MATEMÀTIQUES II

Problemes de la primera part

Secció de Matemàtiques i Informàtica.
Departament d'Estructures a l'Arquitectura.
E.T.S. d'Arquitectura del Vallès.
Universitat Politècnica de Catalunya.

1 CORBES PARAMÈTRIQUES.

1.1. Dibuixa les corbes paramètriques següents i escriu l'equació cartesiana obtinguda en eliminar el paràmetre.

- a) $x = 3t - 1$, $y = 2t + 1$
- b) $x = 1 + \frac{1}{t}$, $y = t - 1$
- c) $x = 4 + 2\cos\theta$, $y = 1 + \sin\theta$
- d) $x = 4 + 2\cos\theta$, $y = 1 + 4\sin\theta$

1.2. Parametritza les següents corbes de l'espai.

- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

1.3. Dibuixa l'hèlice circular $x(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$.

1.4. Identifica i dibuixa cada una de les següents corbes paramètriques i troba dues superfícies que la continguin.

- $r(t) = (1 - t, 2 + 4t, 3 + 2t)$, $0 \leq t \leq 2$.
- $r(t) = (t, t^2, \frac{3t}{2})$, $t \geq 0$.
- $r(t) = (2\cos t, 3\sin t, 1)$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$.

1.5. Sabent que $r(t) = (2a\cos t(1 + \cos t), 2a\sin t(1 + \cos t))$ és una parametrització de la cardioide, comprova que la seva equació implícita és $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

1.6. Sabent que $r(t) = (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2})$ és una parametrització de la cissoide, comprova que la seva equació implícita és $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$.

1.7.

- a) Comprova que $r(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ és una parametrització d'una corba de Viviani (la intersecció de l'esfera de radi 2 centrada a l'origen amb el cilindre $x^2 + y^2 = 2x$).
- b)Comprova que $r(t) = (\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}, \frac{t}{2} - \frac{1}{2t})$ és una parametrització de la hipèrbola $x^2 - y^2 = 1$.

1.8. Calcula el vector tangent i dóna l'equació de la recta tangent a

- a) $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t)$ en $t = 0$.
- b) $r(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$ en $(1, 1, 0)$.
- c) $r(t) = (t, 2t, t^2)$ en $t = 1$.
- d) $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ en $t = \frac{\pi}{3}$ i en $t = 0$.

1.9. Comprova que les corbes d'equacions $X(t) = (e^t, e^{2t}, 1 - e^{-t})$ i $Y(t) = (1 - \cos t, \sin t, \frac{\pi}{2}2 - t)$ es tallen en el punt $(1, 1, 0)$.
Calcula l'angle que formen les tangents en aquest punt.

1.10. Sigui $r(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$. Prova que $r(t)$ i $r'(t)$ formen angle constant al llarg de la corba.

1.11. Determina el pendent de la recta tangent

- a) a l'el·lipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punt $(2, \sqrt{3})$.
- b) a l'astroide $x = \cos^3 t, \sin^3 t)$ en $t = \frac{\pi}{3}$.

1.12. Calcula la longitud de la corba $r(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6})$, $0 \leq t \leq 1$.
Determina dues superfícies que la continguin i dibuixa-la.

1.13. Calcula la longitud

- a) d'un arc de cicloide.
- b) d'una volta d'una hèlice circular de paràmetres a i b.
- c) de la corba $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- d) de la corba $r(t) = (t, 3t^2, 6t^3)$, $0 \leq t \leq 2$.

1.14. Prova que si $r = r(\theta)$ és l'equació en polars d'una corba amb $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, i r és una funció amb derivada contínua, aleshores la seva longitud ve donada per

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$$

1.15. Comprova que l'equació en polars de la cardioide és $r = a(1 + \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ i troba la seva longitud.

1.16.

- a) Prova l'equidistància de les voltes de l'espiral d'Arquímedes ($r(\theta) = a\theta$).

  Com a aplicació resol b).

- b) Una cinta de 0,025 cm de gruix s'ha de bobinar sobre un cilindre circular de 1,25 cm de radi fins aconseguir una bobina de 5 cm de radi. Quants metres de cinta faran falta?

1.17. Comprova que la curvatura de l'el·lipse de semieixos a i b és màxima als extrems de l'eix major i mínima als extrems del menor.
Determina aquests valors màxim i mínim.

1.18. Com més petita és la curvatura d'una carretera, més de pressa pot circular-hi un cotxe. Suposem que la velocitat màxima al llarg d'una corba és inversament proporcional a l'arrel quadrada de la curvatura. Si un cotxe que circula sobre la trajectòria $y = 0,13x^2$ (x i y mesurats en kilòmetres) pot anar, sense perill, a 120 Km/h en el punt $(0.5, 0.016)$,

- a) quina velocitat pot portar en el punt $(1.5, 0.44)$?
- b) quin és el punt més perillós d'aquesta carretera?
- c) quina seria la velocitat aconsellable en el tram corresponent a b)?

1.19. Comprova que la curvatura de l'hèlice circular $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ és constant. Quant val?

1.20. Una partícula mòbil descriu la corba definida per l'equació paramètrica $r(t) = (4\cos t, 4\sin t, 4\cos t)$.

- a) Prova que la trajectòria és una el·lipse i determina el pla que la conté.
- b) Prova que el radi de curvatura és $\rho = 2\sqrt{2}(1 + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}$.

1.21. Donada la corba d'equació $r(t) = (\sin t, t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

- a) dóna-la com a intersecció de dues superfícies i dibuixa-la.
- b) calcula la seva longitud.

- c) prova que la curvatura és constant i igual a $\frac{1}{2}$.

1.22. Considerem la corba d'equació $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

- a) Determina i dibuixa una superfície que contingui la corba i dibuixa la corba.
- b) Calcula la seva longitud.
- c) Calcula la curvatura en un punt genèric.

Solucions

1.1

- a) $2x - 3y + 5 = 0$.
- b) $xy + x - y - 2 = 0$ $(x-1)(y-1) = 1$.
- c) $\frac{(x-4)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$
- d) $2x - y - 7 = 0$

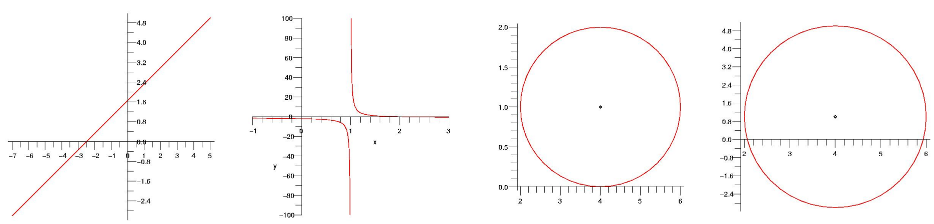

Figura 1:

1.2

- a)

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3 \end{cases}$$

- b)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - \cos t - \sin t \end{cases}$$

1.3

1.4

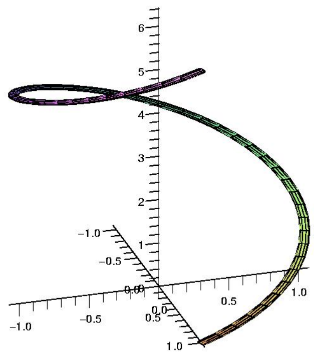

Figura 2:

- a)
  - i) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$
  - ii)

$$\begin{aligned} 4x + y - 2 &= 0 \\ 2x + z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

- b)

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ 3x - 2z &= 0 \end{aligned}$$

- c)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

1.5

- Se substitueix $x = 2a\cos t(1+\cos t)$, $x = 2a\sin t(1+\cos t)$ en l'equació implícita.

1.6

- Idem.

1.7

- a) Es comprova que $x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sin\frac{t}{2}$ verifiquen les equacions $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = 2x$.
- b) Idem.

1.8

- a)
  - i) $r'(t) = (-4\sin 4t, 4\cos 4t, 1)$, $r'(0) = (0, 4, 1)$
  - ii) $(x, y, z) = r(0) + \lambda r'(0) = (0, 1, 0) + \lambda(0, 4, 1)$
- b)
  - i) $r'(0) = (1, 0, 1)$
  - ii) $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$
- c)
  - i) $r'(1) = (1, 2, 2)$
  - ii) $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, 2, 2)$
- d)
  - en $t = \frac{\pi}{3}$
    - i) $r'(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{sqrt3}{2})$
    - ii) $(x, y) = \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(\frac{1}{2}, \frac{sqrt3}{2})$
  - en $t = 0$
    - i) $r'(0) = (0, 0)$
    - ii) No hi ha recta tangent.

1.9

- i) $X(0) = (1,1,0)$, $Y(\frac{\pi}{2}) = (1,1,0)$.
- ii) És l'angle que formen els vectors tangents a $X(t)$ i $Y(t)$ en el punt $(1,1,0)$.

  $X'(t) = (e^t, 2e^{2t}, e^t)$, $X'(0) = (1,2,1)$. $Y'(t) = (\sin t, \cos t, -1)$, $Y'(\frac{\pi}{2}) = (1,0,1)$.

  $\cos\alpha = \frac{X'(0)\cdot Y'(\frac{\pi}{2})}{\|X'(0)\|\cdot\left\|Y'(\frac{\pi}{2})\right\|} = 0$. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.10

- $r(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1)$ i $r'(t) = (\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}.\frac{-4}{(1+t^2)^2}, 0)$. $r(t)\cdot r'(t) = 0$ per a tot valor de t. Per tant formen sempre un angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.11

- a) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
- b) $-\sqrt{3}$

1.12

- a) $L(0,1) = \int_0^1 \sqrt{1+t^2+\frac{t^4}{4}}dt = \int_0^1 (1+\frac{t^2}{2})dt = \frac{7}{6}$
- b) $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$

1.13

- a) $8a$
- b) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$
- c) $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$
- d) 50

1.14
1.15

- $4a$

1.16

- Calen 29.5m

1.17

- Parametritzem l'el·lipse $r(t) = (a\cos t, b\sin t)$. Aleshores, $\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. $\kappa(t)$ és màxima per $t = 0, \pi$ i és mínima per $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

1.18

- a) velocitat màxima en $(1.5, 0.016)$ igual a 144Km/h
- b) curvatura màxima en $(0, 0)$ igual a 0.26
- c) velocitat aconsellable menor que 59.6Km/h

1.19

- $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1.20

- a) La trajectòria és la intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 4$ i el pla $x = z$.
- b) S'aplica la fórmula de la curvatura a l'espai.

1.21

- a) $x^2 + (z-1)^2 = 1$ i $x = \sin y$
- b) $2\sqrt{2}\pi$
- c) S'aplica la fórmula de la curvatura.

1.22

- a) El con $x^2 + y^2 = z^2$
- b) $\sqrt{3}(e^\pi - 1)$
- c) $\frac{2}{3\sqrt{3}e^t}$

2 SUPERFÍCIES.

2.1. Determina el domini de les següents funcions i dibuixa algunes corbes de nivell i algunes seccions per plans paral·lels a l'eix z que permetin obtenir una representació gràfica aproximada.

- a) $f(x,y) = x + y$
- b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
- c) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
- d) $f(x,y) = y^2$
- e) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- f) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
- g) $f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}$
- h) $f(x,y) = xy$
- i) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$
- j) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

2.2. Calcula les derivades parcial primeres de

- a) $f(x,y) = xe^{x^2 y}$
- b) $f(x,y) = \ln(x + y^2)$
- c) $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$
- d) $f(x,y) = x^y$
- e) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$
- f) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$
- g) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

2.3. Comprova el Lema de Schwarz en

- a) $z = x^2 - 2xy - 3y^2$
- b) $z = x^{y^2}$
- c) $z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$

2.4. Demostra que

- a) Si $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, aleshores $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
- b) Si $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$, aleshores $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

2.5. Donada la funció $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x+y}$, comprova la relació $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y)$.

2.6. Calcula les derivades direccionals de les funcions donades en els punts i segons les direccions indicades.

- a) $f(x,y) = xy^2 - 2x^2$ en $(1,-2)$ i en la direcció que determina 60º amb l'eix OX.

- b) $f(x,y) = 2x^3 - \frac{y^2}{2}$ en $(1,3)$ i en la direcció que va des del punt $P = (1,3)$ al punt $Q = (2,4)$.

- c) $f(x,y) = x \tan y$ en $P = (2, \frac{\pi}{4})$ i en la direcció de $\vec{v} = (2,1)$.

- d) $f(x,y,z) = xye^z$ en $P = (2,4,0)$ i en la direcció de $\vec{v} = (1,2,-3)$.

2.7. Sigui $f(x,y)$ una funció diferenciable en un punt P. Sabent que les derivades direccionals de f en P en les direccions de $\vec{u} = (2,1)$ i $\vec{v} = (3,2)$ són -3 i 2 respectivament,

- a) determina el gradient de f en P.

- b) digues en quines direccions la derivada direccional serà nul·la.

2.8. La temperatura en el punt (x,y) d'una placa ve donada per $T(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

- a) Des del punt $(3,4)$, en quina direcció creix més ràpidament la temperatura?

- b) A quin ritme es produeix aquest creixement màxim?

2.9. Si $f(x,y,z) = xy^2 + z^2$, determina els valors màxim i mínim de la derivada direccional de f en $(2,1,1)$.

2.10. Dibuixa la gràfica de la funció $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ i marca-hi el punt $P = (1,2,4)$. Entre totes les rectes tangents a aquesta gràfica en P, quina és la de pendent màxim?. Quin és el valor d'aquest pendent màxim?

2.11. Troba l'equació de les rectes tangent i normal a la corba $9x^2+4y^2 = 40$ en el punt $(2,-1)$.

2.12. Troba l'equació del pla tangent i de la recta normal a les superfícies següents i en els punts indicats.

- a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ en $(2,1,1)$.

- b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en $(5, 12, 13)$.
- c) $z = x^3 - 3xy + y^3$ en $(1, 2, 3)$.
- d) $z = 25 - x^2 - y^2$ en $(3, 1, 15)$.

2.13. Determina la recta tangent a la corba intersecció de les superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ i $x - y - z = 0$ en el punt $(2, 1, 1)$.

2.14. Troba els punts de la superfície $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$ on el pla tangent és horitzontal.

Solucions

2.1

- a) Dom$f = \mathbb{R}^2$. Corbes de nivell $x + y = k$ rectes paral·leles
- b) Dom$f = \mathbb{R}^2$. Corbes de nivell $x^2 + y^2 = k$ circumferències
- c) Dom$f = \mathbb{R}^2$. Corbes de nivell $x^2+y^2 = 1-k$, $(k < 1)$ circumferències
- d) Dom$f = \mathbb{R}^2$. Corbes de nivell $y^2 = k^2$ $y = \pm k$ rectes paral·leles
- e) Dom$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$. Corbes de nivell $x^2 + y^2 = 4 - k^2$ circumferències
- f) Dom$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$. Corbes de nivell $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{k^2}$ circumferències
- g) Dom$f = \mathbb{R}^2$. Corbes de nivell $x^2 + 2y^2 = -\ln k$ $(0 < k < 1)$ el·lipses
- h) Dom$f = \mathbb{R}^2$. Corbes de nivell $xy = k$ hipèrboles
- i) Dom$f = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | x = 0 \text{ o } y = 0\}$. Corbes de nivell $xy = \frac{1}{k}$ hipèrboles
- j) Dom$f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Corbes de nivell $(1 - \frac{1}{k})x^2 + y^2 = 0$

2.2

- a) $\frac{\partial f}{\partial x} = (1 + 2x^2y)e^{x^2y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, \ln 2) = 2(1 + \ln 8)$
  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3e^{x^2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, \ln 2) = 2$
- b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+y^2}$
- c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$
- d) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$
- e) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y`+z^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y`+z^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y`+z^2)^2}$
- f) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}}\frac{\ln x}{z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}}\frac{\ln x}{z^2}$

- g) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{z} \ln\frac{x}{y}$

2.3

- a) $\frac{\partial x}{\partial x} = 2x - 2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$
  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x - 6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2$

- b) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x)$
  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2-1} 2y \ln x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x)$

- c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\sqrt{x(y-x)}}{4x(x-y)^2}$
  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{2y\sqrt{x(y-x)}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\sqrt{x(y-x)}}{4x(x-y)^2}$

2.4

- a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

- b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2y^2}{(x+y)^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{(x+y)^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2}{(x+y)^3}$

2.5

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$

2.6

- a) $\nabla f(1, -2) = (0, -4),\ \vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),\ D_{\vec{u}} f(1, -2) = -2\sqrt{3}$
- b) $\nabla f(1, 3) = (6, -6),\ \vec{u} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}),\ D_{\vec{u}} f(1, 3) = \frac{6}{\sqrt{5}}$
- c) $\nabla f(2, \frac{\pi}{4}) = (1, 4),\ \vec{u} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}),\ D_{\vec{u}} f(2, \frac{\pi}{4}) = \frac{6}{\sqrt{5}}$
- d) $\nabla f(2, 4, 0) = (4, 2, 8),\ \vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}),\ D_{\vec{u}} f(2, 4, 0) = -\frac{16}{\sqrt{14}}$

2.7

- a) $\nabla f(P) = (-6\sqrt{5} - 2\sqrt{13}, 9\sqrt{5} + 4\sqrt{13})$
- b) En les direccions dels vectors $\pm(9\sqrt{5} + 4\sqrt{13}, 6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$

2.8

- a) En la direcció del vector $(7, -24)$
- b) Ritme de creixement màxim $\frac{1}{25}$

2.9

- Màxim $\sqrt{21}$, Mínim $-\sqrt{21}$

2.10

- $(x, y, z) = (1, 2, 4) + \lambda(-1, -2, 5)$. Pendent màxim $\sqrt{5}$

2.11

- recta tangent $9x - 2y = 20$, recta normal $2x + 9y = 5$

2.12

- a) Pla tangent $2x + 2y + z = 7$, recta normal $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$
- b) Pla tangent $5x + 12y - z = 0$, recta normal $\frac{x-5}{5} = \frac{y-12}{12} = \frac{z-13}{-13}$
- c) Pla tangent $-3x + 9y + z = 18$, recta normal $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{9} = \frac{z-3}{1}$
- d) Pla tangent $6x + 2y + z = 35$, recta normal $\frac{x-3}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-15}{1}$

2.13

- $(x, y, z) = (2, 1, 1) + \lambda(0, 1, -1)$

3 DISSENY GRÀFIC ASSISTIT PER ORDINADOR (CAGD)

3.1. Volem trobar el polígon de control de la paràbola $y = x^2$. Tenint en compte que passa pels punts $P_0 = (-1, 1)$ i $P_2 = (1, 1)$, podem prendre com a punts de control $P_0, P_1 = (0, \alpha)$ i P_2. Determina el valor de α.

3.2. Troba la corba de Bézier control·lada pels punts $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$ (el segon punt repetit) i compara-la amb el problema 3.1.

3.3. Demostra que la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi 1 no es pot parametritzar mitjançant funcions polinòmiques.

3.4. Donats els punts $P_0 = (-1, 1), P_1 = (0, -1)$ i $P_2 = (1, 1)$

a) Troba la corba de Bézier $C(t)$ que control·len.

b) Gira'ls 45º al voltant de l'origen i troba la corba de Bézier $C'(t)$ que control·len aquest nous punts.

c) Comprova que $C'(t)$ és la corba $C(t)$ girada 45º al voltant de l'origen.

3.5. Troba la corba de Bézier control·lada pels punts $P_0 = (0, 0, 0), P_1 = (2, 0, 0), P_2 = (1, 1, 2)$ i $P_3 = (0, 2, 0)$ i representa-la gràficament.

3.6. Donats els nodes $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 4$, troba els corresponents N_i^j fins a $j = 4$.

Solucions

3.1

- $\alpha = -1$.

3.2

- $C(t) = (-1 + 3t - 3t^2 + 2t^3, 1 - 6t + 6t^2)$.

3.4

a) $C(t) = (-1 + 2t, 1 - 4t + 4t^2)$.

b) $P_0' = (-\sqrt{2}, 0), P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ i $P_2 = (0, \sqrt{2})$.

c) $C_0(t) = (-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}t^2, -\sqrt{2}t + 2\sqrt{2}t^2)$.

4 POLINOMIS DE TAYLOR.

4.1.

- a) Desenvolupa el polinomi $p(x) = 4x^3 - 3x + 2$ en potències de $x + 1$.
- b) Desenvolupa el polinomi $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ en potències de $x - 1$.
- c) Desenvolupa el polinomi $p(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$ en potències de $x + 2$.

4.2. Troba el polinomi de Mac Laurin de grau 8 de $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

4.3.

- Troba el polinomi de Taylor de grau 4 de $f(x) = \cos x$ en el punt $x = \frac{\pi}{4}$.
- Troba el polinomi de Taylor de grau 4 de $f(x) = \sin x$ en el punt $x = \frac{\pi}{2}$.
- Troba el polinomi de Taylor de grau 4 de $f(x) = \ln x$ en el punt $x = 2$.
- Troba el polinomi de Taylor de grau 3 de $f(x) = \arctan x$ en el punt $x = 0$.

4.4. Calcula el valor aproximat de $\sqrt{437}$ utilitzant un polinomi de Taylor de grau 1. Troba una cota a l'error.

4.5. Un cable pesant, sota l'acció de la gravetat, segueix la forma d'una catenària d'equació $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demostra que per a valors petits de x la forma del cable es pot aproximar per la paràbola $y = a + \frac{x^2}{2a}$. (La funció cosh s'anomena cosinus hiperbòlic i es defineix amb la fórmula $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

4.6. Demostra que per qualsevol valor de x entre 0 i $\frac{1}{4}$ es verifica

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x)$$

amb $|r(x)| \leq \frac{1}{4^5 \cdot 5!}$.

4.7.

- a) Calcula $\sin 1$ amb un error menor que 10^{-4}.
- b) Calcula $\ln 0,75$ amb dues xifres decimals exactes.

4.8. Calcula $\cos 6^{\text{o}}$ amb 5 xifres exactes. (Passa primer els graus a radians!).

4.9. Calcula e^2 amb un error menor que 10^{-6}.

4.10. Justifica que l'àrea d'un segment circular d'un cercle de radi r i d'angle interior 2α es pot aproximar per $\frac{2}{3}\alpha^3 r^2$ quan α és petit.

4.11. Troba el polinomi de Mc Laurin de segon grau de la funció $f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$.

4.12. Troba el polinomi de Mc Laurin de segon grau de la funció $f(x, y) = \cos x \cos y$.

4.13. Dedueix la fórmula aproximada de $\arctan \frac{1+\alpha}{1-\beta}$ fins a termes de segon ordre si $|\alpha|$ i $|\beta|$ són petits en comparació amb 1.

Solucions

4.1

- a) $p(x) = 4(x+1)^3 - 12(x+1)^2 + 9(x+1) + 1.$
- b) $p(x) = -4 - 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 12(x-1)^3 + 6(x-1)^4 + (x-1)^5.$
- c) $p(x) = 1 + 11(x+2) - 16(x+2)^2 + 7(x+2)^3 - (x+2)^4.$

4.2

- $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8.$

4.3

- a) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!}).$
- b) $p(x) = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!}.$
- c) $p(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!}.$
- d) $p(x) = x - \frac{x^3}{3}$

4.4

- $\sqrt{437} \sim 20,925$ Error menor que $0,0213.$

4.7

- a) $\sin 1 \sim 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 0,841468.$
- b) $\ln 0,75 \sim -0,286.$

4.8

- $\cos 6^{\rm o} \sim 0,99452.$

4.9

- $\mathrm{e}^2 \sim 7,389056.$

4.10

- L'àrea S del segment circular és $S = r^2(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$. El polinomi de Mc Laurin de tercer grau de S és $p(\alpha) = \frac{2}{3}\alpha^3 r^2$.

4.11

- $p(x, y) = y + xy$.

4.12

- $p(x, y) = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}$.

4.13

- $\arctan \frac{1+\alpha}{1-\beta} \sim \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)$.

5 EXTREMS RELATIUS.

5.1. Troba els extrems relatius de les següents funcions

- a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
- b) $f(x, y) = x^2 + 6xy + 10y^2 - 4y + 4$
- c) $f(x, y) = 120x + 120y - xy - x^2 - y^2$
- d) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4$
- e) $f(x, y, z) = (x(y - 1)(z + 2))^2$
- f) $f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$
- g) $f(x, y) = (x^2 + y)e^y$
- h) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2}$

5.2. Troba els extrems relatius de les següents funcions gràficament i analíticament.

- a) $f(x, y) = x^2 - y^6$
- b) $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^4)$
- c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
- d) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
- e) $f(x, y = \sin x \sin y$
- f) $f(x, y) = e^{-x^2-2y^2}$

5.3. Troba la distància al pla $2x + 3y + z = 12$ dels punts

- a) $(0, 0, 0)$
- b) $(1, 2, 3)$

5.4. Troba la distància del punt $(5, 5, 0)$ al paraboloide $z = x^2 + y^2$.

5.5. Troba la distància entre la paràbola $x = 2y^2$ i la recta $y = x + 1$.

5.6. Troba tres nombres positius x, y, z que satisfacin les condicions demanades.

- a) La suma és 30 i el producte és màxim.
- b) La suma és 30 i la suma dels quadrats és mínima.

5.7. Entre totes les caixes rectangulars de volum V donat, la que té àrea superficial mínima és un cub. Comprova-ho.

5.8. El volum de l'el·lipsoide és $\frac{4\pi abc}{3}$. Comprova que, fixat $a + b + c$, l'el·lipsoide de volum màxim és una esfera.

Solucions

5.1

- a) Punts crítics: la recta $x + y = 0$. És una recta de mínims (no estrictes).
- b) Punt crític $(-6, 2)$. Mínim.
- c) Punt crític $(40, 40)$. Màxim.
- d) Punt crític $(1, -2)$. Punt de sella.
- e) Punts crítics: plans $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$. Mínims no estrictes.
- f) Punt crític $(0, 1, -1)$. Mínim.
- g) Punt crític $(0, -1)$. Mínim.
- h) Punts crítics $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$. Mínim $(0, 0)$, punts de sella $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

5.2

- a) Punt crític $(0, 0)$. Punt de sella ($f(x, 0) > 0$, $f(0, y) < 0$).
- b) Punts crítics $(0, 0), (1, 1), (-1, 1)$. Punts de sella.
- c) No té punts crítics, però $(0, 0)$ és un mínim ja que $0 = f(0, 0) < f(x, y)$ per a tot $(x, y) \neq (0, 0)$.
- d) Punts crítics $(0, 0)$ i les circumferències $x^2 + y^2 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. $(0, 0)$ és un mínim estricte. Les circumferències són màxims (no estrictes), si k és parell, i mínims (no estrictes), si k és senar.
- e) Punts crítics $((2k + 1)\frac{\pi}{2}, (2k' + 1)\frac{\pi}{2}$. Són màxims, si k, k' són parells; màxims, si k, k' són senars; els punts $(k\pi, k'\pi)$ són punts de sella.
- f) Punt crític $(0, 0)$. Màxim.

5.3

- a) $\frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}$
- b) $\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$

5.4

- 6

5.5

- $\frac{7}{8\sqrt{2}}$

5.6

- a) $x = y = z = 10$
- b) $x = y = z = 10$