5. EQUACIONS DIFERENCIALS.

1. Comproveu si les funcions donades són solució o no de l'equació diferencial indicada:

a) $y = 3e^{x^2}$ de $y' = 2xy$

b) $y = C\ e^{4x}$ de $y' = 4y$

c) $y = e^{-2x}$ de $y^{(IV)} - 16y = 0$

d) $y = ax + b$ de $y'' = 0$

e) $u = \sin(x - y)$ de $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

f) $u = e^{-t}\ \sin bx$ de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}$

g) $y = 2\ \sin x\ +\ 3\ \cos x$ de $y'' + y = 0$

h) $y^4 = a/x + 2/x^2$ de $4xy^3y' = 1/x^2$

2. Comproveu que la família de funcions $y=ae^{-x}+bx$ és solució general de l'equació $y'' = \dfrac{-x}{1+x}\ y' + \dfrac{1}{1+x}\ y$ i determineu la solució que satisfà:

a) Les condicions inicials $y(1)=3$ i $y'(1)=2$.
b) Les condicions de contorn $y(0)=2$ i $y(1)=3$.

3. Trobeu la solució general i la particular indicada de les equacions diferencials següents:

a) $y' = e^x/y(e^x-2)$, $y(0) = -2$

b) $y' = -y^2$, $y(0)= -1/3$

c) $y' = 4xy^2$

d) $(x^2 + 5)y' - 2xy = 0$, $y(1) = 2$

e) $y' = \dfrac{x(y^2 - 1)}{y(x^2 - 1)}$

f) $y' = 3y/x + 5$

g) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$, $y(2) = 1$.

h) $y' = tg(5y/x) + y/x$

i) $y'\ \cos x\ +\ y\ \sin x\ =\ 1 + tgx$

j) $y' + y = e^x$

4. Resoleu les equacions diferencials següents fent en cada cas el canvi indicat:

a) $y' = y - x$ canvi: $u = y - x$

b) $y' = 2xy + 1/x^2 + 2$ canvi: $y = u - 1/x$

c) $y' = 2y/x + x^3 \sin x$ canvi: $y = ux^2$

5. Comproveu que l'equació $y' = \frac{y - x^2}{x} + \frac{(y + x^2)^2}{x^2}$ es converteix en una equació homogènia fent el canvi $t=y+x^2$ i utilitzeu aquesta propietat per a trobar la solució de l'equació donada i la particular que satisfà la condició inicial $y(1)=0$.

6. Trobeu la solució general de l'equació $x(y'+1)+tg(y+x)=0$ fent un canvi adequat.

7. Identifiqueu les isoclines, construïu el camp de direccions i dibuixeu aproximadament les corbes solució de les equacions diferencials següents:

   a) $y' = 2x$
   b) $y' = y-x$
   c) $y' + x/y = 0$
   d) $y' = -y$

8. Determineu l'equació diferencial de les famílies de corbes següents:

   a) $y = Cx^2$
   b) $xy = C$
   c) $x^2+y^2 = C$
   d) $y = a(x-b)^2$
   e) $y = ax^2+bx+c$
   f) $y = a(x-b)^3$

9. Comproveu que les famílies de corbes $xy=C$ i $x^2-y^2=C$ són ortogonals. [Indicació: determineu el pendent de la recta tangent en un punt (x,y) qualsevol en funció de les coordenades del punt].

10. Determineu les trajectòries ortogonals de la família donada i dibuixeu-ne unes quantes de cada família:

    a) $x^2+y^2 = a$
    b) $y = a e^x$
    c) $y= ax^2$
    d) $xy = a$
    e) $x^2+4y^2 = a$

11. El camp de temperatures d'una placa plana és $T(x,y)=x^2+3y^2$. Identifiqueu les línies de flux de la calor i determineu la trajectòria que seguiria una partícula situada en el punt (1,2) que fugís de la calor.

12. Trobeu la corba del pla que passa pel punt (1,3) i té pendent en cada punt (x,y) $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$. Dibuixeu-la.

13. Trobeu la família de corbes que tenen la propietat que el segment de tangent comprès entre els punts de tangència i l'eix y és bisecat per l'eix x.

14. Identifiqueu les corbes que passen per l'origen que tenen la següent propietat: quan per cada punt es tracen dues rectes paral·leles als eixos, la corba divideix el rectangle que es forma en dues parts A i B tals que àrea(A) = 2 àrea (B).

15. Es llença una pilota enlaire a una velocitat inicial de 20m/s des d'un balcó situat a 25m del carrer. Determineu la funció posició d'aquest moviment. Quant de temps tardarà a arribar a terra? A quina altura màxima arribarà? En quin moment arribarà al punt més alt del seu recorregut? [Suposeu que la pilota es mou només sota l'acció de la gravetat i prengueu $g=10m/s^2$].

16. Admetem que la velocitat de refredament d'un cos és, d'acord amb la llei de Newton, aproximadament proporcional a la diferència entre la seva temperatura i la del medi ambient. Sabent que un cos, en un medi a temperatura constant de 30°, ha tardat 15 minuts en refredar-se de 100° a 70°, determineu la llei de refredament i calculeu el temps que tardarà en refredar-se a 40°.

17. Determineu el perfil d'un pilar de secció circular que, construït amb un material de densitat uniforme ρ i amb una superfície S_0 a la base superior, aguanti un pes P_0 de tal manera que la pressió en qualsevol secció sigui la mateixa.

18. Se suposa que la població d'una ciutat augmenta en una raó proporcional al nombre d'habitants en qualsevol instant. Determineu la llei de creixement d'aquesta població i calculeu els anys que tardarà en triplicar-se, sabent que en 40 anys s'ha doblat.

19. A partir del model vist a classe per al pont suspès, determineu en el cas d'un pont que cobreix 120 m, i un cable que als extrems està 15m per sobre de la planxa del pont i al centre hi és tangent,

    a) els metres de cable que fan falta per a bastir aquest pont
    b) els metres de cadena que fan falta per a unir el cable a la planxa del pont, suposant que se n'hi posa cada 12m.
    c) la tensió als extrems del cable (magnitud i direcció).

20. En una aula acabada d'usar de $60m^3$ de volum, l'aire conté un 0,16% de diòxid de carboni. El sistema de ventilació aporta aire fresc que conté un 0,04% de diòxid a un ritme de $10m^3$ per minut i n'extreu la mescla resultant al mateix ritme. Suposant que la difusió de l'aire fresc és pràcticament instantània, quin tant per cent de diòxid hi haurà a l'aula quan faci 6 minuts que s'està ventilant? Quanta estona caldrà mantenir el sistema de ventilació en funcionament per a baixar el tant per cent de diòxid al 0.06%?

21. Un dipòsit de 200 l està inicialment ple d'aigua. Simultàniament, s'obren una aixeta que deixa sortir 3 l per segon i una vàlvula que deixa entrar una solució clorada al 1% a un ritme de 2 l per segon.

a) Quina estona trigarà en quedar el dipòsit mig buit? Quina concentració de clor hi haurà en aquest moment?

b) Si tanquem l'aixeta quan el dipòsit està mig buit i deixem que acabi d'omplir-se, quina serà la concentració final de clor al dipòsit?

22. Estimeu el valor de la solució del problema de condicions inicials $y'=y$, $y(0)=1$ en $x=2$, aplicant el mètode de les poligonals d'Euler

a) amb $h=1$
b) amb $h=0.5$
c) amb $h=0.25$

Dibuixeu en cada cas les poligonals corresponents i compareu-les amb la corba solució exacta.

23. Apliqueu el mètode de les poligonals d'Euler per a estimar el valor de la solució del problema de condicions inicials $y'=x-y$, $y(0)=1$ en $x=1$,

a) amb $h=0.2$

b) amb $h=0.1$

c) usant el mètode d'extrapolació de Richardson, estimeu de nou el valor de y en $x=1$, fent servir que l'error és aproximadament proporcional a la longitud del pas h. Compareu-ho amb el resultat que dóna la solució exacta de l'equació diferencial.

d) Compareu els errors en els resultats de a) b) i c). Quants passos farien falta per a obtenir sense extrapolar la mateixa precisió que en c) ?

24. Trobeu la solució general i la particular indicada de les equacions:

a) $y''+5y'+4y=0$, $y(0)=9$, $y'(0)=5$
b) $3y''+4y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$
c) $y''+4y'+4y=0$
d) $16y''-8y'+1=0$
e) $2y''+2y'+3y=0$
f) $y''+4y=0$
g) $y''+16y'+12y=0$
h) $y'''-6y''+11y'-6y=0$
i) $y'''-3y'+2y=0$

25. Trobeu dues solucions linealment independents de $x^2 y''-2y=0$ de la forma $y=x^r$ i a partir d'elles trobeu la solució general de l'equació donada. Sabríeu trobar la solució general de l'equació $x^2 y''-2y=x^3$?

SOLUCIONS

1. a) sí b) sí c) sí d) sí
   e) sí f) sí g) sí h) no

2. a) $y_0 = \frac{1}{2}(e^{1-x} + 5x)$

   b) $y_0 = 2e^{-x} + \left(3 + \frac{2}{e}\right)x$

3. a) $y^2 = 2\ln(e^x-2) + C$, $C=4$

   b) $y = 1/(x+C)$, $y=0$; $C= -3$

   c) $y = -\frac{1}{2x^2+C}$, $y=0$

   d) $y = k(x^2+5)$; $y_0 = \frac{1}{3}(x^2+5)$

   e) $y^2 - 1 = k(x^2-1)$

   f) $y = Cx^3-5/2x$

   g) $y^2 - x^2 - kx = 0$; $y^2 - x^2 + \frac{3}{2}x = 0$

   h) $\sin(5y/x) = Cx^5$

   i) $y = \sin x + \frac{1}{2\cos x} + C\cos x$

   j) $y = \frac{1}{2}e^x + C\,e^{-x}$

4. a) $y = x - 1 + Ce^x$ b) $y = C\exp(x^2) - 1/x$ c) $y = x^2 + x^2\sin x - x^3\cos x$

5. $y= -x^2-x / (\ln x + c)$; $c=-1$

6. Canvi: $t= y+x$; $x\sin(y+x)=C$

8. a) $y' = y$ d) $y''= y'^2/2y$
   b) $y' = -y/x$ e) $y'''= 0$
   c) $y' = -x/y$ f) $y''= 2y'^2/3y$

10. a) $y = cx$
    b) $y^2 + 2x + c = 0$
    c) $y^2 + (1/2)x^2 = c$
    d) $y^2 - x^2 = c$
    e) $y = cx^4$

11. y = c x^3 ; y = 2 x^3

12. $x^2+y^2=10x$

13. y= Cx^2

14. y= Cx^2

15. 5s; 45m; 2s

16. $T = 30 + 70\, e^{\left(\frac{1}{15}\ln\frac{4}{7}\right)t}$; $t \approx 52$ min.

17. radi de la secció a una distància x de la base superior: $r(x) = r_0\, e^{2\rho x/k}$ (r_0 radi de la base superior, k pressió comuna de totes les seccions)

18. $N = N_0\, e^{\left(\frac{1}{40}\ln 2\right)t}$; $t \approx 63.4$ *anys*

19. a) 125m b) 66m c) 60 5 p; arctg(1/2) = 26.6^o

20. Als sis minuts hi haurà un 0,08% de diòxid, aproximadament; caldran uns 5m més per a baixar al 0.06%

21. a) Trigarà 1m 40s; concentració: 0,75%
b) concentració final: 0,875%

22. a) 4 b) 5.0625 c) 5.9605 (solució exacta: y = e^x)

23. a) 0.6208 b) - 0.69736 c) 0.73936 (valor exacte: $2e^{-1}$ = 0.73576)
d) $e_{c)} / e_{b)}$ = 1/10; uns 100 passos.

24. a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$; $y_0 = \frac{41}{3} e^{-x} - \frac{14}{3} e^{-4x}$

b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$; $y_0 = \_5\, e^{-x} + 6\, e^{-\frac{1}{3}x}$

c) $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x}$

d) $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\frac{1}{4}x}$

e) $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_, \cos\frac{\sqrt{5}}{2} x + C_2 \frac{\sqrt{5}}{2} \sin x \right)$

f) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

g) $y = e^{-8x} \left(C_1 \cos 2\sqrt{13}\, x + C_2 \sin 2\sqrt{13}\, x \right)$

h) $y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{3x}$

i) $y = (C_1 + c_2\, x)\, e^{x} + c_3\, e^{-2x}$

25. $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^{-1}$; $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^{-1} + \frac{1}{4} x^3$