3. INTEGRAL DOBLE.

1. Donada la funció f: A $\rightarrow$ R definida en A = [0,1] x [0,e] per

$$f(x,y)=\begin{cases} 2 \ \ si \ \ 0 \le y < 1-x \quad o \quad e^x < y \le e \\ 1 \ \ si \ \ 1-x \le y \le e^x \end{cases}$$

Feu el gràfic de f. Determineu el conjunt de punts de discontinuïtat. Expliqueu per què f és integrable en A i calculeu el valor de $\int\int_A f(x,y)dx\,dy$ a partir de la seva interpretació com a volum (volum de què?).

2. Donada la funció f definida a $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ x \ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ per:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 \ \text{si} \ \ y < \text{sinx} \\ 0 \ \text{si} \ \ y = \text{sinx} \\ 3 \ \text{si} \ \ y > \text{sinx} \end{cases}$$

representeu-la gràficament i calculeu $\int\int_I f(x,y)dx\,dy$. Quin és el conjunt de punts de discontinuïtat de f? Per què f és integrable?.

3. Feu la gràfica i descriviu en coordenades cartesianes les regions determinades per les següents desigualtats:

$a)\ |x| \le 1, \ \ -1 \le y \le 2$ $\qquad$ $b)\ |x| \le 3, \ \ |y| \le 4$
$c)\ x+y \le 1, \ \ x \ge 0, \ \ y \ge 0$ $\qquad$ $d)\ 0 \le y \le |x|, \ \ 0 \le x \le 5$
$e)\ 0 \le x \le y, \ \ 0 \le y \le 5$ $\qquad$ $f)\ |x|+|y| \le 1$

4. En cada cas proposat, dibuixeu la regió A, plantegeu la integral en els dos ordres possibles i useu l'ordre més apropiat per a calcular la integral $\int\int_A f(x,y)dx\,dy$:

$a)\ f(x,y) = x+y^2$ A: rectangle [0,1] x [0,2]
$b)\ f(x,y) = sinx\ siny$ A: rectangle de vèrtexs

$$(-\pi,0),(\pi,0),(\pi,\frac{\pi}{2})\ i\ (-\pi,\frac{\pi}{2})$$

$c)\ f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$ A: triangle limitat per y=x, y=2x, x=2.

$d)\ f(x,y) = x^2 - y^2$ A: regió limitada per y=sinx, y=0, ($0 \le x \le \pi$).

$e)\ f(x,y) = x$ A: regió limitada per $y=x^2$ i $y=x^3$

$f)\ f(x,y) = x$ A: regió $x^2+y^2 \leq 4$, $y+2x-2 \geq 0$, $y \geq 0$.

$g)\ f(x,y) = x$ A: sector $y \leq \sqrt{25 - x^2},\ 3x - 4y \leq 0$, $x \geq 0$

$h)\ f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ A: regió limitada per $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x=4$.

$i)\ f(x,y) = e^{x+y}$ A: quadrat $|x|+|y| \leq 1$

5. Dibuixeu la regió d'integració i calculeu la integral indicada:

$a)\ \int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} x\, dy$ $c)\ \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} x^2 y^2\, dx$

$b)\ \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dy$ $d)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{-y}^{y} \sin x\, dx$

6. Usant una integral doble, calculeu el volum de la regió limitada per les superfícies següents:

a) Piràmide de vèrtexs els punts (0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3).
b) Regió limitada per $z=e^{-y^2}$, $z=0$, $x=y_3$, $y=1$ i $x=0$.
c) Regió limitada pels paraboloides $z= 4-x^2-y^2$ i $z=(x^2+y^2)/3$.
d) Regió limitada per $y^2+z^2=a^2$ i $x^2+z^2=a^2$.
e) Regió limitada per $z=4-x^2-2y^2$ i $z=0$.

7. El <u>valor mig d'una funció</u> $f(x,y)$ a la regió A es defineix per

$$\text{valor mig} = \frac{1}{Area(A)} . \int\int_A f(x,y)dx\, dy$$

Determineu el valor mig de la funció $f(x,y)=x^2+y^2$ sobre el rectangle de vèrtexs (0,0),(4,0),(4,2),(0,2).

8. Passant a coordenades polars, trobeu la integral de $e^{x^2+y^2}$ sobre la regió que consta dels punts (x,y) tals que $x^2+y^2 \leq 1$.

9. Si $a>0$, dibuixeu el recinte d'integració i calculeu

$a)\ \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx$ $b)\ \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx\, dy$ $c)\ \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} x\, dx\, dy$

10. Calculeu l'àrea de les següents regions definides en coordenades polars:

a) La regió interior a la corba $r=a(1 + \cos\theta)$ i exterior al cercle $r=a$.

b) La regió limitada per la corba $r^2=2a^2 \cos\theta$.

c) La regió compresa entre la primera i la segona espira de l'espiral d'Arquímedes $r=a\theta$ $(a>0)$.

11 a) Calculeu l'àrea limitada per l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0$.

b) Sigui S la regió limitada per l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$. Trobeu la integral $\iint_S y\, dy\, dx$.

12. Calculeu el volum limitat pel paraboloide $z=x^2+y^2$ i el pla $z=2x+2y+2$.

13. Calculeu el volum del sòlid que té la forma de la regió de l'espai comuna a $x^2+y^2+z^2=5$ i $x^2+y^2=4z$.

14. Calculeu el volum d'un sòlid limitat pel pla xy, el cilindre $x^2+y^2=2x$ i el con $z^2=x^2+y^2$.

15. Trobeu el volum de la regió limitada pel cilindre $y=\cos x$ i els plans $z=y$, $x=0$ i $z=0$.

16. Sigui R el rectangle amb vèrtexs (1,2),(1,5),(3,2) i (3,5). Sigui G l'aplicació lineal representada per la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobeu l'àrea de G(R).

17. Donada la integral $\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy$ on S és el recinte determinat per la recta $x+y=2$ i els eixos de coordenades, considerem el canvi de variables $u=y-x$, $v=y+x$.

a) Determineu la imatge del recinte S.

b) Calculeu el jacobià del canvi.

c) Calculeu el valor de la integral utilitzant aquest canvi.

18. Considerem l'aplicació definida per les equacions

$$x = u + v \qquad y = v - u^2$$

a) Calculeu el jacobià J(u,v).

b) Un triangle T en el pla uv té vèrtexs (0,0),(2,0),(0,2). Representeu gràficament la imatge S en el pla xy.

c) Calculeu l'àrea de S amb una integral doble sobre S i també amb una integral doble sobre T.

d) Calculeu $\iint_S (x - y + 1)^{-2}\, dx\, dy$.

19. Feu la gràfica la regió definida per $x \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 2$ i $x^2+y^2 \geq 1$. Determineu la integral de les següents funcions sobre aquesta regió.

a) $f(x,y) = x^2$
b) $f(x,y) = x$
c) $f(x,y)=y$
d) $f(x,y)= x\, e^y$

20. Considereu el recinte $S= S_1 \cup S_2$, on:

a) S_1 és el recinte limitat per les rectes $y=0$, $y=x$, $x=1$, $x=2$.
b) S_2 és el recinte limitat per les rectes $y=x$, $y=3x$ i les circumferències $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=8$. Trobeu $\iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

21. Sigui D el recinte determinat per $x^2+y^2 \leq 8$, $y \geq 0$, $y \leq 2$, i sigui $I = \iint_D y\, dx\, dy$

a) Dibuixeu D.
b) Escriviu I, en els dos ordres possibles, en coordenades cartesianes.
c) Escriviu I en coordenades polars.
d) Calculeu el valor de I.
e) Sense calcular, raoneu quins seran els valors de les integrals

$$\iint_D x\, dx\, dy \qquad \iint_D (x + y)\, dx\, dy \qquad \iint_D x\, y\, dx\, dy$$

22. Trobeu la massa, el centre de massa i el moment d’inèrcia respecte a un dels seus costats, d'una placa quadrada de costat a, si la densitat és proporcional al quadrat de la distància a un vèrtex.

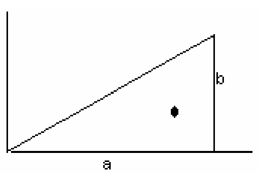
23. Trobeu la massa d'un disc circular de radi a, si la densitat és proporcional al quadrat de la distància a un punt de la circumferència.

24. Calculeu el centre de gravetat d'una làmina rectangular de costats a i b i densitat en cada punt proporcional al producte de distàncies a dos costats adjacents.

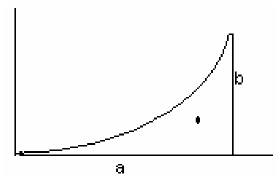
25. a) Trobeu la massa d'una placa circular de radi a, amb densitat proporcional a la distància al centre.
b) Trobeu el centre de massa d'aquesta placa.
c) Trobeu el centre de massa d'un quadrant d'aquest placa.

26. a) Calculeu els moments d'inèrcia respecte als seus eixos de l'el·lipse de semieixos 2 i 3.
b) Prova que el moment polar d'inèrcia respecte al seu centre d'una el·lipse de semieixos a i b és $M(a^2+b^2) / 4$, on M indica la seva massa.

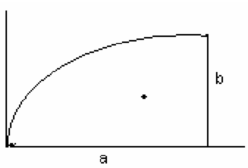
27. Comproveu la posició dels centroides de les figures elementals següents:



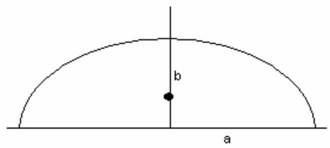
(2a/3,b/3)



(3a/4,3b/10)



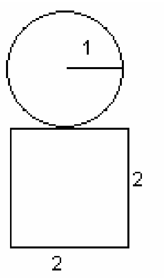
(5a/8,2b/5)



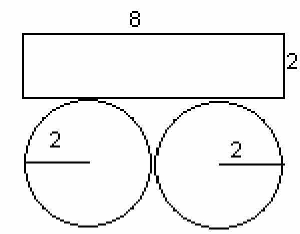
$(0,4b/3\pi)$

28. Determineu el centroide de la làmina plana següent:

a)



b)



c) Suposeu que la làmina circular del cas a) té densitat doble que la làmina quadrada. Quin serà el nou centre de massa?

29. Usant el teorema de Pappus determineu

a) El volum del tor obtingut girant el cercle $(x-5)^2+y^2=16$ entorn de l'eix y.

b) El volum d'un tor obtingut girant un cercle de radi a entorn d'una recta del seu pla situada a una distància b del centre (b>a>0)

c) El centroide d'un semicercle de radi a.

SOLUCIONS

1. (11/2)-e $\approx$ 2.78
2. 5.40
4. a) 11/3 b) 0 c) 3-1.5 arctg 2 d) 5.43
   e) 1/20 f) 7/3 g) -25 h) (ln 17)/4 = 0.71 i) (1/e)+e $\approx$3.09
5. a) 49/20 b) $2a^3/3$ c) 1/54d) 0
6. a) 1 b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\approx 0.32$ c) 6π d) $\frac{16\,a^3}{3}$ e) 7 $\sqrt{2}\,\pi$ = 31.1
7. 20/3
8. π(e-1)$\approx$5.40
9. a) πa^2 b) $\pi a^4/8$ c) $a^3/3$ 2
10. a) 2.79 a^2 b) 4 a^2 c) 289.39 a^2
11. a) πab b) 0
12. $8\pi \approx$ 25.13
13. $\frac{8}{3}\sqrt{5}\pi \approx 18.73$
14. 128/9
15. $\pi/8 \approx$ 0.39
17. e - (1/e) $\approx$ 2.35
18. a) 14/3 b) $-\ell n\sqrt{3}-\pi/\sqrt{3}$
19. a) $(3/8)\pi \approx$ 1.18 b) 1.22 c) 0
20. b) 11.95
22. M=(2/3)k a^4 ; cdm sobre la diagonal que passa pel vèrtex, a una distància 5a/ $\sqrt{32}$ del vèrtex; I = $7Ma^2/15$, respecte a un dels costats que passen pel vèrtex
23. 3/2 k π a^4
24. (2a/3,2b/3)
25. a) (k π a^3)/3 b) (0,0) c) (3a/ π,3b/ π)
26. $I_x = 6\pi$, $I_y=27\pi/2$
27. a) (2a/3,b/3) b) (3a/4,3b/10) c) (5a/8,2b/5) d) (0, 4b/3p)
28. Sobre l'eix de simetria i a una distància a) 1.88 de la base inferior b)0.83 per sota del costat inferior c) 0.22 per sobre del costat inferior
29. a) 250 π^2 b) V=$2\pi^2a^2b$ c) a l'eix de simetria a una distància 4a/3p de la base