real}|} = 16{,}12\%$ dolenta

b) Amb *h* = 0,05. Compareu els resultats obtinguts en els dos casos.

$$h = 0{,}05 = \frac{0{,}5}{N} \Rightarrow 0{,}05N = 0{,}5 \Rightarrow N = 10 \quad \text{passos}$$

x_n	y_n	Valor real
1,00	1,0000	
1,05	1,1000	
1,10	1,2155	
1,15	⋮	
1,20	⋮	
⋮	⋮	
1,50	3,1733	3,49034

Valor real: 3,49034

Error real: 9,08%→en millora l'exactitud.

RN3. Apliqueu el mètode d'Euler al problema de valors inicials $\begin{cases} y' = 2x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ i trobeu el valor de la solució *y* en *x* = 0,4 donant els resultats amb tres decimals:

a) Fent servir *h* = 0,2.

$$x_0 = 0 \longrightarrow y_0 = 1 \longrightarrow y_1 = y_0 + h(2x_0 + y_0) = 1 + 0,2(0+1) = 1 + 0,2 = 1,2 \approx y(0,2)$$
$$x_1 = 0,2 \longrightarrow y_1 = 1,2 \longrightarrow y_2 \approx y(0,4) = y_1 + h(2x_1 + y_1) = 1,2 + 0,2(2 \cdot 0,2 + 1,2) = 1,2 + 0,2 \cdot 1,6 = 1,52$$
$$x_2 = 0,4 \longrightarrow y_2 = 1,52$$

b) Fent servir *h* = 0,1.

$$x_0 = 0 \longrightarrow y_0 = 1 \longrightarrow y_1 = 1 + 0,1(1) = 1,1$$
$$x_1 = 0,1 \longrightarrow y_1 = 1,1 \longrightarrow y_2 = 1,1 + 0,1(0,2 + 1,1) = 1,23$$
$$x_2 = 0,2 \longrightarrow y_2 = 1,23 \longrightarrow y_3 = 1,23 + 0,1(0,4 + 1,23) = 1,393$$
$$x_3 = 0,3 \longrightarrow y_3 = 1,393 \longrightarrow y_4 = 1,393 + 0,1(0,6 + 1,393) = 1,5923$$
$$x_4 = 0,4 \longrightarrow y_4 = 1,5923$$