Ecuaciones Diferenciales
Tema 4. Series de Fourier

Ester Simó Mezquita
Matemática Aplicada IV

Tema 4. Series de Fourier

1. Funciones periódicas
2. Serie de Fourier de una función periódica
3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs
4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

1. Funciones periódicas

Una función se dice que es **periódica** si existe $T > 0$ tal que

$$f(t+T) = f(t)$$

para todo t

Diremos que T es un **periodo** de $f(t)$

Notemos que si T es un periodo de $f(t)$, también los son $2T, 3T, \cdots$

El valor de $T > 0$ más pequeño que verifica $f(t+T) = f(t)$

le llamaremos el **periodo fundamental** de $f(t)$

Mientras no digamos lo contrario, cuando hablemos de periodo de una función nos estaremos refiriendo a su periodo fundamental

1. Funciones periódicas

Las **funciones periódicas básicas** son el seno y el coseno, que se pueden expresar con un **periodo arbitrario** T como

$$\sin \frac{2\pi t}{T}, \quad \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Por lo tanto la función

$$f(t) = \sin \alpha t$$

tiene periodo T tal que

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

es decir

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

1. Funciones periódicas

Recordemos que, la **frecuencia fundamental** de una función con periodo (fundamental) T es

$$\nu_0 = \frac{1}{T}$$

mientras que la **frecuencia angular fundamental** viene dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_0$$

1. Funciones periódicas

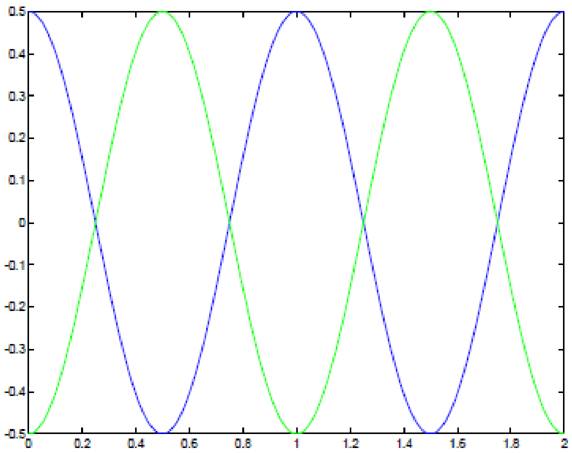
Podemos encontrar nos las funciones trigonométricas expresadas

$$f(t) = A\cos(wt+\phi), \quad g(t) = A\sin(wt+\phi)$$

Al valor $|A|$ se le llama **amplitud de la señal**, ya que las imágenes oscilan entre $-|A|$ y $|A|$

Al ángulo ϕ se le llama **fase** de la función trigonométrica (ya que la gráfica queda desfasada horizontalmente)

```
>> t=0:.01:2;
>> y=0.5*cos(2*pi*t);
>> plot(t,y,'b');
>> y=0.5*cos(2*pi*t+pi);
>> plot(t,y,'g');
```



- $f(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi t+\pi)$
- $g(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi t)$

1. Funciones periódicas

Construcción de funciones periódicas

Definir la función arbitrariamente sobre un intervalo de longitud igual a un periodo y repetirla fuera de él

Sea $g(t)$ una función arbitraria, escribiremos

$$f(t) = g(t) \ \text{si}\ t \in [a, b).$$

y la extenderemos periódicamente fuera de $[a, b)$

$$f(t + T) = f(t)$$

siendo $T = b - a$

1. Funciones periódicas

Notemos que:

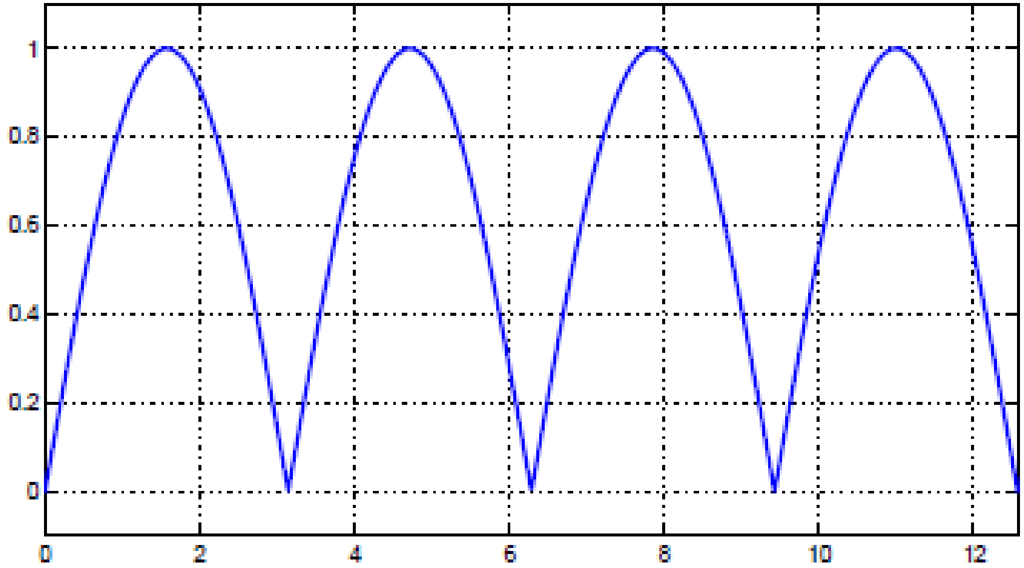
1. Este procedimiento proporcionará una función $f(t)$ con periodo $T = b - a$ que no es necesariamente el periodo fundamental

Efectivamente, si $g(t)$ es periódica con un número entero de periodos en $[a, b)$

2. Aunque $g(t)$ sea continua, la función periódica $f(t)$ que se obtiene no lo será si $g(a) \neq g(b)$

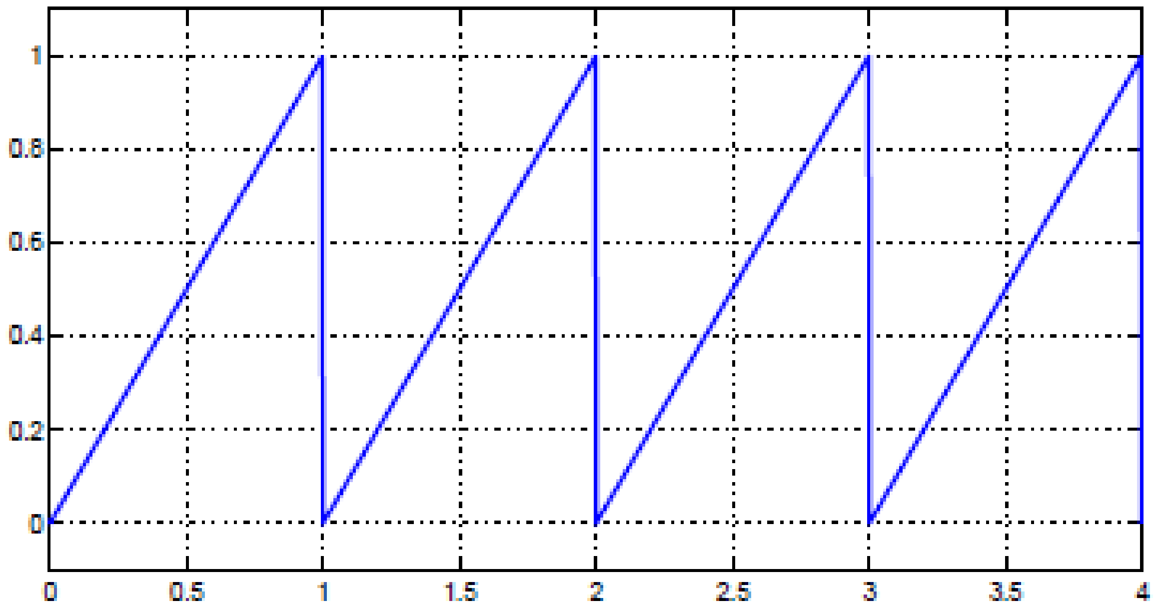
1. Funciones periódicas

Veamos algunos ejemplos de funciones periódicas construidas siguiendo este procedimiento



$f(t) = sin(t)$ si $t \in [0, \pi)$ y está extendida periódicamente fuera de $[0, \pi)$

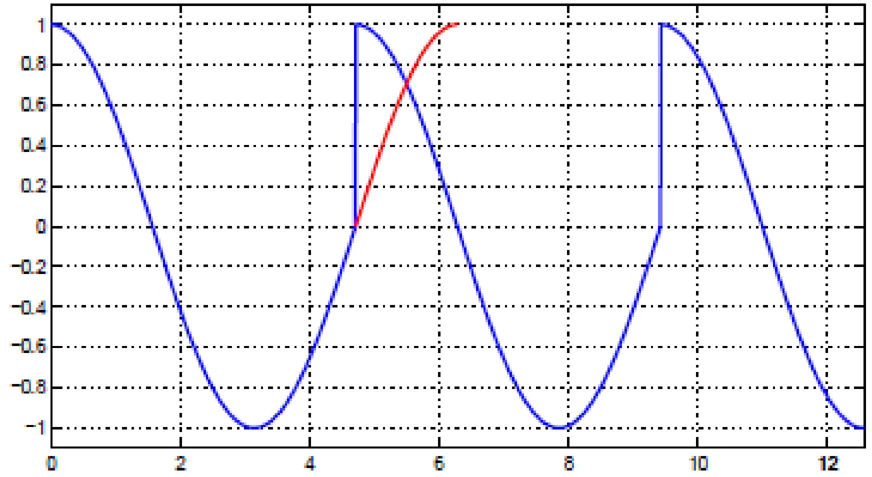
1. Funciones periódicas



$f(t) = t$ con periodo 1

Notar: los segmentos verticales indican discontinuidades de salto

1. Funciones periódicas



$$f(t) = cos(t) \quad \text{con periodo} \quad \frac{3\pi}{2}$$

Notar: en la figura aparece en rojo la parte de la gráfica de $cos(t)$ que falta para completar un periodo natural. Los segmentos verticales indican discontinuidades de salto.

1. Funciones periódicas

Suma de funciones periódicas

La suma de funciones periódicas da como resultado una función periódica si el cociente de los periodos implicados , T_1 y T_2 , es racional, en tal caso diremos que los **periodos** son **conmesurables**

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$$

Ejemplo: $f(t) = \sin 3t + 2\cos 4t$

es una función periódica puesto que

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{2\pi}{T_1} \quad \rightarrow \quad T_1 = \dfrac{2\pi}{3} \\ 4 = \dfrac{2\pi}{T_2} \quad \rightarrow \quad T_2 = \dfrac{2\pi}{4} \end{array}\right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3} \in Q$$

1. Funciones periódicas

Calculemos su periodo

El periodo de la función total es el T más pequeño tal que existen enteros positivos n y m de manera que

$$\left.\begin{aligned} 3(t+T) &= 3t + 3T = 3t + m2\pi \\ 4(t+T) &= 4t + 4T = 4t + n2\pi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3T &= m2\pi \\ 4T &= n2\pi \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} T &= \frac{m2\pi}{3} \\ T &= \frac{n2\pi}{4} \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para T queda

$$\frac{m}{3} = \frac{n}{4}$$

Los enteros positivos más pequeños para los que se cumple la igualdad anterior son $m = 3, n = 4$, y se obtiene $T = 2\pi$

1. Funciones periódicas

Ejemplo

La función $f(t) = \sin 3t - \cos \pi t$ no es periódica

$$\left.\begin{aligned} 3 = \frac{2\pi}{T_1} \;\rightarrow\; T_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \pi = \frac{2\pi}{T_2} \;\rightarrow\; T_2 = \frac{2\pi}{\pi} \end{aligned}\right\} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{3} \notin Q$$

Los dos periodos no son conmesurables

2. Serie de Fourier de una función periódica

Nota histórica

A principios del siglo XIX **Jean-Baptiste-Josep Fourier, estudiando** los fenómenos relacionados con **la conducción del calor**, llegó a la conclusión que **cualquier función periódica se podía poner como suma infinita de funciones seno y coseno con periodos submúltiplos del periodo de la función**, o en términos de frecuencias, con frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental de la función.

Aunque la versión original de este resultado no era del todo correcta, poco antes de la muerte de Fourier (1880), la teoría de las series de Fourier fue formulada sobre bases sólidas por otros matemáticos, entre ellos Dirichlet y Riemann.

2. Serie de Fourier de una función periódica

Las **series trigonométricas y de Fourier** constituyen una de las ramas más antiguas del **análisis,** que desempeñan un papel fundamental en:

- ✓ el estudio del sonido
- ✓ la conducción del calor
- ✓ las ondas electromagnéticas
- ✓ las vibraciones mecánicas
- ✓ el procesamiento de señales
- ✓ y el análisis y comprensión de imágenes

2. Serie de Fourier de una función periódica

El resultado de Fourier es relevante para la teoría de ecuaciones diferenciales

Si una **función periódica** $u(t)$, con periodo fundamental T, es el término independiente de una EDO lineal con coeficientes constantes, entonces

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

donde los coeficientes a_0, a_n y b_n que se pueden calcular a partir de $u(t)$

Para cada seno y coseno de la suma es posible **calcular la solución particular** de la EDO lineal con coeficientes constantes que estemos estudiando →

Por el **principio de superposición** de las EDO lineales, **la solución particular** correspondiente a la función periódica $u(t)$ **será la suma de las soluciones correspondientes a los diferentes senos y cosenos, con pesos iguales a los coeficientes que aparecen en la serie trigonométrica**

2. Serie de Fourier de una función periódica

Y en la práctica, los coeficientes a_n y b_n se hacen pequeños cuando n se hace grande, de manera que, cortando la serie por algún valor de n grande, se obtienen aproximaciones bastante buenas de la solución.

2. Serie de Fourier de una función periódica

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo T, nos proponemos representarla como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right)$$

con unos coeficientes $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ y $\{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ que deberemos calcular

El término de la derecha contiene un primer término constante y después funciones senos y cosenos de frecuencias angulares cada vez más grandes, comenzando por los términos con $n = 1$, que tienen el periodo de $f(t)$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo T, nos proponemos representarla como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

con unos coeficientes $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ y $\{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ que deberemos calcular

La suma resultante es periódica, ya que dos términos cualesquiera, tienen periodos conmesurables

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2\pi}{2\pi n/T} = \frac{T}{n} \\ T_m &= \frac{2\pi}{2\pi m/T} = \frac{T}{m} \end{aligned} \longrightarrow \frac{T_n}{T_m} = \frac{m}{n}$$

Y el periodo de la suma infinita es T ya que todos los periodos están contenidos en T un número entero de veces

2. Serie de Fourier de una función periódica

El coeficiente a_0 se puede calcular directamente integrando

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right)$$

entre $t = 0$ y $t = T$

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^T \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^T \cos \frac{2\pi nt}{T} \mathrm{d}t + b_n \int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} \mathrm{d}t \right) = \frac{a_0}{2} T.$$

Para llegar a ese resultado se ha utilizado el hecho de que la integral de un seno o un coseno sobre un intervalo múltiplo de su periodo es cero.

Nos quedará

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

El coeficiente a_0 es dos veces el valor medio de $f(t)$ sobre su periodo

2. Serie de Fourier de una función periódica

Para calcular el resto de coeficientes deberemos utilizar los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin\frac{2\pi nt}{T}\sin\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t &= \frac{T}{2}\delta_{nm}, \quad n,m=1,2,\ldots, \\
\int_0^T \sin\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t &= 0, \quad n=1,2,\ldots,\ m=0,1,2,\ldots, \\
\int_0^T \cos\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t &= \frac{T}{2}\delta_{nm}, \quad n,m=0,1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

donde $\delta_{n,m}$, la delta de Kronecker, está definida

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin\frac{2\pi nt}{T}\sin\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t &= \frac{T}{2}\delta_{nm}, \quad n,m=1,2,\ldots, \\
\int_0^T \sin\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t &= 0, \quad n=1,2,\ldots,\ m=0,1,2,\ldots, \\
\int_0^T \cos\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t &= \frac{T}{2}\delta_{nm}, \quad n,m=0,1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

Estas integrales se calculan utilizando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\sin A\sin B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B)) \\
\sin A\cos B &= \frac{1}{2}(\sin(A-B)+\sin(A+B)), \\
\cos A\cos B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos(A+B))
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que la integral entre 0 y T de los senos y cosenos siempre vale 0, a menos que sea un coseno con argumento 0 → $\cos(0)=1$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Para obtener los coeficientes a_m multiplicaremos

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

por $\cos\frac{2\pi mt}{T}$, $m = 1, 2, \ldots$ e integraremos entre $t = 0$ y $t = T$

$$\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{a_0}{2}\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos(A+B))}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^T \cos\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\mathrm{d}t + b_n\int_0^T \sin\frac{2\pi nt}{T}\cos\frac{2\pi mt}{T}\mathrm{d}t\right)$$

Todas las integrales del término de la derecha se anulan salvo una (Caso $n = m$)

$$\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t = a_m\frac{T}{2} \quad \longrightarrow \quad a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi mt}{T}\,\mathrm{d}t$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

De forma similar, para obtener los coeficientes b_m multiplicando

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

por $\sin \frac{2\pi m t}{T}, \; m = 1, 2, \cdots$ e integraremos entre $t = 0$ y $t = T$

$$\int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi m t}{T} dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} \sin \frac{2\pi m t}{T} dt$$

$$\sin A \sin B \quad = \quad \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^T \cos \frac{2\pi n t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T} dt + b_n \int_0^T \sin \frac{2\pi n t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T} dt \right)$$

Todas las integrales del término de la derecha se anulan salvo una (Caso $n = m$)

$$\int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi m t}{T} dt = b_m \frac{T}{2} \quad \longrightarrow \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi m t}{T} dt$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Escribiendo estos resultados de forma conjunta

Coeficientes de la serie de Fourier

Dada una función periódica $f(t)$ con periodo T , los coeficientes de su serie de Fourier

$$SF(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

se calculan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} \, \mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} \, \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Puesto que en la práctica nos interesará cortar la suma infinita en algún término, llegaremos a la expresión

$$SF_n(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

que se conoce como la **n-ésima suma parcial de la serie de Fourier**, en la cual sólo se consideran los n primeros términos en senos y cosenos, además del término constante

2. Serie de Fourier de una función periódica

Cada término de la serie de Fourier para $n \geq 1$

$$SF(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right)$$

se puede escribir como una única función seno, definiendo una fase ϕ_n tal que

$$\sin \phi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \phi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

suponiendo que a_n y b_n no son los dos nulos a la vez

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\sin \phi_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + \cos \phi_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin \left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n \right) \end{aligned}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

El coeficiente $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ se llama **amplitud** del **armónico** n y ϕ_n es su **fase**

Se obtiene una definición diferente de la fase si escribimos

$$A_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n\right) = A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right)$$

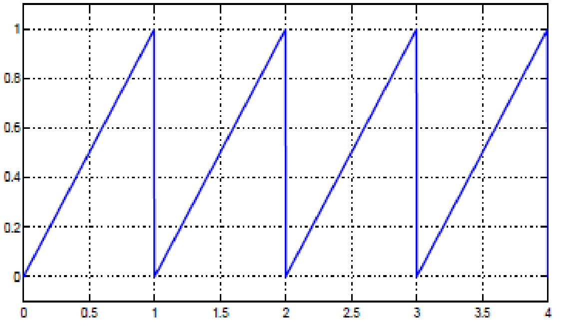
con

$$\varphi_n = \phi_n - \frac{\pi}{2}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Ejemplo

Sea la función $f(t) = t, \; t \in [0,1)$
que se ha extendido periódicamente con periodo T=1



Calculemos su serie de Fourier

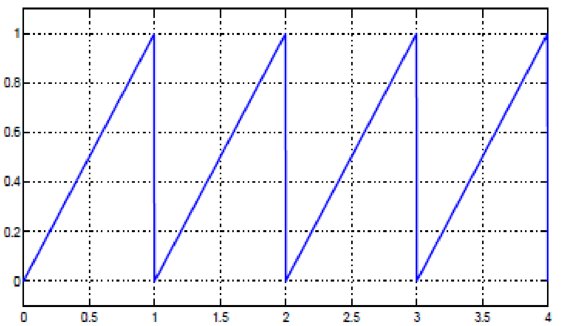
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = 1$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Ejemplo

Sea la función $f(t) = t,\ t \in [0,1)$
que se ha extendido periódicamente con periodo T=1

Calculemos su serie de Fourier



$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t \quad \longrightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 t\cos\frac{2\pi n t}{1}\,\mathrm{d}t$$

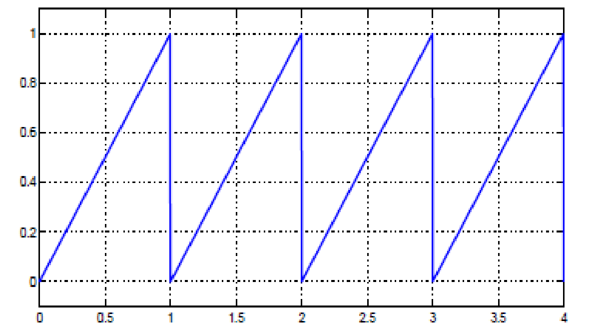
$$\overset{n\neq 0}{=} 2\left(\frac{1}{2\pi n}t\sin 2\pi n t + \frac{1}{(2\pi n)^2}\cos 2\pi n t\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Ejemplo

Sea la función $f(t) = t, \ \ t \in [0, 1)$
que se ha extendido periódicamente con periodo T=1

Calculemos su serie de Fourier



$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 t\sin\frac{2\pi n t}{1}\,\mathrm{d}t$$

$$\stackrel{n\neq 0}{=} 2\left(-\frac{1}{2\pi n}t\cos 2\pi n t + \frac{1}{(2\pi n)^2}\sin 2\pi n t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Resumiendo

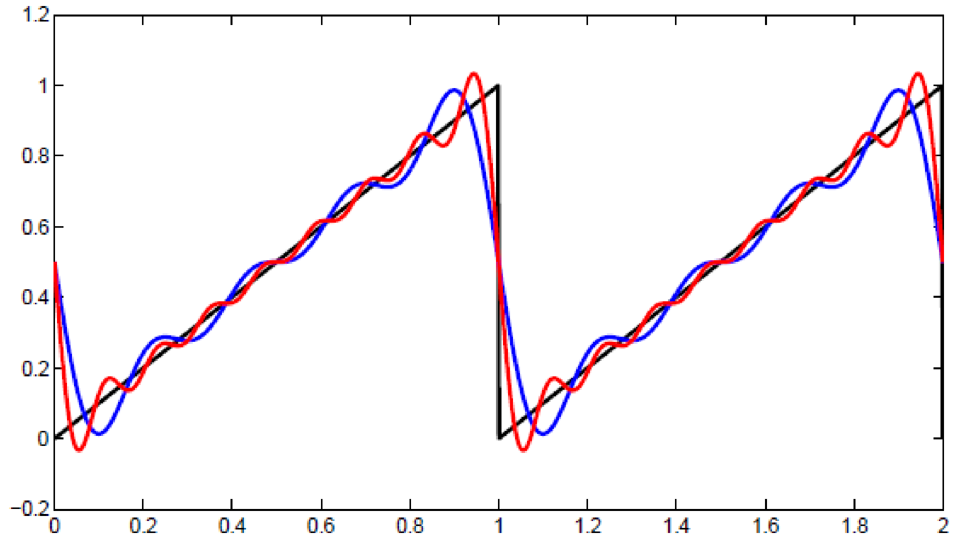
$$a_0 = 1$$
$$a_n = 0, \ \ n = 1, 2, \cdots$$
$$b_n = -\tfrac{1}{n\pi}, \ \ n = 1, 2, \cdots$$

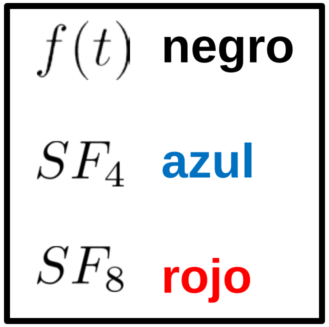
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

La serie de Fourier de la función periódica $f(t)$ es

$$SF(f(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n t$$

2. Serie de Fourier de una función periódica





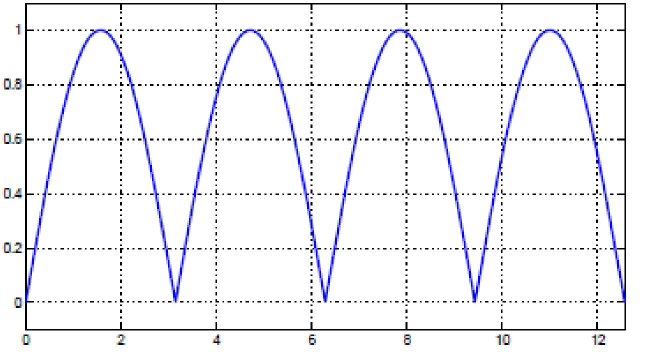
El comportamiento de SF_4 y SF_8 es muy parecido en el centro del periodo, pero cerca de una discontinuidad la aproximación de $f(t)$ por las sumas parciales no es buena:
pasar de n=4 a n=8 sólo consigue hacer más pequeño el intervalo donde la aproximación no es correcta, pero no disminuye el **sobrebote** antes y después de la discontinuidad

2. Serie de Fourier de una función periódica

Ejemplo

Sea la función $f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi)$
que se ha extendido periódicamente con periodo $T = \pi$

Calculemos su serie de Fourier



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t \longrightarrow$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(-\cos t\right)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos\frac{2\pi n t}{\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos 2nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(1-2n)t + \sin(1+2n)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)t - \frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)t\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B))}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin\frac{2\pi n t}{\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\sin 2nt\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(1-2n)t - \cos(1+2n)t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n}\sin(1-2n)t - \frac{1}{1+2n}\sin(1+2n)t\right)\Bigg|_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Resumiendo

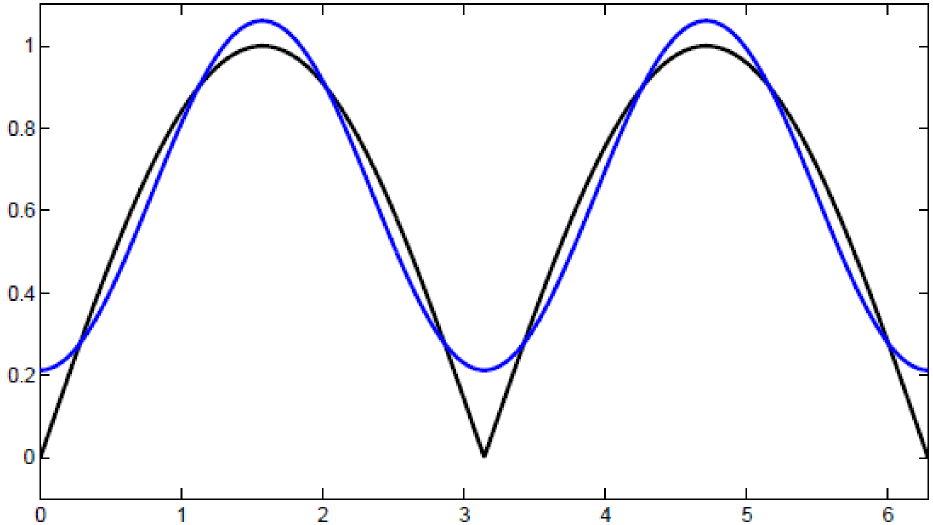
$$a_0 = \frac{4}{\pi}$$
$$a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, \; n = 1, 2, \cdots$$
$$b_n = 0, \; n = 1, 2, \cdots$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

La serie de Fourier de la función periódica $f(t)$ es

$$SF(f(t)) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nt$$

2. Serie de Fourier de una función periódica



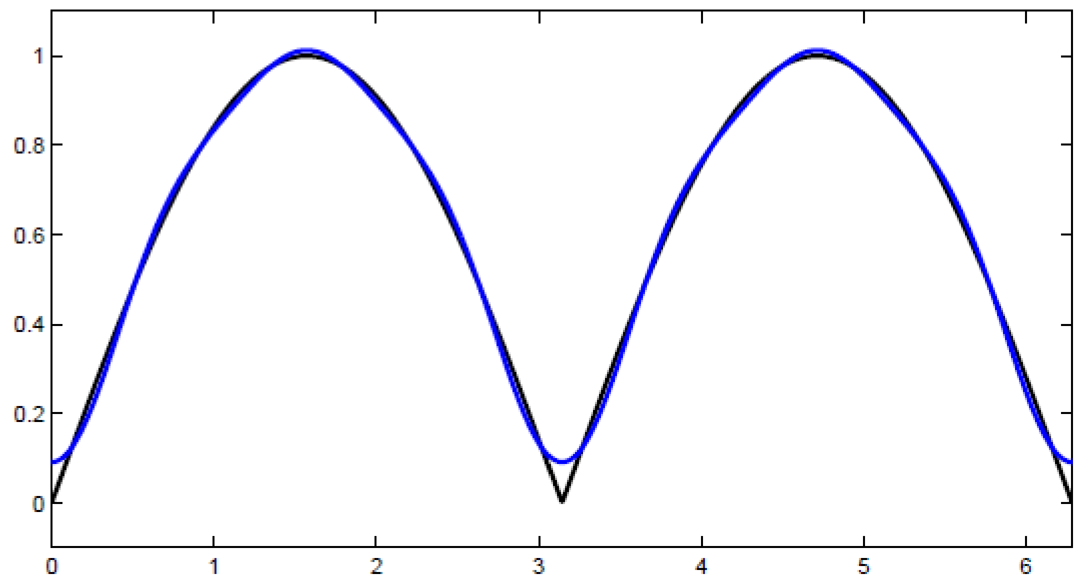
$f(t)$ **negro**

SF_1 **azul**

$$SF_1(f(t)) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\cos 2t$$

La aproximación de las sumas parciales de la serie de Fourier con n=1 es bastante buena

2. Serie de Fourier de una función periódica



$f(t)$ **negro**

SF_3 **azul**

Las buenas aproximaciones de las sumas parciales de la serie de Fourier con pocos términos es una propiedad común de las funciones que no tienen discontinuidades de salto

2. Serie de Fourier de una función periódica

Presentemos una característica general de los coeficientes de la serie de Fourier de una función periódica

Los coeficientes de la serie de Fourier de una función periódica decaen cuando n crece

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

Ejemplo 1

$$f(t) = t, \;\; t \in [0,1)$$

$$a_0 = 1$$
$$a_n = 0, \;\; n = 1, 2, \cdots$$
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}, \;\; n = 1, 2, \cdots$$

Ejemplo 2

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi)$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi}$$
$$a_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}, \;\; n = 1, 2, \cdots$$
$$b_n = 0, \;\; n = 1, 2, \cdots$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

También podemos notar como en las dos series de Fourier hay muchos coeficientes que son 0

Ejemplo 1

$$f(t) = t,\ \ t \in [0,1)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= 0,\ \ n = 1,2,\cdots \\ b_n &= -\tfrac{1}{n\pi},\ \ n = 1,2,\cdots \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0,\pi)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{4}{\pi} \\ a_n &= \tfrac{4}{\pi}\tfrac{1}{1-4n^2},\ \ n = 1,2,\cdots \\ b_n &= 0,\ \ n = 1,2,\cdots \end{aligned}$$

Esto no es una casualidad, y saber las condiciones en las que pasa esto nos puede ahorrar mucho cálculo

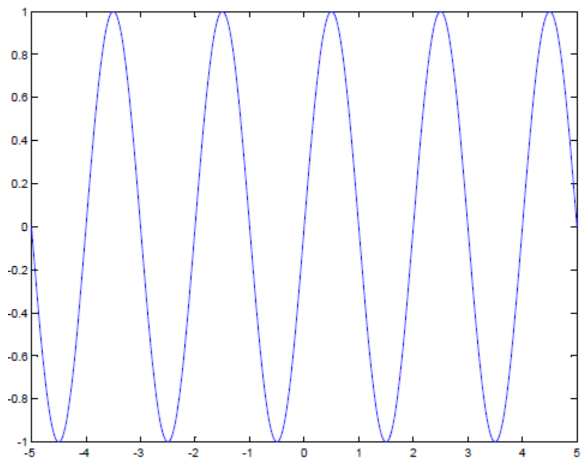
2. Serie de Fourier de una función periódica

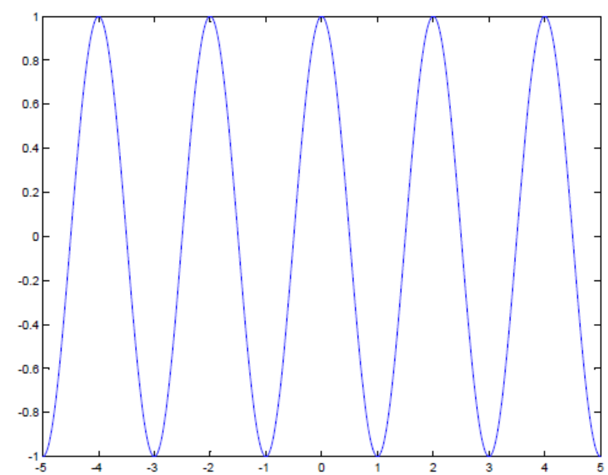
Recordemos que

Una función $f(t)$ se dice que es:

1. **simétrica** si $f(t) = f(-t)$ para todo t
2. **antisimétrica** si $f(t) = -f(-t)$ para todo t

Las funciones seno son antisimétricas, mientras que las funciones coseno son simétricas





2. Serie de Fourier de una función periódica

Para funciones periódicas definidas en $[0, T]$ y extendidas periódicamente con periodo T, estas condiciones son equivalentes

1. $f(t)$ es **simétrica** si lo es respecto al centro del periodo

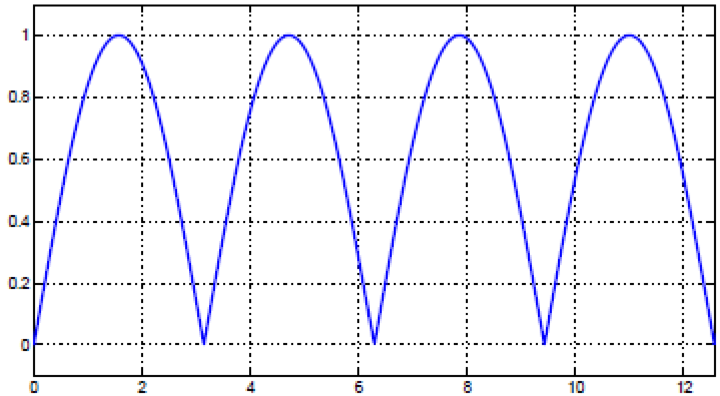
$$f\left(\frac{T}{2}+t\right) = f\left(\frac{T}{2}-t\right), \; t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

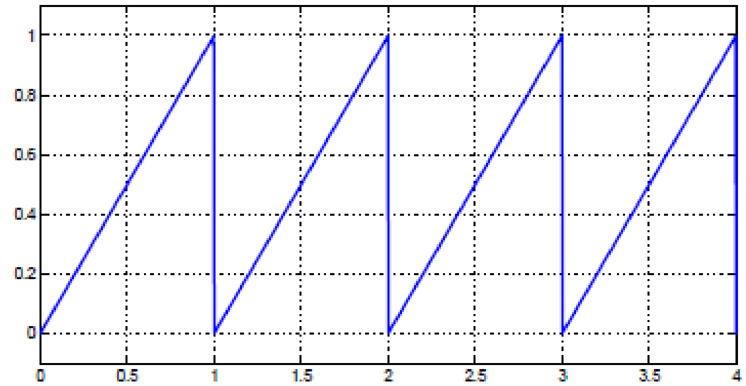
2. $f(t)$ es **antisimétrica** si lo es respecto al centro del periodo

$$f\left(\frac{T}{2}+t\right) = -f\left(\frac{T}{2}-t\right), \; t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

La simetría o antisimetría de una función periódica es fácil de determinar mirando la gráfica de la función





Simétrica

$$f\left(\frac{T}{2}+t\right)=f\left(\frac{T}{2}-t\right),\ t\in\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Las funciones que tienen simetría o antisimetría tienen buenas propiedades respecto al producto

1. El producto de **dos** funciones **simétricas** es una función **simétrica**
2. El producto de una función **simétrica** y una **antisimétrica** es una función **antisimétrica**
3. El producto de **dos** funciones **antisimétricas** es una función **simétrica**

2. Serie de Fourier de una función periódica

Veamos el resultado fundamental que permite especificar las condiciones bajo las cuales los coeficientes a_n o b_n son nulos

Si $g(t)$ es una función periódica con periodo T y **antisimétrica**, entonces

$$\int_0^T g(t)\,dt = 0$$

Dem.

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T/2} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} g(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \underbrace{\int_0^{T/2} g(T/2 - z)\,\mathrm{d}z}_{t=T/2-z} + \underbrace{\int_0^{T/2} g(T/2 + z)\,\mathrm{d}z}_{t=T/2+z} \\
&\overset{\text{antisimetria}}{=} -\int_0^{T/2} g(T/2 + z)\,\mathrm{d}z + \int_0^{T/2} g(T/2 + z)\,\mathrm{d}z = 0.
\end{aligned}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Aplicando estos resultados al cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier de una función periódica tendremos:

1. Si $f(t)$ es simétrica, entonces $b_n = 0, \;\; n = 1, 2, \cdots$
2. Si $f(t)$ es antisimétrica, entonces $a_n = 0, \;\; n = 0, 1, 2, \cdots$
3. Si añadiendo una constante a $f(t)$ se obtiene una función antisimétrica, entonces $a_n = 0, \;\; n = 1, 2, \cdots$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}
$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

El siguiente resultado permite, en ciertos casos, simplificar el cálculo de los coeficientes

Si $g(t)$ es una función periódica con periodo T y a es una constante cualquiera, entonces

$$\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} g(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_a^T g(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^a g(z+T)\,\mathrm{d}z}_{t=z+T} \overset{g(z+T)=g(z)}{=} \int_a^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a g(z)\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^a g(z)\,\mathrm{d}z + \int_a^T g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

2. Serie de Fourier de una función periódica

Este resultado permite calcular los coeficientes de la serie de Fourier con integrales sobre cualquier intervalo de longitud T, en lugar de tenernos que restringir a intervalos del tipo $[0, T]$

Una elección muy habitual es $a = -\dfrac{T}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}}$$

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

Problema de la convergencia de las series de Fourier

Nos preguntamos hasta que punto es válido aproximar una función por su serie de Fourier

Con el fin de poder contestar a esta pregunta enunciaremos el teorema de **convergencia de Dirichlet**

Dada una función $f(t)$ continua a trozos, definimos $\hat{f}(t)$ como

$$\hat{f}(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son los límites de f por la derecha y por la izquierda.

Estos límites existen en todos los puntos, dado que f tiene, como mucho, un número finito de discontinuidades de salto en cualquier intervalo finito.

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

En los puntos donde la función $f(t)$ es continua tenemos que la función $\hat{f}(t)$ coincide con $f(t)$, mientras que en los puntos de discontinuidad de $f(t)$, $\hat{f}(t)$ tiene la misma discontinuidad de salto, pero con el valor redefinido

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 3, \\ 7 & \text{si } t > 3, \end{cases}$$

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 3, \\ 4 & \text{si } t = 3, \\ 7 & \text{si } t > 3. \end{cases}$$

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

Teorema de Dirichlet

Si $f(t)$ es una función periódica, continua a trozos, y tal que en cada punto existen las derivadas por la derecha y por la izquierda, entonces la serie de Fourier de $f(t)$ vale en todos los puntos lo mismo que la función $\hat{f}(t)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) = \hat{f}(t)$$

Interpretación: las sumas parciales de Fourier convergen puntualmente a $f(t)$ en los puntos donde la función f es continua y a la media de los límites laterales en los puntos de discontinuidad

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

La suma de $\hat{f}(t)$ se ha de entender en el sentido de límite

Dado un punto cualquiera t, y una valor $\epsilon > 0$, por pequeño que sea, existe un n (que en general depende de t y de ϵ) tal que las sumas parciales

$$SF_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

están a distancia menor que ϵ de $\hat{f}(t)$

$$\left| SF_n(t) - \hat{f}(t) \right| < \epsilon$$

Se dice que las sumas parciales de la serie de Fourier, y por extensión la serie de Fourier, **convergen** hacia $\hat{f}(t)$

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

extendida periódicamente con periodo $T = 1$

Como esta función es antisimétrica → $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\sin\frac{2\pi n t}{1}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_0^{1/2}(+1)\cdot\sin 2\pi n t\,\mathrm{d}t + 2\int_{1/2}^{1}(-1)\cdot\sin 2\pi n t\,\mathrm{d}t \\ &\overset{n\neq 0}{=} -\frac{1}{\pi n}\cos 2\pi n t\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{\pi n}\cos 2\pi n t\Big|_{1/2}^{1} \\ &= -\frac{1}{\pi n}(\cos\pi n - 1) + \frac{1}{\pi n}(\cos 2\pi n - \cos\pi n) \overset{\cos 2\pi n = 1}{=} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\pi n) \end{aligned}$$

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

extendida periódicamente con periodo $T = 1$

Como esta función es **antisimétrica** → $a_n = 0$

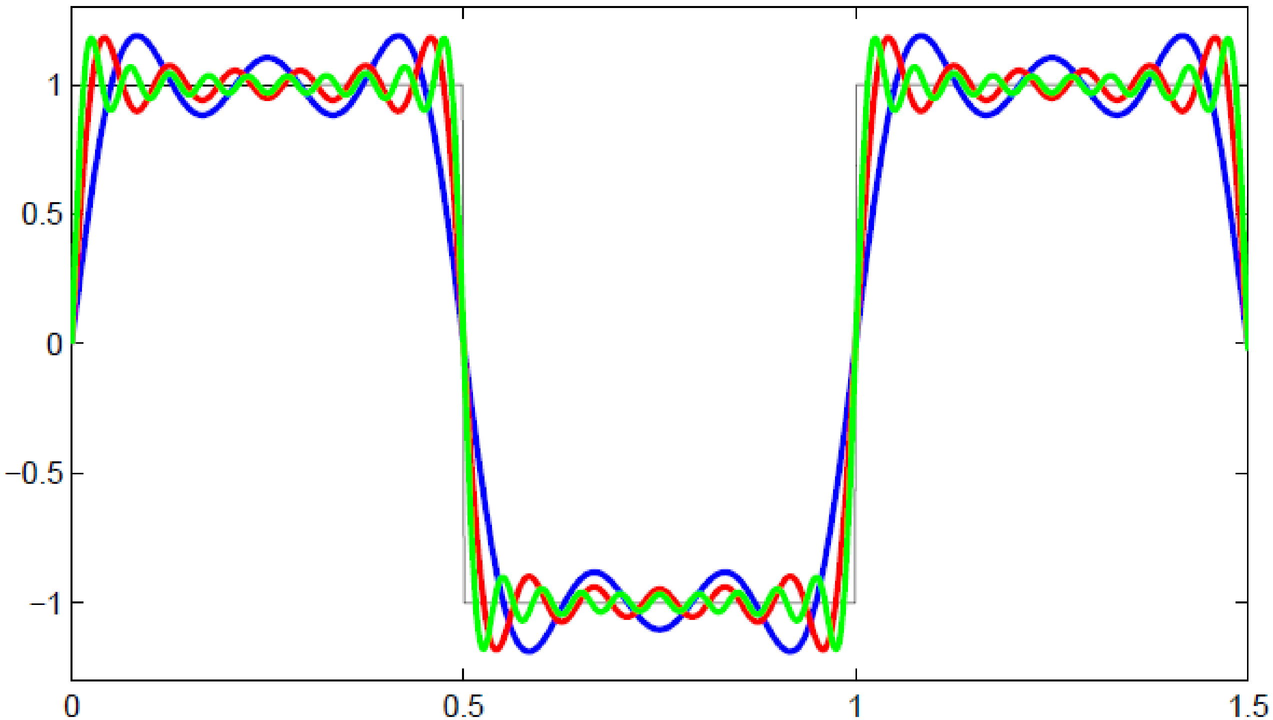
$$b_n = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos \pi n)$$

Como

$$\cos \pi n = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases} \longrightarrow \quad b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$SF(f(t)) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin 2\pi(2n+1)t$$

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs



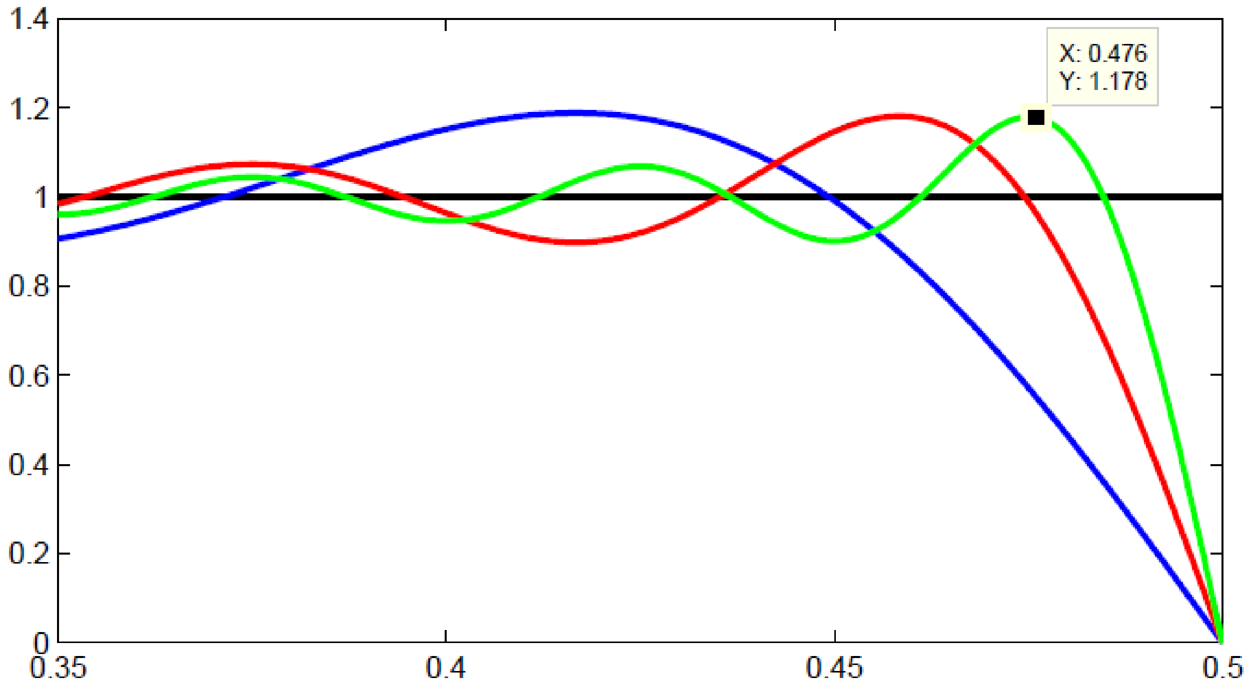
$n = 5$ **Azul**

$n = 11$ **Rojo**

$n = 20$ **Verde**

$$SF(f(t)) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,\ n\,\mathrm{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n t$$

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs



$n = 5$ **Azul**

$n = 11$ **Rojo**

$n = 20$ **Verde**

Detalle alrededor de $t = \frac{1}{2}$

Se ve como al aumentar n el pico no disminuye, y sólo se aproxima al punto de discontinuidad

3. Convergencia. Teorema de Dirichlet. Fenómeno de Gibbs

Este hecho se llama **fenómeno de Gibbs**

Se observa que la gráfica de la suma parcial de Fourier excede a la de la función salto en el punto de discontinuidad.

Se puede demostrar que las aproximaciones que nos ofrecen las sumas parciales de Fourier exceden al verdadero valor de la función a la derecha, es decir $f(0+) = 1$ en 0.18, lo que supone aproximadamente un 9% de la longitud del salto, que en este caso es 2

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Para presentar la transformada discreta de Fourier, conviene manipular la expresión de **la serie de Fourier** $SF(f(t))$ de una función periódica y **reescribirla** en término de **exponenciales complejas**.

Utilizando

$$\cos A = \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2}, \ \sin A = \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j}$$

$$\begin{aligned}
SF(f(t)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{j\frac{2\pi n t}{T}} + e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{j\frac{2\pi n t}{T}} - e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}}{2j} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} e^{j\frac{2\pi n t}{T}} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} + \bar{c}_n e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} \right)
\end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$$

$$\bar{c}_n = \frac{a_n + j b_n}{2}$$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Si **extendemos el índice** n **a valores negativos** mediante la siguiente definición

$$\bar{c}_n = c_{-n}$$

podemos reescribir la serie de Fourier

$$\begin{aligned} SF(f(t)) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} + \bar{c}_n e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \\ &= c_0 + \sum_{-\infty,\, n\neq 0}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \end{aligned}$$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Los coeficientes c_n se calculan combinando las expresiones para a_n y b_n

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos\frac{2\pi nt}{T} - j\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

- Esto permite calcular c_0 y c_n,
- y los valores de c_{-n} se obtienen tomando el complejo conjugado del resultado para c_n

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Ejemplo

Obtengamos la forma compleja de la serie de Fourier de la función

$$f(t) = Ae^{-at}, \; t \in [0, \frac{3}{a}) \quad \text{extendida con periodo } T = \frac{3}{a}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}\,dt$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{3/a}\int_0^{3/a} Ae^{-at}e^{-j\frac{2\pi n t}{3/a}}\mathrm{d}t = \frac{a}{3}A\int_0^{3/a} e^{-at}e^{-j\frac{2\pi a n t}{3}}\mathrm{d}t = \frac{a}{3}A\int_0^{3/a} e^{-a\left(1+j\frac{2\pi n}{3}\right)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{3}A\frac{-1}{a\left(1+j\frac{2\pi n}{3}\right)}\, e^{-a\left(1+j\frac{2\pi n}{3}\right)t}\Big|_0^{3/a} = -\frac{A}{3}\frac{1}{1+j\frac{2\pi n}{3}}\left(e^{-3\left(1+j\frac{2\pi n}{3}\right)}-1\right) \\ &= -\frac{A}{3}\frac{1}{1+j\frac{2\pi n}{3}}(e^{-3}\underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1\forall\, n}-1) = \frac{A}{3}(1-e^{-3})\frac{1}{1+j\frac{2\pi n}{3}}. \end{aligned}$$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Pasando el complejo a forma cartesiana se obtiene

$$c_n = \frac{3A(1-e^{-3})}{9+4\pi^2 n^2}(1 - j\frac{2\pi n}{3}), \quad n = -\infty, \dots, +\infty$$

Por lo que la forma compleja de la serie de Fourier para esta función es

$$SF(f(t)) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{3A(1-e^{-3})}{9+4\pi^2 n^2}(1 - j\frac{2\pi n}{3})e^{j\frac{2\pi a n t}{3}}$$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

A partir de la forma compleja se puede **recuperar la forma real** de la serie de Fourier calculando los coeficientes a_n y b_n

$$\left.\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \bar{c}_n &= \frac{a_n + jb_n}{2} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} a_n &= c_n + \bar{c}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= j(c_n - \bar{c}_n), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Apliquemos este resultado a nuestro ejemplo

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Ejemplo

Obtengamos la serie de Fourier real de la función

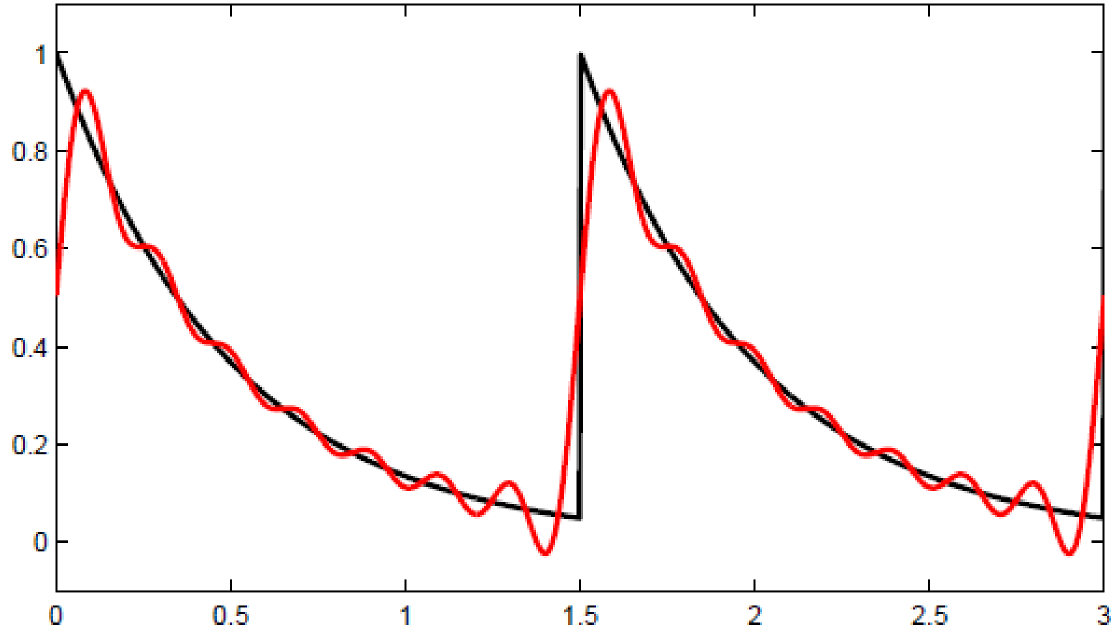
$$f(t) = Ae^{-at}, \; t \in [0, \frac{3}{a}) \quad \text{extendida con periodo } T = \frac{3}{a}$$

a partir de la forma compleja de la serie de Fourier

$$\left.\begin{aligned} c_n &= \frac{3A(1-e^{-3})}{9+4\pi^2n^2}\left(1 - j\frac{2\pi n}{3}\right), \\ a_n &= c_n + \bar{c}_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= j(c_n - \bar{c}_n), \; n = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3}A(1-e^{-3}), \\ a_n &= \frac{6A(1-e^{-3})}{9+4\pi^2n^2}, \; n = 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{4\pi A(1-e^{-3})n}{9+4\pi^2n^2}, \; n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$SF(f(t)) = \frac{1}{3}A(1-e^{-3}) + A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-3}}{9+4\pi^2n^2}\left(6\cos\frac{2\pi ant}{3} + 4\pi n \sin\frac{2\pi ant}{3}\right)$$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral



Representación gráfica de la función $f(t) = e^{-2t},\ t \in [0, \frac{3}{2})$
y su suma parcial de Fourier con $n = 7$ sobre dos periodos

,

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

A partir de los coeficientes del desarrollo complejo de Fourier de una función periódica se puede calcular el **espectro** de la misma.

Espectro en amplitud es la representación gráfica de módulos de los coeficientes c_n

$$|c_n| = \sqrt{c_n \bar{c}_n} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El valor $|c_n|$ es la amplitud del n-ésimo armónico afectado por el factor $\frac{1}{2}$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Teorema de Parseval

Si $f(t)$ es una función periódica con periodo T, continua a trozos, y tal que en cada punto existen las derivadas por la derecha y por la izquierda y c_n son los coeficientes de su serie compleja de Fourier, entonces se verifica

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Interpretación. La integral es proporcional a la potencia media de la señal sobre un periodo.

Por lo tanto, la potencia contenida en una señal puede evaluarse a partir de los coeficientes de su correspondiente serie compleja de Fourier.

La contribución relativa de las diferentes frecuencias se puede ver mirando la representación de los $|c_n|$ en función de n

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Teorema de Parseval

Si $f(t)$ es una función periódica con periodo T, continua a trozos, y tal que en cada punto existen las derivadas por la derecha y por la izquierda y c_n son los coeficientes de su serie compleja de Fourier, entonces se verifica

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Como que $|c_{-n}| = |\bar{c}_n| = |c_n|$ la suma sobre los módulos de los coeficientes complejos se puede reescribir sumando sólo sobre los índices positivos

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2$$

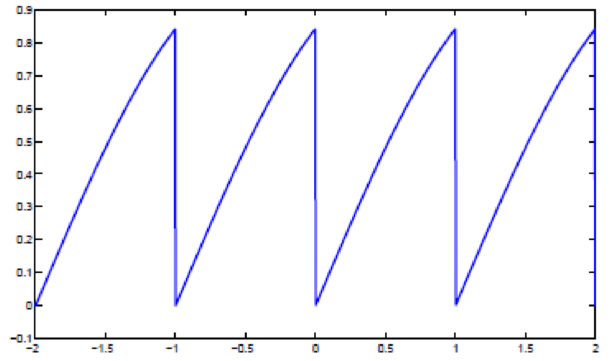
Además $|c_0|^2 = c_0^2$ por ser c_0 real

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

La contribución relativa de las diferentes frecuencias se puede ver mirando la representación de los $|c_n|$ en función de n

Ejemplo

Sea la función $f(t) = \sin t,\ t \in [0, 1)$ periódica con periodo $T = 1$



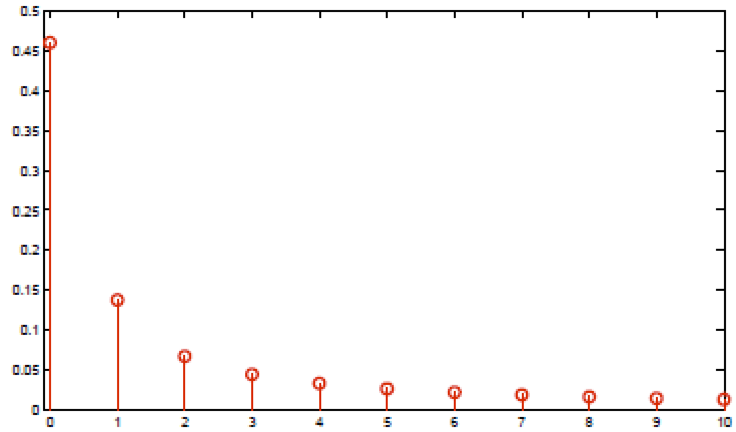
Los $a_n,\ n \neq 0$ son más pequeños que los b_n, esto es debido a que la función es casi antisimétrica si se desplaza hacia abajo cierta cantidad

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0.9194	-0.0239	-0.0059	-0.0026	-0.0015	-0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002
b_n	0	-0.2748	-0.1348	-0.0895	-0.0671	-0.0536	-0.0447	-0.0383	-0.0335	-0.0298	-0.0268
$\|c_n\|$	0.4597	0.1379	0.0675	0.0448	0.0335	0.0268	0.0223	0.0191	0.0167	0.0149	0.0134

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0.9194	-0.0239	-0.0059	-0.0026	-0.0015	-0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002
b_n	0	-0.2748	-0.1348	-0.0895	-0.0671	-0.0536	-0.0447	-0.0383	-0.0335	-0.0298	-0.0268
$\|c_n\|$	0.4597	0.1379	0.0675	0.0448	0.0335	0.0268	0.0223	0.0191	0.0167	0.0149	0.0134

Espectro



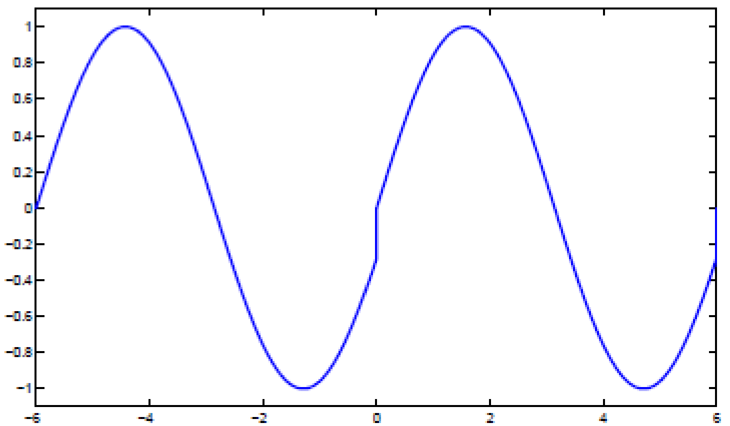
Como la contribución a la potencia media depende del cuadrado del espectro, podemos ver que el armónico fundamental ($n = 1$) tiene una importancia casi el doble que el siguiente ($n = 2$), y a partir de ahí la caída es progresiva

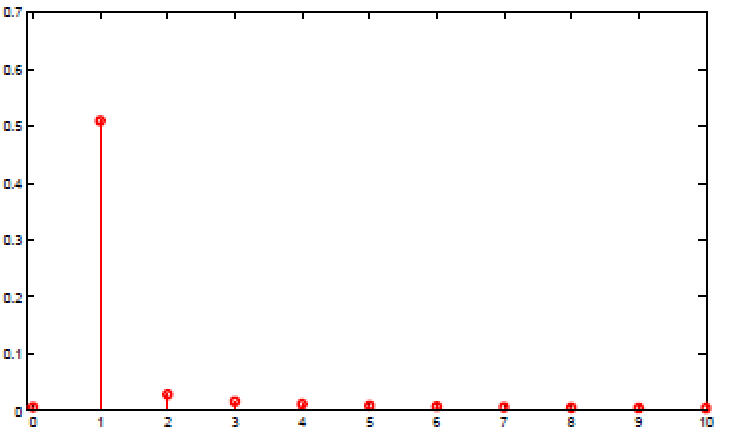
Aunque la mayor parte de la energía de esta señal está en el término **dc** ($n = 0$)

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Ejemplo

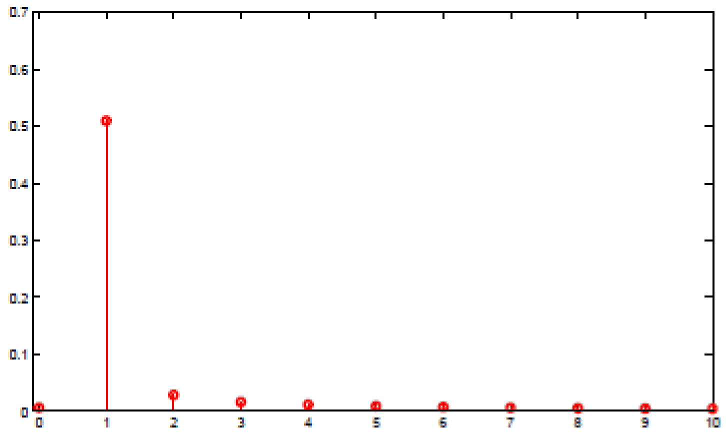
Sea la función $f(t) = \sin t, \;\; t \in [0, 6)$ periódica con periodo $T = 6$





Se corresponde casi con la función $\sin t$ con su periodo natural, y su espectro refleja este hecho

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral



$$f(t) = \sin t, \;\; t \in [0, 6)$$

$|c_0|$ es prácticamente nulo, ya que a_0 es muy pequeño, debido a que la función es casi antisimétrica

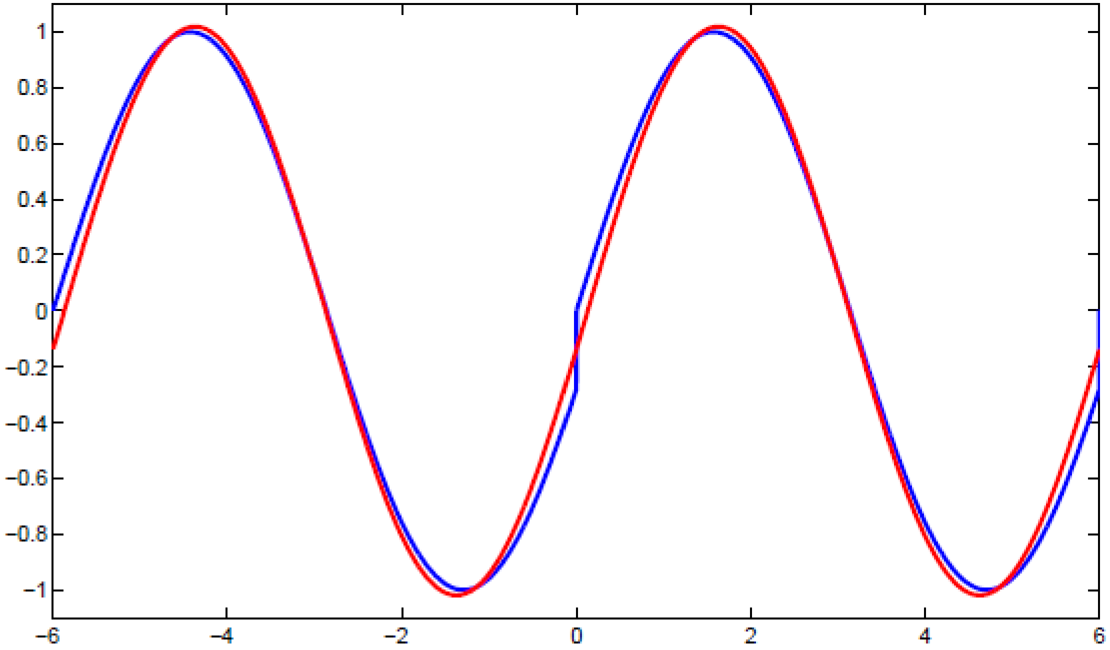
La función es casi un seno, y eso se manifiesta en el valor predominante del primer armónico $|c_1|$

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Representando (en **rojo**) la función obtenida con el primer armónico

$$f_1(t) = a_1 \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot t}{6} + b_1 \sin \frac{2\pi \cdot 1 \cdot t}{6} \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= -0.1374 \\ b_1 &= 1.0094 \end{aligned} \right.$$

y $f(t)$ (en **azul**) vemos que se trata de una muy buena aproximación



4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

En general, el espectro de una función periódica es infinito, es decir no hay un valor M tal que $|c_n| = 0$ para todo $n > M$

Diremos que una señal es de **banda limitada** si existe una valor M tal que $|c_n| = 0$ para todo $n > M$

Las únicas señales periódicas que son de banda limitada son aquellas que son combinación lineal de un número finito de senos y cosenos (con periodos conmesurables), repetida con el periodo natural de la señal total

En este caso, para calcular los coeficientes de la serie de Fourier no hará falta integrar. Veamos un ejemplo

4. Forma compleja de la serie de Fourier. Análisis espectral

Ejemplo $$f(t) = 3\sin t + 4\cos 2t - 2\sin\frac{2}{3}t$$ con periodo $T = 6\pi$

Como la señal tiene periodo 6π, su serie de Fourier será de la forma

$$\begin{aligned} SF(f(t)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{6\pi} + b_n\sin\frac{2\pi nt}{6\pi}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{nt}{3} + b_n\sin\frac{nt}{3}\right) \end{aligned}$$

Comparándola con la función $f(t)$ podemos deducir que los únicos coeficientes de Fourier no nulos serán $b_2 = -2,\ b_3 = 3,\ a_6 = 4$

Por tanto se cumple que si $M = 6$, todos los coeficientes de la serie de Fourier son nulos para $n > 6$, por lo que se trata de una señal de banda limitada

5. Bibliografía

1. **Simmons, G.F., Krantz, S.G., Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana, 2007.** ISBN 978-0-07-286315-4

2. **Batlle, C., Massana, I., Zaragozá, M., Àlgebra i Equacions diferencials, Edicions UPC, 2000.** ISBN 84-8301-405-X

3. **Batlle, C, Apunts tema 4 – Anàlisi de Fourier, Atenea-Campus Digital, 2012**