Ecuaciones Diferenciales
Tema 2. Trasformada de Laplace

Ester Simó Mezquita
Matemática Aplicada IV

Tema 2. Transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace de una función admisible
2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace
3. Otras propiedades de la transformada de Laplace
4. Tabla de transformadas de Laplace. Transformada inversa
5. Solución general de una EDO lineal
6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes
7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside
8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

1. Transformada de Laplace de una función admisible

El concepto de **transformada** encierra la idea de **convertir una función** dada $f(t)$ **en otra función** $F(s)$

Ya estamos familiarizados con diversas transformadas

1. La **derivada** D asigna a una función diferenciable f [definida en algún intervalo (a,b)] una nueva función

$$Df = f'$$

2. La **integral** I asigna a una función continua f (definida en un intervalo $[a,b]$) una nueva función

$$If(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Consideremos una función $f(t)$ definida para $t > 0$

La **transformada de Laplace** **(unilateral)** de $f(t)$ es la función $F(s)$ definida por la integral impropia

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \;\; s > s_0$$

La **función original** $f(t)$ es una **transformada inversa** de $F(s)$ y se denota por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$

Notemos que la transformada de Laplace toma una función de t y devuelve una función de s , y como que la variable t acostumbra a ser el tiempo se denomina así a los dominios de definición de esas funciones:

$f(t)$ **dominio temporal**

$F(s)$ **dominio frecuencial** o **transformado**

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Recordemos que las **integrales impropias** sobre regiones no acotadas como $(0,+\infty)$ se definen mediante un límite

$$F(s) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)dt$$

Ejemplo: $f(t) = t$, suponiendo $s \neq 0$

$$F(s) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A te^{-st}dt = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}te^{-ts} - \frac{1}{s^2}e^{-ts}\right) \Big]_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}Ae^{-As} - \frac{1}{s^2}e^{-As} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}, \text{ si } s > 0$$

$$\lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{s^2}e^{-As}(As+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0, \\ +\infty & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

1. Transformada de Laplace de una función admisible

$$F(s) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

Ejemplo: $f(t) = t$, suponiendo $s = 0$

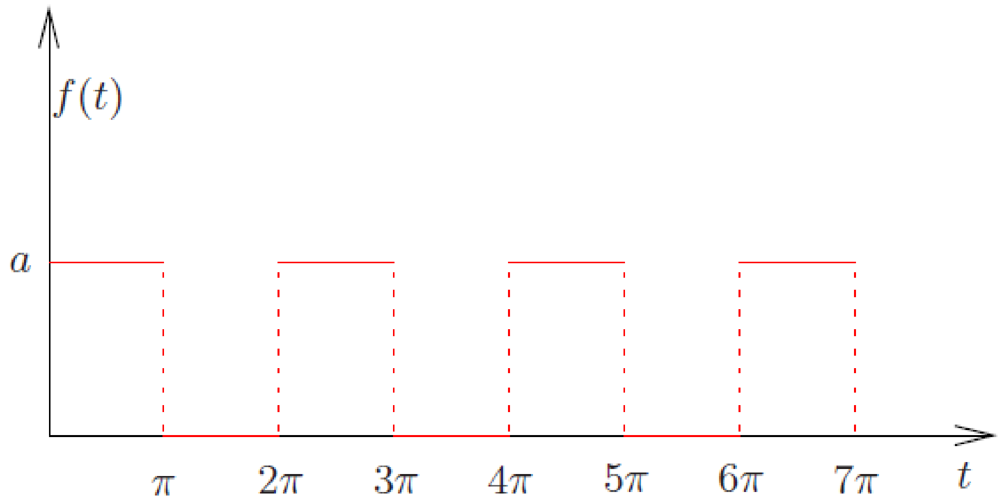
$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A t e^{-0t} dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A t dt = \lim_{A \to +\infty} \frac{A^2}{2} = +\infty$$

Por tanto,

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}, \; s > 0$$

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Diremos que una **función** es **continua a trozos** en $[0,+\infty)$ si es continua en $[0,+\infty)$ o si, en cualquier intervalo acotado, tiene como máximo un **número finito de discontinuidades de salto**



Ejemplo: Una **señal de pulso cuadrado**. En cualquier intervalo acotado tiene un número finito de discontinuidades de salto, aunque en $[0,+\infty)$ tiene infinitas

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Diremos que una **función** $f(t)$ es de **orden exponencial** α si existen constantes $M > 0$ y $T > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \text{ si } t > T$$

En otras palabras, una función es de orden exponencial **si, a partir de cierto momento, su tamaño es menor que el de alguna exponencial**

$f(t) = e^{3t}$ **es de orden exponencial** α para cualquier $\alpha > 3$, ya que la gráfica de $e^{\alpha t}$ con $\alpha > 3$ está por encima de la de e^{3t} para t>0

$f(t) = e^{t^2}$ **no es de orden exponencial**, ya que no hay ningún valor de α ni de $M > 0$ tales que $Me^{\alpha t}$ esté por encima de e^{t^2} para t grande

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Resultado que **garantiza la existencia de la transformada de Laplace**

Si $f(t)$ es de **orden exponencial** α y **continua a trozos** en $[0, +\infty)$, entonces **existe** $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ para todo $s > \alpha$

A las funciones que verifican estas dos condiciones (orden exponencial y continua a trozos) las llamaremos **funciones admisibles**

Continua a trozos: garantiza la existencia de la integral sobre cada intervalo

Orden exponencial: garantiza que al multiplicar por e^{-st} con s bastante grande, el producto resultante decaiga deprisa para que exista la integral impropia

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Ejemplos de funciones no admisibles

$f(t) = e^{t^2}$ **no es de orden exponencial** y se puede demostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt$$

no existe para ningún valor de s

$f(t) = 1/t$ es de orden exponencial pero tiene una **discontinuidad asintótica** en $t = 0$. Se puede demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-st} dt$$

no existe para ningún valor de s

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Sin embargo, la función $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

sí que tiene transformada de Laplace, a pesar de no cumplir las condiciones de admisibilidad (Presenta una **discontinuidad asintótica** en $t = 0$)

Con esto demostramos que la condición de admisibilidad **es suficiente pero no necesaria**

En este curso sólo consideraremos funciones admisibles

1. Transformada de Laplace de una función admisible

Ahora calculemos algunas transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \; s > 0$
$t^n, n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \; s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \; s > \alpha$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}, \; s > 0$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \; s > 0$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} \, \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-(s-\alpha)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^A = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{s-\alpha} \left(e^{-(s-\alpha)A} - 1 \right) \right).
\end{aligned}
$$

El límite existe sólo cuando $s - \alpha > 0$, que es cuando la exponencial tiende a 0

1. Transformada de Laplace de una función admisible

En realidad no llevaremos a cabo estas integraciones. El método habitual para calcular $f(t)$ a partir de $F(s)$ (o viceversa) es **consultar una tabla de parejas** $(f(t), F(s))$ y utilizar las propiedades que iremos desarrollando

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

A continuación vamos a presentar algunas **propiedades** de la **transformada de Laplace** que nos permitirán

1. calcular nuevas **transformadas** y **antitransformadas** a partir de otras conocidas,
2. convertir la **resolución** de **EDO lineales** de coeficientes constantes en un **problema algebraico**

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

P0 Límite cuando $s \to +\infty$

Si $f(t)$ es una función admisible con transformada $F(s)$ entonces

$$\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$$

Demostración: Por el teorema del valor absoluto de la integral

$$|F(s)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-st} \mathrm{d}t$$

Como $f(t)$ es admisible, $\exists\ \alpha$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} M e^{\alpha t} e^{-st} \mathrm{d}t = M \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} \mathrm{d}t = \frac{-M}{s-\alpha}\, e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty}$$

$$= \frac{M}{s-\alpha} \left(1 - \lim_{A \to +\infty} e^{-(s-\alpha)A} \right)$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

P0 Límite cuando $s \to +\infty$

Si $f(t)$ es una función admisible con transformada $F(s)$ entonces

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$$

Demostración:

$$|F(s)| \;\leq\; \int_0^{+\infty} M e^{\alpha t} e^{-st}\mathrm{d}t = M\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t = \frac{-M}{s-\alpha}\, e^{-(s-\alpha)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}$$

$$= \frac{M}{s-\alpha}\left(1 - \lim_{A\to+\infty} e^{-(s-\alpha)A}\right)$$

$$= \frac{M}{s-\alpha}$$

$F(s)$ está sólo definida para $s > \alpha$

$$\lim_{s\to+\infty} |F(s)| \leq \lim_{s\to+\infty} \frac{M}{s-\alpha} = 0$$

$$|F(s)| \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq \lim_{s\to+\infty} |F(s)| \leq 0$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

P1 Linealidad

Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones con transformadas $F(s)$ y $G(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = aF(s) + bG(s)$$

con a y b constantes arbitrarias

Demostración: El resultado se basa en la linealidad de la integral

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af + bg\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(af(t) + bg(t))dt \\ &= a\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt + b\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt \\ &= a\mathcal{L}\{f\}(s) + b\mathcal{L}\{g\}(s) = aF(s) + bG(s)\end{aligned}$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Ejemplo: Calculemos la transformada de Laplace de

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

Aplicando P1 linealidad

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
$t^n, n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha},\ s > \alpha$

El resultado es válido si $s > |a|$
(la intersección entre $s > a$ y $s > -a$)

$\text{con } \alpha = a \text{ y con } \alpha = -a$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

P2 Derivada

Si $f(t)$ y su derivada $f'(t)$ son funciones admisibles, entonces la transformada de Laplace de $f'(t)$ es

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Demostración: Integrando por partes obtendremos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t = f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-se^{-st})\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A\to+\infty} f(A)e^{-sA} - f(0) + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = 0 - f(0) + sF(s)\end{aligned}$$

Por ser $f(t)$ admisible,
el límite tiende a 0

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

P2 Derivada

Si $f(t)$ y su derivada $f'(t)$ son funciones admisibles, entonces la transformada de Laplace de $f'(t)$ es

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Esta fórmula es particularmente simple si las **condiciones iniciales** son **cero** porque se sigue que **la transformada de la derivada se corresponde con la multiplicación de la transformada por s**

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) = sF(s)$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Ejemplo: Calculemos la **transformada de Laplace** de $g(t) = t^2$

Sabemos que la transformada de Laplace de $f(t) = t$ es $\frac{1}{s^2}$, si $s > 0$

$$g'(t) = 2t = 2f(t)$$

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{2f(t)\} = 2\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\frac{1}{s^2}$$ **(Linealidad)**

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\} - 0 = s\mathcal{L}\{t^2\}$$ **(P2)**

$$\frac{2}{s^2} = s\mathcal{L}\{t^2\} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3} \text{ si } s > 0$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Ejemplo: Calculemos la **transformada de Laplace** de $f(t) = \sin \beta t$ a partir de la transformada de Laplace de $g(t) = \cos \beta t$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin \beta t\} &= -\frac{1}{\beta}\mathcal{L}\{(\cos \beta t)'\} = -\frac{1}{\beta}\left(s\frac{s}{s^2+\beta^2} - \cos 0\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{s^2}{s^2+\beta^2}\right) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}.
\end{aligned}$$

$f(t)$	$F(s)$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2},\ s>0$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2},\ s>0$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

P3 Derivada segunda

Si $f(t)$ y sus derivadas $f'(t), f''(t)$ son funciones admisibles, entonces la transformada de Laplace de $f''(t)$ es

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Demostración: Aplicando dos veces la propiedad P2 Derivada

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''\}(s) &= s\mathcal{L}\{f'\}(s) - f'(0) = \\ &= s(s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Ejemplo: Vamos a calcular la **transformada de Laplace** de $f(t) = \cos\beta t$

$$(\cos\beta t)'' = -\beta^2\cos\beta t$$ → Aplicando **P1**

$$\mathcal{L}\{(\cos\beta t)''\} = \mathcal{L}\{-\beta^2\cos\beta t\} = -\beta^2\mathcal{L}\{\cos\beta t\}$$

Por la propiedad P3 Derivada segunda

$$\mathcal{L}\{(\cos\beta t)''\} = s^2\mathcal{L}\{\cos\beta t\} - s\cos(0) - (-\sin 0) = s^2\mathcal{L}\{\cos\beta t\} - s$$

Igualando

$$-\beta^2\mathcal{L}\{\cos\beta t\} = s^2\mathcal{L}\{\cos\beta t\} - s$$

$$\mathcal{L}\{\cos\beta t\} = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Las propiedades P2 Derivada y P3 Derivada segunda se pueden generalizar a derivadas de orden arbitrario

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

Estas propiedades nos indican que en el dominio de las transformadas la derivación en t se convierte en multiplicación por s

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P4 Integral

Si $f(t)$ es una función continua, con transformada de Laplace $F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Por tanto, en el dominio de las funciones transformadas, integrar respecto a t quiere decir dividir por s

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P4 Integral

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}}$$

Sabemos

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Por P4

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s-a}\right\} = \int_0^t e^{a\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}e^{a\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P5 Multiplicación por t

Si $f(t)$ es una función con transformada de Laplace $F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$$

Esta propiedad es la recíproca de la P2 Derivación: Salvo el signo, derivar en el dominio transformado equivale a multiplicar por t en el dominio temporal.

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P5 Multiplicación por t

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -F'(s)}$$

Sabemos

$$\mathcal{L}\{\sin\beta t\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

Por P5

$$\mathcal{L}\{t\sin\beta t\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right) = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P6 División por t

Si $f(t)$ es una función con transformada de Laplace $F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\nu)\mathrm{d}\nu.$$

Si **derivar** en el **dominio transformado** equivale a **multiplicar por t** en el **dominio temporal** →

Dividir por t en el **dominio temporal** se ha de corresponder con una **integral** en el **dominio transformado**

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P6 División por t

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\nu)\mathrm{d}\nu.}$$

Sabemos $\mathcal{L}\{\sin\beta t\} = \dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\beta t}{t}\right\} \overset{\textbf{P6}}{=} \int_s^{+\infty} \frac{\beta}{\nu^2+\beta^2}\mathrm{d}\nu$$

$$\omega = \tfrac{\nu}{\beta} \rightarrow \overset{(*)}{=} \int_{\frac{s}{\beta}}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+1}\mathrm{d}\omega = \arctan\omega\Big|_{\frac{s}{\beta}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{\beta}$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P7 Translación en el dominio transformado

Si $f(t)$ es de orden exponencial α con transformada de Laplace $F(s)$ →

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \text{para todo} \quad s > \alpha + a$$

Sabemos

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

Aplicando P7

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \left.\frac{n!}{s^{n+1}}\right|_{s \to s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P7 Translación en el dominio transformado

Si $f(t)$ tiene transformada de Laplace $F(s)$ para $s > \alpha$, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \text{para todo} \quad s > \alpha + a$$

Sabemos

$$\mathcal{L}\{\cos\beta t\} = \frac{s}{s^2+\beta^2}\,, \ s > 0$$

Aplicando P7

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos\beta t\} = \left.\frac{s}{s^2+\beta^2}\right|_{s\to s-a} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2}\,, \ s > a$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P8 Cambio de escala

Si $f(t)$ es una función con transformada de Laplace $F(s)$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P9 Funciones periódicas

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo $T > 0$, es decir, $f(t+T) = f(t)$, entonces su transformada, si existe, se puede calcular como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

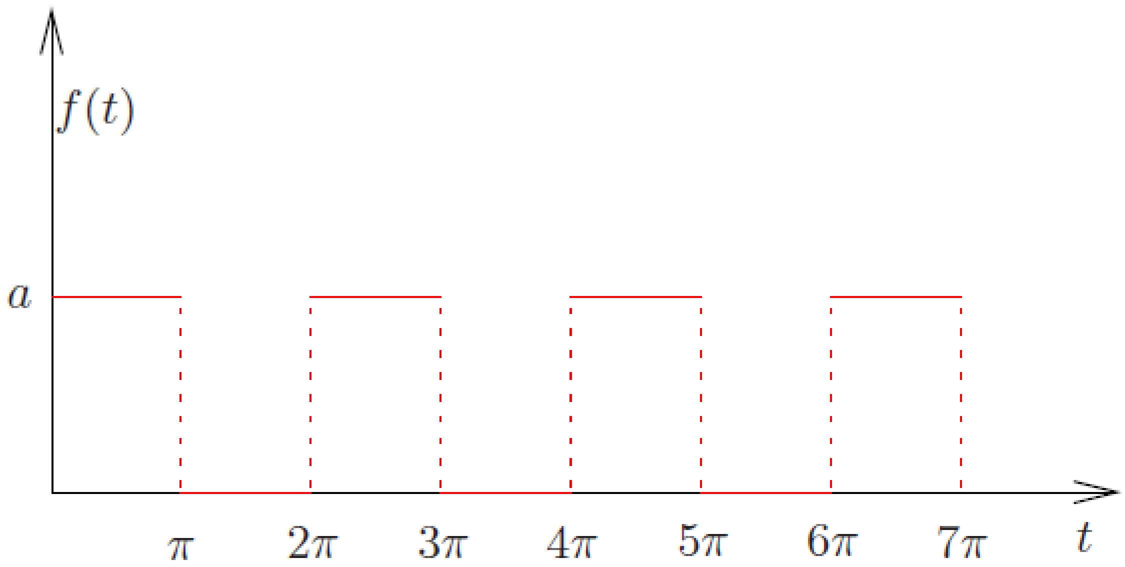
Esta propiedad permite calcular la transformada de Laplace de una función periódica, calculando sólo una integral sobre un periodo, en lugar de la integral de 0 a $+\infty$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P9 Funciones periódicas

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Ejemplo: Función periódica de periodo $T = 2\pi$



3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P9 Funciones periódicas

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t}$$

Ejemplo: Aplicando P9 $\quad T = 2\pi$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} ae^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{1-e^{-2\pi s}}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{a}{1-e^{-2\pi s}}\left(-\frac{1}{s}\left(e^{-\pi s}-1\right)\right) \\
&= \frac{a}{s}\frac{1-e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{a}{s(1+e^{-\pi s})}
\end{aligned}$$

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P10 Teoremas del valor final y del valor inicial

Si $f(t)$ y su derivada $f'(t)$ son funciones admisibles, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s), \quad \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$$

siempre que los límites existan

Estos resultados indican que valores de s pequeños están asociados a valores de t grandes, y al revés

3. Otras propiedades de la transformada de Laplace

P0	Si $f(t)$ és admissible, llavors $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$
P1	$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = aF(s)+bG(s)$
P2	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s)-f(0)$
P3	$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
P4	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
P5	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$
P6	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\nu)\mathrm{d}\nu$
P7	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s)\vert_{s\to s-a} = F(s-a)$
P8	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
P9	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\ f(t+T)=f(t)$
P10	$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$

4. Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$	s
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$s > 0$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$s > 0$
$t \cos \beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$s > 0$
$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$s > 0$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$s > \alpha$
$\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$\sinh at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$t^n e^{\alpha t}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$s > \alpha$
$\theta(t-a), a > 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$

5. Solución general de una EDO lineal

Se llama **ecuación diferencial lineal** de **primer orden** a la que es lineal con respecto a la función incógnita y su derivada. Tiene la forma

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \ \ a_1(t) \neq 0$$

donde $a_1(t), a_0(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en la región que se pida integrar la ecuación diferencial

- Si $b(t) \neq 0$ la ecuación diferencial se llama **lineal no homogénea**

$$\dot{x} + 2t\,x = 2t\,e^{-t^2}$$

- Si $b(t) = 0$ la ecuación diferencial se llama **lineal homogénea**

$$\dot{x} + t^2\,x = 0$$

Variables separables

5. Solución general de una EDO lineal

Dada una **EDO lineal** de **primer orden no homogénea**

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ a_1(t) \neq 0,\ \ b(t) \neq 0$$

siempre podemos obtener la **EDO homogénea asociada**, haciendo $b(t) = 0$

EDO lineal completa

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ a_1(t) \neq 0,\ \ b(t) \neq 0$$

EDO lineal homogénea asociada

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0,\ \ a_1(t) \neq 0$$

Ejemplo

$$\dot{x} + t\,x = t$$

$$\dot{x} + t\,x = 0$$

5. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Linealidad 1. Si $x(t)$ es una solución de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0$ también lo es $\tilde{x}(t) = Cx(t)$, con C una constante cualquiera.

Demostración

$$\begin{aligned} a_1(t)\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + a_0(t)\tilde{x}(t) &= a_1(x)\frac{d}{dt}(Cx(t)) + a_0(t)(Cx(t)) \\ &= a_1(t)C\dot{x}(t) + a_0(t)Cx(t) \\ &= C(a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(y)) \\ &= C \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Notar: La propiedad no es cierta para la EDO lineal completa si $C \neq 1$

$$a_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) + a_0(t)\tilde{x}(t) = C(a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)) = Cb(t) \neq b(t)$$

5. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ b(t) \neq 0$ y $x_h(t)$ es una **solución** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución** de la **EDO lineal completa**

Demostración

$$a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = a_1(t)\frac{d}{dt}(x_h(t) + x_p(t)) + a_0(t)(x_h(t) + x_p(t))$$

$$= (a_1(t)\dot{x}_h(t) + a_0(t)x_h(t)) + (a_1(t)\dot{x}_p(t) + a_0(t)x_p(t))$$

$$= 0 + b(t)$$

$$\uparrow$$

$$a_1(t)\dot{x}_p(t) + a_0(t)x_p(t) = b(t)$$

$$a_1(t)\dot{x}_h(t) + a_0(t)x_h(t) = 0$$

5. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ \ b(t) \neq 0$
y $x_h(t)$ es una **solución** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución** de la **EDO lineal completa**

Consecuencia
Si hacemos que $x_h(t)$ sea la **solución general** de la **homogénea asociada**, entonces $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ será **la solución general** de la **EDO lineal completa**

La **solución general** de la **EDO lineal completa de orden 1** se obtiene añadiendo una **solución particular** de la **EDO completa** a la **solución general** de la **EDO lineal homogénea asociada**

5. Solución general de una EDO lineal

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de $a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \; b(t) \neq 0$ y $x_h(t)$ es una **solución general** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución general de la EDO lineal completa**

5. Solución general de una EDO lineal

Una **EDO lineal de orden 2** es toda relación entre una función incógnita $x(t)$, sus derivadas primera y segunda, $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$ y la variable independiente t que se puede escribir de la forma

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \; a_2(t) \neq 0$$

donde $a_i(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en la región que se pide integrar la ecuación diferencial

$a_i(t)$ son los **coeficientes** de la ecuación
$b(t)$ es el **término independiente**

Si $b(t) = 0$ EDO lineal de orden 2 **homogénea**
Si $b(t) \neq 0$ EDO lineal de orden 2 **no homogénea**

5. Solución general de una EDO lineal

Veamos algunos ejemplos

$$
\begin{array}{ll}
1) & \sin(t)\ddot{x} - t^3\dot{x} - x = 2t\,e^{-t^2} \\
2) & \ddot{x} - \dot{x} + x = t^5 \\
3) & \ddot{x} - \dot{x}x = 0 \\
4) & \ddot{x} - \dot{x} + x = 0
\end{array}
$$

- ¿Cuál es **lineal/no lineal**?
- ¿Cuál es **homogénea/no homogénea** ?
- ¿Cuál tiene los **coeficientes constantes/no constantes** ?

5. Solución general de una EDO lineal

Dada una **EDO lineal** de **segundo orden no homogénea**

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ a_2(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0$$

siempre podemos obtener la **EDO homogénea asociada**, haciendo $b(t) = 0$

EDO lineal completa

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t),\ a_2(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0$$

EDO lineal homogénea asociada

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0,\ a_2(t) \neq 0$$

Ejemplo

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = t$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = 0$$

5. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Linealidad 2. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \;\; a_2(t) \neq 0$$

también lo es $\tilde{x}(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t),$ con A y B dos constantes cualquiera.

Demostración

$$a_2(t)\ddot{x}_1 + a_1(t)\dot{x}_1 + a_0(t)x_1 = 0, \;\rightarrow\; A(a_2(t)\ddot{x}_1 + a_1(t)\dot{x}_1 + a_0(t)x_1) = 0$$

$$a_2(t)\ddot{x}_2 + a_1(t)\dot{x}_2 + a_0(t)x_2 = 0, \;\rightarrow\; B(a_2(t)\ddot{x}_2 + a_1(t)\dot{x}_2 + a_0(t)x_2) = 0$$

→ Sumando ambas expresiones

$$A(a_2(t)\ddot{x}_1 + a_1(t)\dot{x}_1 + a_0(t)x_1) + B(a_2(t)\ddot{x}_2 + a_1(t)\dot{x}_2 + a_0(t)x_2) = 0$$

$$a_2(t)(A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2) + a_1(t)(A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2) + a_0(t)(Ax_1 + Bx_2) = 0$$

$$a_2(t)\ddot{\tilde{x}} + a_1(t)\dot{\tilde{x}} + a_0(t)\tilde{x} = 0$$

5. Solución general de una EDO lineal

Propiedades

Si $x_p(t)$ es una **solución particular** de

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \;\; b(t) \neq 0$$

y $x_h(t)$ es una **solución** de la EDO lineal **homogénea asociada**, entonces la suma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es una **solución** de la **EDO lineal completa**

Consecuencia

Si hacemos que $x_h(t)$ sea la **solución general** de la **homogénea asociada**, entonces $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ será **la solución general** de la **EDO lineal completa**

La **solución general** de la **EDO lineal completa de orden 2** se obtiene añadiendo una **solución particular** de la **EDO completa** a la **solución general** de la **EDO lineal homogénea asociada**

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Resolvamos el siguiente problema de Cauchy aplicando la transformada de Laplace

$$2y' + 3y = \sin t, \quad y(0) = y_0$$

Transformemos los dos miembros de la EDO

$$\mathcal{L}\{2y' + 3y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

Apliquemos **linealidad**

$$2\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

Apliquemos **P2 (Derivada)** y la **transformada del seno**

$$2(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 3\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Despejando

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{2y_0}{2s+3} + \frac{1}{(s^2+1)(2s+3)}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{2y_0}{2s+3} + \frac{1}{(s^2+1)(2s+3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2y_0}{2s+3}\right\} = 2y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s+3}\right\} = y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right\} = y_0 e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(2s+3)} = -\frac{1}{13}\,\frac{2s-3}{s^2+1} + \frac{2}{13}\,\frac{1}{s+\frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{13}\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right\} = \frac{2}{13}e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{13}\frac{2s-3}{s^2+1}\right\} = -\frac{2}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{3}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{2}{13}\cos t + \frac{3}{13}\sin t$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Poniéndolo todo junto se obtiene la solución al problema de Cauchy

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{2}{13} e^{-\frac{3}{2}t}}_{\text{Solución de la EDO homogénea con } C = y_0 + \frac{2}{13}} \underbrace{- \frac{2}{13} \cos t + \frac{3}{13} \sin t}_{\text{Solución particular de la EDO completa}}$$

Solución de la EDO homogénea con

$$C = y_0 + \frac{2}{13}$$

Solución particular de la EDO completa

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Resolvamos el siguiente problema de Cauchy

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3$$

Transformemos los dos miembros de la EDO

$$\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Apliquemos **linealidad**

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Apliquemos **P2 (Derivada)** y **P3(Derivada segunda)**

$$(s^2Y(s) - 2s - 3) + 3(sY(s) - 2) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Agrupando los términos

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 2s + 9 + \frac{1}{s+1}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Aislando
$$Y(s) = \frac{2s+9}{s^2+3s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)}$$

Descompongamos la primera fracción en fracciones simples

$$\frac{2s+9}{s^2+3s+2} = \frac{7}{s+1} - \frac{5}{s+2}$$

Anti-transformando

$$\frac{2s+9}{s^2+3s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 7e^{-t} - 5e^{-2t}$$

Descompongamos la segunda fracción en fracciones simples

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\text{Si } \alpha = -1, \ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = e^{-t}$$

$$\text{Si } \alpha = -2, \ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}\{te^{\alpha t}\} = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

$$\text{Si } \alpha = -1, \ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} = te^{-t}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Sumando todos los resultados se obtiene la solución $y(t)$ al problema de Cauchy

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 7e^{-t} - 5e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

$$= 6e^{-t} - 4e^{-2t} + te^{-t}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Resolvamos el siguiente problema de Cauchy

$$y'' + 4y' + 13y = 2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Transformemos los dos miembros y apliquemos **linealidad**

$$(s^2Y(s) - 1 \cdot s - 0) + 4(sY(s) - 1) + 13Y(s) = \frac{2}{s}$$

Agrupando los términos

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = s + 4 + \frac{2}{s}$$

Despejando

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s(s^2+4s+13)}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

Descompongámoslo en suma de **fracciones simples**

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s(s^2+4s+13)} \\
&= \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{2}{13}\frac{1}{s} + \frac{-\frac{2}{13}s - \frac{8}{13}}{s^2+4s+13} \\
&= \frac{2}{13}\frac{1}{s} + \frac{s+4-\frac{2}{13}s-\frac{8}{13}}{s^2+4s+13} \\
&= \frac{2}{13}\frac{1}{s} + \frac{11}{13}\frac{s+4}{s^2+4s+13}
\end{aligned}
$$

Ahora **anti-transformemos**

$$\frac{2}{13}\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{2}{13}$$

6. Solución de EDO lineales con coeficientes constantes

$$\frac{11}{13}\frac{s+4}{s^2+4s+13} = \frac{11}{13}\frac{s+4}{(s+2)^2+3^2}$$

Recordemos

$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sin\beta t\right\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\cos\beta t\right\} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{11}{13}\frac{s+4}{s^2+4s+13} &= \frac{11}{13}\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{11}{13}\frac{2}{(s+2)^2+3^2}\\ &= \frac{11}{13}\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{22}{39}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\end{aligned}$$

Ahora **anti-transformamos**

$$\frac{11}{13}\frac{s+4}{s^2+4s+13} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{11}{13}e^{-2t}\cos 3t + \frac{22}{39}e^{-2t}\sin 3t$$

Sumando

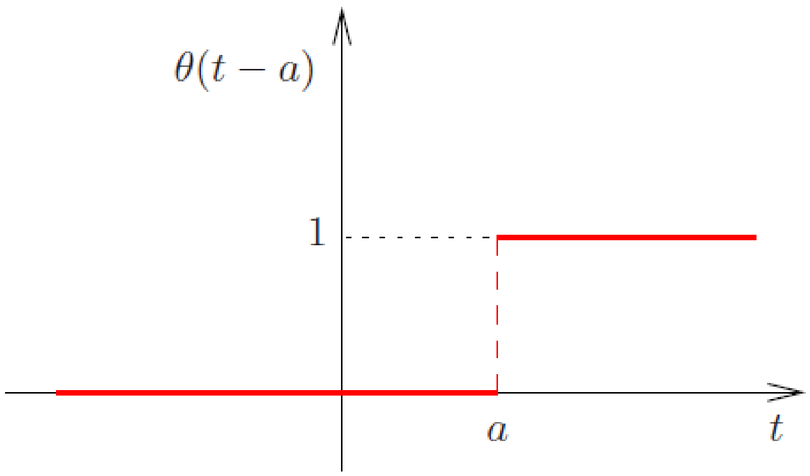
$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{2}{13} + \frac{11}{13}e^{-2t}\cos 3t + \frac{22}{39}e^{-2t}\sin 3t$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

La **función de Heaviside** o **función escalón**

$$\theta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases}$$

- Está definida a trozos,
- sólo toma los valores 0 y 1,
- depende de un parámetro a que indica dónde está el punto de salto,
- en $t = a$, cuando el argumento vale 0, la función no está definida



7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

La **transformada de Laplace** de la **función de Heaviside** para:

1. $a > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} \theta(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=a}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{s}\lim_{A\to+\infty} e^{-sA} \\ &\overset{s>0}{=} \frac{1}{s}e^{-as} \end{aligned}$$

2. $a \leq 0$

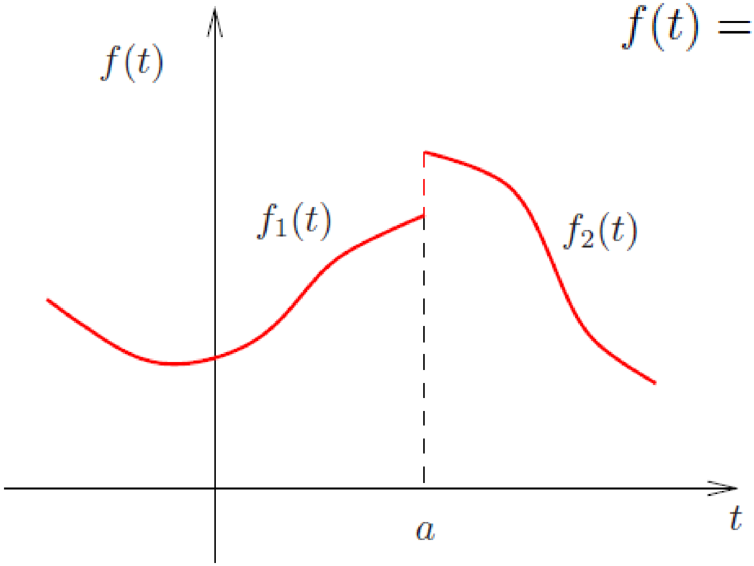
$$\mathcal{L}\{\theta(t-a)\} = \mathcal{L}\{1\} \overset{s>0}{=} \frac{1}{s}$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

Aplicación de la función de Heaviside

La principal aplicación de la función de Heaviside para **el cálculo de transformadas de Laplace** es que permite expresar de manera compacta funciones definidas a trozos que además pueden tener discontinuidades

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t < a, \\ f_2(t) & \text{si } t > a. \end{cases}$$



7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

Aplicación de la función de Heaviside

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t < a, \\ f_2(t) & \text{si } t > a. \end{cases}$$

Se puede expresar de forma compacta

$$f(t) = f_1(t) + \theta(t-a)(f_2(t) - f_1(t))$$

1. Si $t < a$

$$f_1(t) + \theta(t-a)(f_2(t) - f_1(t)) = f_1(t) + 0 \cdot (f_2(t) - f_1(t)) = f_1(t)$$

2. Si $t > a$

$$f_1(t) + \theta(t-a)(f_2(t) - f_1(t)) = f_1(t) + 1 \cdot (f_2(t) - f_1(t)) = f_2(t)$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

La siguiente propiedad permite calcular la transformada de Laplace de una función definida a trozos a partir de las transformadas de las funciones que intervienen en la definición

P11 Translación en el dominio temporal

Si $f(t)$ es una función con transformada de Laplace $F(s)$ y $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = \int_0^{+\infty} f(t-a)\theta(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\overset{\{t-a=\tau\}}{=} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\mathrm{d}\tau = e^{-as}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-as}F(s)$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

Ejemplo

Calculemos la transformada de Laplace de la función $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } t < \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}$

De manera compacta se puede escribir como

$$f(t) = \sin t + \theta(t-\pi)(0 - \sin t) = \sin t - \theta(t-\pi)\sin t$$

Para calcular la transformada del segundo término lo transformaremos

$$\begin{aligned} -\theta(t-\pi)\sin t &= -\theta(t-\pi)\sin(t-\pi+\pi) \\ &= -\theta(t-\pi)\left(\sin(t-\pi)\cos\pi + \sin\pi\cos(t-\pi)\right) \\ &= \theta(t-\pi)\sin(t-\pi) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{\theta(t-\pi)\sin(t-\pi)\}$$

$$\overset{\textbf{P11}}{=} \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

P11
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

Aplicación a la resolución de EDO lineales con coeficientes constantes

Resolvamos $$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } t < \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}$$

Transformando $$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1} + \frac{1}{2}e^{-\pi s}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}e^{-\pi s}\frac{s-1}{s^2+1}$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

Aplicación a la resolución de EDO lineales con coeficientes constantes

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1} + \frac{1}{2}e^{-\pi s}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}e^{-\pi s}\frac{s-1}{s^2+1}$$

Anti-transformando

$$\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

Aplicando **P11**

$$\frac{1}{2}e^{-\pi s}\frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}\theta(t-\pi)e^{-(t-\pi)}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\pi s}\frac{s-1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}\theta(t-\pi)\cos(t-\pi) + \theta(t-\pi)\frac{1}{2}\sin(t-\pi)$$

P11

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

7. Solución de una EDO con entradas discontinuas. La función de Heaviside

Aplicación a la resolución de EDO lineales con coeficientes constantes

Poniendo todas las antitransformadas juntas

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\theta(t-\pi)e^{-(t-\pi)} - \\ -\frac{1}{2}\theta(t-\pi)\cos(t-\pi) + \frac{1}{2}\theta(t-\pi)\sin(t-\pi)$$

Si evaluamos la expresión anterior para $t < \pi$ y $t > \pi$ tenemos

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t & \text{si } t < \pi \\ \frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{\pi}) & \text{si } t > \pi \end{cases}$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

El **método de la transformada de Laplace** se puede aplicar también a sistemas de EDO lineales con coeficientes constantes. Veamos un ejemplo.

Resolvamos el sistema de EDO lineales con coeficientes constantes de orden 3

$$\left.\begin{array}{rcl} \ddot{x} - y - 2\dot{y} & = & 1 \\ \dot{x} + \dot{y} & = & t \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 2$

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación,

$$\left.\begin{array}{rcl} (s^2X(s) - s\cdot 1 - 0) - Y(s) - 2(sY(s) - 2) & = & \dfrac{1}{s} \\ (sX(s) - 1) + (sY(s) - 2) & = & \dfrac{1}{s^2} \end{array}\right\}$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

$$\left.\begin{aligned} s^2X(s)-(2s+1)Y(s) &= \frac{1}{s}+s-4 \\ sX(s)+sY(s) &= \frac{1}{s^2}+3 \end{aligned}\right\}$$

Escribiéndolo en **forma matricial**

$$\begin{pmatrix} s^2 & -2s-1 \\ s & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{s}+s-4 \\ \frac{1}{s^2}+3 \end{pmatrix}$$

El **determinante** del sistema es

$$\begin{vmatrix} s^2 & -2s-1 \\ s & s \end{vmatrix}=s^3+2s^2+s=s(s+1)^2$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

Aplicando **la regla de Cramer** para resolverlo, obtenemos

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} + s - 4 & -2s - 1 \\ \frac{1}{s^2} + 3 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -2s - 1 \\ s & s \end{vmatrix}} = \frac{s^2 + 2s + 4 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}}{s^3 + 2s^2 + s} =$$

$$= \frac{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{s^3(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 & \frac{1}{s} + s - 4 \\ s & \frac{1}{s^2} + 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -2s - 1 \\ s & s \end{vmatrix}} = \frac{2s^2 + 4s}{s^3 + 2s^2 + s} = \frac{2s + 4}{(s+1)^2}$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

Descomponiendo los resultados en **fracciones simples** obtendremos

$$X(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{s^3(s+1)^2} = \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - 2\frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{2s+4}{(s+1)^2} = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

Finalmente, **anti-transformando** obtendremos la solución al sistema de EDO lineales con las condiciones iniciales dadas

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3 - 2te^{-t} - 2e^{-t}$$

$$y(t) = 2e^{-t} + 2te^{-t}$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

Caso especial

Sistema de n EDO de primer orden con las derivadas aisladas

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

En **notación matricial,** $\dot{x} = Ax + b(t)$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

Calculando la transformada de Laplace, transformando componente a componente, pero manteniendo la notación matricial, obtenemos

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + B(s)$$

donde

$$X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \\ \vdots \\ B_n(s) \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $sX(s) = s\mathbb{I}_n X(s)$ donde $\mathbb{I}_n$ es la matriz identidad $n \times n$,

$$s\mathbb{I}_n X(s) - x(0) = AX(s) + B(s),$$

$$(s\mathbb{I}_n - A)X(s) = x(0) + B(s),$$

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

$$(s\mathbb{I}_n - A)X(s) = x(0) + B(s),$$

Aislando $X(s)$

$$X(s) = (s\mathbb{I}_n - A)^{-1}x(0) + (s\mathbb{I}_n - A)^{-1}B(s)$$

La matriz inversa $(s\mathbb{I}_n - A)^{-1}$ contiene en el denominador de todos sus coeficientes el **determinante** de $s\mathbb{I}_n - A$ que es **un polinomio de grado** n **en la variable** s

$$P(s) = \det(s\mathbb{I}_n - A)$$

al que llamaremos **polinomio característico** del sistema de EDO

8. Solución de sistemas de EDO lineales mediante la transformada de Laplace

Para **calcular la anti-transformada**, por lo general, previamente se ha de hacer una **descomposición en fracciones simples** de términos que tienen en el denominador el polinomio característico $P(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$t^n e^{\alpha t},\, n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$

Cada factor con una raíz con parte real α dará lugar a una **fracción simple** cuya **anti-transformada** vendrá dada por una exponencial $e^{\alpha t}$ acompañada o no de potencias de t o de senos o cosenos

9. Bibliografía

1. **Simmons, G.F., Krantz, S.G., Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana, 2007.** ISBN 978-0-07-286315-4

2. **Batlle, C., Massana, I., Zaragozá, M., Àlgebra i Equacions diferencials, Edicions UPC, 2000.** ISBN 84-8301-405-X

3. **Batlle, C, Apunts tema 2 – Transformada de Laplace, Atenea-Campus Digital, 2012**