Capítol 5

Zeros de funcions

5.1 Resum teòric i exemples

5.1.1 Introducció

Molt freqüentment, la solució d'un problema científic queda reduït a resoldre una equació del tipus $f(x) = 0$, que no pot ser resolta per cap mètode algebraic, és a dir, on és impossible de determinar la solució exacta. En aquest capítol treballarem una sèrie de mètodes numèrics, basats en processos iteratius que ens aniran aproximant, sota certes condicions, a la solució.

Definició 5.1 *Anomenem arrel o solució d'una equació $f(x) = 0$ a un valor α tal que $f(\alpha) = 0$. En aquest cas es diu també que α és un zero d'f.*

En qualsevol procés de càlcul de zeros d'una equació es poden distingir 3 fases:

1. Localització de l'arrel: determinarem un interval que contingui l'arrel a partir del teorema de Bolzano.
2. Separació de l'arrel: determinarem intervals que continguin una sola arrel a partir del teorema de Rolle.
3. Aproximació numèrica de l'arrel: construirem una successió de valors que convergeixin cap a l'arrel buscada.

La idea d'aquest darrer pas consisteix a construir una successió $x_0, x_1, ..., x_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Fixat un error $\epsilon > 0$, aturarem el mètode iteratiu quan es verifiqui una d'aquestes desigualtats:

(a) $|x_n - \alpha| < \epsilon$

(b) $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

(c) $|f(x_n)| < \epsilon$

Considerarem per a tots els mètodes que exposarem el fet que ja s'han dut a terme els processos de localització i separació de l'arrel.

5.1.2 Mètode de la bisecció

Es fonamenta en el teorema de Bolzano, segons el qual, donada una funció f, contínua en $[a, b]$ que pren valors de signe contrari als extrems de l'interval, és a dir, $f(a) \cdot f(b) < 0$, llavors existeix $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Iniciarem el mètode en un interval on es verifiquin les hipòtesis del teorema i l'anirem subdividint pel seu punt mig. En cadascun dels passos triem aquell subinterval on es produeixi un canvi de signe de la funció.

Quan l'amplitud de l'interval sigui prou petita, d'acord amb la precisió desitjada per al càlcul de l'arrel, podrem considerar com a una bona aproximació un qualsevol dels seus extrems.

Teorema 5.1 *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow R$ contínua amb $f(a) \cdot f(b) < 0$ i x_n la successió de punts mitjos del mètode. Llavors:*

1. $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ on $f(\alpha) = 0$

2. $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^n}, \quad n \geq 1$

Exemple 5.1 *Calculeu, aplicant el mètode de bisecció, una solució de l'equació $\cos x - x = 0$ amb un decimal exacte. Quantes iteracions caldrà fer per obtenir una aproximació de 4 decimals exactes?*

Si fem una representació gràfica de la corba $f(x) = \cos x - x$ observarem que té un únic punt de tall amb l'eix OX a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Localització de l'arrel

  Veurem que la funció $f(x) = \cos x - x$ té una arrel a l'interval $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ aplicant el teorema de Bolzano.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ contínua en I} \\ f(0) = 1 > 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid \quad f(\alpha) = 0$$

- Separació de l'arrel

  Veurem que $f(x) = \cos x - x$ té una única arrel a l'interval $(0, \frac{\pi}{2})$ aplicant el teorema de Rolle.

  $f(x)$ és derivable en R

  $f'(x) = -\sin x - 1 \neq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow f(x) = 0$ té com a màxim una arrel (que a l'apartat anterior ja hem vist que existia).

- Aplicació del mètode de la bisecció

  Partim de l'interval $I = [0, \frac{\pi}{2}] = [a_1 \ , b_1]$ i anem calculant iterats

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{fins que} \, |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

n	a_n	b_n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$sig(f(x_n))$
1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} = 0.785398163$		$-$
2	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8} = 0.392699081$	0.392699082	$+$
3	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{16} = 0.589048622$	0.196349541	$+$
4	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{32} = 0.687223393$	0.098174771	$+$
5	$\frac{7\pi}{32}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{64} = 0.736310778$	0.049087385	$+$

Així doncs, l'aproximació seria $x_5 = 0.736310778 \simeq \alpha$

Per a la segona part del problema volem trobar el número d'iteracions necessàries, n, per tal d'obtenir una aproximació amb 4 decimals exactes. Farem servir el fet que:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Imposarem que:

$$\frac{b-a}{2^n} \leq 0.5 \times 10^{-4}$$

En el nostre cas $a = 0$ i $b = \dfrac{\pi}{2}$, per tant, el nostre problema queda reduit a trobar n en:

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad n?$$

Fent operacions arribem a:

$$2^n \geq \pi \times 10^4 \Longleftrightarrow n \ln 2 \geq \ln(\pi \times 10^4) \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(\pi \times 10^4)}{\ln 2} \simeq 14.9392$$

Per tant, tindrem la precisió desitjada amb $n \geq 15$.

5.1.3 Mètode de Newton-Raphson

Si representem gràficament la funció $y = f(x)$ podem expressar el problema de buscar α tal que $f(\alpha) = 0$ dient que cerquem el punt d'intersecció de la corba $y = f(x)$ amb l'eix OX.

La idea intuïtiva d'aquest mètode consisteix a substituir la corba per la recta tangent en cada punt del procés iteratiu i fer a continuació la intersecció amb l'eix OX per obtenir el següent iterat.

Així, la descripció del mètode, a partir d'una aproximació inicial de l'arrel, x_0, serà:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0}$$

Teorema 5.2 *Si es verifiquen les següents condicions:*

1. $f \in C^2([a,b])$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$
3. $f'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$
4. $|f''(x)| \leq M < \infty$

Aleshores existeix un interval $I \subset [a,b]$ que conté un únic zero α de la funció f i tal que la successió definida per

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

compleix que $x_n \in I$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Exemple 5.2 *Calculeu aplicant el mètode de Newton-Raphson una aproximació amb 4 decimals exactes de la solució de l'equació* $\cos x - x = 0$ *a l'interval* $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ja no és necessari fer els processos de localització i separació de l'arrel, ja que els hem fet a l'exemple anterior. Passem doncs a comprovar les hipòtesis del teorema i, a continuació, a aplicar el mètode iteratiu.

- Comprovació del teorema

  $f(x) = \cos x - x \in C^2([0, \frac{\pi}{2}])$

  $f(0) \cdot f(\dfrac{\pi}{2}) < 0$

  $f'(x) = -\sin x - 1 \neq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

  $|f''(x)| = |-\cos x| \leq 1 < \infty$

  Per tant podem assegurar que existeix $I_0 \subseteq I$ tal que la successió definida per

  $$\begin{cases} x_0 \in I_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

  convergirà cap a un zero de la funció.

- Aplicació del mètode de Newton-Raphson

  $$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-1 - \sin x_n}$$

  Aturarem el procés quan $|f(x_n)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

  Construïm la següent taula:

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	0.785398163	0.07829
1	0.7395361337	0.754×10^{-3}
2	0.7390851781	0.749×10^{-7}

  L'aproximació de l'arrel serà $\alpha \simeq 0.7390851781$

Observem que amb aquest mètode la convergència és més ràpida que amb el mètode de bisecció.

5.1.4 Mètode de la secant

És similar al mètode anterior, però en lloc d'aproximar la corba per la recta tangent ho fem a partir de rectes secants que passen per 2 aproximacions consecutives de l'arrel.

Així, la descripció del mètode, a partir de dues aproximacions de l'arrel, x_0, x_1, serà:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1}$$

Exemple 5.3 *Calculeu, aplicant el mètode de la secant, una aproximació amb 4 decimals exactes de la solució de l'equació* $\cos x - x = 0$ *a l'interval* $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La localització i la separació de l'arrel ja està feta al primer exemple, per tant, passem directament a aplicar el mètode iteratiu.

Considerem $f(x) = \cos x - x$

Iniciem el procés amb $x_0 = 0 \quad i \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$ i l'aturem quan :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

Construïm la següent taula d'iterats:

$$x_{n+1} = x_n - (\cos x_n - x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{(\cos x_n - x_n) - (\cos x_{n-1} - x_{n-1})}, \qquad n \geq 1$$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0	
1	1.57079632	1.57079632
2	0.6110154704	0.9597808566
3	0.7232695414	0.1122540710
4	0.7395671070	0.0162975656
5	0.7390834365	0.0004836705
6	0.7390851330	0.16965×10^{-5}

L'aproximació de l'arrel serà $\alpha \simeq 0.7390851330$

5.1.5 Mètode del punt fix

Tots els mètodes exposats fins ara estaven indicats per a resoldre equacions del tipus $f(x) = 0$, però que poden convertir-se en problemes de la forma $x = g(x)$. Amb aquest nou plantejament, la interpretació geomètrica queda reduïda a trobar un punt fix de la nova funció $g(x)$. La idea serà, partint d'un punt inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, calcular successives imatges: $x_0, g(x_0), g^2(x_0), ..., g^n(x_0)$, obtenint una successió, el límit de la qual, és el punt fix que busquem. Quan ens restringim a un interval I, és necessari que $g(x) \in I,\ \forall x \in I$ per tal que es pugui realitzar el procés $x_{n+1} = g(x_n)$.

Sota quines condicions una funció $g : I \to I$ tindrà un punt fix?

Quan la successió d'imatges successives convergirà cap aquest punt fix?

Teorema 5.3 *(del punt fix)*

Sigui $g : [a, b] \to [a, b]$, $g \in C^1[a, b]$ *tal que* $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b]$. *Aleshores* g *té un únic punt fix i la successió donada per:*

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

convergeix cap a α *i* $|x_n - \alpha| \leq L^n(b - a)$.

Exemple 5.4 *Raoneu quines d'aquestes funcions tenen un únic punt fix a l'interval que s'indica:*

(a) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ *en I=[-1,1]*

(b) $h(x) = 3^{-x}$ *en I=[0,1]*

a) Comprovem si es verifiquen les hipòtesis del teorema del punt fix per a $g(x)$.

- $g(x) \in C^1([-1,1])$
- $g([-1,1]) \subset [-1,1]$

  Per demostrar aquest apartat cerquem els extrems absoluts de $g(x)$ en $I = [-1,1]$:

  Apliquem el *teorema de Weierstrass:*

  $$g \text{ contínua en } I = [-1,1] \Rightarrow \exists \max g(x) \ i \ \exists \min g(x) \ \forall x \in [-1,1]$$

  - Punts crítics de l'interval obert:
    $g'(x) = \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-1,1)$
    $\nexists g'(x)$: no hi ha candidats
  - Extrems de l'interval
    $x = -1$
    $x = 1$
  - Imatges dels candidats
    $g(0) = -\dfrac{1}{3}$
    $g(-1) = 0$
    $g(1) = 0$
  - Per tant, $-\dfrac{1}{3} \leq g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-1,1]$, i com que $[-\dfrac{1}{3}, 0] \subset [-1,1]$, d'aquí deduïm que $g([-1,1]) \subset [-1,1]$

- $|g'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in [-1,1]$

  $g'(x) = \dfrac{2}{3}x$

  $|g'(x)| = \left|\dfrac{2}{3}x\right| \leq \dfrac{2}{3} < 1$ ja que $x \in [-1,1]$.

  En aquest cas, doncs, $L = \dfrac{2}{3} < 1$

Podem assegurar que existirà un únic punt fix de $g(x)$ en $I = [-1, 1]$.

b) Comprovem si es verifiquen les hipòtesis del teorema del punt fix per a $h(x)$.

- $h(x) \in C^1([0, 1])$
- $h([0, 1]) \subset [0, 1]$

  $h(x)$ és una funció decreixent, per tant:

  $$0 \le x \le 1 \Rightarrow h(1) \le h(x) \le h(0) \text{ és a dir:}$$

  $$\frac{1}{3} \le h(x) \le 1 \quad \forall x \in [0, 1],$$

  per tant, donat que $\left[\frac{1}{3}, 1\right] \subset [0, 1]$, podem deduir que $h([0, 1]) \subset [0, 1]$
- $|h'(x)| \le L < 1 \quad \forall x \in [0, 1]$

  $h'(x) = -3^{-x} \cdot \ln 3$

  $|h'(x)| = |-3^{-x} \cdot \ln 3| = 3^{-x} \cdot \ln 3 \le \ln 3 = |h'(0)| \simeq 1.098 > 1$ ja que $x \in [0, 1]$ i 3^{-x} és decreixent.

En aquest cas, aplicant el teorema del valor intermig a $h'(x)$, no podem assegurar l'existència d'un únic punt fix d'$h(x)$ en $I = [0, 1]$.

Exemple 5.5 *a) Quantes iteracions haurem de fer per obtenir una aproximació amb 4 decimals exactes de la solució de l'equació* $\cos x - x = 0$*, aplicant el mètode del punt fix a l'interval* $I = [0, 1]$*?.*

b) Calculeu els cinc primers iterats.

a) Comencem per comprovar que es verifiquen les hipòtesis del teorema del punt fix. Per a això caldrà, en primer lloc, transformar l'equació inicial en una del tipus $x = g(x)$.

Una possibilitat és escriure-la de la forma $x = \cos x$, on $g(x)$ serà, en aquest cas, la funció $\cos x$.

- $g(x) \in C^1([0, 1])$

- $g([0,1]) \subset [0,1]$
  $g(x) = \cos x$ és decreixent en $I = [0,1]$, per tant:
  $$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(0), \text{és a dir:}$$
  $$\cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0 \Leftrightarrow 0.54 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$
  i donat que $[0.54, 1] \subset [0,1]$ podem deduir que $g([0,1]) \subset [0,1]$

- $|g'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in [0,1]$
  $|g'(x)| = |-\sin x| = \sin x \leq \sin 1 = L < 1$, ja que la funció $\sin x$ és creixent en I.

  Així en aquest cas podem assegurar que existeix un únic punt fix de $g(x)$ en $I = [0,1]$.

Calculem ara el número d'iteracions per obtenir 4 decimals exactes. Per això farem servir el fet que:

$|x_n - \alpha| \leq L^n(b-a)$, on en el nostre cas, $L = \sin 1$, $a = 0$ i $b = 1$. Imposarem doncs:
$$L^n(b-a) \leq 0.5 \times 10^{-4}$$
$$(\sin 1)^n \leq 0.5 \times 10^{-4}$$
Si prenem logaritmes neperians obtenim:
$$n \ln(0.8414709) \leq \ln(5 \times 10^{-5}) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(5 \times 10^{-5})}{\ln(0.8414709)} \simeq 57.377$$
Per tant, podem assegurar la precisió demanada amb 58 iteracions.

b)Calculem ara els cinc primers iterats a partir de:
$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 0 \end{cases}$$
En el nostre cas la descripció del procés iteratiu vindrà donat per:
$$\begin{cases} x_0 = 0.5 \\ x_{n+1} = \cos x_n \quad n \geq 0 \end{cases}$$
Obtenim els següents resultats:
$$\begin{aligned} x_1 &= \cos x_0 = 0.877582568 \\ x_2 &= \cos x_1 = 0.639012494 \\ x_3 &= \cos x_2 = 0.8026851 \\ x_4 &= \cos x_3 = 0.694778026 \\ x_5 &= \cos x_4 = 0.768195831 \end{aligned}$$

5.1.6 Equacions polinòmiques

Per a l'obtenció dels zeros de polinomis de grau 2, 3 ó 4 es coneixen fórmules generals. En canvi, per a graus superiors, aquestes fórmules no existeixen. Així, si eliminem els casos en què la factorització del polinomi apareix com a evident, convindrà utilitzar mètodes numèrics per a determinar-ne els zeros.

Teorema 5.4 *(de Gerschgorin)*

Donat $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *amb* $a_i \in R$ *o* $a_i \in C$ *i* $a_n \neq 0$. *Sigui z una arrel de P(x):*

1.Si $A = max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n-1}|\}$, *llavors:*

$$|z| < 1 + \frac{A}{|a_n|} = R$$

2.Si $B = max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}$, *llavors:*

$$|z| > \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} = r$$

Aquest teorema ens proporciona una fitació del mòdul de les arrels, és a dir, si z és una arrel de P(x), llavors $r < |z| < R$. *En particular, si z és una arrel positiva tenim* $r < z < R$ *i si z és una arrel negativa, llavors,* $-R < z < -r$.

Exemple 5.6 *Trobeu una fita de les arrels del següent polinomi* $P(x) = x^3 + 3x + 1$.

Si apliquem el teorema anterior tenim:

$$\begin{cases} A = max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n-1}|\} = \max\{1, 3, 0\} = 3 \\ R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|} = 1 + \dfrac{3}{1} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} = \max\{3, 0, 1\} = 3 \\ r = \dfrac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_0|}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{3}{1}} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Per tant, podem assegurar que si z és una arrel de $P(x)$, llavors $\frac{1}{4} < |z| < 4$. Així, per a les arrels positives tindrem que $\frac{1}{4} < z < 4$ i per a les negatives $-4 < z < -\frac{1}{4}$.

Teorema 5.5 *(de Descartes)*

El nombre d'arrels positives d'un polinomi P(x), comptades tantes vegades com la seva multiplicitat, és, com a màxim, el número de canvis de signe dels seus coeficients i té la mateixa paritat. Per a trobar el número màxim d'arrels negatives s'aplica el mateix resultat a P(-x).

Exemple 5.7 *Determineu el número màxim d'arrels positives i d'arrels negatives del polinomi* $P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 5x + 1$.

Estudiem el número de canvis de signe dels coeficients del polinomi $P(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & & 2 & & -5 & & 1 \\ \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\ & \text{nc} & & \text{c} & & \text{c} & \end{array}$$

Tenim 2 canvis de signe i això ens permet afirmar que $P(x)$ té com a màxim 2 arrels positives, és a dir, pot tenir-ne 2, 1 o cap; però, com que el número de les arrels ha de tenir la mateixa paritat que el número de canvis, només queden 2 opcions: o té 2 arrels positives o no en té cap.

Estudiem el número de canvis de signe dels coeficients del polinomi $P(-x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} -3 & & -2 & & 5 & & 1 \\ \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\ & \text{nc} & & \text{c} & & \text{nc} & \end{array}$$

Tenim 1 canvi de signe. Aplicant el raonament anterior podem afirmar que $P(x)$ tindrà, com a màxim, 1 arrel negativa, és a dir, pot tenir-ne una o cap; però com que el número de les arrels ha de tenir la mateixa paritat que el número de canvis , tant sols queda una possibilitat, només en té una.

5.2 Problemes resolts

Problema 5.1 *Comproveu que l'equació* $x - e^{\frac{1}{x}} = 0$ *té una única solució. Aproximeu-la amb un decimal exacte pels mètodes de:*

(a) *Bisecció. Quants passos caldria per aconseguir 6 decimals exactes?*

(b) *Newton-Raphson*

(c) *Secant*

Comprovem en primer lloc que, efectivament, l'equació té una única arrel.

Si fem una representació gràfica aproximada observem que es troba a l'interval $[1, 2]$.

$f(x) = x - e^{\frac{1}{x}}$ és contínua i derivable en $R - \{0\}$.

$f'(x) = 1 + e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$

Com a conseqüència del teorema de Rolle, si $f'(x) = 0$ no té cap solució, llavors $f(x) = 0$ com a màxim en tindrà 1.

Localitzem l'arrel aplicant el teorema de Bolzano:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ contínua en } I = [1, 2] \\ f(1) = 1 - e < 0 \\ f(2) = 2 - e^{0.5} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (1, 2) \mid f(\alpha) = 0$$

a) Apliquem ara el mètode de bisecció tenint present que cada iterat s'obté fent el punt mig de l'interval en el qual ens trobem a cada pas:

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad on \quad a_1 = 1 \quad i \quad b_1 = 2.$$

Aturarem el procés iteratiu quan:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-1}$$

Construïm la següent taula:

n	a_n	b_n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$	$sig(f(x_n))$
1	1	2	1.5		$-$
2	1.5	2	1.75	0.25	$-$
3	1.75	2	1.875	0.125	$+$
4	1.75	1.875	1.8125	0.0625	$+$
5	1.75	1.8125	1.78125	0.03125	$-$

L'aproximació amb un decimal exacte serà :

$$x_5 = 1.78125 \simeq \alpha$$

Calculem ara el nombre de passos que cal fer per obtenir 6 decimals exactes. Això equival a imposar:

$$|x_n - \alpha| \leq 0.5 \times 10^{-6} \quad n?$$

Sabem que aplicant el mètode de bisecció una fita de l'error ve donada per:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

En el nostre cas $a = 1$ i $b = 2$ i per tant, serà suficient imposar:

$$\frac{b-a}{2^n} \leq 0.5 \times 10^{-6} \quad n?$$

Fent operacions obtenim:

$$\frac{1}{2^n} \leq 5 \times 10^{-7} \Longleftrightarrow n \geq \frac{7\ln 10 - \ln 5}{\ln 2} \simeq 20.93$$

Amb $n = 21$ iteracions tindrem la precisió desitjada.

b) Apliquem ara el mètode de Newton-Raphson amb $x_0 = 1.5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

Aturarem el procés quan:

$$|f(x_n)| \leq 0.5 \times 10^{-1}$$

Tenint present que $f(x) = x - e^{\frac{1}{x}}$ i que $f'(x) = 1 + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$, obtenim la següent taula d'iterats:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{\frac{1}{x_n}}}{1 + e^{\frac{1}{x_n}} \cdot \frac{1}{x_n^2}}, \; n \geq 0$$

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1.5	0.4477
1	1.739986998	0.0366
2	1.763077568	0.227×10^{-3}

Donem com a vàlida l'aproximació $x_1 = 1.739986998 \simeq \alpha$

c) Apliquem ara el mètode de la secant a partir de $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n).\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \ , \quad n \geq 1$$

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - e^{\frac{1}{x_n}}).\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n - e^{\frac{1}{x_n}}) - (x_{n-1} - e^{\frac{1}{x_{n-1}}})} \ , \quad n \geq 1$$

Aturarem el procés quan :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-1}$$

Obtenim la següent taula d'iterats:

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	
1	2	1
2	1.830264098	0.169735902
3	1.759564633	0.070699465
4	1.763285646	0.003721013

Donem com a vàlida l'aproximació $x_4 = 1.763285646 \simeq \alpha$

Problema 5.2 *Volem calcular $\sqrt[3]{7}$ amb cinc decimals exactes:*

- *(a) Quants iterats hauríem de fer si utilitzessim el mètode de bisecció començant amb un interval de longitud 1?*
- *(b) Calculeu l'aproximació desitjada pel mètode de Newton-Raphson.*
- *(c) Calculeu l'aproximació desitjada pel mètode de la secant.*

a) Si la longitud de l'interval $[a, b]$ ha de ser 1, això vol dir que $b - a = 1$. Si volem una aproximació amb 5 decimals exactes haurem d'imposar:

$$|x_n - \alpha| \leq 0.5 \times 10^{-5} \quad n?$$

Fent servir la fita de l'error d'aquest mètode, tenim:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

En el nostre cas, donat que $b - a = 1$, el problema queda reduït a:

$$\frac{1}{2^n} \leq 0.5 \times 10^{-5} \Longleftrightarrow 2^{-n} \leq 0.5 \times 10^{-5} \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln 2 + 5 \ln 10}{\ln 2} \simeq 17.6$$

Amb $n = 18$ iteracions tenim la precisió desitjada.

b) Per aplicar Newton-Raphson començarem per localitzar i separar l'arrel.

Calcular $\sqrt[3]{7}$ és equivalent a trobar un zero de la funció $f(x) = x^3 - 7$. Si fem una representació gràfica aproximada veiem que l'arrel es troba a l'interval $[1, 2]$.

- Localització de l'arrel (apliquem el teorema de Bolzano):

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [1,2] \\ f(1) = -6 < 0 \\ f(2) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (1,2) \mid f(\alpha) = 0$$

- Separació de l'arrel (apliquem el teorema de Rolle):

  $f'(x) = 3x^2 \neq 0 \quad \forall x \in (1,2) \Rightarrow f(x) = 0$ com a màxim té una arrel a l'interval [1,2]

- Aplicació del mètode iteratiu a partir de $x_0 = 1.5$

  Aturarem el procés quan $|f(x_n)| \leq 0.5 \times 10^{-5}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 7}{3x_n^2},\ n \geq 0$$

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1.5	3.625
1	2.037037037	1.452725
2	1.920338741	0.08163
3	1.912959720	0.31328×10^{-3}
4	1.912931183	0.248×10^{-8}

L'aproximació serà $\alpha \simeq 1.912931183$

c) Si apliquem ara el mètode de la secant partint de $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$, obtenim la següent taula:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\quad n \geq 1$$

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^3 - 7) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n^3 - 7) - (x_{n-1}^3 - 7)},\quad n \geq 1$$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	
1	2	1
2	1.857142857	0.142857143
3	1.910420475	0.053277618
4	1.913005916	0.002585441
5	1.912931085	0.000074831
6	1.912931183	0.98×10^{-7}

L'aproximació serà $\alpha \simeq 1.912931183$

Problema 5.3 *Volem resoldre l'equació $x + \ln x = 0$ pel mètode del punt fix. Podem triar les següents fórmules iteratives:*

1. $x_{n+1} = -\ln x_n$
2. $x_{n+1} = e^{-x_n}$
3. $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

(a) Busqueu un interval en el què es pugui assegurar l'existència d'una arrel.

(b) Quines de les fórmules anteriors poden ser usades?. Quina és la millor?.

(c) *Quants passos cal fer amb la fórmula més bona per tal d'obtenir una precisió de* 10^{-5}*?. Feu-ne un parell.*

a) En primer lloc busquem un interval en el qual es pugui assegurar l'existència d'una arrel.

Considerem la funció $f(x) = x + \ln x$ que és contínua i derivable en $(0, +\infty)$.

Aplicant el teorema de Bolzano obtenim:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(0.5) = -0.19 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (0.5, 1) \mid \ f(\alpha) = 0$$

b) Comprovem quines de les tres fórmules són equivalents a resoldre l'equació inicial i quines verifiquen les condicions del teorema del punt fix.

1. $x_{n+1} = -\ln x_n$

   L'equació inicial era $x + \ln x = 0$. Si aillem x obtenim $x = -\ln x$ i d'aquí s'obté la fórmula recurrent $x_{n+1} = -\ln x_n$.

   Per comprovar les condicions del teorema del punt fix, haurem de considerar que $g(x) = -\ln x$.

   - $g(x) \in C^1([0.5, 1])$
   - $g([0.5, 1]) \subset [0.5, 1]$
     $g(x) = -\ln x$
     $g'(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ en $I = [0.5, 1]$. Per tant, $g(x)$ és decreixent en I, és a dir:
     $$0.5 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(0.5)$$
     i per tant,
     $$\forall x \in [0.5, 1] \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq -\ln 0.5 \simeq 0.69$$
     Tenim doncs que la segona condició no es verifica ja que $[0, 0.69] \not\subseteq [0.5, 1]$.
   - $|g'(x)| \leq L < 1 \ \forall x \in [0.5, 1]$
     $|g'(x)| = \dfrac{1}{x} \qquad \forall x \in [0.5, 1]$
     $|g'(x)| = \dfrac{1}{x} \leq 2$ ja que $\dfrac{1}{x}$ és decreixent i $x \in [0.5, 1]$.
     Per tant, aquesta condició tampoc es verifica.

2. $x_{n+1} = e^{-x_n}$

   L'equació inicial era $x + \ln x = 0$ que és equivalent a $\ln x = -x$. Si prenem exponencials obtenim $x = e^{-x}$ que ens permet establir la recurrència $x_{n+1} = e^{-x_n}$.

   Per comprovar les condicions del teorema del punt fix haurem de considerar que $g(x) = e^{-x}$.

   - $g(x) \in C^1([0.5, 1])$
   - $g([0.5, 1]) \subset [0.5, 1]$
     $g(x) = e^{-x}$ és decreixent , per tant:
     $0.5 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(0.5)$, és a dir:
     $\forall x \in [0.5, 1] \qquad 0.36 \simeq e^{-1} \leq g(x) \leq e^{-0.5} \simeq 0.6$
     Tenim doncs que la segona condició tampoc es verifica ja que $[e^{-1}, e^{-0.5}] \not\subseteq [0.5, 1]$.
   - $|g'(x)| \leq L < 1 \; \forall x \in [0.5, 1]$
     Tenim en compte que e^{-x} és decreixent podem escriure:

     $$|g'(x)| = e^{-x} \leq e^{-0.5} \simeq 0.6 < 1$$

     Així $L = e^{-0.5} < 1$

3. $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

   A partir de les dues fórmules anteriors podem deduir-ne aquesta:

   $$\left.\begin{array}{l} x = -\ln x \\ x = e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = e^{-x} - \ln x \Leftrightarrow 2x = e^{-x} + x \Leftrightarrow x = \frac{e^{-x} + x}{2}$$

   Per comprovar les condicions del teorema del punt fix haurem de considerar que $g(x) = \dfrac{e^{-x} + x}{2}$.

   - $g(x) \in C^1([0.5, 1])$
   - $g([0.5, 1]) \subset [0.5, 1]$
     Estudiem els extrems absoluts de $g(x)$ en $I = [0.5, 1]$.
     - Extrems relatius de l'obert $(0.5, 1)$
       $g'(x) = \dfrac{-e^{-x} + 1}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (0.5, 1)$
     - Extrems de l'interval, $x = 0.5$, $x = 1$

– Avaluem les imatges dels candidats
$g(0.5) \simeq 0.55$ ens proporciona el mínim absolut
$g(1) \simeq 0.68$ ens proporciona el màxim absolut

Per tant, podem assegurar que $\forall x \in [0.5, 1] \;\; g(0.5) \leq g(x) \leq g(1)$ i es compleix la segona condició del teorema, ja que $[g(0.5), g(1)] \subset [0.5, 1]$.

- $|g'(x)| \leq L < 1 \; \forall x \in [0.5, 1]$
  Tenint present que e^{-x} és decreixent,
  $$0.5 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0.5} < 1$$
  i que a l'apartat anterior hem calculat $g'(x)$ podem escriure:
  $|g'(x)| = \left|\dfrac{-e^{-x}+1}{2}\right| = \dfrac{-e^{-x}+1}{2} \leq \dfrac{-e^{-1}+1}{2} < 1.$
  Així $L = \dfrac{-e^{-1}+1}{2} \simeq 0.3160602 < 1.$

c)La fórmula més bona és, doncs, la tercera. Per saber quants passos cal fer per obtenir una precisió de 10^{-5} haurem d'imposar, fent servir la fita de l'error d'aquest mètode, que:

$$|x_n - \alpha| \leq L^n (b - a)$$

En el nostre cas $a = 0.5,\; b = 1$ i $L = 0.317$

$$|x_n - \alpha| \leq (0.317)^n \times 0.5 \leq 10^{-5}$$

Prenent logaritmes neperians obtenim:

$$n \geq \frac{\ln(2 \times 10^{-5})}{\ln 0.317} \simeq 9.41$$

Llavors amb 10 iteracions en tenim suficient.

Calculem ara un parell d'iterats a partir de la fórmula $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$ i de $x_0 = 0.5$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{0.5 + e^{-0.5}}{2} = 0.553265329 \\ x_2 &= \frac{x_1 + e^{-x_1}}{2} = 0.56416714 \end{aligned}$$

Problema 5.4 *Trobeu el mínim de la funció* $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x^2}$, $x > 0$.

$f(x)$ és contínua en $D = \mathbb{R}$-$\{0, (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$. Nosaltres ens restringirem a $x \in D$ amb $x > 0$.

Per trobar el seu mínim calcularem els seus punts crítics:

- $f'(x) = 0$
  $f'(x) = \dfrac{x - \sin 2x}{x^3 \cos^2 x} = 0$
  Hem de resoldre l'equació $x - \sin 2x = 0$, $x > 0$. Si fem una gràfica de $f(x) = x - \sin 2x$, observem que talla l'eix OX en un sol punt (estem considerant $x > 0$).

  - Localitzarem l'arrel aplicant el teorema de Bolzano a la funció $g(x) = x - \sin 2x$ que és contínua i derivable en $\mathbb{R}$.
    $$\left.\begin{array}{l} g(\frac{\pi}{4}) < 0 \\ g(\frac{\pi}{3}) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \ |g(\alpha) = 0$$
  - Separarem l'arrel aplicant el teorema de Rolle
    $g'(x) = 1 - 2\cos 2x \neq 0 \quad \forall x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow g(x) = 0$ té com a màxim una arrel en I
  - Resoldrem $x - \sin 2x = 0$ aplicant el mètode de Newton-Raphson a partir de $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
    $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin 2x_n}{1 - 2\cos 2x_n}, \ n \geq 0$$

Obtenim els següents iterats:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 0.9504977971 \\
x_3 &= 0.9477558227 \\
x_4 &= 0.9477471337 \\
x_5 &= 0.9477471336
\end{aligned}$$

La solució de l'equació amb 9 decimals exactes serà $\alpha = 0.9477471336$

- $\nexists f'(x)$

  Aquest cas només es presenta quan $x = 0$, però estem suposant que $x > 0$.

Per tant, l'únic candidat a extrem de la funció $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x^2}$ és $\alpha = 0.9477471336$. Per comprovar que efectivament es tracta d'un mínim veiem que $f''(\alpha) > 0$.

$$f''(x) = 2\frac{x^2\tan(x) + x^2\tan^3(x) - 2x - 2x\tan^2(x) + 3\tan(x)}{x^4}$$

$$f''(\alpha) = 5.651264726 > 0$$

Problema 5.5 *Trobeu el valor de la constant $c \in \mathbb{R}$ tal que les següents corbes: $y = 2\sin x$ i $y = \ln x - c$ siguin tangents en un punt pròxim a 8. Trobeu les coordenades del punt de contacte .*

Aquest enunciat queda reduït a imposar les següents condicions:

1. Les dues corbes s'han de tallar, és a dir:

$$2\sin x = \ln x - c$$

2. Els pendents de les rectes tangents en el punt de tall han de ser els mateixos:

$$y_1' = y_2' \Leftrightarrow 2\cos x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2\cos x - \frac{1}{x} = 0$$

- Començarem per resoldre la condició 2 amb 6 decimals exactes partint de $x_0 = 8$ fent servir el mètode de Newton-Raphson. El mètode iteratiu és:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0.$$
Ens aturarem quan:
$$|x_n - x_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-6}$$
En el nostre cas tenim:
$$f(x) = 2\cos x - \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = -2\sin x + \frac{1}{x^2}$$
Substituint en el procés iteratiu obtenim $\alpha = 7.7897506$ amb 6 decimals exactes

- Per trobar el valor de c farem servir la condició 1 en el punt de tall α :
$$2\sin\alpha = \ln\alpha - c$$
Aillant c, tenim:
$$c = \ln\alpha - 2\sin\alpha = 0.056933$$

- El punt de contacte entre les dues corbes és
$$(7.7897506, 1.9959)$$

Problema 5.6 *Trobeu el valor $k \in R$ per tal que la funció*
$$y = ke^{\frac{x}{10}} - \ln x$$
sigui tan*gent a l'eix OX.*

A l'igual que en el problema anterior, aquest enunciat el podem resumir en dues condicions:

1. Les dues corbes s'han de tallar, és a dir:
$$ke^{\frac{x}{10}} - \ln x = 0 \Longleftrightarrow ke^{\frac{x}{10}} = \ln x$$

2. El pendent de la recta tangent a la corba ha de ser 0:

$$y' = 0 \Longleftrightarrow \frac{k}{10}e^{\frac{x}{10}} - \frac{1}{x} = 0 \Longleftrightarrow ke^{\frac{x}{10}} = \frac{10}{x}$$

A partir de (1) i (2) obtenim la següent equació:

$$\ln x = \frac{10}{x} \Longleftrightarrow x \ln x - 10 = 0$$

- Localització de l'arrel fent servir el teorema de Bolzano aplicat a la funció $f(x) = x \ln x - 10$ que és contínua i derivable en $(0, +\infty)$.

  $\left.\begin{array}{l} f(5) = 5\ln 5 - 10 < 0 \\ f(6) = 6\ln 6 - 10 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (5,6) \mid f(\alpha) = 0$

- Separació de l'arrel fent servir el teorema de Rolle:

  $f'(x) = \ln x + 1 \neq 0 \; \forall x \in (5,6) \Rightarrow f(x) = 0$ té com a màxim una arrel en I.

Apliquem el mètode de Newton-Raphson partint de $x_0 = 6$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

En el nostre cas tenim:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln x - 10 \\ f'(x) &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

Aplicant el procés iteratiu arribem a $\alpha = 5.7289256$.

Per obtenir finalment el valor de k farem servir la condició 1 avaluat en el punt de tangència α :

$$ke^{\frac{\alpha}{10}} = \ln \alpha \Rightarrow k = \frac{\ln \alpha}{e^{\frac{\alpha}{10}}} = 0.9842892$$

Problema 5.7 *Volem trobar un interval de longitud 1 sobre el qual la funció* $f(t) = \dfrac{1}{t^4 - 0.5t + 1}$ *tingui àrea màxima, seguint els següents passos:*

(a) *Plantegeu el problema i desenvolupeu-lo fins que es tracti de buscar un zero d'una funció polinòmica a l'interval* $[-0.5, 0]$.

(b) *Plantegeu dos mètodes del punt fix per resoldre l'equació anterior. Podeu assegurar que són convergents?. Feu tres iterats per al millor.*

(c) *Resoleu l'equació pel mètode de Newton-Raphson amb tres decimals exactes.*

a)L'interval de longitud 1 que busquem l'escriurem com $[a, a+1]$. L'àrea vindrà donada per la integral:

$$A = \int_a^{a+1} \frac{1}{x^4 - 0.5x + 1} dx$$

La primera condició d'àrea màxima vindrà donada per:

$$A'(a) = \frac{1}{(a+1)^4 - 0.5(a+1) + 1} - \frac{1}{a^4 - 0.5a + 1} = 0$$

Si fem les operacions obtenim la següent equació polinòmica:

$$4a^3 + 6a^2 + 4a + 0.5 = 0$$

- Localitzarem una arrel a partir del teorema de Bolzano a partir de $p(a) = 4a^3 + 6a^2 + 4a + 0.5$

  $$\left.\begin{array}{l} p(-0.5) = -0.5 < 0 \\ p(0) = 0.5 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (-0.5, 0)\, |p(\alpha) = 0$$

- Separarem l'arrel a partir del teorema de Rolle:

  $p'(a) = 12a^2 + 12a + 4 \neq 0 \Rightarrow p(a) = 0$ té com a màxim una arrel

b)L'equació de partida és: $4x^3 + 6x^2 + 4x + 0.5 = 0$. Podem considerar els següents mètodes:

1. $x = \frac{1}{4}(-0.5 - 6x^2 - 4x^3) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}x^2 - x^3$ i a partir d'aquí el procés iteratiu seria:

   $$x_{n+1} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}x_n^2 - x_n^3$$

   En aquest cas $g(x) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}x^2 - x^3$. Es verifiquen les condicions del teorema?

   - $g(x) \in C^1([-0.5, 0])$

- $g([-0.5, 0]) \subset [-0.5, 0]$
  Estudiem els extrems absoluts de $g(x)$ en $I = [-0.5, 0]$.
  - Extrems relatius de l'obert $(-0.5, 0)$
    $g'(x) = -3x - 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-0.5, 0) \\ x = -1 \notin (-0.5, 0) \end{cases}$
  - Extrems de l'interval, $x = -0.5$, $x = 0$
  - Avaluem les imatges dels candidats
    $g(-0.5) = -\dfrac{3}{8}$ ens proporciona el mínim absolut
    $g(0) = -\dfrac{1}{8}$ ens proporciona el màxim absolut

  Per tant $\forall x \in [-0.5, 0] \quad g(-0.5) \leq g(x) \leq g(0)$ i es compleix la segona condició del teorema ja que $[g(-0.5), g(0)] \subset [-0.5, 0]$.
- $|g'(x)| \leq L < 1 \ \forall x \in [-0.5, 0]$
  $g'(x) = -3x - 3x^2 = -3x(x + 1)$
  Definim $G(x) = -3x - 3x^2$ i estudiem els seus extrems absoluts en $I = [-0.5, 0]$
  - Extrems relatius de l'obert $(-0.5, 0)$:
    $G'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = -0.5 \notin (-0.5, 0)$
  - Extrems de l'interval $x = -0.5$, $x = 0$
  - Avaluació de les imatges:
    $G(-0.5) = \dfrac{3}{4}$ correspon al màxim absolut
    $G(0) = 0$ correspon al mínim absolut

  A partir d'aquests càlculs podem assegurar que :

  $$\forall x \in [-0.5, 0] \quad 0 \leq |g'(x)| \leq \frac{3}{4} < 1$$

  i, per tant, es verifica la condició.
  Així doncs, $L = \dfrac{3}{4} < 1$

2. $x = -4x^3 - 6x^2 - 3x - 0.5$ i a partir d'aquí el procés iteratiu seria:

$$x_{n+1} = -4x_n^3 - 6x_n^2 - 3x_n - 0.5$$

En aquest cas $g(x) = -4x^3 - 6x^2 - 3x - 0.5$. Es verifiquen les condicions del teorema?

- $g(x) \in C^1([-0.5, 0])$

- $g([-0.5, 0]) \subset [-0.5, 0]$
  Estudiem els extrems absoluts de $g(x)$ en $I = [-0.5, 0]$.
  - Extrems relatius de l'obert $(-0.5, 0)$
    $g'(x) = -12x^2 - 12x - 3 = 0 \Rightarrow x = -0.5 \notin (-0.5, 0)$
  - Extrems de l'interval, $x = -0.5$, $x = 0$
  - Avaluem les imatges dels candidats
    $g(-0.5) = 0$ ens proporciona el màxim absolut
    $g(0) = -0.5$ ens proporciona el mínim absolut

  Per tant $\forall x \in [-0.5, 0]$ $\;g(0) \leq g(x) \leq g(-0.5)$ i es compleix la segona condició del teorema ja que $[g(0), g(-0.5)] \subset [-0.5, 0]$.
- $|g'(x)| \leq L < 1$ $\forall x \in [-0.5, 0]$
  $g'(x) = -12x^2 - 12x - 3$
  $|g'(x)| = |12x^2 + 12x + 3|$
  Defineixo $G(x) = 12x^2 + 12x + 3$ i estudio els seus extrems absoluts en $I = [-0.5, 0]$
  - Extrems relatius de l'obert $(-0.5, 0)$:
    $G'(x) = 0 \Leftrightarrow 24x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -0.5 \notin (-0.5, 0)$
  - Extrems de l'interval $x = -0.5$, $x = 0$
  - Avaluació de les imatges:
    $G(-0.5) = 0$ correspon al mínim absolut
    $G(0) = 3$ correspon al màxim absolut

  A partir d'aquests càlculs podem assegurar que :

  $$\forall x \in [-0.5, 0] \quad 0 \leq |g'(x)| \leq 3$$

  i per tant no es verifica la condició.

Els tres iterats que ens demanen els haurem de fer a partir de la primera fórmula

$$x_{n+1} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}x_n^2 - x_n^3,\ n \geq 0$$

Si comencem amb $x_0 = 0$ obtenim:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.125 \\ x_2 &= -0.1540432 \\ x_3 &= -0.1569386 \end{aligned}$$

c) Hem de resoldre amb 3 decimals exactes la mateixa equació $4x^3 + 6x^2 + 4x + 0.5 = 0$ aplicant el mètode de Newton-Raphson. L'interval, a l'igual que en els apartats anteriors, serà $I = [-0.5, 0]$.

Iniciem el procés iteratiu amb $x_0 = -0.5$ i obtenim els següents resultats:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4x_n^3 + 6x_n^2 + 4x_n + 0.5}{12x_n^2 + 12x_n + 4}, n \geq 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -0.125 \\ x_3 &= -0.1569767442 \\ x_4 &= -0.1588302087 \\ x_5 &= -0.1588360980 \end{aligned}$$

5.3 Problemes resolts amb Maple

Maple V permet calcular directament les solucions d'una equació a partir de la instrucció:

fsolve*(equació, variable);*

En aquest capítol treballarem amb aquesta comanda, així com amb els mètodes iteratius descrits en ell, ajudant-nos, a la vegada, de la instrucció

plot*(f(x),x=a..b);*

i del bucle **for-while.**

Problema 5.8 *Comproveu que l'equació $e^x = 2 - x$ té una única solució i doneu-ne una aproximació.*

- Definim la funció associada a l'equació $e^x - 2 + x = 0$.

  > f:=x->**evalf**(exp(x)-2+x);

  $$f := x \rightarrow evalf\ (e^x - 2 + x)$$

- Representem gràficament la funció en un interval prou ampli

> **plot**(f(x),x=-5..5);

- Observem que existeix una arrel a l'interval $[-2, 2]$. Repetim la gràfica en aquest interval per poder-la localitzar millor.

  > **plot**(f(x),x=-2..2);

- Ara podem dir que l'arrel es troba a l'interval $[0, 1]$ i ho comprovem verificant les hipòtesi del teorema de Bolzano.

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\text{ és contínua en } R\text{, en particular en } [0,1]. \\ f(0)\cdot f(1) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (0,1) \,|\, f(\alpha) = 0$$

- Comprovem, a partir del teorema de Rolle, que la solució és única. Per a això estudiem els zeros de $f'(x)$.

>f1:=**D**(f);

$$f1 := x \to evalf\ (e^x + 1)$$

Observem que $f1(x) > 0\ \forall x \in R$, per tant, l'equació inicial tindrà com a màxim una solució, que ja hem localitzat a l'apartat anterior.

- Trobem ara una aproximació de la solució directament a partir de la instrucció

  fsolve *(equació,variable)*

  >a:=**fsolve**(exp(x)-2+x=0,x);

$$a := .4428544010$$

Problema 5.9 *Aproximeu la solució de l'equació* $e^x = 2 - x$ *amb 3 decimals exactes pel mètode de Newton-Raphson.*

Tenint en compte el problema anterior on ja hem definit la funció i on hem determinat l'interval que conté la solució, a partir del valor inicial $x_0 = 0$ (punt de l'interval$[0, 1]$) calculem els successius iterats aplicant la fórmula recurrent del mètode amb un bucle **for-while.**

> x[0]:=0;

error:=**abs(**x[0]-a);

$$x_0 \ : \ = 0$$
$$error \ : \ = .4428544010$$

> **for** i **from** 0 **to** 20 **while** error>0.5*10^(-3) **do**

x[i+1]:=x[i]-f(x[i])/**D**(f)(x[i]);

error:=**abs**(x[i+1]-a);

od;

$$x_1 \ : \ = .5000000000$$
$$error \ : \ = .057145599$$
$$x_2 \ : \ = .4438516719$$
$$error \ : \ = .00099727$$
$$x_3 \ : \ = .4428547037$$
$$error \ : \ = .000000302$$

La instrucció **for-while** permet aturar el procés iteratiu quan es deixa de complir la condició del while o quan s'arriba al màxim nombre d'iterats. En aquest cas, observem que amb 3 iterats en tenim prou per obtenir l'aproximació de la solució amb la precisió desitjada.

Problema 5.10 *Aproximeu la solució de l'equació $e^x - 2 + x = 0$ amb 3 decimals exactes aplicant el mètode de la secant.*

Construïm un bucle **for-while** per descriure el mètode iteratiu, partint dels valors inicials $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$.

```
> x[0]:=0;
  x[1]:=1;
  error:=infinity;
```

$$\begin{aligned} x_0 &:= 0 \\ x_1 &:= 1 \\ error &:= \infty \end{aligned}$$

```
> for i from 1 to 20 while error>0.5*10^(-3) do
    x[i+1]:=x[i]-f(x[i])*(x[i]-x[i-1])/(f(x[i])-f(x[i-1]));
    error:=abs(x[i+1]-x[i]);
  od;
```

$$\begin{aligned} x_2 &:= .3678794412 \\ error &:= .6321205588 \\ x_3 &:= .4300563617 \\ error &:= .0621769205 \\ x_4 &:= .4431457542 \\ error &:= .0130893925 \\ x_5 &:= .4428532663 \\ error &:= .0002924879 \end{aligned}$$

Observem que en aquest cas hem necessitat calcular 5 iterats per obtenir l'arrel amb la precisió desitjada.

Problema 5.11 *Aproximeu la solució de l'equació $e^x - 2 + x = 0$ amb 3 decimals exactes aplicant el mètode de bisecció.*

Construïm un bucle **for-while** per descriure el mètode iteratiu a partir de l'interval $[a,b]=[0,1]$.

>f:=x->exp(x)-2+x;

$$f := x \to e^x - 2 + x$$

>a[1]:=0;

$$a_0 := 0$$

>b[1]:=1;

$$b_0 := 1$$

>error:=infinity;

$$error := \infty$$

>c[0]:=a[1];

$$c_{-1} := 0$$

> **for** i **from** 1 **to** 10 **while** error>0.5*10^(-3) **do**

c[i]:=**evalf**((a[i]+b[i])/2);

fc:=**evalf**(f(c[i]));

fa:=**evalf**(f(a[i]));

if fc=0 **then** **print**('arrel exacta');**break**;**f**i;

if fa*fc<0 then a[i+1]:=a[i];b[i+1]:=c[i];

else a[i+1]:=c[i];b[i+1]:=b[i];

fi;

error:=**abs**(c[i]-c[i-1]);

od;

$$
\begin{array}{llll}
c_1 & : & = .5000000000 & error := .5000000000 \\
c_2 & : & = .2500000000 & error := .2500000000 \\
c_3 & : & = .3750000000 & error := .1250000000 \\
c_4 & : & = .4375000000 & error := .0625000000 \\
c_5 & : & = .4687500000 & error := .0312500000 \\
c_6 & : & = .4531250000 & error := .0156250000 \\
c_7 & : & = .4453125000 & error := .0078125000 \\
c_8 & : & = .4414062500 & error := .0039062500
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
c_9 & : & = .4433593750 & \quad error := .0019531250 \\
c_{10} & : & = .4423828125 & \quad error := .0009765625 \\
c_{11} & : & = .4428710938 & \quad error := .0004882813
\end{array}
$$

Problema 5.12 *Aproximeu la solució de l'equació $e^x - 2 + x = 0$ amb 3 decimals exactes aplicant el mètode del punt fix.*

Per poder aplicar aquest mètode hem d'escriure l'equació $f(x) = 0$ de la forma $x = g(x)$. En el nostre cas tenim

$$x = 2 - e^x$$

Igual que en els problemes anteriors, construirem un bucle **for-while** a partir d'un valor inicial x_0 que ens proporcionarà els diferents iterats.

Abans però, comprovarem si $g(x) = 2 - e^x$ verifica les hipòtesi del teorema del punt fix.

- $g \in C^1([0,1])$
- $g([0,1]) \subset [0,1]$

  Aquesta condició la comprovarem a partir de la gràfica de $g(x)$ en $[0,1]$.

  >g:=x->2-exp(x);

  $$g := x \to 2 - \exp(x)$$

  >**plot**(g(x),x=0..1);

  Veiem que aquesta condició no es verifica.

- $|g'(x)| \leq L < 1 \;\; \forall x \in [0,1]$

  >g1:=**D**(g);

  $$g1 := x \rightarrow -\exp(x)$$

  >**plot**({g1(x),-1,1},x=0..1);

  Aquesta propietat tampoc es verifica.

Escriurem l'equació inicial d'una altra manera per tal d'obtenir una nova funció $g(x)$ que compleixi les condicions del teorema.

$$e^x - 2 + x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 - x \Leftrightarrow x = \ln(2-x)$$

Considerem a partir d'ara $g(x) = \ln(2-x)$.

- $g \in C^1([0,1])$

- $g([0,1]) \subset [0,1]$

  Aquesta condició la comprovarem a partir de la gràfica de $g(x)$ en $[0,1]$.

  >g:=x->ln(2-x);

  $$g := x \rightarrow \ln(2-x)$$

>**plot**(g(x),x=0..1);

Observem que sí que es verifica la condició.

- $|g'(x)| \leq L < 1 \ \ \forall x \in [0,1]$

  >g1:=**D**(g);

$$g1 := x- > -\frac{1}{2-x}$$

  >**plot**({g1(x),-1,1},x=0..1);

Observem que $g1(1) = g'(1) = -1$, per tant, aquesta condició no es verifica. Intentem localitzar l'arrel en un interval més petit. Repetim la gràfica de $f(x)$ (problema 5.8) a l'interval $[0,1]$.

>**plot**(f(x),x=0..1);

Prenem com a nou interval [0,0.8].

- $g \in C^1([0, 0.8])$
- $g([0, 0.8]) \subset [0, 0.8]$

  >**plot**(g(x),x=0..0.8);

La condició es verifica.

- $|g'(x)| \leq L < 1 \ \ \forall x \in [0, 0.8]$

>**plot**({g1(x),-1,1},x=0..0.8);

Ara veiem que, efectivament, es compleix la condició.

Per tant, considerant $g(x) = \ln(2-x)$ i $I = [0, 0.8]$ el mètode iteratiu definit pel mètode del punt fix per

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) = \ln(2 - x_n), n \geq 0 \end{array} \right.$$

serà convergent cap a la solució de l'equació.

Passem ara a definir el bucle **for-while**:

> x[0]:=0.5;

error:=infinity;

$$\begin{aligned} x_0 &: = 0 \\ error &: = \infty \end{aligned}$$

>**for** i **from** 0 **to** 20 **while** error>0.5*10^(-3)**do**

x[i+1]:=**evalf**(g(x[i]));

error:=**abs**(x[i+1]-x[i]);

od;

$$x_1 \;:\; = .4054651081 \qquad error := .0945348919$$

$$\begin{aligned}
x_2 &: = .4665820900 \qquad error := .0611169819\\
x_3 &: = .4274991720 \qquad error := .0390829180\\
x_4 &: = .4526672361 \qquad error := .0251680641\\
x_5 &: = .4365326512 \qquad error := .0161345849\\
x_6 &: = .4469060144 \qquad error := .0103733632\\
x_7 &: = .4402490613 \qquad error := .0066569531\\
x_8 &: = .4445261540 \qquad error := .0042770927\\
x_9 &: = .4417802233 \qquad error := .0027459307\\
x_{10} &: = .4435440010 \qquad error := .0017637777\\
x_{11} &: = .4424114413 \qquad error := .0011325597\\
x_{12} &: = .4431388298 \qquad error := .0007273885\\
x_{13} &: = .4426717238 \qquad error := .0004671060
\end{aligned}$$

5.4 Problemes proposats

1. Trobeu una aproximació amb 2 decimals exactes de les solucions de les següents equacions, aplicant el mètode de bisecció a l'interval que s'indica:

(a) $e^x - 3x = 0$ a $I = [0, 1]$
(b) $x^3 - 2\sin x = 0$ a $I = [0.5, 2]$

2. Trobeu amb 2 decimals exactes, a partir del mètode de Newton, una aproximació de la solució de les següents equacions:

(a) $x = 2\sin x$
(b) $\sin x = 1 - x$

3. Trobeu una aproximació amb 3 decimals exactes de $\sqrt{2}$ fent servir el mètode de la secant.

4. Raoneu per a cadascuna de les expressions següents si és o no adequada per a calcular aproximacions de $\sqrt[3]{2}$ utilitzant el mètode del punt fix a l'interval $[1, 2]$.

(a) $x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n^2}$

(b) $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$

(c) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3}{60} - \dfrac{1}{30x_n^2}$

(d) $x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 2$

Quants iterats caldria fer amb la més adequada per obtenir $\sqrt[3]{2}$ amb tres decimals exactes?. Calculeu els tres primers.

5. Volem trobar el mínim de la funció $y = e^{-x} + \dfrac{x^3}{3}$

(a) Feu una representació gràfica aproximada, donant un interval de longitud 1 que contingui el mínim.

(b) Determineu dues possibles maneres d'aplicar el mètode del punt fix, indicant si són convergents i quina és la millor.

(c) Feu tres iterats. Quants en caldria fer per aconseguir 5 decimals correctes?.

6. Considerem la funció $y = \dfrac{e^x}{x}$

(a) Feu una gràfica aproximada de la funció per a x>0.

(b) En quin interval de longitud 1 l'àrea sota la gràfica és mínima?. Quant val aproximadament aquesta àrea?.

7. Utilitzeu la regla de Descartes, el teorema de Gersghorin i el mètode que vulgueu per aproximar les solucions del polinomi $36x^4 - 60x^3 - 29x^2 + 9x + 2$.

8. Donat el polinomi $Q(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 3$, volem els seus extrems relatius.

(a) Utilitzant el mètode que vulgueu , trobeu-los tots.

(b) Comproveu quins són màxim i quins són mínim.

9. Donada l'equació $3\ln x - x = 0$:

(a) Trobeu, fent servir la comanda **plot**, els teoremes de Bolzano i de Rolle, un interval que contingui una única arrel.

(b) Trobeu una aproximació de la solució a partir de la instrucció **fsolve**.

(c) Trobeu una aproximació de la solució amb 6 decimals exactes a partir del mètode de bisecció emprant un bucle **for-while** i **if-then-else**.

10. Donada l'equació $2^{-x} - x = 0$:

(a) Trobeu, fent servir la comanda **plot**, els teoremes de Bolzano i de Rolle, un interval que contingui una única arrel.

(b) Trobeu una aproximació de la solució a partir de la instrucció **fsolve**.

(c) Trobeu una aproximació de la solució amb 6 decimals exactes a partir del mètode de Newton-Raphson emprant un bucle **for-while.**

11. Donada l'equació $e^x = 2 - x^2$:

(a) Trobeu, fent servir la comanda **plot**, els teoremes de Bolzano i de Rolle, un interval que contingui una única arrel.

(b) Trobeu una aproximació de la solució a partir de la instrucció **fsolve**.

(c) Trobeu una aproximació de la solució amb 6 decimals exactes a partir del mètode de la secant emprant un bucle **for-while**.

12. Feu el problema 4 ajudant-vos de les comandes necessàries del **Maple V**, tant per a comprovar les hipòtesis del teorema del punt fix, com per a donar l'aproximació de $\sqrt[3]{2}$.

13. Donada l'equació $e^{-3x} = \ln(x)$

(a) Demostreu que té exactament una solució a l'interval $[1, 2]$

(b) Si apliquessim el mètode de la bisecció, quantes iteracions ens caldrien per obtenir una aproximació de la solució amb 3 decimals exactes? Fes les cinc primeres iteracions.

(c) Calculeu els valors de les quatre primeres iteracions corresponents a l'aplicació del mètode de Newton-Raphson a partir del valor inicial $x_0 = 1.5$.

14. Donada l'equació $3\ln x - x = 0$

    (a) Demostreu que aquesta equació té una única solució a l'interval $[1, 2]$. Té alguna altra solució?

    (b) De les fórmules següents, quina és la millor per resoldre l'equació aplicant el mètode del punt fix:

    $$(b.1)\ \ x = e^{\frac{x}{3}} \qquad (b.2)\ \ x = \frac{3\ln(x) + 2x}{3} \qquad (b.3)\ \ x = \sqrt{x+2}$$

    (c) Quantes iteracions calen per obtenir 3 decimals exactes amb la millor de les fórmules anteriors?

15. Volem resoldre l'equació $x^3 + 4x^2 - 16 = 0$

    (a) Demostreu que té una única solució a l'interval $[1, 2]$

    (b) Demostreu que l'equació inicial és equivalent a $x = \dfrac{4}{\sqrt{4+x}}$ i que el mètode del punt fix per a resoldre-la és convergent en aquest interval.

    (c) Quants iterats cal fer per obtenir una aproximació de la solució amb tres decimals exactes?

16. A partir de la taula següent:

x	-2	-1	0	1
y	-5	0	1	4

    (a) Calculeu el polinomi interpolador.

    (b) Quantes arrels té el polinomi anterior? Què pots dir sobre el nombre d'arrels positives i negatives? Fiteu-les en mòdul. Trobeu les arrels exactament i comproveu que es compleix el que heu dit.