Ecuaciones Diferenciales

Tema 3. Análisis de las soluciones de los sistemas lineales

Ester Simó Mezquita
Matemática Aplicada IV

Tema 3. Análisis de las soluciones de sistemas lineales

1. Solución general de una EDO lineal
2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes
3. Estabilidad. Régimen permanente y régimen transitorio
4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal
5. Sistemas de control. Función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

1. Solución general de una EDO lineal

Se llama **ecuación diferencial lineal** de **primer orden** a la que es lineal con respecto a la función incógnita y su derivada. Tiene la forma

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \;\; a_1(t) \neq 0$$

donde $a_1(t), a_0(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en la región que se pida integrar la ecuación diferencial

- Si $b(t) \neq 0$ la ecuación diferencial se llama **lineal no homogénea**

$$\dot{x} + 2t\, x = 2t\, e^{-t^2}$$

- Si $b(t) = 0$ la ecuación diferencial se llama **lineal homogénea**

$$\dot{x} + t^2\, x = 0$$

Variables separables

1. Solución general de una EDO lineal

Dada una **EDO lineal** de **primer orden no homogénea**

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ a_1(t) \neq 0,\ \ b(t) \neq 0$$

siempre podemos obtener la **EDO homogénea asociada**, haciendo $b(t) = 0$

EDO lineal completa

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ a_1(t) \neq 0,\ \ b(t) \neq 0$$

EDO lineal homogénea asociada

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0,\ \ a_1(t) \neq 0$$

Ejemplo

$$\dot{x} + t\,x = t$$

$$\dot{x} + t\,x = 0$$

1. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Linealidad 1. Si $x(t)$ es una solución de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0$ también lo es $\tilde{x}(t) = Cx(t)$, con C una constante cualquiera.

Demostración

$$\begin{aligned} a_1(t)\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + a_0(t)\tilde{x}(t) &= a_1(x)\frac{d}{dt}(Cx(t)) + a_0(t)(Cx(t)) \\ &= a_1(t)C\dot{x}(t) + a_0(t)Cx(t) \\ &= C(a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(y)) \\ &= C\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Notar: La propiedad no es cierta para la EDO lineal completa si $C \neq 1$

$$a_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) + a_0(t)\tilde{x}(t) = C(a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)) = Cb(t) \neq b(t)$$

1. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ b(t) \neq 0$ y $x_h(t)$ es una **solución** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución** de la **EDO lineal completa**

Demostración

$$
\begin{aligned}
a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) &= a_1(t)\frac{d}{dt}(x_h(t) + x_p(t)) + a_0(t)(x_h(t) + x_p(t)) \\
&= (a_1(t)\dot{x}_h(t) + a_0(t)x_h(t)) + (a_1(t)\dot{x}_p(t) + a_0(t)x_p(t)) \\
&= 0 + b(t)
\end{aligned}
$$

$$\uparrow$$

$$a_1(t)\dot{x}_p(t) + a_0(t)x_p(t) = b(t)$$

$$a_1(t)\dot{x}_h(t) + a_0(t)x_h(t) = 0$$

1. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ b(t) \neq 0$ y $x_h(t)$ es una **solución** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución** de la **EDO lineal completa**

Consecuencia

Si hacemos que $x_h(t)$ sea la **solución general** de la **homogénea asociada**, entonces $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ será **la solución general** de la **EDO lineal completa**

La **solución general** de la **EDO lineal completa de orden 1** se obtiene añadiendo una **solución particular** de la **EDO completa** a la **solución general** de la **EDO lineal homogénea asociada**

1. Solución general de una EDO lineal

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \;\; b(t) \neq 0$
y $x_h(t)$ es una **solución general** de la EDO lineal **homogénea asociada**,
entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución general de la EDO lineal completa**

1. Solución general de una EDO lineal

Una **EDO lineal de orden 2** es toda relación entre una función incógnita $x(t)$, sus derivadas primera y segunda, $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$ y la variable independiente t que se puede escribir de la forma

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \;\; a_2(t) \neq 0$$

donde $a_i(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en la región que se pide integrar la ecuación diferencial

$a_i(t)$ son los **coeficientes** de la ecuación
$b(t)$ es el **término independiente**

Si $b(t) = 0$ EDO lineal de orden 2 **homogénea**
Si $b(t) \neq 0$ EDO lineal de orden 2 **no homogénea**

1. Solución general de una EDO lineal

Veamos algunos ejemplos

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \sin(t)\ddot{x} - t^3\dot{x} - x = 2t\, e^{-t^2} \\
&2) \quad \ddot{x} - \dot{x} + x = t^5 \\
&3) \quad \ddot{x} - \dot{x}x = 0 \\
&4) \quad \ddot{x} - \dot{x} + x = 0
\end{aligned}
$$

- ¿Cuál es **lineal/no lineal**?
- ¿Cuál es **homogénea/no homogénea** ?
- ¿Cuál tiene los **coeficientes constantes/no constantes** ?

1. Solución general de una EDO lineal

Dada una **EDO lineal** de **segundo orden no homogénea**

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ a_2(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0$$

siempre podemos obtener la **EDO homogénea asociada**, haciendo $b(t) = 0$

EDO lineal completa

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ a_2(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0$$

EDO lineal homogénea asociada

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0,\ a_2(t) \neq 0$$

Ejemplo

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = t$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = 0$$

1. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Linealidad 2. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \;\; a_2(t) \neq 0$$

también lo es $\tilde{x}(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$, con A y B dos constantes cualquiera.

Demostración

$$a_2(t)\ddot{x}_1 + a_1(t)\dot{x}_1 + a_0(t)x_1 = 0, \;\rightarrow\; A(a_2(t)\ddot{x}_1 + a_1(t)\dot{x}_1 + a_0(t)x_1) = 0$$

$$a_2(t)\ddot{x}_2 + a_1(t)\dot{x}_2 + a_0(t)x_2 = 0, \;\rightarrow\; B(a_2(t)\ddot{x}_2 + a_1(t)\dot{x}_2 + a_0(t)x_2) = 0$$

→ Sumando ambas expresiones

$$A(a_2(t)\ddot{x}_1 + a_1(t)\dot{x}_1 + a_0(t)x_1) + B(a_2(t)\ddot{x}_2 + a_1(t)\dot{x}_2 + a_0(t)x_2) = 0$$

$$a_2(t)(A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2) + a_1(t)(A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2) + a_0(t)(Ax_1 + Bx_2) = 0$$

$$a_2(t)\ddot{\tilde{x}} + a_1(t)\dot{\tilde{x}} + a_0(t)\tilde{x} = 0$$

1. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \;\; b(t) \neq 0$$

y $x_h(t)$ es una **solución** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución** de la **EDO lineal completa**

Consecuencia

Si hacemos que $x_h(t)$ sea la **solución general** de la **homogénea asociada**, entonces $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ será **la solución general** de la **EDO lineal completa**

La **solución general** de la **EDO lineal completa de orden 2** se obtiene añadiendo una **solución particular** de la **EDO completa** a la **solución general** de la **EDO lineal homogénea asociada**

1. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Principio de superposición.

Si $x_{p_1}(t)$ y $x_{p_2}(t)$ son soluciones particulares de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b_1(t)$$ y de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b_2(t)$$

respectivamente, entonces $x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$ es solución de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b_1(t) + b_2(t)$$

Demostración → Se deja como ejercicio

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

2.1 EDO lineal de orden 1 con coeficientes constantes

Consideremos la EDO lineal de orden 1 con coeficientes constantes

$$\dot{x} + ax = b(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace tenemos

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = B(s)$$

Despejando

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+a} + \frac{B(s)}{s+a}$$

Aplicando la transformada inversa tenemos la solución en el dominio temporal

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

El primer término es la **solución general** $x_h(t)$ **de la EDO homogénea asociada**

Ya que contiene el valor arbitrario $x(0)$ de la condición inicial, que podemos llamar C, y es la solución que se obtiene si ponemos $b(t) = 0$ (y por tanto $B(s) = 0$)

$$x_h(t) = x(0)e^{-at} = Ce^{-at}$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

El segundo término es la **solución particular** $x_p(t)$ **de la EDO completa**

$$x_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

que depende del término $b(t)$ que tengamos

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

Resumiendo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\} \\ &= x(0)e^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\} \\ &= x_h(t) + x_p(t) \end{aligned}$$

Notemos el papel que juega tanto en el cálculo de $x_h(t)$ como de $x_p(t)$ el **polinomio característico**

$$p_1(s) = s + a$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

2.2 EDO lineal de orden 2 con coeficientes constantes

Consideremos una EDO lineal de orden 2 con coeficientes constantes

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace tenemos

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + a_1(sX(s) - x(0)) + a_0X(s) = B(s)$$

Despejando

$$X(s) = \frac{(s+a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1 s + a_0} + \frac{B(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Aplicando la transformada inversa tenemos la solución en el dominio temporal

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1 s + a_0}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}\right\}$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+a_1 s+a_0}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s^2+a_1 s+a_0}\right\}$$

El primer término contiene dos constantes arbitrarias, $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, y es el único que permanece si ponemos $b(t) = 0$

$$x_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+a_1 s+a_0}\right\}$$

Mientras que

$$x_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s^2+a_1 s+a_0}\right\}$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

En este caso, la forma específica de $x_h(t)$ depende de cómo sean las raíces del **polinomio característico**

$$p_2(s) = s^2 + a_1 s + a_0;$$

Tendremos tres posibilidades

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

2.2. 1 Polinomio característico con raíces reales simples

Si $$p_2(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)$$

con α_1 y α_2 reales y diferentes. Tenemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{(s + a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{C_1}{s - \alpha_1} + \frac{C_2}{s - \alpha_2}$$

Anti-transformando obtenemos la solución general de **la EDO homogénea asociada**

$$x_h(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

Las **soluciones fundamentales** de la EDO homogénea son

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\alpha_2 t}$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

2.2. 2 Polinomio característico con una raíz real doble

Si $$p_2(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s-\alpha)^2$$

con α real con orden de multiplicidad 2. Tenemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+a_1 s+a_0} = \frac{C_1}{s-\alpha} + \frac{C_2}{(s-\alpha)^2}$$

Anti-transformando obtenemos la solución general de **la EDO homogénea asociada**

$$x_h(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}.$$

Las **soluciones fundamentales** de la EDO homogénea son

$$x_1(t) = e^{\alpha t}, \quad x_2(t) = t e^{\alpha t}.$$

2. Cálculo de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes

2.2. 3 Polinomio característico con raíces complejas

Si $$p_2(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s-\alpha)^2 + \beta^2$$

con raíces $\alpha \pm j\beta$, con $\beta \neq 0$. Tenemos la fracción es simple en los reales y hay que manipularla para poder anti-transformar

$$\begin{aligned} \frac{(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+a_1 s + a_0} &= \frac{(s+a_1)x(0)+\dot{x}(0)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= x(0)\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{a_1 x(0)+\dot{x}(0)+\alpha x(0)}{\beta}\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= C_1\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + C_2\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned}$$

Anti-transformando

$$x_h(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

con **soluciones fundamentales** $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad x_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t.$

3. Estabilidad.
Régimen transitorio y régimen permanente

3.1 Estabilidad de las EDO lineales de primer y segundo orden

Consideremos una EDO lineal de primer orden con coeficientes constantes

$$\dot{x} + ax = b(t)$$

Hemos visto que la **solución general** de la EDO es

$$x(t) = Ce^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

$$x(t) = Ce^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

Vamos a discutir el **comportamiento** de la **solución** cuando $t \to +\infty$

1. Si $b(t) = 0 \;\to\; x(t) = x_h(t) = Ce^{-at}$

   Si $a > 0 \;\; \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$

   Si $a < 0 \;\; \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \pm\infty$

   Caso especial

   Si $a = 0 \;\; \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = C$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

$$x(t) = Ce^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

El **comportamiento** de la **solución** cuando $t \to +\infty$ es más complicado

2. Si $b(t) \neq 0$

Independientemente del valor de a el comportamiento cuando $t \to +\infty$ es más complicado

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \\ \text{No } \exists, \text{ puede, por ejemplo, oscilar} \end{cases}$$

en función de $b(t)$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Diremos que la EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ es

Estable si $a > 0$ → $\lim_{t \to +\infty} x_h(t) = 0$

Inestable si $a < 0$ → $\lim_{t \to +\infty} x_h(t) = \pm\infty$

Marginalmente estable cuando $a = 0$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Notar que para EDO lineales de primer orden con coeficientes constantes

$$\dot{x} + ax = b(t)$$

tiene asociada un **polinomio característico** $p_1(s) = s + a$ con raíz $s = -a$.

Si $a > 0$, cuando la EDO es estable, la raíz del polinomio característico es negativa.

Podemos re-escribir la condición de estabilidad como

La EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ es **estable** si y solo si la raíz del polinomio característico $p_1(s) = s + a$ es negativa

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Una **característica de la solución** que si se puede discutir en general y es de utilidad en las aplicaciones es si **permanecerá acotada**, es decir, si **la solución puede crecer o no en magnitud indefinidamente**

Definición Se dice que una función $x(t)$ es **acotada** para $t \geq 0$ si existe una $M > 0$ constante tal que $|x(t)| < M$ para todo $t \geq 0$

El resultado fundamental

Si la EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ es **estable**, i. e. $a > 0$, y $b(t)$ está **acotada** entonces $x(t)$ está **acotada**

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Interpretación del resultado

Si la EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ es estable, i. e. $a > 0$, y $b(t)$ está acotada entonces $x(t)$ está acotada

Si pensamos en $b(t)$ como una **señal de entrada** en un sistema físico descrito por la EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ y que $x(t)$ es la **señal de salida**, este resultado se traduce

Para **sistemas estables**,
las **entradas acotadas** producen **salidas acotadas**

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Las EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ **estables** tienen otra propiedad

La **constante** C de la solución

$$x(t) = Ce^{-at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{s+a}\right\}$$

contiene la información sobre la condición inicial

ya que cambiar la condición inicial cambia la C

Si la EDO es **estable**, la influencia del valor de C en la solución $x(t)$ va disminuyendo cuando t se hace grande, debido a que aparece multiplicada por la exponencial decreciente e^{-at}. De esta manera, para t grande las soluciones correspondientes a diferentes condiciones iniciales se parecen cada vez más, y se aproximan a la solución particular de la EDO completa $x_p(t)$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

En las aplicaciones a la ingeniería y la física se entiende por

Régimen transitorio es el **tiempo que pasa hasta que es despreciable el efecto de las condiciones iniciales**

Régimen permanente es el tiempo que va después, que viene descrito por la solución particular $x_p(t)$, que a efectos prácticos, sólo depende de la entrada $b(t)$ y no de las condiciones iniciales,

Notar:

1. Esto sólo tiene sentido para **sistemas estables**
2. El efecto de las condiciones iniciales no llega a desaparecer nunca,

por lo que hay que <u>establecer un criterio que nos indique qué quiere decir que</u> Ce^{-at} <u>sea despreciable</u>

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

¿Qué quiere decir que Ce^{-at} sea despreciable?

Definimos el **tiempo característico** o **constante de tiempo** del sistema físico descrito por la EDO $\dot{x} + ax = b(t)$ cuando $a > 0$, es decir, cuando la EDO es **estable**, como $\tau = 1/a$

Si calculamos la contribución de $x_h(t) = Ce^{-at}$ cuando $t = \tau$ nos queda

$$x_h(\tau) = Ce^{-a\tau} = Ce^{-1} \approx 0.37C$$

por tanto la contribución de la parte homogénea es poco más de un tercio de la que tenía para $t = 0$

A efectos prácticos, **después de tres constantes de tiempo** $(t = 3\tau)$ **la contribución es despreciable** (menos del 5% de la inicial)

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Ejemplo Consideremos un condensador de capacidad C que se descarga a través de una resistencia R (circuito RC)

La EDO para la carga $q(t)$ del condensador es $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = 0$

Esto es una EDO homogénea de solución general $q(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$

Si imponemos la condición inicial $q(0) = q_0$ queda $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

Como que R y C son constantes positivas, $a = \frac{1}{RC} > 0$ y la EDO es **estable**

La **constante de tiempo** del sistema es $\tau = \frac{1}{a} = RC$

Pasados $t = 3\tau = 3RC$ unidades de tiempo, tenemos que $q(t) \approx 0.05 q_0$ y la carga del condensador es muy próxima a cero, que en este caso es el **régimen permanente** (el condensador se descarga totalmente)

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente

Ejemplo Consideremos un condensador de capacidad C que se descarga a través de una resistencia R (circuito RC)

Si en el circuito RC añadimos una fuente de voltaje en serie, de valor $v(t)$ la EDO se convierte

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{1}{R}v(t)$$

La escala de tiempo marcada por $\tau = RC$ es el **tiempo que ha de pasar** para que $q(t)$ se olvide del valor inicial q_0 y dependa sólo de $v(t)$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Veamos como la **constante de tiempo** RC tiene efectivamente **dimensiones de tiempo**

La capacidad C se mide en faradios (F), que en términos de las unidades fundamentales del **SI** es

$$F = m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$$

mientras que R se mide en ohm (Ω), con unidades

$$\Omega = m^2kgs^{-3}A^{-2}$$

y por tanto

$$[RC] = s$$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Consideremos la **EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes**

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$$

La **solución general** es de la forma

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + x_p(t)$$

donde la forma de las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ depende de las **raíces** del **polinomio característico** $p_2(s) = s^2 + a_1 s + a_0$

Raíces de $p_2(s)$	**Soluciones independientes**
α_1, α_2 reales diferentes	$x_1(t) = e^{\alpha_1 t},\ x_2(t) = e^{\alpha_2 t}$
α real doble	$x_1(t) = e^{\alpha t},\ x_2(t) = te^{\alpha t}$
$\alpha + \beta j,\ \alpha - \beta j$	$x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente

En cualquier caso, **el que determina si la solución general de la EDO**

$$x_h(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

homogénea asociada tiende a cero cuando $t \to +\infty$ (o lo que es lo mismo, si el **sistema físico** descrito por la EDO es **estable**) es **el signo de las partes reales** de las raíces del polinomio característico, que es el que aparece en las exponenciales.

Raíces de $p_2(s)$	**Soluciones independientes**
α_1, α_2 reales diferentes	$x_1(t) = e^{\alpha_1 t},\ x_2(t) = e^{\alpha_2 t}$
α real doble	$x_1(t) = e^{\alpha t},\ x_2(t) = te^{\alpha t}$
$\alpha + \beta j,\ \alpha - \beta j$	$x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente

Diremos que la EDO $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$ es

estable si **todas las raíces** del **polinomio característico** tienen **parte real negativa →**

$$\lim_{t\to+\infty} x_h(t) = 0$$

inestable si **alguna raíz** del **polinomio característico** tiene **parte real positiva →**

$$\lim_{t\to+\infty} x_h(t) = \pm\infty$$

marginalmente estable cuando **las dos raíces** del **polinomio característico** tienen **parte real cero** o **una es cero y la otra es negativa**

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Al igual que para el caso de orden 1 se tiene

Si la EDO $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$ es **estable**, i. e. **todas las raíces** del polinomio característico **tienen parte real negativa**, y $b(t)$ **está acotada** → la solución $x(t)$ de la ecuación completa **está acotada**

Para **EDO de segundo orden estables el efecto de las condiciones iniciales** también **se desvanece en el tiempo.**

Con tal **de cuantificar la escala de tiempo en que pasa esto consideraremos sólo el caso de raíces complejas conjugadas** (sólo veremos este caso por simplicidad, ya que en los otros casos la fórmula se complica por lo que no los vamos a contemplar en este curso)

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

El discriminante del **polinomio característico** es $a_1^2 - 4a_0$

Si las raíces han de ser complejas, es necesario (pero no suficiente) que

$$a_0 > 0$$

y por tanto, podemos definir la **frecuencia natural** ω_n de la EDO como

$$\omega_n^2 = a_0$$

y el **coeficiente de amortiguamiento** ξ como el parámetro que verifica

$$2\xi\omega_n = a_1$$

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente

Expresando en término de estos parámetros **la EDO homogénea asociada** será

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

y **las raíces del polinomio característico** serán

$$\frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

La condición que faltaba para asegurar que **las raíces sean complejas** es $-1 < \xi < 1$. Suponiendo esto, las raíces son

$$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Si, además, el sistema **ha de ser estable**, **la parte real**, $-\xi\omega_n$, **ha de ser negativa**, y por tanto $\xi > 0$. Reuniendo las dos condiciones sobre ξ , vemos que si **la EDO** $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$ ha de ser **estable** y con **raíces complejas** → el **coeficiente de amortiguamiento** debe verificar

$$0 < \xi < 1$$

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente

La solución de la EDO homogénea asociada, en términos de ω_n y ξ es

$$x_h(t) = C_1 e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + C_2 e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$$

Como los factores sinusoidales no decrecen en magnitud al aumentar t, son **las exponenciales decrecientes** las que hacen que el sistema se olvide de las condiciones iniciales

Definimos el **tiempo característico** o **constante de tiempo** del sistema físico descrito por la EDO $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t)$ cuando la EDO es **estable**, como

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

Es el tiempo necesario para que la contribución de la $x_h(t)$ disminuya en un factor de e^{-1} respecto a la contribución inicial

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Ejemplo Consideremos la EDO de un circuito *RCL* con fuente de voltaje

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v(t) \;\rightarrow\; \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}v(t)$$

$$\omega_n^2 = a_0 = \frac{1}{LC} \;\rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$2\xi\omega_n = a_1 = \frac{R}{L} \;\rightarrow\; \xi = \frac{\sqrt{LC}}{2}\frac{R}{L} = \frac{RC}{2\sqrt{LC}}$$

Notar $[RC] = s,\ [LC] = s^2,\ \rightarrow\ \xi$ sin dimensiones

La constante de tiempo es $\tau = 2\dfrac{L}{R}$

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente

Unificando los resultados de EDO lineales de orden 1 y 2 se tiene

Dada una EDO lineal de orden 1 o 2 con coeficientes constantes, diremos que es **estable** **si todas las raíces de su polinomio característico tienen parte real negativa**.

En este caso, en **una escala de tiempos** que depende de **la constante de tiempo** del sistema, y que es más grande cuanto más pequeñas en valor absoluto sean las partes reales de las raíces, **la solución** abandona **el régimen transitorio** y entra en **el régimen permanente**, para el que

$$x(t) \approx x_p(t)$$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

3.2 Estabilidad de sistemas de EDO lineales

Recordemos que la solución en el dominio transformado del sistema lineal de EDO

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

es

$$X(s) = (s\mathbb{I}_n - A)^{-1} x(0) + (s\mathbb{I}_n - A)^{-1} B(s)$$

donde la matriz inversa $(s\mathbb{I}_n - A)^{-1}$ contiene en el denominador de todos sus elementos el **polinomio característico**

$$P(s) = \det(s\mathbb{I}_n - A)$$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Para **calcular la anti-transformada**, por lo general, previamente se ha de hacer una **descomposición en fracciones simples** de términos que tienen en el denominador el polinomio característico $P(s)$. Examinando la tabla

$f(t)$	$F(s)$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$t^n e^{\alpha t}, n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$

Cada factor con una raíz con parte real α dará lugar a una **fracción simple** cuya **anti-transformada** vendrá dada por una exponencial $e^{\alpha t}$ acompañada o no de potencias de t o de senos o cosenos

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Por tanto, si queremos **estudiar la estabilidad** del sistema de EDO

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

es decir, si queremos ver bajo qué condiciones el efecto de las condiciones iniciales se desvanece en el tiempo, habrá que examinar las raíces del $P(s)$.

Llegaremos al siguiente resultado que generaliza los resultados que habíamos visto para EDO lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes

El sistema de EDO $\dot{x} = Ax + b(t)$ es **estable** si y sólo si todas las raíces del polinomio característico $P(s) = \det(s\mathbb{I}_n - A)$ tienen parte real negativa

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Las raíces del polinomio característico son solución de la ecuación

$$\det(s\mathbb{I}_n - A) = 0$$

Esta ecuación es la misma que la que determina los valores propios de la matriz A (cambiando λ por s). Por tanto podemos reformular la estabilidad de la siguiente manera

El sistema de EDO $\dot{x} = Ax + b(t)$ es **estable** si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Ejemplo

Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 16 \\ 4 & -3 & -8 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz A son las raíces del polinomio característico

$$P(s) = \begin{vmatrix} s+11 & 0 & -16 \\ -4 & s+3 & 8 \\ 1 & -3 & s+7 \end{vmatrix} = s^3 + 21s^2 + 171s + 351.$$

Podemos comprobar que $s = -3, -9 \pm 6j$ → Todas las raíces tienen parte real negativa, por lo que el sistema es estable

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

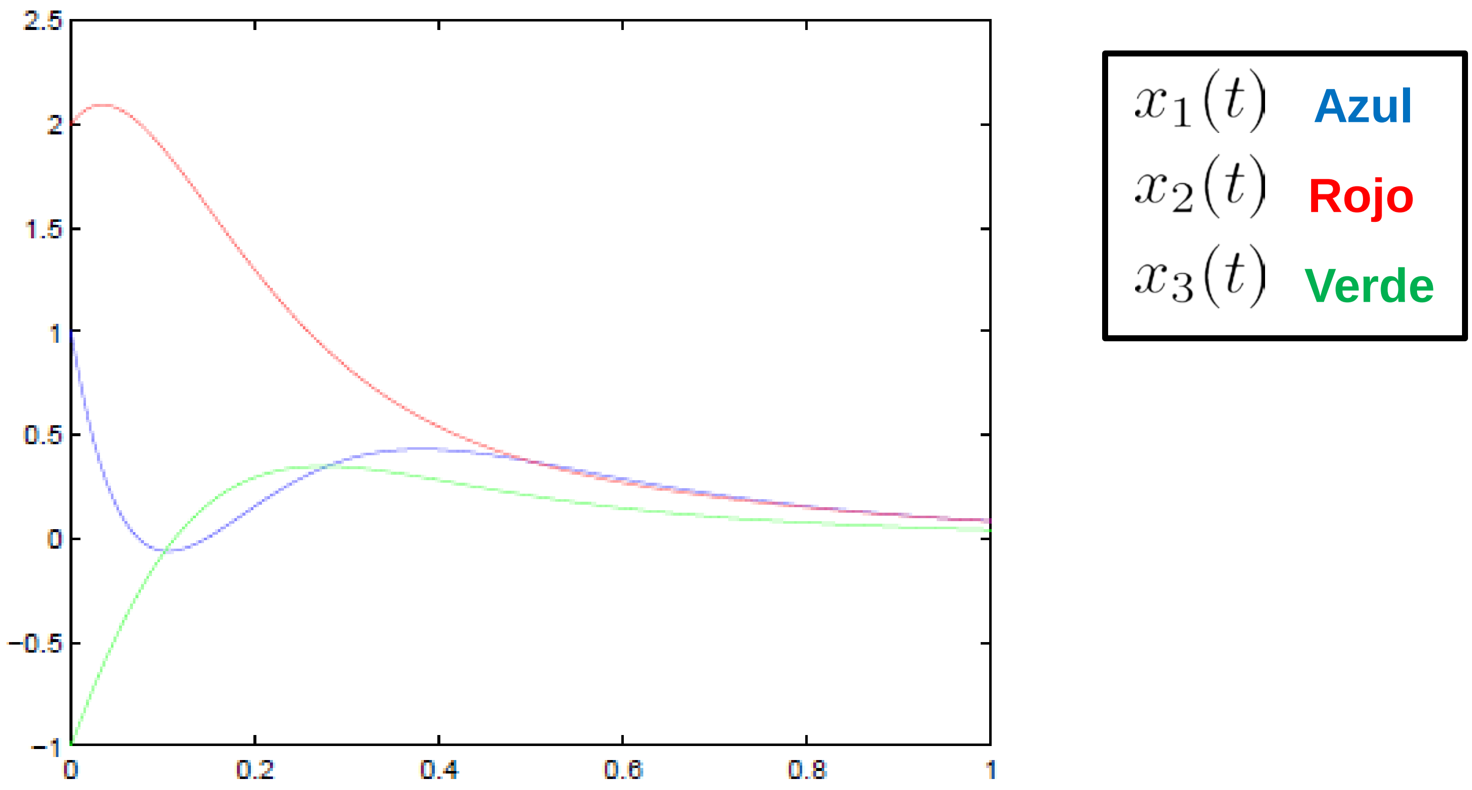
En sistemas de EDO lineales se tiene:

El **tiempo característico** τ es el **inverso del valor absoluto de la parte real menos negativa** → El efecto de las condiciones iniciales desaparecerá después de 3τ unidades de tiempo.

En nuestro caso $s = -3, -9 \pm 6j \quad \rightarrow \quad \tau = 1/3 \approx 0.33$

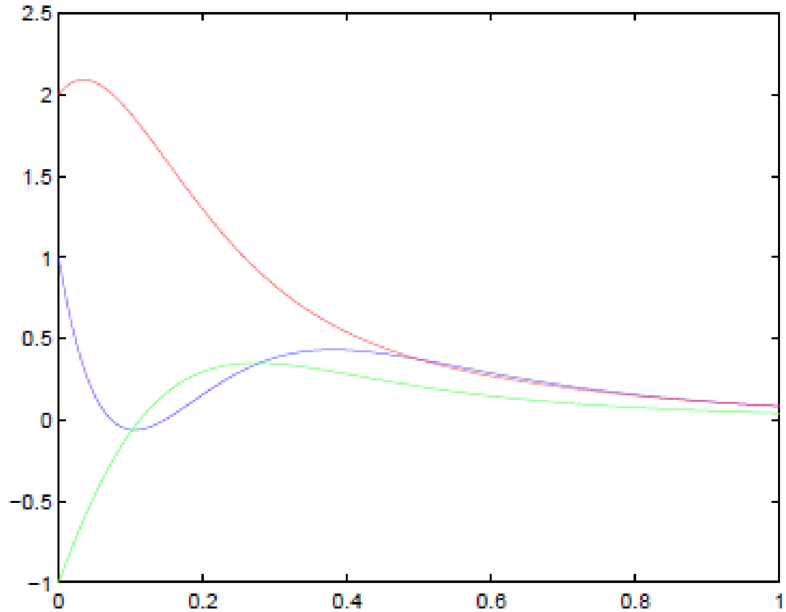
Además, si las funciones $b_1(t), b_2(t)$ y $b_3(t)$ son acotadas, también lo serán las soluciones $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$

3. Estabilidad. Regímenes transitorio y permanente



En la gráfica tenemos representadas las soluciones del sistema para $b(t) = 0$ y con condicions inicials $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, y $x_3(0) = -1$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente



$x_1(t)$	**Azul**
$x_2(t)$	**Rojo**
$x_3(t)$	**Verde**

$$s = -3, -9 \pm 6j$$

El **tiempo característico** es $\tau = 1/3 \approx 0.33$

Observar como después de $3\tau = 1$ unidades de tiempo el efecto de las condiciones iniciales es despreciable (estaríamos en **régimen permanente**)

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

La condición

El sistema de EDO $\dot{x} = Ax + b(t)$ es **estable** si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa

es general, e incluye las condiciones que habíamos visto para EDO de orden 1 y orden 2 (con solución oscilante de la ecuación homogénea)

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Para EDO de orden 1

$$\dot{x} + ax = b(t)$$

tenemos que A es la matriz 1x1 dada por $A = -a$ y su único valor propio es la solución de

$$s \cdot 1 - A = s + a = 0$$

donde $s = -a$ y la EDO es estable si y sólo si $-a < 0$, es decir, $a > 0$ como ya habíamos establecido

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

Para EDO oscilante de orden 2

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = b(t), \quad \omega_n > 0,\ -1 < \xi < 1$$

tenemos poniendo $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + b(t) \end{aligned}$$

por tanto la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix}$$

3. Estabilidad.
Regímenes transitorio y permanente

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + b(t)\end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix}$$

Con polinomio característico

$$|sI_2 - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \omega_n^2 & s + 2\xi\omega_n \end{vmatrix} = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

que tiene raíces complejas (debido a que $-1 < \xi < 1$)

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

La condición de parte real negativa, y por tanto de estabilidad, es que $\xi > 0$, tal y como habíamos visto.

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

En esta sección vamos a utilizar **técnicas de números complejos** para calcular la solución de EDO lineales con coeficientes constantes, en el **caso estable** y cuando **la entrada** es **una función sinusoidal**

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

Consideraremos el **caso de orden 1**

$$\dot{v} + av = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

donde suponemos que **a>0**, de manera que **el sistema es estable,** por lo tanto tiene un **regimen permanente** que queremos calcular utilizando **números complejos**.

En lugar de utilizar la ecuación anterior donde todas las cantidades son reales, consideramos la EDO

$$\dot{\mathbf{V}} + a\mathbf{V} = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

Donde $\mathbf{V}(t)$ es una función compleja de t, y hemos cambiado

$\sin(\omega t + \varphi_0)$ por $e^{j(\omega t + \varphi_0)}$

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

La solución $v(t)$ se obtendrá tomando la parte imaginaria de $\mathbf{V}(t)$,

$$v(t) = \mathrm{Im}\mathbf{V}(t)$$

dado que el $\sin(\omega t + \varphi_0)$ es la parte imaginaria de $e^{j(\omega t + \varphi_0)}$

$$A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + jA_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

Para calcular la solución particular de $\dot{\mathbf{V}} + a\mathbf{V} = A_0 e^{j(\omega t+\varphi_0)}$ que proporciona el régimen permanente, buscaremos una $\mathbf{V}_p(t)$ de la forma

$$\mathbf{V}_p(t) = \mathbf{A}e^{j\omega t};$$

donde $\mathbf{A}$ es un número complejo que se ha de calcular.

Este tipo de función, un número multiplicado por $e^{j\omega t}$, se llama **fasor** .
La ventaja sobre la formulación en términos de senos y cosenos es que la derivada de un fasor siempre es un fasor con la misma frecuencia, a diferencia de las derivadas de senos y cosenos. Tendremos

$$\dot{\mathbf{V}}_p(t) = \mathbf{A}j\omega e^{j\omega t}$$

y sustituyendo en la EDO $\dot{\mathbf{V}} + a\mathbf{V} = A_0 e^{j(\omega t+\varphi_0)}$

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} + a\mathbf{V} &= A_0 e^{j(\omega t+\varphi_0)} \\ \mathbf{V}_p(t) &= \mathbf{A} e^{j\omega t} \\ \dot{\mathbf{V}}_p(t) &= \mathbf{A} j\omega e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{A} j\omega e^{j\omega t} + a\mathbf{A} e^{j\omega t} = A_0 e^{j(\omega t+\varphi_0)}$$

Simplificando $(j\omega + a)\mathbf{A} = A_0 e^{j\varphi_0}$

Y aislando

$$\mathbf{A} = \frac{A_0}{a + j\omega} e^{j\varphi_0}$$

Por tanto el fasor que da el régimen permanente es

$$\mathbf{V}_p(t) = \frac{A_0}{a + j\omega} e^{j(\omega t+\varphi_0)}$$

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

$$\mathbf{V}_p(t) = \frac{A_0}{a + j\omega} e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

El número complejo que aparece en el denominador se puede expresar

$$\mathbf{Z} = \sqrt{a^2 + \omega^2}\, e^{j\phi}, \quad \phi = \arctan\frac{\omega}{a}$$

Poniéndolo de forma exponencial y juntando las exponenciales

$$\mathbf{V}_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j(\omega t + \varphi_0 - \phi)}$$

La solución a nuestra EDO inicial será la parte imaginaria

$$v_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0 - \phi)$$

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

Consideraremos ahora el **caso de orden 2**

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 2\cos(3t)$$

Las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, luego **el sistema es estable,** por lo tanto tiene un **regimen permanente** que queremos calcular utilizando **números complejos**.

En lugar de utilizar la ecuación anterior donde todas las cantidades son reales, consideramos la EDO

$$\ddot{X} + 2\dot{X} + 2X = 2e^{j3t}$$

Donde $X(t)$ es una función compleja de t, y hemos cambiado

$\cos(3t)$ por e^{j3t}

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

La solución $x_p(t)$ se obtendrá tomando la parte real de $X(t)$

$$x_p(t) = ReX(t)$$

dado que el $\cos 3t$ es la parte real de e^{j3t}

$$e^{j3t} = \cos(3t) + j\sin(3t)$$

4. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

$$\ddot{X} + 2\dot{X} + 2X = 2e^{j3t}$$

Con tal de calcular la **solución particular** de la EDO completa que proporciona el **régimen permanente**, conjeturamos

$$X_p(t) = Ae^{j3t}$$

donde A es un número complejo a determinar (**método de los coeficientes indeterminados**). Tendremos

$$\dot{X}_p(t) = (j3)Ae^{j3t}, \;\; \ddot{X}_p(t) = (j3)^2Ae^{j3t} = -9Ae^{j3t}$$

sustituyendo en la EDO

$$-9Ae^{j3t} + j6Ae^{j3t} + 2Ae^{j3t} = 2e^{j3t}$$

$$-9A + j6A + 2A = (-9 + j6 + 2)A = 2$$

$$A = \frac{2}{-7 + j6}$$

número complejo
a determinar

4. Fasores. Números complejos y régimen permanente sinusoidal

Con esto tenemos **la solución del problema complejo**

$$X_p(t) = \frac{2}{-7+6j} e^{j3t}$$

Arreglando la expresión anterior

$$X_p(t) = \frac{2(-7-6j)}{(-7+6j)(-7-6j)} e^{j3t}$$
$$= \frac{2(-7-6j)}{85} e^{j3t}$$
$$= \frac{-2}{85}(7+6j)(\cos(3t) + j(\sin(3t))$$

La solución a nuestra EDO inicial será la parte real (**régimen permanente**)

$$x_p(t) = ReX_p(t) = \frac{2}{85}(6\sin(3t) - 7\cos(3t))$$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Desde el punto de vista de la teoría de control, **un sistema** o **proceso** está formado por **un conjunto de elementos relacionados entre sí que ofrecen señales de salida en función de señales** o datos **de entrada**

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Desde el punto de vista de la teoría de control, un sistema o proceso está formado por un conjunto de elementos relacionados entre sí que ofrecen señales de salida en función de señales o datos de entrada

Es importante resaltar el hecho de que **no es necesario conocer el funcionamiento interno**, o cómo funcionan entre sí los diversos elementos, para caracterizar el sistema.

Sólo se precisa conocer la relación que existe entre la entrada y la salida del proceso que realiza el mismo.

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Considerando el caso más sencillo de un **sistema lineal** de una entrada y una salida, la dinámica se puede representar como en la figura

El bloque etiquetado como "**Planta o Proceso**" es el sistema que se desea controlar.

A este sistema le llega una señal etiquetada como "**Entrada de control**" que será la señal que genera el controlador (que se ha de diseñar)

Finalmente la señal de "**salida**" será la señal que se desea que se comporte de una forma determinada (la señal controlada)

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

El **aspecto más importante** de un sistema es **el conocimiento de su dinámica**, es decir, cómo se comporta la señal de salida frente a una variación de la señal de entrada.

Un conocimiento preciso de la relación **entrada/salida** permite predecir la respuesta del sistema y seleccionar la acción de control adecuada para mejorarla.

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Recordemos que un **sistema físico puede caracterizarse dinámicamente** a través de las **ecuaciones diferenciales** que describen las leyes físicas que rigen el comportamiento de dicho sistema

la salida

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - x_1 &= 2u(t) \\ \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 &= u(t) \end{aligned} \qquad y = 3x_1 - x_2$$

la entrada

Este sistema lineal de orden 2 es un ejemplo de **sistema de control**, el vector $b(t)$ contiene una única función $u(t)$, y además hay una función y que es una función lineal de las variables dependientes del sistema y de sus derivadas, como máximo , un orden inferior a la máxima derivada de cada variable que aparece en el sistema

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

En el caso de sistemas lineales, se hace uso de **la transformada de Laplace** para **obtener una representación matemática** que relaciona la señal que se quiere controlar (la señal de salida) y la señal de entrada al sistema. Esta representación matemática se conoce como **función de transferencia** del sistema de control con entrada $u(t)$ y salida y

Cálculo

La función de transferencia de un sistema lineal se obtiene realizando la transformada de Laplace del sistema **con condiciones iniciales nulas**

La función de transferencia expresada como una relación de dos polinomios puede ser expresada en forma general

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ko(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Ejemplo Sea la EDO de orden 2

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = u(t)$$

con la salida

$$y = \dot{x} + x$$

Tomamos la transformada de Laplace de la EDO

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + 2X(s) = U(s)$$

Despejando

$$X(s) = \frac{1}{s^2+s+2}U(s) + \frac{(s+1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+s+1}$$

Esto nos da una relación entre $U(s)$ y $X(s)$. Para obtener una relación entre $U(s)$ y $Y(s)$ tomaremos transformadas en la salida

$$Y(s) = sX(s) - x(0) + X(s) = (s+1)X(s) - x(0)$$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

$$\left.\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s^2+s+2}U(s) + \frac{(s+1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+s+1} \\
Y(s) &= sX(s) - x(0) + X(s) = (s+1)X(s) - x(0)
\end{aligned}\right\}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2}U(s) + (s+1)\frac{(s+1)x(0)+\dot{x}(0)}{s^2+s+1} - x(0)$$

Si hacemos $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$, queda una relación lineal entre $U(s)$ e $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2}U(s) = H(s)U(s)$$

donde

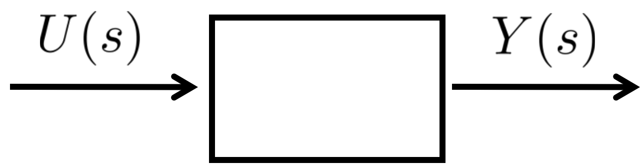
$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2}$$

es la **función de transferencia** de la entrada u a la salida y

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

La función de transferencia contiene toda la dinámica del sistema

Modelo del sistema



$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ con } CI = 0$$

Para **sistemas estables**, la función de transferencia determina el comportamiento en **regimen permanente** de la salida del sistema

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Llamaremos **respuesta impulsiva** $h(t)$ del sistema de control con entrada $u(t)$ y salida y a la anti-transformada de la función de transferencia

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Para el sistema del ejemplo anterior

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+2}\right\} \\ &= e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t \end{aligned}$$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Sabemos que con condiciones iniciales nulas

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Y anti-transformando

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$$

Como ya sabemos, la transformada de Laplace del producto de funciones no es el producto de transformadas

$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq F(s)G(s)$$

Uno podría preguntarse si la anti-transformada del $F(s)G(s)$ está relacionada de alguna manera sencilla con $f(t)$ y $g(t)$. La respuesta es que sí.

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Dada dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, se define su **producto de convolución** como una nueva función

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

para todos los valores de t para los que exista la integral.

En algunos casos escribiremos $f(t) \star g(t)$ en lugar de $(f \star g)(t)$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Ejemplos

$f(t) = t, g(t) = t$

$$t \star t = \int_0^t (t-\tau)\tau \, \mathrm{d}\tau = \left(t\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}$$

$f(t) = 1, g(t) = \theta(t-a), a > 0$

$$\begin{aligned} 1 \star \theta(t-a) &= \int_0^t 1 \cdot \theta(\tau - a) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \theta(\tau - a) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \int_a^t d\tau = t - a & \text{si } t > a \end{cases} \\ &= (t-a)\theta(t-a) \end{aligned}$$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

Propiedades

El último ejemplo muestra que la función constante igual a 1 no es el elemento neutro para el producto de convolución.

Es fácil probar que el producto de convolución es conmutativo

$$f(t) \star g(t) = g(t) \star f(t)$$

5. Sistemas de control: función de transferencia, respuesta impulsiva y teorema de convolución

P12 Teorema de convolución

La transformada del producto de convolución es el producto de transformadas

$$\mathcal{L}\{f(t) \star g(t)\} = F(s)G(s)$$

Apliquemos este resultado al caso de sistemas de control.

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Anti-transformando $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$

$$y(t) = h(t) \star u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Con condiciones iniciales nulas, la salida $y(t)$ en el dominio temporal se puede obtener calculando el producto de convolución de la respuesta impulsiva $h(t)$ con la entrada $u(t)$

6. Bibliografía

1. **Simmons, G.F., Krantz, S.G., Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana, 2007.** ISBN 978-0-07-286315-4

2. **Batlle, C., Massana, I., Zaragozá, M., Àlgebra i Equacions diferencials, Edicions UPC, 2000.** ISBN 84-8301-405-X

3. **Batlle, C, Apunts tema 3- Anàlisi de les solucions dels sistemes lineals, Atenea-Campus Digital, 2012**