Ecuaciones Diferenciales
Tema 1. Parte 2: Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales

Ester Simó Mezquita
Matemática Aplicada IV

Tema 1. Parte 2: Métodos numéricos para Ecuaciones Diferenciales

1. Introducción

A estas alturas del curso **un estudiante podría pensar que la mayoría de las ecuaciones diferenciales pueden resolverse explícitamente**, con la solución de una fórmula dada

Aunque es posible demostrar de forma abstracta que casi cualquier EDO posee una solución, por lo menos localmente, **en general resulta muy difícil expresar explícitamente de que solución se trata**

Pero lo primordial es que muchas de las ecuaciones que debemos resolver en ingeniería no poseen soluciones de forma cerrada

Por ejemplo, las ecuaciones que rigen la forma del ala de un avión no pueden resolverse. Y sin embargo, se vuela a diario

1. Introducción

La llegada de los ordenadores de alta velocidad **ha hecho viable** y fácil **llevar a cabo aproximaciones numéricas de las soluciones**

Las soluciones se obtienen con cualquier grado de exactitud, se trazan gráficas y se lleva a cabo cualquier análisis que se desee

Pero **los métodos numéricos jamás deben emplearse de forma aislada**. Siempre que sea posible, el usuario de estos métodos debería utilizar técnicas cualitativas e intentar determinar si la solución está acotada, si es estable, ¿cómo son sus asíntotas en el infinito? ¿cómo se relacionan las diferentes soluciones entre sí?

De esta manera, los ingenieros no utilizan los métodos numéricos a ciegas, sino, más bien, lo hace para brindar argumentos a su entendimiento

1. Introducción

Los métodos numéricos para resolver EDO tienen dos **características** que se han de tener en cuenta:

1. Sólo permiten hallar **soluciones particulares**. Por lo tanto, para poderlos aplicar, hará falta dar un conjunto completo de condiciones iniciales

2. Necesitamos que las EDO o el conjunto de EDO que se les pasa sean todas de **primer orden**

2. El método de Euler

Consideremos un problema de valores iniciales

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Podemos integrar de x_0 a $x_1 = x_0 + h$ para obtener

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx$$

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx$$

Ya que la función desconocida y se presenta en el integrando a la derecha, no podemos proceder , a menos que contemos con un método de **aproximación de la integral.**

El **método de Euler** se obtiene a partir de la técnica más simple para aproximar la integral

2. El método de Euler

Problema de valores iniciales

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx$$

Supongamos que el integrando no varía mucho en el intervalo $[x_0, x_1]$ → resultará un error muy pequeño si reemplazamos $f(x,y)$ por su valor en el punto extremo izquierdo.

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx \\ &\approx y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0,y_0)dx \approx y(x_0) + h \cdot f(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Colocando en su lugar una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ del intervalo $[a,b]$ que se estudia. Supongamos que cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ tiene longitud h

2. El método de Euler

Problema de valores iniciales

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx$$

$$\approx y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0,y_0)dx \approx y(x_0) + h \cdot f(x_0,y_0)$$

Sobre la base de estos cálculos **definimos**

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0)$$

Continuando de esta manera, y estableciendo que $x_2 = x_1 + h$ definimos

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,y_1)$$

En general, estableciendo que $x_j = x_{j-1} + h$, definimos

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j,y_j)$$

2. El método de Euler

Método de Euler

Fijado $h \neq 0$, es posible obtener aproximaciones de la solución del problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

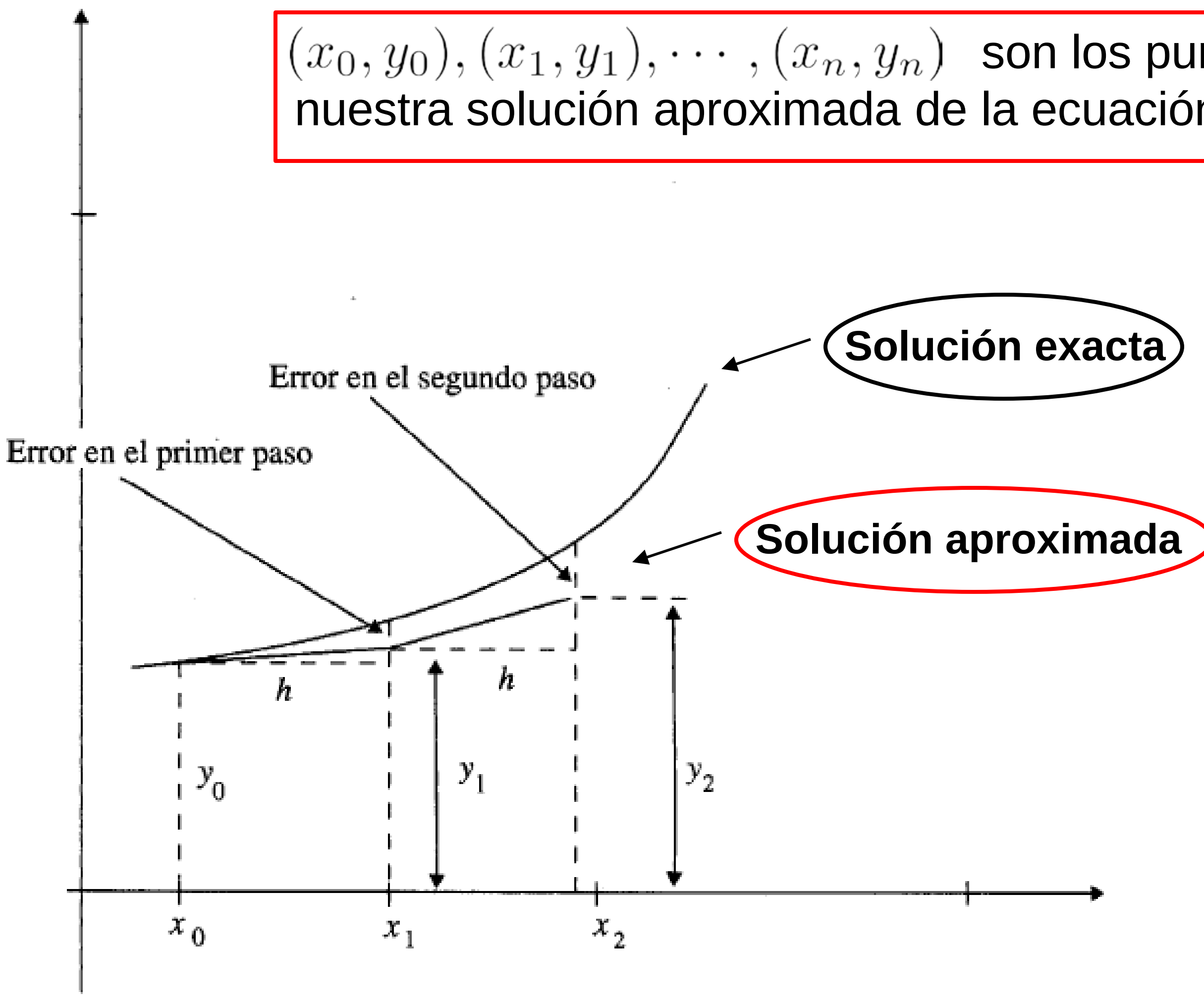
mediante el método recurrente

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ son los puntos de nuestra solución aproximada de la ecuación diferencial

2. El método de Euler

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ son los puntos de nuestra solución aproximada de la ecuación diferencial



2. El método de Euler

Para obtener una forma cómoda de **medir el comportamiento de la técnica numérica** que se emplea definiremos el **error relativo local** en el n-esimo paso

$$\overline{E}_n = \frac{|y(x_n) - y_n|}{|y(x_n)|}$$

Normalmente esta cantidad vendrá dada como un porcentaje

2. El método de Euler

Ejemplo
Apliquemos la técnica de Euler a la EDO

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

utilizando incrementos de longitud $h = 0.2$ y $h = 0.1$

Nuestro punto de referencia será calcular numéricamente $y(1)$ y compararlo con el valor exacto de $y(1)$ que obtendremos aplicando el correspondiente método de EDO

$$y(x) = -1 - x + 2e^x$$

2. El método de Euler

$$x_j = x_{j-1} + h$$

$$y' = f(x, y) = x + y \quad y(0) = 1$$

x_n	y_n	Exacto	$\overline{E}_n$ (%)
0.0	1.00000	1.00000	0.0
0.2	1.20000	1.24281	3.4
0.4	1.48000	1.58365	6.5
0.6	1.85600	2.04424	9.2
0.8	2.34720	2.65108	11.5
1.0	2.97664	3.43656	13.4

La tabla muestra los cálculos para $h = 0.2$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.00 + 0.2 \cdot 1.00 = 1.2$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.2 + 0.2 \cdot (0.2 + 1.2) = 1.48$$

El porcentaje de error

$$\overline{E}_1 = \frac{|1.24281 - 1.2|}{|1.24281|} \approx 0.034$$

2. El método de Euler

$$y' = f(x, y) = x + y \quad y(0 =)1$$

x_n	y_n	Exacto	$\overline{E}_n$ (%)
0.0	1.00000	1.00000	0.0
0.1	1.10000	1.11034	0.9
0.2	1.28200	1.24281	1.8
0.3	1.36200	1.39972	2.7
0.4	1.52820	1.58365	3.5
0.5	1.72102	1.79744	4.3
0.6	1.94312	2.04424	4.9
0.7	2.19743	2.32751	5.6
0.8	2.48718	2.65108	6.2
0.9	2.81590	3.01921	6.7
1.0	3.18748	3.43656	7.2

La tabla muestra los cálculos para $h = 0.1$

Los datos muestran que **cuando se reduce el incremento**, **la exactitud mejora, pero** el inconveniente es que **se requieren más cálculos**

2. El método de Euler

El método de Euler se puede utilizar para resolver un número arbitrario de EDO de primer orden.

Por ejemplo, si tenemos el sistema

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= g(x,y,z) \end{aligned} \qquad y(x_0) = y_0,\, z(x_0) = z_0$$

los valores que se han de calcular de forma recurrente son

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + h, \quad i = 1,2,\dots,n, \\ y_i &= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), \quad i = 1,2,\dots,n, \\ z_i &= z_{i-1} + hg(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), \quad i = 1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

2. El método de Euler

Todos los métodos para resolver EDO trabajan con EDO de primer orden.

Si tenemos una de orden superior → la tenemos que reescribir como un sistema de EDO de orden 1.

Por ejemplo, sea la segunda ley de Newton en una dimensión con fuerza arbitraria

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = v_0$$

Considerando la velocidad $v(t) = \dot{x}(t)$ como una nueva variable dependiente, además de $x(t)$, tendremos

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(t, x, v) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{M. de Euler}} \begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ x_i &= x_{i-1} + hv_{i-1} \\ v_i &= v_{i-1} + h\frac{1}{m}F(t_{i-1}, x_{i-1}, v_{i-1}) \end{aligned}$$

3. El término de error

La noción de **error** es fundamental en cualquier técnica numérica.

Asociado al hecho de hacer muchas operaciones si n es grande, está el problema del **error de redondeo**

Los números reales no pueden representarse exactamente en un ordenador y se han de redondear. Eso quiere decir que, cada vez que se hace una operación, es posible que se pierdan dígitos del resultado, y en principio, cuantas más operaciones más información se va perdiendo

Además, el método de Euler, introduce por sí mismo un error, que se llama **error de truncamiento**. Los dos tipos de errores se mezclan, y de hecho, el error total se puede amplificar

Analicemos a continuación el error que se comete al aproximar aplicando el método de Euler

3. El término de error

El **error de truncamiento local** en el n-ésimo paso se define como

$$\epsilon_n = y(x_n) - y_n$$

donde $y(x_n)$ es el valor exacto en la x_n de la ecuación diferencial e y_n es la aproximación de Euler

Podemos emplear la **fórmula de Taylor** para obtener una aproximación útil de este término de error

$$y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(c_1)$$

para algún valor c_1 entre x_0 y $x_0 + h$.

Sabemos por la EDO que $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ →

$$y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} y''(c_1)$$

3. El término de error

El **error de truncamiento** **local** en el n-ésimo paso se define como

$$\epsilon_n = y(x_n) - y_n$$

donde $y(x_n)$ es el valor exacto en la x_n de la ecuación diferencial y y_n es la aproximación de Euler

$$y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} y''(c_1)$$

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} y''(c_1) = y_1 + \frac{h^2}{2} y''(c_1)$$

Podemos concluir

$$\epsilon_1 = \frac{h^2}{2} y''(c_1) = K(c_1) h^2$$

el error es proporcional a h^2

$$K(c_1) = \frac{y''(c_1)}{2}$$

3. El término de error

El **error total de truncamiento** para ir de x_0 a x_n en n pasos del método de Euler será

$$K(c_1)h^2 + K(c_2)h^2 + \cdots + K(c_n)h^2 \quad =$$

$$= \quad (K(c_1) + K(c_2) + \cdots + K(c_n))h^2$$

$$= nKh^2 = \frac{x_n - x_0}{h}Kh^2 = \tilde{K}h$$

Donde K es la media de los $K(c_i)$ y $\tilde{K} = (x_n - x_0)K$

Por lo tanto, el error total de truncamiento al aplicar el método de Euler **es proporcional al paso** h

4. Método de Euler mejorado

Mejoremos el método de Euler

Recordemos que nuestra antigua ecuación era

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx$$

La idea del método de Euler consistía en reemplazar el integrando por $f(x_0, y_0)$ (aproximar la integral por medio de un área de un rectángulo)

Ahora proponemos reemplazar el integrando por $[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))]/2$

Así tenemos $$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))]$$

El problema con la ecuación propuesta consiste en que y se desconoce, debido a que desconocemos la solución exacta

Lo que podemos hacer es **reemplazar** $y(x_1)$ **por su valor aproximado determinado por el método de Euler**

4. Método de Euler mejorado

Representemos este nuevo valor por medio de $z_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$
Así la ecuación se convierte

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, z_1)]$$

En general nuestro esquema de recurrencia es

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, z_{j+1})]$$

en el cual

$$z_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

Este método que recibe el nombre de **método mejorado de Euler** o **método de Heun**, primero **predice** y luego **corrige** una aproximación de y_j

4. Método de Euler mejorado

Método de Euler mejorado

Fijado $h \neq 0$, es posible obtener aproximaciones de la solución del problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

mediante el método recurrente

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, z_{j+1})]$$

Donde

$$z_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

El error global de truncamiento del método es del orden de h^2

4. Método de Euler mejorado

Ejemplo

Apliquemos el método de Euler mejorado a la EDO

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

utilizando un incrementos de longitud $h = 0.2$ y midamos la mejora en exactitud con respecto al método ordinario de Euler

4. Método de Euler mejorado

x_n	y_n	Exacto	$\overline{E}_n\ (\%)$
0.0	1.00000	1.00000	0.00
0.2	1.24000	1.24281	0.23
0.4	1.57680	1.58365	0.43
0.6	2.03170	2.04424	0.61
0.8	2.63067	2.65108	0.77
1.0	3.40542	3.43656	0.91

$$y' = f(x,y) = x + y, \quad y(0) = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, z_{j+1})] \\ z_{j+1} &= y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}}$$

El valor aproximado obtenido para $y(1)$ es 3.40542 . El error relativo es del 1%, mientras que con el método de Euler es del 13%

5. Método de Runge-Kutta

Mejoremos el método de Euler mejorado

Recordemos que nuestra antigua ecuación era

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx$$

La idea del **método de Runge-Kutta** consiste en aproximar la integral sustituyendo el integrando por una parábola

5. Método de Runge-Kutta

Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Fijado $h \neq 0$, es posible obtener aproximaciones de la solución del problema de valores iniciales $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$

en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

mediante el método recurrente

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(p_i + 2q_i + 2r_i + s_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Donde

$$\begin{aligned} p_i &= f(x_{i-1}, y_{i-1})h, & r_i &= f(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}q_i)h, \\ q_i &= f(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}p_i)h, & s_i &= f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + r_i)h. \end{aligned}$$

El **error global de truncamiento** del método es del orden de h^4

5. Método de Runge-Kutta

Ejemplo

Apliquemos el método de Runge-Kutta a la EDO

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

utilizando un incrementos de longitud $h = 0.2$

5. Método de Runge-Kutta

x_n	y_n	Exacto	$\overline{E}_n$ (%)
0.0	1.00000	1.00000	0.00000
0.2	1.24280	1.24281	0.00044
0.4	1.58364	1.58365	0.00085
0.6	2.04421	2.04424	0.00125
0.8	2.65104	2.65108	0.00152
1.0	3.43650	3.43656	0.00179

$$y' = f(x, y) = x + y, \quad y(0) = 1$$

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(p_i + 2q_i + 2r_i + s_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} p_i &= f(x_{i-1}, y_{i-1})h, & r_i &= f(x_{i-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{i-1} + \tfrac{1}{2}q_i)h, \\ q_i &= f(x_{i-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{i-1} + \tfrac{1}{2}p_i)h, & s_i &= f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + r_i)h. \end{aligned}$$

6. Bibliografía

1. **Simmons, G.F., Krantz, S.G., Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana, 2007.** ISBN 978-0-07-286315-4

2. **Batlle, C., Massana, I., Zaragozá, M., Àlgebra i Equacions diferencials, Edicions UPC, 2000.** ISBN 84-8301-405-X

3. **Batlle, C, Apunts tema 5 – Mètodes numèrics per a equacions diferencials, Atenea-Campus Digital, 2010**