# Ecuaciones Diferenciales
# Tema 1. Parte 1: Ecuaciones Diferenciales

Ester Simó Mezquita
Matemática Aplicada IV

# Tema 1. Ecuaciones Diferenciales

1. ¿Qué es una Ecuación Diferencial Ordinaria?
2. Solución de una EDO
3. Tipos de EDO
4. Solución de EDO de variables separables
5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

# 1. ¿Qué es una Ecuación Diferencial Ordinaria?

Llamaremos Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) a una ecuación que relaciona la variable independiente $x$, la **función incógnita** $y = f(x)$ y sus derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

Un ejemplo es la ecuación:

$$y'' + 2xy' + y = \sin(x)$$

El objetivo de la resolución de una EDO consiste en determinar la función incógnita $y = f(x)$

# 1. ¿Qué es una Ecuación Diferencial Ordinaria?

Más ejemplos de ecuaciones diferenciales serían:

$$\dot{y} - 4y = \sin(t)$$
$$\dot{x} + tx = t^2 + 1$$
$$y'' + y' + y = \sin(x)$$
$$y''' + 2y'' + y = -\cos(x)$$

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación

# 2. Solución de una EDO

Consideremos

$$y' + x\sin(x) = 1$$

Encontrar la solución implica buscar una función $y(x)$ tal que cuando calculamos su derivada y la sustituimos en la EDO obtenemos una igualdad.

Probemos con

$$y(x) = x + x\cos(x) - \sin(x) + 3$$

# 2. Solución de una EDO

$$y' + x\sin(x) = 1$$

$$y(x) = x + x\cos(x) - \sin(x) + 3$$

$$y'(x) = 1 + \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = 1 - x\sin(x)$$

$$1 - x\sin(x) + x\sin(x) = 1$$

$$1 = 1$$

Notar que podíamos sustituir el número 3 por cualquier otro número real y también continuaríamos teniendo una solución

# 2. Solución de una EDO

$$y' + x\sin(x) = 1 \qquad \rightarrow \qquad y' = 1 - x\sin(x)$$

Buscamos una función $y(x)$ cuya derivada sea $1 - x\sin(x)$, es decir una **primitiva** o **integral indefinida** de $1 - x\sin(x)$

$$y(x) = \int 1 - x\sin(x)dx + C$$

$$y(x) = x + x\cos(x) - \sin(x) + C$$

Esta expresión que contiene una constante arbitraria C se llama la **solución general** de la EDO, mientras que si hacemos C=3 tenemos una **solución particular** de la EDO

$$y(x) = x + x\cos(x) - \sin(x) + 3$$

# 2. Solución de una EDO

$$F(x, y, y') = 0$$

Se llama **solución general** de una EDO de primer orden a una función

$$y = \varphi(x, C)$$

que depende de una constante arbitraria C y que cumple las condiciones:

1. Ésta satisface la EDO para cualesquiera valores de la constante $C$
2. Cualquiera que sea la **condición inicial** $(x_0, y(x_0))$ siempre se puede asignar un valor $C_0$ a la constante $C$ tal que la función $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaga la EDO dada

Se llama **solución particular** de la EDO a la que se obtiene de la solución general asignando cualquier valor determinado a la constante arbitraria $C$

# 2. Solución de una EDO

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de **orden 2**

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

1. Verifiquemos el hecho de que $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{3x}$ son ambas soluciones de la EDO
2. Comprobemos que cualquier función de la forma

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

también es solución de la ecuación diferencial

Notar que:

1. Cuando resolvemos una EDO de orden 2, esperamos obtener una **solución general** que es función de 2 **constantes indeterminadas** y de dos **soluciones independientes**
2. Mientras que una **solución particular** de una EDO es una solución que no contiene ninguna constante.

# 2. Solución de una EDO

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

Se llama **solución general** de una EDO de orden $n$ a una función

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

que depende de $n$ constantes arbitrarias y que cumple las condiciones:

1. Ésta satisface la EDO para cualesquiera valores de las constantes
2. Cualquiera que sea un **conjunto completo de condiciones iniciales** siempre se puede asignar valores a las constantes $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_n^*$ de manera que la función $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \cdots, C_n^*)$ satisfaga la EDO dada

Notar que:
Dada una EDO de orden $n$, un conjunto completo de **condiciones iniciales** es un conjunto de los $n$ valores de $y$ y de sus derivadas hasta orden $n-1$ en el punto inicial $x_0$ : $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0)$

# 2. Solución de una EDO

Dada $$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

con **solución general**

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Se llama **solución particular** de la EDO a la que se obtiene de la solución general asignando cualquier valor determinado a las constantes arbitrarias

Se llama **problema de condiciones iniciales** o **problema de Cauchy** al problema de encontrar una solución $y(x)$ de la EDO de orden $n$ dado un conjunto completo de condiciones iniciales especificado

$$y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0)$$

# 2. Solución de una EDO

**Ejemplo (Problema 21(a))**
Dada la familia de funciones

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{x} + x$$

Calcular la función que satisface las **condiciones iniciales**

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

# 3. Tipos de EDO

$$y' + x\sin(x) = 1$$

Es una ecuación **diferencial ordinaria** de **primer orden** y **lineal**

- **Ordinaria** porque la solución $y(x)$ es **función de una única variable**
- **Primer orden** porque como máximo **aparece la derivada de primer orden**
- **Lineal** porque $y(x)$ y sus derivadas **aparecen linealmente**

# 3. Tipos de EDO

$$(1-x^2)y'' - 2xy + 3y = 0$$ **Ordinaria, de segundo orden y lineal**

$$(1-x^2)y'' - 2y'y + 3y = 0$$ **Ordinaria, de segundo orden y no lineal**

$$y^{(iv)} - 2xy' + 2y = 0$$ **Ordinaria, de cuarto orden y lineal**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial t} + y = x\sin(t)$$ **No ordinaria, de segundo orden y lineal**

En el último ejemplo, la solución será una función de dos variables $y(x,t)$
En la ecuación aparecen derivadas parciales, y es por esta razón que las ecuaciones diferenciales **no ordinarias** se llamen también **Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)**

# 3. Tipos de EDO

Consideraremos también **sistemas de EDO**, que son conjuntos de EDO para más de una función de la misma variable independiente

**Ejemplo**

$$y_1' + 2y_1y_2 = \sin(x),$$
$$y_1'y_2'' + 3y_1y_2' = 0$$

Se trata de un sistema de EDO para $y_1(x)$ i $y_2(x)$ de orden 3

El **orden** de un sistema de EDO es la suma de los órdenes de las derivadas máximas de las funciones que aparecen.

# 3. Tipos de EDO

La **solución general** de un sistema de EDO de orden $n$ contiene $n$ **constantes arbitrarias**, que se pueden determinar especificando un **problema de Cauchy** con $n$ **condiciones iniciales** para las funciones y sus derivadas repartidas según el orden de la máxima derivada de cada función

**Ejemplo**

$$y_1' + 2y_1 y_2 = \sin(x),$$
$$y_1' y_2'' + 3y_1 y_2' = 0$$

Condiciones iniciales: $y_1(x_0)$

$y_2(x_0), y_2'(x_0)$

# 4. Solución de EDO de variables separables

Una EDO de **primer orden** es **separable** si después de algunas operaciones algebraicas elementales es posible ordenar la ecuación de tal manera que:

$$y' f(y) = g(x)$$

Ejemplo:

1. $y' = 2xy$ → $y' \dfrac{1}{y} = 2x$
2. $y' = x^2 + y^2$ No es de variables separables

# 4. Solución de EDO de variables separables

Si queremos solucionar $y' f(y) = g(x)$ tenemos que integrar respecto a $x$

$$\int f(y)y'dx = \int g(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int f(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx$$

Hacemos un cambio de variable a la integral de la izquierda y pasaremos de una integración respecto de x a una integración respecto de y.

$$x \quad \to \quad y = y(x)$$

Busquemos la **relación entre diferenciales**

$$y = y(x) \qquad \to \qquad dy = y'dx$$

$$\int f(y)y'dx = \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

$$\boxed{\int f(y)dy = \int g(x)dx + C_2 - C_1 = \int g(x)dx + C}$$

# 4. Solución de EDO de variables separables

**Ejemplo:** Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = 2xy$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2xy \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = 2xdx \quad \rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx \quad \rightarrow \quad \log|y| = x^2 + C \ \forall C \in R \quad \rightarrow$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2}e^C = De^{x^2} \ \ \forall D > 0$$

Si $y > 0 \ \rightarrow \ y = De^{x^2}, \ \forall D > 0$ y Si $y < 0 \ \rightarrow \ y = -De^{x^2}, \ \forall D > 0$

$y = 0$ También es solución de la EDO

$$y = \pm De^{x^2} = Me^{x^2}, \ \ M \in R$$

# 4. Solución de EDO de variables separables

**Ejemplo:** Resuelva la ecuación diferencial

$$y(1+2x)+x(1-y)y'=0$$

Efectuando separación de variables nos queda

$$\int \left(\frac{1}{x}+2\right)\, \mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{1}{y}\right)\, \mathrm{d}y + C$$

Integrando obtendremos la **solución general**

$$\log|x|+2x = y-\log|y|+C$$

En esta solución general no es posible aislar y en función de x. Pero si podemos Imponer una condición inicial $x=1,\ y(1)=e$

**Solución particular**

$$\log|1|+2=e-\log|e|+C \quad \rightarrow \quad C=3-e$$

$$\log|x|+2x=y-\log|y|+3-e$$

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

Muchas de las leyes de la naturaleza encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales

En física, química, biología, ingeniería, astronomía, economía, matemáticas,...

No resulta difícil darse cuenta de la razón por las que las ecuaciones diferenciales se presentan con tanta facilidad en las ciencias

Si $y = f(x)$ es una función dada → la derivada $\frac{df}{dx}$ puede interpretarse como la razón de cambio de $f$ con respecto a $x$

En cualquier proceso de la naturaleza, **las variables involucradas se relacionan con sus razones de cambio a través de los principios científicos que rigen el proceso** → cuando se expresa esta relación con notación matemática por lo general se obtiene como resultado una **ecuación diferencial**

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

- **La ley de gravitación universal de Newton**
- **Las ecuaciones de Maxwell**
- **El movimiento de los planetas**
- **La refracción de la luz**

Constituyen ejemplos importantes que se pueden expresar en términos de Ecuaciones diferenciales.

El siguiente ejemplo esclarecerá alguna de estas ideas.

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Mecánica**

De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, la aceleración de un cuerpo (de masa $m$) es proporcional a la fuerza total $F$ que actúa sobre el cuerpo

$$F = m \cdot a$$

Supongamos que estamos analizando la caída de un cuerpo próximo a la tierra

Sea $y(t)$ la altura del cuerpo desde la superficie terrestre en el instante $t$

Si la única fuerza que actúa sobre el cuerpo se debe a la gravedad → si $g$ es la aceleración debida a la gravedad → la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo es $F = m \cdot g$. Y como la aceleración es $\frac{d^2y}{dt^2}$

La ley de Newton se expresa $$m \cdot g = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow g = \frac{d^2y}{dt^2}$$

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Mecánica**

De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, la aceleración de un cuerpo (de masa $m$) es proporcional a la fuerza total $F$ que actúa sobre el cuerpo

$$F = m \cdot a$$

Es posible plantear el problema de una forma más interesante, suponiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad.

Si $k$ es la constante de proporcionalidad → la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es

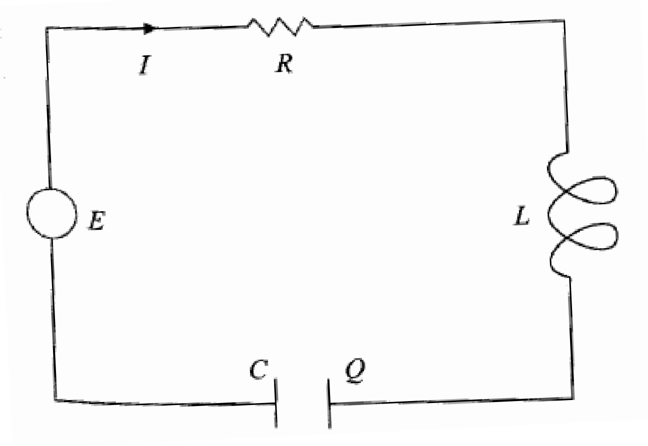
$$m \cdot g - k \cdot \frac{dy}{dt}$$

→ La segunda ley de Newton se convierte en

$$m \cdot g - k \cdot \frac{dy}{dt} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$ EDO de orden 2

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Circuitos eléctricos**




Consideremos el flujo de electricidad en el siguiente circuito eléctrico simple.

Los elementos que queremos destacar son los siguientes:

1. Una fuente de voltaje E

2. Una resistencia que produce una caída de voltaje $V_R = i \cdot R$

3. Un inductor que produce una caída de voltaje $V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

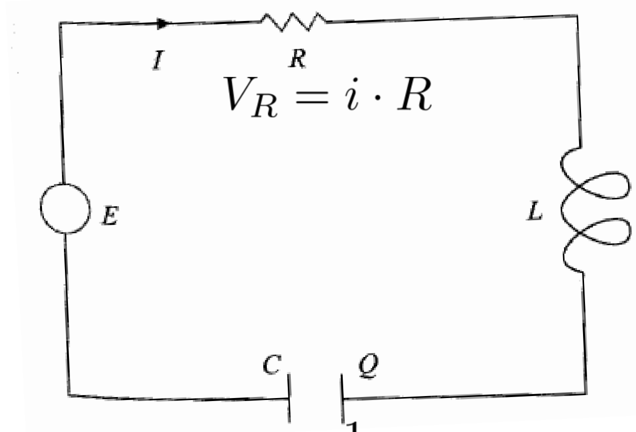
4. Un condensador que produce una caída de voltaje $V_C = \frac{1}{C} \cdot q$

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Circuitos eléctricos**

Además, como la corriente es la velocidad del flujo de carga, tenemos que

$$i = \frac{dq}{dt}$$




$$V_R = i \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$V_C = \frac{1}{C} \cdot q$$

Estos 4 elementos del circuito actúan juntos de acuerdo con

**Ley de Kirchhoff**: **La suma de voltajes a través de los tres elementos tiene que ser igual a la de la fuente de voltaje**

$$E - V_R - V_L - V_C = 0 \rightarrow V - iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Circuitos eléctricos**

Podemos llevar a cabo nuestro análisis considerando:

La carga $q$ como v. dependiente y el tiempo $t$ como la v. independiente → debemos eliminar la variable $i$ de la ecuación

Aplicando $i = \frac{dq}{dt}, \ \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

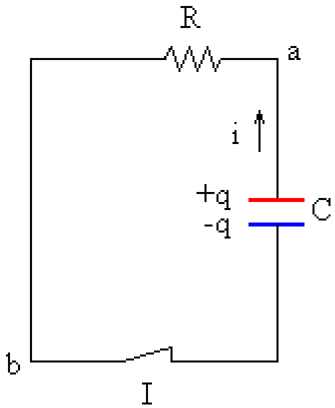
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$ EDO de segundo orden

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Descarga de un condensador**

Consideremos el circuito que consta de un condensador, inicialmente cargado con carga $q$, y una resistencia $R$, y se cierra el interruptor $I$




La suma de caídas de voltajes en el circuito tiene que ser 0

$$V_R + V_C = 0$$

La ecuación del circuito es $$Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Aplicaremos $i = \dfrac{dq}{dt}$ para eliminar la variable $i$ de la ecuación

La ecuación a integrar es $$R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Modelos de población**

Si $N$ representa el **número de individuos de una población**, bajo hipótesis razonables el **ritmo de crecimiento** de la población es proporcional al número de individuos.

Esto corresponde a una EDO para $N(t)$ de la forma

$$\dot{N} = k \cdot N, \ \ k > 0$$

Esta EDO aparece también en otros contextos, como el **crecimiento de un capital debido a los intereses**

# 5. Algunas EDO en la ingeniería y la ciencia

**Desintegración radioactiva**

El **número de desintegraciones por unidad de tiempo** de un isótopo inestable sólo depende de la cantidad $N$ de isótopos presentes.

Esto proporciona una EDO muy parecida al modelo simple de población, pero con un cambio de signo, dado que ahora la población de isótopos inestables disminuye

$$\dot{N} = -\lambda \cdot N, \ \ \lambda > 0$$

# 6. Bibliografía


1. **Simmons, G.F., Krantz, S.G., Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana, 2007.** ISBN 978-0-07-286315-4

2. **Batlle, C., Massana, I., Zaragozá, M., Àlgebra i Equacions diferencials, Edicions UPC, 2000.** ISBN 84-8301-405-X

3. **Batlle, C, Apunts tema 1- Equacions diferencials, Atenea-Campus Digital, 2010**