Capítol 2

Interpolació polinomial

2.1 Resum teòric i exemples

2.1.1 Introducció

L'aproximació de funcions constitueix un problema per a ésser estudiat per sí mateix i és el primer pas per a resoldre'n altres de més complexos. En aquest capítol ens centrarem en la interpolació polinomial, que és una eina de primer ordre dins dels Mètodes Numèrics, especialment pel que fa referència a la integració i a la derivació numèrica, així com a la resolució d'equacions diferencials.

Veurem com, a partir de la interpolació polinomial, podem aproximar funcions definides explícitament, funcions tabulades per a certs valors de la variable independent, o funcions de les quals no es coneix la seva forma explícita i que no es poden obtenir per mètodes analítics, i amb les quals haurem de treballar amb una sèrie de valors coneguts.

2.1.2 El polinomi interpolador

Donats els punts $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, ..., n$, $x_k \neq x_j$, $k \neq j$, anomenem interpolació polinomial a la determinació d'un polinomi $P(x)$ de grau $\leq N$ tal que: $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, ..., n$

Davant d'aquest fet ens fem les següents preguntes:

i. Existirà $P(x)$?. Serà únic?

ii. És $P(x)$ una bona aproximació d'$f(x)$ en els punts on no coincideix?

Existència i unicitat del polinomi interpolador

Teorema 2.1 *Siguin* (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) *amb* $x_k \neq x_j, k \neq j$. *Aleshores existeix un únic polinomi de grau* $\leq n$, $P_n(x)$, *tal que* $P_n(x_k) = y_k, k = 0, ..., n$.

1. Trobeu un polinomi de grau 3 en la variable x que passi pels punts $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$
2. N'hi ha algun de grau 4?.

a)Donats 4 punts, sabem que existirà un únic polinomi interpolador de grau ≤ 3.

Considerem $P_3(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. El nostre problema és determinar els seus coeficients. Si ho fem a partir de la definició de polinomi interpolador, haurem d'imposar les següents condicions:

- $P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
- $P(1) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$
- $P(2) = 3 \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 3$
- $P(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$

Obtenim un sistema lineal de 4 equacions i 4 incògnites, de rang=4 i, per tant, amb solució única:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0$$

Així doncs, el polinomi serà: $P_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ que, en aquest cas, és de grau 2.

b) Considerem $P_4(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$. D'imposar les condicions obtenim:

- $P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
- $P(1) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$

- $P(2) = 3 \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 3$
- $P(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$

Obtenim ara un sistema lineal de 4 equacions i 5 incògnites, de rang=4 amb infinites solucions (un grau de llibertat):

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2} + 2a_4 \quad, a_2 = \frac{1}{2} - a_4, \quad a_3 = -2a_4, \quad a_4 = a_4$$

És a dir, existeixen infinits polinomis interpoladors de grau 4 en els punts indicats.

2.1.3 Polinomi interpolador de Lagrange

Donats (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) amb $x_k \neq x_j, k \neq j,$ el polinomi interpolador de Lagrange ve donat per:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \qquad on \quad l_i(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, i\neq j}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Exemple 2.1 *Calculeu el polinomi interpolador de Lagrange en els punts:* $(1, 0), (2, 2), (4, 12)$ *i* $(5, 20)$.

Tenim 4 punts, per tant, el polinomi interpolador serà de grau ≤ 3.

$$P_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$P_3(x) = 0 l_0(x) + 2 l_1(x) + 12 l_2(x) + 20 l_3(x) = 0 + 2\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} + 12\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} + 20\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} = x^2 - x$$

2.1.4 Polinomi interpolador de Newton

Un inconvenient del mètode de Lagrange és que, si afegim un punt més (x_{n+1}, y_{n+1}), a la llista anterior, per a trobar el nou polinomi interpolador hauríem de tornar a fer tots els càlculs. Aquest nou mètode permet aprofitar els càlculs anteriors per a obtenir, amb pocs més, el polinomi interpolador amb una dada més.

Donats $(x_0, f(x_0))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ amb $x_k \neq x_j, k \neq j,$ el polinomi interpolador de Newton ve donat per:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}), \text{ on}$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_j] = \frac{f[x_1, ..., x_j] - f[x_0, ...x_{j-1}]}{x_j - x_0}$$

A la pràctica, els coeficients del polinomi són fàcils de calcular a partir de esquemes com els que mostrem a continuació per a $n = 3$:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
x_0 & f[x_0] & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
 & & & f[x_0, x_1] & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
x_1 & f[x_1] & & & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & f[x_1, x_2] & & & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
x_2 & f[x_2] & & & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & f[x_2, x_3] & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & f[x_3] & & & & & &
\end{array}$$

Exemple 2.2 *Calculeu el polinomi interpolador de Newton en els punts:* $(1, 0), (2, 2), (4, 12)$ *i* $(5, 20)$.

Construïm la taula de diferències dividides:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 0 & & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & & f[x_0,x_1]=2 & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
2 & 2 & & & & f[x_0,x_1,x_2]=1 & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & & f[x_1,x_2]=5 & & & & f[x_0,x_1,x_2,x_3]=0 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
4 & 12 & & & & f[x_1,x_2,x_3]=1 & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & f[x_2,x_3]=8 & & & \\
 & & \nearrow & & & & \\
5 & 20 & & & & &
\end{array}
$$

El polinomi interpolador serà:

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+ \\
&\ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)= \\
&= 1+2(x-1)+(x-1)(x-2)+0(x-1)(x-2)(x-4)=x^2-x
\end{aligned}
$$

Exemple 2.3 *Calculeu el polinomi interpolador de Newton en els punts:* $(0,3)$, $(1,0)$, $(2,2)$, $(4,12)$ *i* $(5,20)$.

Podem aprofitar els càlculs anteriors, només cal afegir el nou punt $(0,3)$:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 0 & & & & \\
 & & 2 & & & \\
2 & 2 & & 1 & & \\
 & & 5 & & 0 & \\
4 & 12 & & 1 & & \frac{3}{40} \\
 & & 8 & & -\frac{3}{40} & \\
5 & 20 & & \frac{23}{20} & & \\
 & & \frac{17}{5} & & & \\
0 & 3 & & & &
\end{array}
$$

El polinomi interpolador serà:

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\
&\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\
&\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \\
&= \frac{3}{40}x^4 - \frac{9}{10}x^3 + \frac{187}{40}x^2 - \frac{137}{20}x + 3
\end{aligned}
$$

2.1.5 Error d'interpolació

Sigui $f \in C^{n+1}((a,b))$ i siguin $x_i \in (a,b)$, $i = 0, ..., n$, $n+1$ abscisses de l'interval. Si $P_n(x)$ és el polinomi interpolador d'$f(x)$ en els punts $(x_0, f(x_0))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ i $x \in (a,b)$, aleshores:

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n),\ \xi(x) \in \langle x_0, ..., x_n, x\rangle .$$

on $\langle x_0, ..., x_n, x\rangle$ és el mínim interval que conté $x, x_0, x_1, ..., x_n$.

Aquesta fórmula, en el cas de fer servir el polinomi interpolador de Newton, és equivalent a:

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, ..., x_n, x](x-x_0)...(x-x_n)$$

Exemple 2.4 *Sabent que* $e^0 = 1$, $e^{0.1} = 1.105171$ *i* $e^{0.2} = 1.2214028$

(a) *Aproximeu* $e^{0.14}$

(b) *Doneu una fita de l'error comès*

a) Calculem en primer lloc el polinomi interpolador de Lagrange de $f(x) = e^x$ en els punts $(0,1), (0.1, 1.105171)$ i $(0.2, 1.2214028)$.

$P_2(x) = y_0\, l_0(x) + y_1\, l_1(x) + y_2\, l_2(x)$.

$P_2(x) = 1 \cdot \dfrac{(x-0.1)(x-0.2)}{(0-0.1)(0-0.2)} + 1.105171 \cdot \dfrac{(x-0)(x-0.2)}{(0.1-0)(0.1-0.2)} + 1.2214028 \cdot \dfrac{(x-0)(x-0.1)}{(0.2-0)(0.2-0.1)} = 0.55304x^2 + 0.996406x + 1$

Avaluem aquest polinomi en $x = 0.14$ i obtindrem l'aproximació d'$e^{0.14.}$.

$$e^{0.14} \simeq P_2(0.14) = 1.150336424$$

Si fem els càlculs amb la calculadora obtenim $\mathrm{e}^{0.14} = 1.150273799$

Per tant, l'error comès serà :

$$e_2(0.14) = \left| e^{0.14} - P_2(0.14) \right| = 6.27 \times 10^{-5}$$

b) Si fem servir la fórmula de l'error d'interpolació, en el nostre cas obtenim:

$$|f(0.14) - P_2(0.14)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(0.14-0)(0.14-0.1)(0.14-0.2) \right|$$

on $\xi \in \langle 0, 0.1, 0.2, 0.14 \rangle$, $f(x) = e^x$ i $f'''(x) = e^x$

Per tant, tenint en compte que $\xi \in [0, 0.2]$ i que la funció e^x és creixent, és a dir, $e^\xi \leq e^{0.2}$, deduïm:

$$\begin{aligned} e_2(0.14) &= \left| \frac{e^\xi}{3!}(0.14-0)(0.14-0.1)(0.14-0.2) \right| = 5.6 \times 10^{-5} e^\xi \leq \\ &\leq 5.6 \times \times 10^{-5} e^{0.2} \simeq 6.83 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

2.2 Problemes resolts

Problema 2.1 *Aproximeu* log 4*:*

(a) Utilitzant interpolació lineal a partir de $\log 3 = 0.4771212$ *i* $\log 5 = 0.69897$.

(b) Utilitzant interpolació parabòlica a partir de $\log 3 = 0.4771212$, $\log 4.5 = 0.6532125$ *i* $\log 5 = 0.69897$.

(c) Calculeu en cada cas una fita de l'error i compareu-la amb el valor que dóna la calculadora.

a) Hem de trobar el polinomi interpolador de la funció $f(x) = \log x$ en els punts $(3, 0.4771212)$ i $(5, 0.69897)$. Si ho fem a partir del polinomi de Newton obtenim:

$$\begin{array}{c|lcl}
3 & f[x_0] = 0.4771212 & & \\
 & & \searrow & \\
 & & & f[x_0, x_1] = 0.1109244 \\
 & & \nearrow & \\
5 & f[x_1] = 0.69897 & &
\end{array}$$

$$P_1(x) = 0.4771212 + 0.1109244(x-3) = 0.1109244x + 0.144348$$

Si ara l'avaluem en $x = 4$, obtenim l'aproximació que ens demanen:

$$\log 4 \simeq P_1(4) = 0.5880456$$

b) Hem de trobar el polinomi interpolador de la funció $f(x) = \log x$ en els punts $(3, 0.4771212)$, $(4.5, 0.6532125)$ i $(5, 0.69897)$. Si ho fem a partir del polinomi de Newton obtenim:

$$\begin{array}{c|lclcl}
3 & f[x_0] = 0.4771212 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
 & & & f[x_0, x_1] = 0.1109244 & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & \\
5 & f[x_1] = 0.69897 & & & & f[x_0, x_1, x_2] = -0.0129396 \\
 & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & f[x_1, x_2] = 0.091515 & & \\
 & & \nearrow & & & \\
4.5 & f[x_2] = 0.6532125 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0.4771212 + 0.1109244(x-3) - 0.0129396(x-3)(x-5) = \\ &= -0.0129396x^2 + 0.2144412x - 0.049746 \end{aligned}$$

Si ara l'avaluem en $x = 4$, obtenim l'aproximació que ens demanen:

$$\log 4 \simeq P_2(4) = 0.6009852$$

c) La fórmula de l'error sabem que és:

$$e_n(x) = |f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n) \right|, \ \xi(x) \in \langle x_0, ..., x_n, x \rangle$$

En el cas que ens ocupa, $f(x) = \log x$ per als dos apartats.

Per a l'apartat a) tenim:

$$|f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}(x-3)(x-5) \right|, \ \xi \in [3,5]$$

$$|f(4) - P_1(4)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}(4-3)(4-5) \right|, \ \xi \in [3,5]$$

$f(x) = \log x$

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{1}{x}$

$f''(x) = \dfrac{1}{\ln 10}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$|f''(x)| = \left|\dfrac{1}{\ln 10}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right| = \dfrac{1}{\ln 10}\ \dfrac{1}{x^2}$

Tenint en compte que $\dfrac{1}{x^2}$ és decreixent podem escriure:

$|f(4) - P_1(4)| \ = \ \left|\dfrac{1}{2!} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \left(-\dfrac{1}{\xi^2}\right)(4-3)(4-5)\right| \ = \ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{\xi^2} \ \leq \ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{9} \simeq 0.0241274$

Si comparem aquest resultat amb el valor que ens proporciona la calculadora, tenim que $\log 4 = 0.602059991$ i $P_1(4) = 0.5880456$, per tant l'error serà:

$$|\log 4 - P_1(4)| = 0.014014391$$

Per l'apartat b) tenim:

$$|f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-3)(x-5)(x-4.5)\right|, \ \xi \in [3,5]$$

$$|f(4) - P_2(4)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(4-3)(4-5)(4-4.5)\right|, \ \xi \in [3,5]$$

$f(x) = \log x$

$|f'''(x)| = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{2}{x^3}$ ja que $\xi \in [3,5]$

Tenint en compte que $\frac{1}{x^3}$ és decreixent podem escriure:

$|f(4) - P_2(4)| = \left|\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{2}{\xi^3} \cdot (4-3)(4-5)(4-4.5)\right| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{2}{\xi^3} \cdot \frac{1}{2} \leq$

$\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} \simeq 2.68 \times 10^{-3}$

Si comparem aquest resultat amb el valor que ens proporciona la calculadora tenim que $\log 4 = 0.602059991$ i $P_2(4) = 0.6009852$, per tant l'error serà:

$$|\log 4 - P_2(4)| = 1.07479 \times 10^{-3}$$

Problema 2.2 *Considerem la taula de dades següent:*

x	-2	-1	0	1	2
y	1	4	11	16	a

(a) Calculeu el polinomi interpolador en els quatre primers punts de la taula.

(b) Quin valor ha de prendre "a" per tal que el polinomi que interpola en els cinc punts coincideixi amb l'anterior?.

a) Si fem servir el polinomi interpolador de Newton obtenim la següent taula:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
-2 & 1 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
 & & & 3 & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
-1 & 4 & & & & 2 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & 7 & & & & -1 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
0 & 11 & & & & -1 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & 5 & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
1 & 16 & & & & & &
\end{array}$$

A partir d'aquí, el polinomi interpolador serà:

$P_3(x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$P_3(x) = 1+3(x+2)+2(x+2)(x+1)-1(x+2)(x+1)(x-0) = -x^3-x^2+7x+11$

b) Perquè el polinomi que interpola en els cinc punts de la taula coincideixi amb l'anterior s'haurà de verificar, per definició de polinomi interpolador, que $P_3(x)$ passi també pel cinquè punt $(2, a)$, és a dir:

$$a = P_3(2) = -2^3 - 2^2 + 7 \times 2 + 11 = 13$$

Problema 2.3 *Considerem els següents punts de la taula:*

x	1	2	3	5	6
$f(x)$	4.75	4	5.25	19.75	36

Calculeu els valors aproximats per $f(3.5)$ utilitzant polinomis de Newton d'ordre 1, 2, 3 i 4, escollint els punts de forma adequada.

Construïm la següent taula, que ens serà útil per a tots els polinomis.

$$
\begin{array}{r|lcccccccc}
3 & 5.25 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
 & & & 7.25 & & & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
5 & 19.75 & & & & 2 & & & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
 & & & 5.25 & & & & 0.25 & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
2 & 4 & & & & 2.75 & & & & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 8 & & & & 0.25 & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & \\
6 & 36 & & & & 1.75 & & & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & 6.25 & & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & \\
1 & 4.75 & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Comencem per determinar el polinomi d'ordre 1 a partir dels punts $(3, 5.25)$, $(5, 19.75)$

  $P_1(x) = 5.25 + 7.25(x - 3) = 7.25x - 16.5$

$$P_1(3.5) \simeq 8.875$$

- Determinem el polinomi d'ordre 2 a partir dels punts $(3, 5.25)$, $(5, 19.75)$ i $(2, 4)$

  $P_2(x) = 5.25 + 7.25(x - 3) + 2(x - 3)(x - 5) = 2x^2 - 8.75x + 13.5$

$$P_2(3.5) \simeq 7.375$$

- Determinem el polinomi d'ordre 3 a partir dels punts $(3, 5.25)$, $(5, 19.75)$, $(2, 4)$ i $(6, 36)$

  $P_3(x) = 5.25+7.25(x-3)+2(x-3)(x-5)+0.25(x-3)(x-5)(x-2) = 0.25x^3 - 0.5x^2 - x + 6$

$$P_3(3.5) \simeq 7.09375$$

- Determinem el polinomi d'ordre 4 a partir dels 5 punts
  $P_4(x) = 5.25 + 7.25(x-3) + 2(x-3)(x-5) + 0.25(x-3)(x-5)(x-2)$
  Observem que $P_4(x) = P_3(x)$

$$P_4(3.5) \simeq 7.09375$$

Problema 2.4 *Volem aproximar* $\sin 0.34$

> *(a) Construïu el polinomi interpolador corresponent a* $\sin 0.30 = 0.29552$, $\sin 0.32 = 0.31457$ *i* $\sin 0.35 = 0.34290$. *Doneu una fita de l'error en aquesta aproximació.*
>
> *(b) Construïu el polinomi interpolador fent servir els valors de l'apartat anterior i* $\sin\ 0.33 = 0.32404$. *Doneu una fita de l'error en aquesta aproximació.*

Construïm la següent taula, que serà vàlida per als dos apartats:

$$\begin{array}{c|lclclcl}
0.3 & 0.29552 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
 & & & 0.9525 & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
0.32 & 0.31454 & & & & -0.16333 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & 0.94433 & & & & 1.00011 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
0.35 & 0.32404 & & & & -0.13333 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & 0.943 & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
0.33 & 0.32404 & & & & & &
\end{array}$$

a) En aquest primer apartat considerem els punts $(0.3, 0.29552)$, $(0.32, 0.31457)$ i $(0.35, 0.34290)$.

El polinomi interpolador de Newton que obtenim és:

$$P_2(x) = 0.29552 + 0.9525(x-0.3) - 0.16333(x-0.3)(x-0.32)$$

$$P_2(x) = -0.1633333x^2 + 1.053766667x - 0.00591$$

A partir d'aquí podem trobar una aproximació per a $\sin 0.34$:

$$\sin 0.34 \simeq P_2(0.34) = 0.3334893334$$

La fita de l'error en aquest cas vindrà donada a partir de la fórmula:

$$|f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0.3)(x-0.32)(x-0.35)\right|; \quad \xi \in [0.3, 0.35]$$

En el nostre cas $f(x) = \sin x$ i fent servir que $|\cos \xi| \leq 1$ tenim:

$$\begin{aligned} |f(0.34) - P_2(0.34)| &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(0.34-0.3)(0.34-0.32)(0.34-0.35)\right| = \\ &= \left|\frac{\cos \xi}{3!}(0.04)(0.02)(-0.01)\right| \leq 1.3 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

b) Construïm ara el polinomi interpolador en els punts $(0.3, 0.29552)$, $(0.32, 0.31457)$, $(0.35, 0.34290)$ i $(0.33, 0.32404)$.

$P_3(x) = 0.29552 + 0.9525(x-0.3) - 0.16333(x-0.3)(x-0.32)+$

$+1.00011(x-0.3)(x-0.32)(x-0.35)$

A partir d'aquí, podem trobar una aproximació per a $\sin 0.34$:

$$\sin 0.34 \simeq P_3(0.34) = 0.3334813334$$

La fita de l'error en aquest cas serà, fent servir que $|\sin \xi| \leq 1$:

$$|f(x) - P_3(x)| = \left|\frac{f'^{v}(\xi)}{4!}(x-0.3)(x-0.32)(x-0.35)(x-0.33)\right|, \xi \in [0.3, 0.35]$$

$$\begin{aligned} |f(0.34) - P_3(0.34)| &= \left|\frac{f'^{v}(\xi)}{4!}(0.34-0.3)(0.34-0.32)(0.34-0.35)(0.34-0.33)\right| \\ &= \left|\frac{\sin \xi}{4!}(0.04)(0.02)(-0.01)(0.01)\right| \leq 3.33 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Problema 2.5 *(Fenomen Runge)*

(a) Calculeu el polinomi interpolador de grau 10 de la funció $f(x) = \dfrac{1}{1+20x^2}$ *prenent punts equiespaiats a l'interval* $[-1, 1]$.

(b) *Feu una representació gràfica aproximada del polinomi interpolador i de la funció a l'interval* $[-1, 1]$.

a) Els punts d'interpolació, tenint en compte que $h = 0.2$, seran:

$$x_i = -1 + ih, \quad i = 0, ..., 10$$

El polinomi interpolador que obtenim és:

$P_{10}(x) = -178.12x^{10} + 0.5 \times 10^{-6}x^9 + 400.77x^8 - 0.7 \times 10^{-6}x^7 - 311.58x^6 + 0.38 \times 10^{-6}x^5 + 102.73x^4 - 0.11 \times 10^{-6}x^3 - 14.74x^2 + 0.5 \times 10^{-9}x + 0.99$

Si fem la representació gràfica de la funció i del polinomi interpolador, observem una gran diferència en els extrems de l'interval.

Aquest comportament és degut a que normalment no hi ha convergència dels polinomis interpoladors $P_n(x)$ cap a $f(x)$ quan $n \to \infty$.

Problema 2.6 *(Interpolació inversa)*

Trobeu el valor d'x tal que f(x)=5, per a la funció f(x) donada per la següent taula:

x	0	1	2	3
y	1	2	4	6

Partim del fet que si $f(x_i) = y_i$ podem considerar una nova funció $g(x)$ tal que $g(y_i) = x_i$.

A partir d'aquest fet, trobar el valor d'x tal que $f(x) = 5$ serà equivalent a trobar $x = g(5)$.

El que farem és trobar el polinomi interpolador de la funció $g(y)$ donada per la taula:

y	1	2	4	6
x	0	1	2	3

Així doncs, obtenim $P_3(y) = (y-1) - \frac{1}{6}(y-1)(y-2) + \frac{1}{30}(y-1)(y-2)(y-4)$

$$x = g(5) \simeq P_3(5) = \frac{12}{5} = 2.4$$

2.3 Problemes resolts amb Maple

Maple V permet calcular el polinomi interpolador d'una funció, tant si aquesta ve donada per una taula de valors o per la seva expressió, a partir de la instrucció:

interp(*[llista d'abscisses], [llista de valors], variable)*

Problema 2.7 *Calculeu el polinomi interpolador per a la següent taula de valors:*

x	0	1	2
y	0	1	-1

Fent servir la instrucció anterior tenim:

> p:=**interp**([0,1,2],[0,1,-1],x);

$$p := -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$$

Problema 2.8 *Donada la funció* $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ *i les abscisses* $x_0 = 1$,

$x_1 = 2$, $x_2 = 5$,

(a) *Determineu el polinomi interpolador amb l'ordre* ***interp****.*

(b) *Determineu els polinomis components del mètode de Lagrange i, a partir d'ells, el polinomi interpolador.*

(c) *Representeu gràficament la funció i el polinomi interpolador.*

(d) *Calculeu el valor del polinomi interpolador en 4.5 i trobeu l'error comès.*

a) Per poder aplicar la instrucció tal com la tenim definida, necessitem calcular els valors de la funció en cada abscissa. Per a això :

- Definim la funció

  > f:=x->x/(1+x ^2);

$$f := x \to \frac{x}{1+x^2}$$

- Construïm una llista a partir de les abscisses:

  > absc:=[1,2,5];

$$absc := [1, 2, 5]$$

- Calculem les ordenades aplicant la funció a la llista:

  > ord:=**map**(f,absc);

$$ord := [\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{26}]$$

- Calculem el polinomi interpolador:

  > p:=**interp**(absc,ord,x);

$$p := \frac{1}{130}x^2 - \frac{8}{65}x + \frac{8}{13}$$

b) El polinomi de Lagrange serà:

$$P_2(x) = l_0(x) \cdot y_0 + l_1(x) \cdot y_1 + l_2(x) \cdot y_2$$

- Els polinomis components $l_i(x)$ seran:

  > l[0]:=**interp**(absc,[1,0,0],x);

$$l_0 := \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{2}$$

  >l[1]:=**interp**(absc,[0,1,0],x);

$$l_1 := -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}$$

  >l[2]:=**interp**(absc,[0,0,1],x);

$$l_2 := \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$$

- El polinomi interpolador l'obtenim fent:

  > P:=f(1)*l[0]+f(2)*l[1]+f(5)*l[2];

$$P := \frac{1}{130}x^2 - \frac{8}{65}x + \frac{8}{13}$$

c) >**plot**({f(x),p},x=1..5);

d)En aplicar l'ordre **interp** hem obtingut l'expressió:

$$p := \frac{1}{130}x^2 - \frac{8}{65}x + \frac{8}{13}$$

No podem calcular directament $p(4.5)$, ja que p no és una funció. Per a resoldre aquest problema tenim 2 opcions:

- Substituir a l'expressió x per 4.5:

  > a:=**subs**(x=4.5,p);

$$a := .2173076922$$

- Transformar l'expressió en funció i avaluar-la en 4.5:

  > g:=**unapply**(p,x);

$$g := x \to \frac{1}{130}x^2 - \frac{8}{65}x + \frac{8}{13}$$

  > a:=g(4.5);

$$a := .2173076922$$

  L'error comès serà doncs:

> error:=**abs**(a-f(4.5));

$$error := .0055429863$$

Problema 2.9 *Donada la funció* $f(x) = \dfrac{1}{1+20x^4}$ *i l'interval* $[-2, 2]$, *calculeu el polinomi interpolador prenent* $n+1$*punts igualment espaiats a l'interval, per a valors d'n 5 i 10. Representeu el polinomi obtingut juntament amb la funció en cada cas.*

Fem el procés per a $n = 5$:

- Definim la funció, l'interval, n i h:

  >f:=x->1/(1+20*x ^4);

  $$f := x \to \frac{1}{1+20x^4}$$

  >a:=-2;

  $$a := -2$$

  >b:=2;

  $$b := 2$$

  >n:=5;

  $$n := 5$$

  >h:=**evalf**((b-a)/n);

  $$h := 0.8$$

- Construïm una llista a partir de les abscisses:

  >abcs:=[**seq**(a+i*h,i=0..n)];

  $$absc := [-2, -1.2, -0.4, 0.4, 1.2, 2]$$

- Calculem les ordenades a partir de les abscisses anteriors:

  >ord:=**map**(f,abcs);

  $$ord \ : \ = [\frac{1}{321}, 0.02354492371, 0.6613756614, 0.6613756614,$$
  $$0.02354492371, 0.003115264798]$$

- Calculem el polinomi interpolador i el representem juntament amb la funció:

  >p:=**interp**(abcs,ord,x);

  $$p \ := -.1993815104 \times 10^{-9}x^5 + .1276887833x^4 + .10 \times 10^{-8}x^3 - \\ -.7026073168x^2 - .10 \times 10^{-8}x + .7705239988$$

  >**plot**({f(x),p},x=-2..2);

- Si repetim el procés per a $n = 10$ obtenim:

2.4 Problemes proposats

1. Trobeu els polinomis de grau 2 que per a 1 i -1 donin 1.

2. Calculeu els polinomis interpoladors per a les taules següents:

x	0	1	2
y	1	-2	-3

x	0	1	2	-1
y	1	-2	-3	6

Quina relació hi ha entre ells?

3. Donada la taula de valors:

x	-1	1	2	3
y	2	0	2	6

calculeu el polinomi que interpola f(x) en els punts de la taula.

4. D'una certa funció f(x) coneixem les dades donades per la taula següent:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	1	2.119	2.910	3.945	5.20	8.695

Calculeu els valors aproximats de $f(1.6)$ amb els polinomis de graus 1, 2 i 3, escollint la seqüència de punts adequada en cada cas.

5. Considereu la taula de valors següent:

x	1	2	4	5	6
y	0	2	12	21	32

(a) Calculeu $f(3)$ de forma aproximada, utilitzant polinomis interpoladors de grau 2 i escollint els punts de forma convenient. Doneu almenys dos polinomis diferents.

(b) Calculeu $f(3)$ aproximadament mitjançant un polinomi interpolador de grau màxim.

6.Donada $f(x) = 3xe^x - 2e^x$, aproximeu $f(1.03)$ a partir del polinomi interpolador en els punts d'abscissa $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ i $x_2 = 1.07$. Doneu una fita de l'error comès.

7. Doneu una aproximació de $\ln 2$ a partir de les dades: $\ln 1 = 0$, $\ln 1.5 = 0.40546$ i $\ln 2.2 = 0.78845$. Doneu una fita de l'error comès.

8. D'una certa funció f(x) coneixem les dades donades per la taula següent i volem calcular una aproximació de $f(2.5)$

x	0	1	1.5	2	2.3	3
y	1	0.149	1.010	2.321	5.20	8.12

(a) Calculeu, amb la instrucció **interp** els polinomis interpoladors de graus 1, 2 i 3, escollint la seqüència de punts adequada en cada cas.

(b) Trobeu l'aproximació de $f(2.5)$ fent sevir les instruccions **subs** i **unapply**.

9. Donada la la funció $f(x) = e^{2x}$:

(a) Calculeu, amb les instruccions **interp** i **map** el polinomi interpolador en els punts d'abscissa 0,1 i 2.

(b) Doneu una aproximació del valor de $f(1.5)$ fent sevir les instruccions **subs** i **unapply**.

(c) Compareu el resultat anterior amb el valor real.

(d) Representeu gràficament, amb la instrucció **plot**, la funció i el polinomi interpolador.

(e) Representeu gràficament la funció **abs**$(f(x) - P(x))$ i doneu una fita de l'error comès.

10. Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$:

(a) Calculeu el polinomi interpolador en 5, 10 i 20 punts equiespaiats de l'interval $[-1, 1]$, fent servir les instruccions **seq**, **map** i **interp**.

(b) Doneu una aproximació de $f(0.9)$ a partir de les comandes **subs** i **unapply** i compareu-lo amb el valor real.

(c) Representeu gràficament la funció i els polinomis interpoladors fent servir la comanda **plot**.

11. Donada la funció $f(x) = x^2 \ln(x)$ i els següents valors del logaritme neperià

x	10	10.5	11
$\ln(x)$	2.302585093	2.351375257	2.397895273

(a) Calculeu el polinomi interpolador de f corresponent als punts d'abscisses $x_0 = 10, \; x_1 = 10.5, \; x_2 = 11$.

(b) Trobeu l'aproximació de $f(10.75)$ fent servir el polinomi anterior. Calculeu una fita superior de l'error comès.

12. Sabent que $\cos 0.3 = 0.95534, \; \cos 0.32 = 0.94924$ i $\cos 0.35 = 0.93937$

(a) Calculeu el polinomi interpolador en aquests punts i trobeu una aproximació de $\cos 0.34$.

(b) Doneu una fita de l'error en aquesta aproximació.

(c) El polinomi interpolador anterior ens serveix per trobar una aproximació de $\cos 0.75$? Justifiqueu la resposta.

13. Donada la funció $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ a l'interval $[0, 1]$.

(a) Calculeu el polinomi interpolador de f en els punts d'abscisses $0, \; 0.3, \; 1$.

(b) Doneu una fita de l'error a l'aproximar $f(0.5)$ per aquest polinomi, sabent que $f'''(x) = \frac{2}{x+1}$.

14. Trobeu una aproximació de $\sqrt[3]{e}$ fent servir interpolació polinomial en els punts $(0, 1), \; (0.2, 1.2214), \; (0.4, 1.4918)$. Doneu una fita de l'error comès.