1. INTEGRAL SIMPLE.

1. Una empresa que treballa amb fusta fa servir, per a determinar la pèrdua de pes W per tronc, en funció del nombre de dies transcorreguts en el període d'assecament t, el següent model:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{12}{\sqrt{16t+9}}$$

   a) Determineu W en funció de t (Cal tenir en compte que no hi ha pèrdua de pes fins que l'arbre és tallat).

   b) Determineu la pèrdua de pes total en 100 dies.

2. La temperatura de l'aire durant un període de 12 hores està representada pel model

   T= 12 + 3t - 0.2 t^2 , $0 \le t \le 12$,

   on t està donat en hores i T en graus centígrades. Determineu la temperatura mitja a) durant les primeres 6 hores   b) durant el període sencer.

3. Useu la simetria de les gràfiques de les funcions corresponents per a calcular les integrals següents:

$$a)\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin x\,dx \qquad b)\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos x\,dx$$
$$c)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx \qquad d)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\ \cos x\,dx \qquad e)\int_{-1.5}^{1.5}\sin 2x\,dx$$
$$f)\int_{-2}^{2}x^3\,dx \qquad g)\int_{0}^{4}|x-2|dx$$

4. Calculeu l'àrea de la regió limitada per les corbes següents:

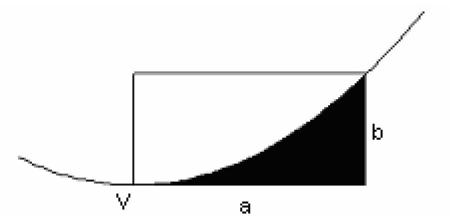
   a) $f(x)=x^2+2x+1$ i $g(x)=2x+5$
   b) $f(x)=x^2-4x+3$ i $g(x)=-x^2+2x+3$
   c) $f(x)=3(x^3-x)$ i $g(x)=0$
   d) $f(x)=(x-1)^3$ i $g(x)=x-1$
   e) $f(y)=y^2+1$, $g(y)=0$, $y=-1$, $y=2$

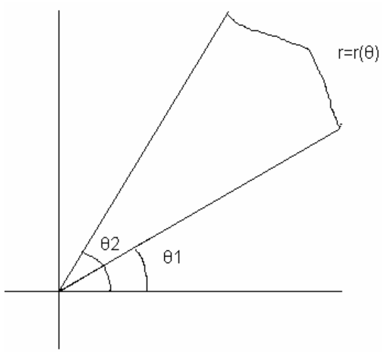
5. Calculeu l'àrea d'una de les regions determinades per les funcions sinus i cosinus.

6. Calculeu l'àrea de la regió limitada per $x=3-y^2$ i $y=x-1$.

7. Proveu que si en un rectangle de costats a i b s'hi traça una paràbola (veure dibuix: V vèrtex) l'àrea de sota la paràbola és 1/3 de l'àrea total.

8. Deduïu que per a una regió com la del dibuix, l'àrea ve donada per $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)d\theta$. Com a aplicació calculeu l'àrea delimitada per la cardioide r=a(1+ cosθ). (Indicació: l'àrea d'un sector circular de radi r i angle central θ és $r^2 . \theta/2$, quan θ es medeix en radiants) .

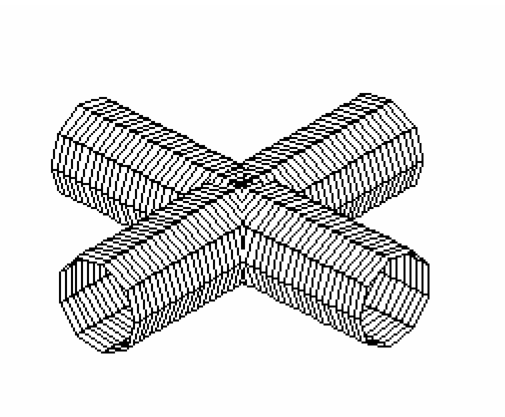
Prob. 7


Prob. 8


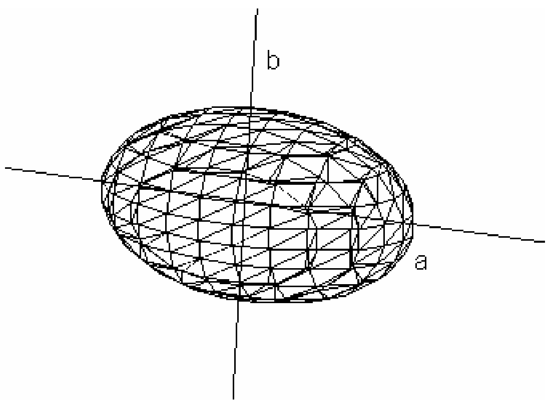
9. Proveu que el volum d'una piràmide de base quadrada, on h és l'altura de la piràmide i B és l'àrea de la base, és V=B.h/3.

10. Calculeu el volum del sòlid que formen (la part comuna) dos cilindres circulars rectes de radi a quan es tallen perpendicularment com en el dibuix (Indicació: determineu les seccions d'aquest sòlid amb els plans horitzontals)

11. Quan es fa girar una el·lipse de semieixos a i b al voltant d'un dels eixos s'obté un el.lipsoide de revolució. Proveu que el volum del sòlid generat és $4\pi ab^2/3$ quan l'eix de gir coincideix amb l'eix de longitud 2a (vegi's dibuix).



Prob. 10



Prob. 11

12. Es fa un forat cilíndric de 3cm de radi a través del centre d'una esfera de 5cm de radi. Calculeu el volum del sòlid que queda.

13. Trobeu el volum del tor generat per la rotació del cercle $x^2+y^2=4$ al voltant de la recta x=3.

14. Trobeu el volum generat per la rotació de l'àrea del primer quadrat limitada per la paràbola $y^2=8x$ i la recta x=2, respecte l'eix OX.

15. Trobeu el volum generat per la rotació de l'àrea limitada per la paràbola $y^2=8x$ i la recta x=2 al voltant d'aquesta última.

16. Trobeu el volum generat per la rotació de l'àrea limitada per la paràbola $y^2=8x$ i la recta x=2, respecte l'eix OY.

17. Calculeu el volum del sòlid de revolució obtingut en girar la regió limitada per $y = e^{-x^2}$ i l'eix x ($0 \le x \le 1$) entorn de l'eix OY.

18. Calculeu el volum del sòlid generat per la rotació de la regió limitada per les gràfiques de $y=x^3+x+1$, y=1 i x=1 entorn de la recta x=1.

19. Calculeu la longitud dels arcs de corba següents:

$a)\ y = e^x \quad , \quad 0 \le x \le 1.$

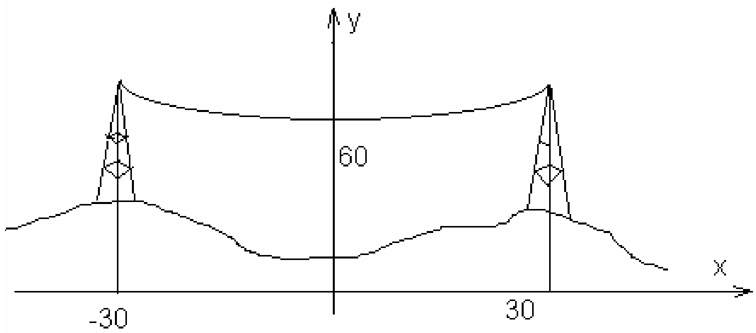
$b)\ y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1.$

$c)\ (y-1)^3 = x^2$ del punt (0,1) al punt(8,5).

20. Un cable elèctric penja entre dues torres que estan separades 60m (vegi's dibuix). Sabent que el cable adopta la posició d'una catenària d'equació

$$y = 30\left(e^{x/60} + e^{-x/60}\right) = 60\ Ch\frac{x}{60}$$

calculeu els metres de cable que hi ha entre les dues torres.

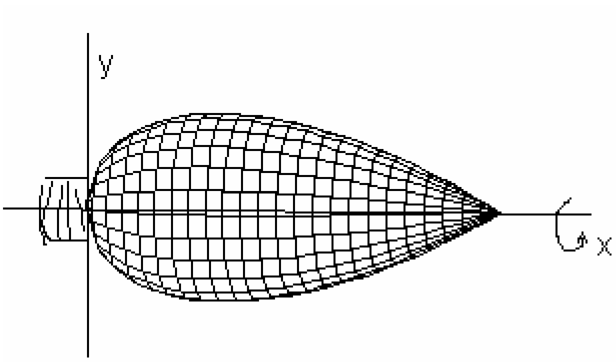


21. Calculeu l'àrea de la superfície generada per $y=x^3$, $0\leq x\leq 1$, en girar entorn de l'eix 0X.

22. Calculeu l'àrea de la superfície generada per $y=x^2$, $0\leq x\leq \sqrt{2}$, en girar entorn de l'eix OY.

23. Calculeu l'àrea del tor del problema 13.

24. S'obté la forma d'una bombeta ornamental fent girar la gràfica de $y = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$, $o \leq x \leq 3$, al voltant de l'eix x, on x i y es medeixen en centímetres. Calculeu la superfície d'aquesta bombeta i useu el resultat obtingut per a obtenir la quantitat aproximada de vidre que farà falta per a fer la bombeta. (El vidre té un gruix de 0,4mm).



25. Calculeu l'àrea de la regió limitada per l'eix x i la gràfica de:

$a)\ y = \frac{1}{x},\ x \geq 1 \qquad b)\ y = \frac{1}{x^2},\ x \geq 1 \qquad c)\ y = e^{-x},\ x \geq 0$

26. Feu girar la gràfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, entorn de l'eix x:

a) Calculeu el volum de la "trompeta infinita" així generada (Corn de Gabriel).

b) Proveu que l'àrea superficial és infinita.

SOLUCIONS

1. a) W(t)=$1.5\sqrt{16t+9}$ - 4.5 b) 55.67
2. a) 18.6º b)20.4º
3. a) 0 b) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x = \sqrt{2}$ c) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = 2$ d) 0 e) 0 f) 0 g) $2\int_2^4 (x-2)dx = 4$
4. a) 32/3 b) 9 c) 3/2 d) 0.5 e) 6
5. $2\sqrt{2}$
6. 9/2
7. La paràbola és de la forma y=mx^2 i com que passa per (a,b), $m = \frac{b}{a^2}$. L'àrea buscada és $\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2 dx = \frac{a \cdot b}{3}$.
8. 3πa^2/2
9. El costat de la secció quadrada a distància y del vèrtex té costat $\frac{y\sqrt{B}}{h}$ (Thales) i per tant el volum és $V = \int_0^h \left(\frac{y\sqrt{B}}{h}\right)^2 dy = \frac{B \cdot h}{3}$.
10. 16 a^3 /3
11. L'el·lipse té equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aillant, $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. El volum demanat és $V = \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = \frac{4\pi a b^2}{3}$.
12. 256π/3 cm^3
13. 24 π^2 =236.87
14. 16 π
15. 256 π /15
16. 128 π /5
17. π (1-e^{-1}) $\cong$ 1.986
18. 13 π /30
19. a) 2.0007 b)2/3($\sqrt{8}$-1) $\cong$ 1.219 c) 9.0734
20. 63 m
21. 3.563
22. 13π /3

23. $24\pi^2$

24. $3\pi\ cm^2$, $3\pi \times 0{,}04 cm^3$

25. a) infinit b) 1 c) 1

26. a) π