Capítol 3

Integració numèrica

3.1 Resum teòric i exemples

La integració numèrica consisteix a donar fórmules per trobar el valor aproximat d'una integral definida, obtenint també afitacions dels errors d'aquestes aproximacions. Els mètodes que considerarem seran, principalment, de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + E_n(f) \tag{3.1}$$

La suma $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ se'n diu *fórmula de quadratura de n+1 punts*; A_i són els *pesos* o *coeficients de quadratura,* x_i els *nodes* o *punts de quadratura* i $E_n(f)$ l'error produït en l'aproximació.

Al llarg d'aquest capítol suposarem que l'interval $[a, b]$ és finit i que *f(x)* no té singularitats en $[a, b]$.

3.1.1 Grau de precisió d'una fórmula de quadratura

Donat un interval d'integració $[a, b]$ i $n+1$ nodes $x_0, x_1, \ldots, x_n$, direm que la fórmula $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ té grau de precisió m si i només si:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_n(x^k) = 0 \quad (k = 0 \div m) \\ E_n(x^{m+1}) \neq 0 \end{array}}$$

És a dir, tots els monomis (i, per tant, tots els polinomis) de grau menor o igual que m són integrats de forma exacta amb la fórmula.

Exemple 3.1 *Trobeu el grau de precisió de la fórmula de quadratura*

$$\int_0^1 f(x)dx \approx -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{13}{12}f(0) + \frac{5}{36}f(2)$$

Prenent *f(x)* $=1, x, x^2, x^3$ successivament, obtenim:

- *f(x)* $=1$
  $\int_0^1 dx = -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{13}{12}f(0) + \frac{5}{36}f(2) \Rightarrow 1 = -\frac{2}{9} + \frac{13}{12} + \frac{5}{36}$
- *f(x)* $= x$
  $\int_0^1 xdx = -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{13}{12}f(0) + \frac{5}{36}f(2) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{9} + \frac{10}{36}$
- $f(x) = x^2$
  $\int_0^1 x^2dx = -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{13}{12}f(0) + \frac{5}{36}f(2) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{-2}{9} + \frac{20}{36}$
- $f(x) = x^3$
  $\int_0^1 x^3dx = -\frac{2}{9}f(-1) + \frac{13}{12}f(0) + \frac{5}{36}f(2) \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{2}{9} + \frac{40}{36} = \frac{4}{3}$

Així doncs, el grau de precisió és 2.

3.1.2 Fórmules de Newton-Cotes

Sigui $[a,b]$ l'interval d'integració i $p_n(x)$ el polinomi interpolador de f en els n+1 punts $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Si $p_n(x)$ és una bona aproximació de f en $[a,b]$, aleshores, podem esperar que

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p_n(x)dx$$

Prenent els punts d'interpolació equiespaiats en $[a,b]$ tals que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_j & = & a + jh \ , \ (j = 0, \ldots, n) \\ h & = & \dfrac{b-a}{n} \end{array} \right.$$

s'arriba a la fórmula

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{j=0}^n \lambda_j f(x_j)} \tag{3.2}$$

amb

$$\lambda_j = \int_0^n \varphi_j(t)dt = \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{(t-k)}{(j-k)}dt$$

que s'anomena *fórmula de Newton-Cotes de n+1 punts.*

Els coeficients λ_j només depenen de n, independentment de la funció f i de l'interval $[a,b]$.

Error en les fórmules de Newton-Cotes

Sigui $\pi_n(t) = t(t-1)\dots(t-n)$.

- Si n és parell i $f^{(n+2)}(x)$ és contínua en $[a,b]$, aleshores existeix un punt $\xi \in (a,b)$ tal que

$$E(f) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t\pi_n(t)dt \qquad (3.3)$$

- Si n és senar i $f^{(n+1)}(x)$ és contínua en [a,b], existeix un punt $\xi \in (a,b)$ tal que

$$E(f) = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n \pi_n(t)dt \qquad (3.4)$$

Teorema 3.1 *Les fórmules de Newton-Cotes tenen grau de precisió* $\left\{ \begin{array}{ll} n\text{+}1 & (n \text{ parell}) \\ n & (n \text{ senar}) \end{array} \right.$

Principals fórmules de Newton-Cotes:

- $n = 1$ **(Fórmula del trapezi)**

  $x_0 = a\ ,\ x_1 = b,\ h = b-a$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)\,, \quad (a<\xi<b) \qquad (3.5)$$

  Geomètricament, la fórmula del trapezi és equivalent a aproximar el valor de la integral per l'àrea del trapezi T sota el segment que uneix els punts $(a, f(a)), (b, f(b))$:

- $n = 2$ **(Fórmula de Simpson)**

  $x_0 = a\ ,\ x_2 = b,\ h = \frac{b-a}{2}$

  $$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b)\right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (a < \xi < b) \tag{3.6}$$

  Geomètricament, la fórmula de Simpson és equivalent a aproximar el valor de la integral per l'àrea de la regió S sota una paràbola $y = p(x)$ que coincideixi amb la gràfica de la funció en els punts $a, c = \frac{a+b}{2}$ i b:

- $n = 3 \Rightarrow x_0 = a\ ,\ x_3 = b,\ h = \frac{b-a}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)\right) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)\ , \quad a < \xi < b$$

- $n = 4 \Rightarrow x_0 = a$, $x_4 = b$, $h = \frac{b-a}{4}$
  $$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b)\right) - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$$
  amb $a < \xi < b$

Exemple 3.2 *Apliqueu les fórmules del trapezi i de Simpson per aproximar $\int_{-1}^{1} xe^x dx$. Compareu els resultats obtinguts amb el valor exacte de la integral.*

a) Fórmula del trapezi.

Tenim $h = b - a = 2$. Llavors:

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{h}{2}\left[-e^{-1} + e^1\right] + E(f) = 2.3504024 + E(f)$$

Integrant per parts, trobem el valor exacte:

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = 2e^{-1} \simeq 0.7357588$$

i, per tant, l'error absolut és:

$$E(f) = |0.73575888 - 2.3504024| = 1.6146435$$

b) Fórmula de Simpson

En aquest cas, $h = \dfrac{b-a}{2} = 1$

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{1}{3}\left[-e^{-1} + 0 + e^1\right] + E(f) = 0.78346746 + E(f)$$

Donat que el valor exacte de la integral és $2e^{-1} \simeq 0.73575888$, resulta:

$$E(f) = |0.73575888 - 0.78346746| = 0.04770858$$

3.1.3 Fórmules compostes

Hi ha algunes raons per les quals no convé usar les fórmules de Newton-Cotes amb n gaire gran:

- El polinomi interpolador en punts equiespaiats no sempre convergeix a f quan n és gran, (fenomen de Runge, veure problema 5, capítol 1).
- Les fórmules de Newton-Cotes tenen coeficients λ_j negatius per a n gran. Això fa que es produeixin cancel.lacions i que l'error final sigui massa gran.

Per aquests motius, les fórmules d'integració no solen aplicar-se sobre tot l'interval $[a,b]$ d'integració, sinó que es divideix aquest en subintervals sobre els quals apliquem les regles anteriors.

Regla dels trapezis composta

Dividim $[a,b]$ en n subintervals iguals definint:

$$\begin{cases} h = \dfrac{b-a}{n} \\ x_j = a + jh\,, \quad j = 0,\ldots,n \end{cases}$$

i aproximem $\int_a^b f(x)dx$ mitjançant l'aplicació de la fórmula del trapezi a cada subinterval $[x_{j-1}, x_j]$. L'aproximació donada per la *regla dels trapezis composta* és

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right] \tag{3.7}$$

Si designem per $E_T(f)$ l'error que es comet, resulta

$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f) + E_T(f) = T_n(f) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{(2)}(\xi)$$

Podem calcular el nombre d'intervals necessaris per tenir una precisió donada, sempre que disposem d'una cota per a la segona derivada, tenint en compte que

$$|E_T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \tag{3.8}$$

on $M_2 = \sup\limits_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(2)}(\xi)\right|$.

Exemple 3.3 *Calculeu* $\int_{-1}^{1} xe^x dx$ *amb 3 xifres decimals exactes aplicant la regla dels trapezis.*

Primer hem de calcular el nombre n d'intervals que necessitem. Per a això cal trobar una cota per a $f^{(2)}$ sobre [-1,1]. Derivant dos cops $f(x) = xe^x$ s'obté $f^{(2)}(x) = 2e^x + xe^x$. Com que $f^{(2)}$ és creixent i positiva, prenem com a fita el seu valor en $x = 1$:

$$M_2 = f^{(2)}(1) = 3e$$

Aleshores, per (3.8) tenim:

$$|E_T(f)| \leq \frac{2^3}{12n^2}3e = \frac{2e}{n^2}$$

Si volem obtenir 3 decimals exactes, llavors:

$$\frac{2e}{n^2} \leq \frac{1}{2}10^{-3} \Rightarrow n \geq 104.27\ldots$$

Com que n ha de ser natural, agafem $n = 105$. Aplicant la regla dels trapezis amb $h = \frac{2}{105}$ i $x_j = -1 + jh$, $(j = 0 \div 105)$, obtenim com a valor aproximat de la integral:

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(-1) + 2\sum_{j=1}^{104} f(x_j) + f(1)\right] = 0.73592325$$

mentre que el valor exacte és:

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{2}{e} = 0.73575888$$

Regla de Simpson composta

Dividim ara $[a,b]$ en $2n$ subintervals iguals definint:

$$\begin{cases} h = \dfrac{b-a}{2n} \\ x_j = a + jh\,, \quad j = 0, \ldots, 2n \end{cases}$$

i aproximem $\int_a^b f(x)dx$ mitjançant l'aplicació de la fórmula de Simpson a cada subinterval $[x_{2j-2}, x_{2j}]$. La *regla de Simpson composta* vé donada per

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(b)\right] \qquad (3.9)$$

Aleshores, si designem per $E_S(f)$ l'error que es comet, resulta

$$\int_a^b f(x)dx = S_n(f) + E_S(f) = S_n(f) - \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi)h^4$$

Anàlogament a la fórmula dels trapezis composta, també podem calcular el nombre d'intervals necessaris per tenir una precisió donada, sempre que disposem d'una cota per a la quarta derivada, tenint en compte que

$$|E_S(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4 \tag{3.10}$$

on $M_4 = \sup\limits_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$

- Observem que el nombre d'intervals sobre els que apliquem la fórmula de Simpson és n i que el nombre total de subintervals en què dividim $[a,b]$ és $2n$.

Exemple 3.4 *Calculeu* $\int_{-1}^{1} xe^x dx$ *amb 3 xifres decimals exactes aplicant la regla de Simpson.*

Anàlogament a l'aplicació de la regla dels trapezis, primer hem de determinar el nombre n d'intervals que necessitem. Derivant quatre vegades la funció $f(x) = xe^x$, obtenim $f^{(4)}(x) = 4e^x + xe^x$. Com que $f^{(4)}$ és creixent i positiva, prenem com a fita el seu valor en $x = 1$:

$$M_4 = f^{(4)}(1) = 5e$$

Aleshores, per (3.10) tenim:

$$|E_S(f)| \leq \frac{2^5}{2880n^4} 5e = \frac{e}{18n^4}$$

Per tal d'obtenir 3 decimals exactes,

$$\frac{e}{18n^4} \leq \frac{1}{2} 10^{-3} \Rightarrow n \geq 4.1688\ldots$$

Com que n ha de ser natural, agafem $n = 5$. Aplicant la regla de Simpson amb $h = \frac{2}{10} = 0.2$ i $x_j = -1 + 0.2j$, $(j = 0 \div 10)$, obtenim com a valor aproximat de la integral:

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx \simeq \frac{h}{3} \left[f(-1) + 4\sum_{j=1}^{5} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{5-1} f(x_{2j}) + f(1) \right] = 0.7358483676$$

mentre que el valor exacte és:

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{2}{e} \simeq 0.7357588824$$

3.2 Problemes resolts

Problema 3.1 *Calculeu els pesos A, B, C de la fórmula de quadratura*

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \simeq h\left[Af(0) + B\left(f(h) + f(-h)\right) + C\left(f(2h) + f(-2h)\right)\right]$$

i trobeu el seu grau de precisió.

Podem calcular els coeficients A, B, C substituint, successivament, $f(x) = 1, x, x^2, \ldots$ i resolent el sistema d'equacions lineals resultant:

$$\begin{aligned}
2h &= \int_{-h}^{h} 1dx = h\left[A + 2B + 2C\right] \\
0 &= \int_{-h}^{h} xdx = 0 \\
\frac{2}{3}h^3 &= \int_{-h}^{h} x^2dx = h\left[2Bh^2 + 8Ch^2\right] \\
0 &= \int_{-h}^{h} x^3dx = 0 \\
\frac{2}{5}h^5 &= \int_{-h}^{h} x^4dx = h\left[2Bh^4 + 32Ch^4\right] \\
0 &= \int_{-h}^{h} x^5dx = 0
\end{aligned}$$

Simplificant les equacions obtingudes, el sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{aligned}
A + 2B + 2C &= 2 \\
3B + 12C &= 1 \\
5B + 80C &= 1
\end{aligned}\right\}$$

la solució del qual és $A = \frac{19}{15}, B = \frac{17}{45}, C = \frac{-1}{90}$. La fórmula que obtenim és:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \simeq h\left[\frac{19}{15}f(0) + \frac{17}{45}\left(f(h)+f(-h)\right) - \frac{1}{90}\left(f(2h)+f(-2h)\right)\right]$$

que resulta exacta per a polinomis de grau 4. Donat que

$$\int_{-h}^{h} x^n dx = 0 \qquad (\forall n \text{ senar})$$

també tenim exactitud per a polinomis de grau 5, però no per a polinomis de grau 6 com podem comprovar prenent $f(x) = x^6$:

$$\frac{2}{7}h^7 = \int_{-h}^{h} x^6 dx \neq h\left[\frac{17}{45}\left(h^6 + (-h)^6\right) - \frac{1}{90}\left((2h)^6 + (-2h)^6\right)\right] = -\frac{2}{3}h^7$$

Així doncs, el grau de precisió de la fórmula és 5.

Problema 3.2 *Deduïu la fórmula de Simpson a partir de les fórmules (3.2) de Newton-Cotes.*

La fórmula de Simpson és el cas $n = 2$ de les fórmules de Newton-Cotes:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)\right)$$

Calculem els coeficients λ_j:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \int_0^2 \varphi_0(t)dt = \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)}dt = \frac{1}{3}\\
\lambda_1 &= \int_0^2 \varphi_1(t)dt = \int_0^2 \frac{t(t-2)}{1\cdot(1-2)}dt = \frac{4}{3}\\
\lambda_2 &= \int_0^2 \varphi_2(t)dt = \int_0^2 \frac{t(t-1)}{2\cdot(2-1)}dt = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aleshores:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + f(b)\right)$$

amb $h = \frac{b-a}{2}$. Si designem per E_S l'error en la fórmula de Simpson, de (3.3) resulta:

$$E_S = \frac{h^{2+3} f^{(2+2)}(\xi)}{(2+2)!} \int_0^2 t\pi_2(t)dt = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(\frac{-4}{15}\right) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

amb $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $(a < \xi < b)$. Si $f^{(4)}$ és afitada, $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4 \quad \forall x \in [a,b]$, obtenim:

$$|E_S| \leq \frac{h^5 M_4}{90}$$

Problema 3.3 *Calculeu* $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1+x}$ *utilitzant les fórmules de Simpson i de Newton-Cotes amb n=3. Compareu les aproximacions obtingudes amb el valor exacte de la integral.*

a) Fórmula de Simpson

Aplicant la fórmula de Simpson (3.6) a aquest cas particular, obtenim:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1+x} \simeq \frac{1}{12}\left[\frac{4}{3} + 4 + \frac{4}{5}\right] = \frac{23}{45} = 0.511111$$

Per tal de fitar l'error comès

$$|E_S| = \left|\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^5 \frac{1}{90} M_4$$

cal trobar una fita de la derivada quarta de la funció:

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

Com que $f^{(4)}$ pren el màxim valor en $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ quan x pren el valor $-1/4$, podem prendre $M_4 = \frac{24}{(3/4)^5} = \frac{8192}{81}$ Aleshores

$$|E_S| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{90}\right) \left(\frac{8192}{81}\right) = 0.001097$$

Per tant:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1+x} = 0.511111 \pm 0.001097$$

Això ens indica que el valor exacte de la integral es troba en l'interval [0.510014 , 0.512208]. Pot comprovar-se que, efectivament, el valor és:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1+x} = \ln 5 - \ln 3 = 0.510826$$

b) Fórmula de Newton-Cotes amb n=3

En ser $[a,b] = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ i $n = 3$, tindrem $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$. Per a $f(x) = \frac{1}{1+x}$ la fórmula de Newton_Cotes és:

$$\int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1+x} \simeq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}\right)\left[\frac{4}{3} + 3\frac{12}{11} + 3\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\right] = \frac{1096}{2145} = 0.510956$$

Podem fitar l'error comès utilitzant la mateixa fita M_4 de l'apartat anterior:

$$|E(f)| = \left|\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)\right| \leq \frac{3}{80}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \frac{8192}{81} = \frac{16}{32805} = 4.877305 \times 10^{-4}$$

Aleshores, el valor exacte de la integral es troba en l'interval [0.510623, 0.511599] i, per tant,

$$\int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{1+x} = 0.510956 \pm 4.877305 \times 10^{-4}$$

Problema 3.4 *Amb quants intervals s'haurien d'aplicar*

(a) la regla dels trapezis

(b) la regla de Simpson

per tal d'aproximar $\int_1^3 e^x \sin x dx$ *amb un error menor que* 10^{-4}?

a)Regla dels trapezis.

La fita de l'error quan apliquem la regla dels trapezis és, segons (3.8)

$$|E_T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

Derivant dos cops la funció $f(x) = e^x \sin x$, obtenim $f''(x) = 2e^x \cos x$. D'altra banda, donat que $|2e^x \cos x| \leq 2e^x$ i que la funció e^x és estrictament creixent, prenent com a fita superior de $f''(x)$ en $[1,3]$ $M_2 = 2e^3$, serà:

$$|E_T(f)| \leq \frac{(3-1)^3}{12n^2} 2e^3 = \frac{4}{3n^2} e^3$$

Aleshores,

$$\frac{4}{3n^2}e^3 < 10^{-4} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{4e^3}{3\cdot 10^{-4}}} = 517.501$$

Així doncs, prenent $n \geq 518$ es compleixen les condicions de l'enunciat. El resultat que obtenim, per a $n = 518$ intervals és:

$$\int_1^3 e^x \sin(x)dx \simeq T_{518}(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{518}\right)\left[f(1) + 2\sum_{j=1}^{517} f(x_j) + f(3)\right] = 10.95014446$$

mentre que el valor exacte és

$$\int_1^3 e^x \sin(x)dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right)\Big|_1^3 \simeq 10.95017032$$

que ens dóna un error menor que 10^{-4}.

b)Regla de Simpson

Aplicant la regla de Simpson tindrem, segons (3.10)

$$|E_S(f)| \leq \frac{(3-1)^5}{2880n^4}M_4$$

Com que $f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x$, raonant de manera anàloga al cas anterior, podem prendre $M_4 = 4e^3$. Llavors, tindrem

$$|E_S(f)| \leq \frac{2^5}{2880n^4}4e^3 \leq \frac{2}{45n^4}e^3$$

Com que volem que l'error sigui menor que 10^{-4}, resulta:

$$\frac{2}{45n^4}e^3 < 10^{-4} \Rightarrow n^4 > \frac{2e^3}{45\cdot 10^{-4}} = 8926.906 \Rightarrow n > 9.7202$$

i, per tant, hem d'aplicar la regla de Simpson en $[a,b]$ amb, almenys, 10 intervals (és a dir, 20 subintervals). El resultat que s'obté és:

$$\int_1^3 e^x \sin(x)dx \simeq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{20}\right)\left[f(1) + 4\sum_{j=1}^{20} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{19} f(x_{2j}) + f(3)\right] = 10.95014593$$

que també ens dóna un error menor que 10^{-4}.

Problema 3.5 *La fórmula (bàsica) dels trapezis corregida és:*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right), \quad (h=b-a)$$

(a) *Quin és el seu grau de precisió?*

(b) *Sabent que $E(f)=\frac{h^5}{720}f^{(4)}(t)$ és l'expressió de l'error, aproximeu $\int_{-1}^{1} xe^x dx$ i fiteu l'error comès.*

(c) *Dividint $[a,b]$ en n subintervals de longitud $h=\frac{b-a}{n}$, trobeu la fórmula composta corresponent.*

(d) *Quants subintervals cal prendre per calcular la integral de l'apartat b) amb 3 decimals exactes?*

a) Com que l'expressió de l'error és $E(f)=\frac{h^5}{720n^4}f^{(4)}(t)$, deduïm que l'error és 0 si $f(x)$ és un polinomi de grau fins a tres, mentre que si $f(x)$ és un polinomi de grau 4, $f^{(4)}(t)\neq 0$ i, per tant, $E(f)\neq 0$. Així doncs, el grau de precisió és 3.

b) Integrant $f(x)=xe^x$ en $[-1,1]$, aquesta fórmula dóna l'aproximació

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx \simeq \frac{2}{2}(-e^{-1}+e)+\frac{2^2}{12}(0-2e)=.5382145014$$

L'error comès es pot fitar tenint en compte que la derivada quarta de f és: $f^{(4)}(x)=(x+4)e^x$ i està fitada, per tant, per $M_4=5e$. Aleshores:

$$|E(f)|\leq \frac{h^5}{720}|M_4|=\frac{2^5}{720}5e=.6040\ldots<0.7$$

c) Dividim $[a,b]$ en n parts iguals de longitud $h=\frac{b-a}{n}$ i considerem els punts $x_j=a+jh$, $(j=0,\ldots,n)$. La fórmula composta respectiva l'obtindrem aplicant la fórmula (bàsica) trapezoïdal corregida a cada subinterval $[x_j,x_{j+1}]$ en què s'ha dividit l'interval $[a,b]$:

$$\begin{array}{ll}
[x_0,x_1]: & \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a)+f(x_1)\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(a)-f'(x_1)\right)\\
[x_1,x_2]: & \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(x_1)-f'(x_2)\right)\\
\vdots & \\
[x_{n-1},b]: & \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1})+f(b)\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(x_{n-1})-f'(b)\right)
\end{array}$$

Quan sumem les n expressions anteriors, els valors de les derivades en els punts $f'(x_j)$, $(1 \leq j \leq n-1)$, s'anul.len i ens queda:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\
&\simeq \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right)
\end{aligned}$$

L'error total serà la suma de l'error per a cada subinterval:

$$\begin{aligned}
E(f) &= \frac{h^5}{720} f^{(4)}(t_{1)} + \frac{h^5}{720} f^{(4)}(t_{2)} + \cdots + \frac{h^5}{720} f^{(4)}(t_n) = \\
& \frac{n}{720}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5 f^{(4)}(t) = \frac{(b-a)^5}{720n^4} f^{(4)}(t))
\end{aligned}$$

d) Sigui $M_4 = \sup\limits_{-1 \leq t \leq 1} \left| f^{(4)}(t) \right|$. Si volem obtenir una aproximació amb 3 decimals exactes, llavors,

$$\left| \frac{(b-a)^5}{720n^4} M_4 \right| = \frac{2e}{9n^4} < \frac{1}{2} 10^{-3}$$

La solució d'aquesta inequació és $n > 5.89$. Per tant, n'hi ha suficient a dividir l'interval en $n = 6$ parts iguals.

En efecte, els subintervals vénen definits pels punts

$$x_i = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

i la funció en aquests punts pren, respectivament, els valors

$$f(x_i) = \left\{-e^{-1}, -\frac{2}{3}e^{(-2/3)}, -\frac{1}{3}e^{(-1/3)}, 0, \frac{1}{3}e^{(1/3)}, \frac{2}{3}e^{(2/3)}, e\right\}$$

Com que $f'(-1) = 0$ i $f'(1) = 2e$ obtenim l'aproximació:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 xe^x dx &\simeq \frac{2}{2}\left(-e^{-1} - \frac{2}{3}e^{(-2/3)} - \frac{1}{3}e^{(-1/3)} + \frac{1}{3}e^{(1/3)} + \frac{2}{3}e^{(2/3)} + e\right) + \frac{2^2}{12}(-2e) \\
&= .7355857299
\end{aligned}$$

mentre que el resultat exacte és:

$$\int_{-1}^1 xe^x dx = 2e^{-1} = .7357588824$$

3.3 Problemes resolts amb Maple

MapleV disposa de l'ordre **int** per resoldre una integral. La seva sintaxi és:

int(*funció*,x=a..b);

o bé

int(*funció*,x);

segons sigui una integral definida o indefinida. A més, la llibreria *student* conté, entre d'altres utilitats, les instruccions **trapezoid** i **simpson**, per aproximar integrals a partir de les fórmules dels trapezis i de Simpson, respectivament:

trapezoid(*funció* ,x = a..b,n);
simpson(*funció*,x = a..b,n);

Problema 3.6 *Calculeu els pesos de la següent fórmula de quadratura per tal que tingui grau de precisió el més gran possible:*

$$\int_a^b f(x)dx = a_0 f(a) + a_1 f(b) + c_0 f^{(2)}(a) + c_1 f^{(2)}(b)$$

Comencem definint la fórmula que volem trobar:

> formula := **int**(f(x) ,x=a..b) = a[0]*f(a) + a[1]*f(b) + c[0]*(**D@@**2)(f)(a)+ c[1]*(**D@@**2)(f)(b);

Imposant, successivament, que la fórmula sigui exacta per als polinomis 1, x, x^2 i x^3 obtindrem un sistema de 4 equacions amb les 4 incògnites a[0], a[1], c[0] i c[1]:

> f:=x->1;

$$f := 1$$

> **int**(f(x) ,x=a..b) = a[0]*f(a) + a[1]*f(b) + c[0]*(**D@@**2)(f)(a) + c[1]*(**D@@**2)(f)(b);

$$b - a = a_0 + a_1$$

> eq1:=formula;

$$eq1 := b - a = a_0 + a_1$$

> f:=x->x;

int(f(x) ,x=a..b)=a[0]*f(a) + a[1]*f(b) + c[0]*(**D@@**2)(f)(a)

+ c[1]*(**D@@**2)(f)(b);

$$\begin{aligned} f &:= x \to x \\ \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 &= a_0 a + a_1 b \end{aligned}$$

> eq2:=formula;

$$eq2 := \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = a_0 a + a_1 b$$

> f:=x->x^2;

int(f(x) ,x=a..b)=a[0]*f(a) + a[1]*f(b) + c[0]*(**D@@**2)(f)(a)

+ c[1]*(**D@@**2)(f)(b);

$$\begin{aligned} f &:= x \to x \\ \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 &= a_0 a^2 + a_1 b^2 + 2c_0 + 2c_1 \end{aligned}$$

> eq3:=formula;

$$eq3 := \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 = a_0 a^2 + a_1 b^2 + 2c_0 + 2c_1$$

> f:=x->x^3;

int(f(x) ,x=a..b)=a[0]*f(a) + a[1]*f(b) + c[0]*(**D@@**2)(f)(a)

+ c[1]*(**D@@**2)(f)(b);

$$\begin{aligned} f &:= x \to x^3 \\ \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4 &= a_0 a^3 + a_1 b^3 + 6c_0 a + 6c_1 b \end{aligned}$$

> eq4:=formula;

$$eq4 := \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4 = a_0 a^3 + a_1 b^3 + 6c_0 a + 6c_1 b$$

Resolem el sistema d'equacions mitjançant l'ordre **solve:**

> sistema:={eq1 ,eq2 ,eq3 ,eq4};

$$\begin{aligned} sistema := \quad \{b-a = & \quad a_0 + a_1, \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = a_0 a + a_1 b, \\ \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4 \quad = & \quad a_0 a^3 + a_1 b^3 + 6c_0 a + 6c_1 b, \\ \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 \quad = & \quad a_0 a^2 + a_1 b^2 + 2c_0 + 2c_1\} \end{aligned}$$

>sols:=**solve**(sistema , {a[0],a[1],c[0],c[1]});

$$\begin{aligned} sols \quad : & \quad = \{a_0 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, c_0 = \frac{1}{24}a^3 - \frac{1}{8}a^2 b + \frac{1}{8}ab^2 - \frac{1}{24}b^3, \\ c_1 \quad = & \quad \frac{1}{24}a^3 - \frac{1}{8}a^2 b + \frac{1}{8}ab^2 - \frac{1}{24}b^3, a_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\} \end{aligned}$$

A partir de la funció **assign**, convertim en assignacions les igualtats que apareixen en la solució del sistema i simplifiquem les seves expressions:

> **assign**(sols) ;

a[0] ; a[1] ; c[0] ; c[1] ;

$$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{24}a^3 - \frac{1}{8}a^2 b + \frac{1}{8}ab^2 - \frac{1}{24}b$$

$$\frac{1}{24}a^3 - \frac{1}{8}a^2 b + \frac{1}{8}ab^2 - \frac{1}{24}b$$

> c[0] :=factor(c[0]) ;

c[0] := **simplify**(c[0] , {b-a=h}) ;

a[0] := **simplify**(a[0] , {b-a=h}) ;

c[1] :=c[0] ; a[1] :=a[0] ;

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{24}(b-a)^3 \\ c_0 &= -\frac{1}{24}h^3 \\ a_0 &= \frac{1}{2}h \end{aligned}$$

$$c_1 = -\frac{1}{24}h^3$$
$$a_1 = \frac{1}{2}h$$

Netegem la funció f i escrivim la fórmula d'integració que hem obtingut:

> f:='f ':

> formula ;

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}hf(a) + \frac{1}{2}hf(b) - \frac{1}{24}h^3(D^{(2)})(f)(a) - \frac{1}{24}h^3(D^{(2)})(f)(b)$$

Aleshores, el grau de precisió és, pel cap baix, 3. Comprovem ara si la fórmula obtinguda té grau de precisió 4:

> f := x->x^4;

$$f := x \to x^4$$

> formula;

$$\frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{5}a^5 = \frac{1}{2}ha^4 + \frac{1}{2}hb^4 - \frac{1}{2}h^3a^2 - \frac{1}{2}h^3b^2$$

Simplifiquem el costat dret de la darrera igualtat:

> **simplify**(**rhs**(") , $\{h = b - a\}$);

$$-2a^2b^3 + 2a^3b^2 + ab^4 - a^4b$$

Com que el resultat obtingut és diferent de $\frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{5}a^5$, la fórmula no és exacta per a polinomis de grau 4 i el grau de precisió és, per tant, 3.

Problema 3.7 *Calculeu el nombre de subintervals necessaris per aproximar la integral $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$ amb 5 decimals exactes utilitzant:*

(a) *La fórmula dels trapezis composta.*

(b) *La fórmula de Simpson composta.*

(c) *Utilitzant l'apartat anterior, calculeu el valor del nombre e amb 5 decimals exactes.*

Començarem carregant la llibreria **student,** definint la funció a integrar i indicant que volem els resultats amb 7 dígits, (per defecte, els càlculs es realitzen amb 10 dígits).

> **with(student)**:

> f:=x->2*x*exp(x^2); **Digits**:=7;

$$\begin{aligned} f &: = x \to 2xe^{(x^2)} \\ Digits &: = 7 \end{aligned}$$

Indiquem l'interval d'integració:

>a :=0 ; b :=1 ;

$$\begin{aligned} a &: = 0 \\ b &: = 1 \end{aligned}$$

a) Regla del trapezi composta

Començarem calculant el nombre n de subintervals que necessitarem. Per a això, cal trobar una fita per a $f^{(2)}(x)$ en l'interval $[0, 1]$. Utilitzarem l'ordre **plot** per dibuixar la gràfica de $f^{(2)}(x)$ en $[0, 1]$ i obtenir fàcilment $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} \left| f^{(2)}(x) \right|$.

>f2 := (**D@@**2) (f) ;

$$f2 := x \to 12xe^{(x^2)} + 8x^3e^{(x^2)}$$

>**plot**(**abs**(f2(x)) , x=a..b) ;

Com que la funció és estrictament creixent i positiva, prendrem $M_2 = f^{(2)}(1)$:

>M2 := **abs**(f2(1)) ;

$$M2 := 20e$$

Introduïm el terme de l'error (3.8) en la fórmula del trapezi:

>error_trapezis := (b-a)^3*M2/(12n^2) ;

$$error\_trapezis := \frac{5}{3}\frac{e}{n^2}$$

Si volem obtenir 5 decimals exactes haurem de resoldre la inequació $error\_trapezis < \frac{1}{2}10^{-5}$. Ho fem mitjançant l'ordre **solve** :

>**solve** (error-trapezis < 0.5*10^(-5)) ;

$$\text{Real Range}(-\infty, \text{Open}(-951.8897)), \text{Real Range}(\text{Open}(951.8897), \infty)$$

Com que el nombre d'intervals ha de ser exacte, prenem $n = 952$:

> n := 952 ;

$$n := 952$$

Comprovem el resultat obtingut. Calculant la integral per la fórmula dels trapezis amb 952 subintervals, obtenim:

> resultat_trapezi := **evalf**(**trapezoid**(f(x) , x=a..b,n) ;

$$resultat\_trapezi := 1.718282$$

mentre que el resultat exacte és:

> integral := **int**(f(x) , x=a..b) ;

$$integral := e - 1$$

que, avaluat amb 10 dígits, ens permet comprovar que hem obtingut 5 decimals exactes amb la fórmula dels trapezis:

> **Digits** := 10;

integral := **evalf**(integral) ;

$$\begin{aligned} Digits &: = 10 \\ integral &: = 1.718281828 \end{aligned}$$

b) Regla de Simpson composta

Comencem definint la derivada quarta de la funció:

> f4 := (**D@@**4)(f) ;

$$f4 := x \rightarrow 120xe^{(x^2)} + 160x^3e^{(x^2)} + 32x^5e^{(x^2)}$$

A partir de la gràfica de $f^{(4)}(x)$ en $[0,1]$, deduïm fàcilment la fita $M_4 = \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

> **plot**(**abs**(f4(x)) ,x=a..b) ;

> M4 :=**abs**(f4(1)) ;

$$M4 := 312e$$

L'error en la fórmula de Simpson, segons(3.10), és:

> error_simpson :=(b-a)^5*M4/(2880*n^4) ;

$$error - simpson := \frac{13}{120}\frac{e}{n^4}$$

Imposem que l'error sigui menor que $\frac{1}{2}10^{-5}$ i resolem la inequació corresponent:

> **Digits** := 7 ;

solve(error_Simpson<0.5*10^(-5)) ;

$$Digits := 7$$

$$RealRange(-\infty, Open(-15.57836)), RealRange(Open(15.57836), \infty)$$

Aplicar la regla de Simpson sobre 16 intervals, vol dir que hem de dividir $[0,1]$ en $2n = 32$ subintervals. El resultat que s'obté és:

> n := 16;

integ_simpson := **evalf**(**simpson**(f(x) , x=a..b,2*n)) ;

$$n := 16$$

$$integ\_simpson := 1.718283$$

que comparat amb el resultat exacte $e - 1 \simeq 1.718281828$ que hem vist a l'apartat anterior, també té 5 decimals exactes.

c) Aproximació del nombre e

Per trobar una aproximació del nombre e, podem utilitzar el resultat anterior, segons el qual $e - 1 \simeq 1.718283$ amb 5 decimals correctes. Per tant,

$$e \simeq 1 + 1.718283 = 2.718283$$

Problema 3.8 *Donada la integral* $\int_{-1}^{1} \frac{3}{9-x^2} dx = \ln 2$, *calculeu, amb 3 decimals exactes, el valor de l'aproximació que s'obté segons la fórmula composta dels trapezis corregida (problema 5). i compareu-lo amb el valor exacte.*

La fórmula del trapezi corregida és:

> formula := **int**(f(x) ,x=a..b) = h/2*(f(a)+f(b))+h^2/12*(**D**(f)(a)-**D**(f)(b));

$$formula := \int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{h^2}{12}(D(f)(a) - D(f)(b))$$

Definim la funció a integrar i els extrems de l'interval:

> f := x->3/(9-x^2);

$$f := x \to \frac{3}{9 - x^2}$$

> a:=-1 ; b:=1;

$$a \ : \ = -1$$
$$b \ : \ = 1$$

Calculem una fita, M_4, de $f^{(4)}(x)$ i imposem la condició $\frac{(b-a)^5}{720n^4}M_4 < \frac{1}{2}10^{-3}$

> f4 := (**D@@**4)(f);

$$f4 := x \to 1152\frac{x^4}{(9-x^2)^5} + 864\frac{x^2}{(9-x^2)^4} + \frac{72}{(9-x^2)^3}$$

> **plot**(**abs**(f4(x)) ,x=a..b);

> M4:=**abs**(f4(1));

$$M_4 := \frac{99}{256}$$

> error:=(b-a)^5*M4/(720*n^4);

$$error := \frac{11}{640}\frac{1}{n^4}$$

> **solve**(error<0.5*10^(-3));

$RealRange(-\infty, Open(-2.421367320)), RealRange(Open(2.421367320), \infty)$

> n:=3;

$$n := 3$$

L'aproximació que obtenim, dividint $[-1, 1]$ en 3 subintervals, és:

> h:=(b-a)/n;

$$h := \frac{2}{3}$$

> **for** i **from** 0 **to** n **do** x[i]:=a+i*h; **od**:

> suma:=0;

for i **from** 1 **to** n-1 **do** suma:=f(x[i])+suma; **od**:

trapezi_corregit := h/2*(f(a)+f(b)+2***evalf**(suma)) + h^2/12*

(**D**(f)(a)-**D**(f)(b));

$$\begin{aligned} suma &:= 0 \\ trapezi\_corregit &:= .6930555556 \end{aligned}$$

El resultat exacte és

> **Int**(f(x) ,x=a..b) = **evalf**(**int**(f(x),x=a..b)) ;

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{(9 - x^2)} dx = .6931471806$$

Per tant, l'error és menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$:

> **evalf**(**abs**(''-trapezi_corregit));

$$.0000916250$$

Problema 3.9 *Volem trobar una fórmula de quadratura del tipus:*

$$\int_{1}^{3} f(x)dx \approx \alpha_1 f(1) + 2\alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(3)$$

(a) *Resoleu el sistema que resulta d'exigir-li a aquesta fórmula i a les següents*

$$\begin{aligned} \int_{1}^{2} f(x)dx &\approx \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) \\ \int_{2}^{3} f(x)dx &\approx \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(3) \end{aligned}$$

grau de precisió 1.

(b) La fórmula obtinguda en l'apartat anterior és de Newton-Cotes? A quin mètode correspon? Per què?

a) Comencem escrivint les fórmules donades:

> **restart**;

> formula1:=**int**(f(x), x=1..3)=alpha[1]*f(1) + 2*alpha[2]*f(2) + alpha[3]*f(3) ;

$$formula1 := \int_1^3 f(x)dx = \alpha_1 f(1) + 2\alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(3)$$

> formula2:=**int**(f(x) ,x=1..2)=alpha[1]*f(1)+alpha[2]*f(2);
formula3:=**int**(f(x) ,x=2..3)=alpha[2]*f(2)+alpha[3]*f(3);

$$\begin{aligned} formula2 &: = \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) \\ formula3 &: = \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(3) \end{aligned}$$

Imposem la condició que el grau de precisió de les fórmules sigui 1:

> f:=x->1;

$$f := 1$$

> eq1:=formula1;

$$eq1 := 2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$$

> eq2:=formula2;
eq3:=formula3;

$$\begin{aligned} eq2 &: = 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ eq3 &: = 1 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

> f:=x->x;

$$f := x \to x$$

> eq4:=formula1;

$$eq4 := 4 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3$$

> eq5:=formula2;
eq6:=formula3;

$$\begin{aligned} eq5 &: = \frac{3}{2} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ eq6 &: = \frac{5}{2} = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{aligned}$$

Resolem el sistema format per les equacions trobades:

> sistema:={eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6};

$$\begin{aligned} sistema \quad &: \quad = \{2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 1 = \alpha_1 + \alpha_2, 1 = \alpha_2 + \alpha_3, \\ 4 \quad &= \quad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3, \frac{3}{2} = \alpha_1 + 2\alpha_2, \frac{5}{2} = 2\alpha_2 + 3\alpha_3\} \end{aligned}$$

> solucions:=**solve**(sistema, {alpha[1],alpha[2],alpha[3]});

$$solucions := \{\alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}\}$$

> **assign**(solucions);

"*Netegem*" la variable f i escrivim la fórmula trobada:

> f:='f'; $f := f$

> **Int**(f(x), x=1..3)=**rhs**(formula1);

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \frac{1}{2}f(3)$$

És fàcil veure que aquesta és la regla composta del trapezi, prenent dos subintervals en $[1, 3]$

3.4 Problemes proposats

1. Calculeu les constants ω_0, ω_1, a per tal que la fórmula d'integració

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx \omega_0 g(a) + \omega_1 g(1)$$

sigui exacta per a tots els polinomis de grau no superior a dos.

2. Calculeu x_1 i x_2 de manera que la següent fórmula de quadratura sigui exacta fins al major ordre possible:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}\left[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)\right]$$

3. Calculeu els coeficients k_1, k_2 i k_3 en la fórmula d'integració aproximada

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = k_1 f(-1) + k_2 f(1) + k_3 f(\alpha)$$

on α és un nombre donat tal que $-1 < \alpha < 1$. Apliqueu la fórmula amb la funció $f(x) = \sqrt{\frac{5x+13}{2}}$ amb $\alpha = -0.1$

4. Trobeu el grau de precisió de la següent fórmula de quadratura:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{15}\left[7f(a) + 16f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 7f(b)\right] + \frac{h^2}{15}\left[f'(a) - f'(b)\right]\ ,\ h = \frac{b-a}{2}$$

Sabent que $\dfrac{h^7}{4725} f^{(6)}(t)$ és l'expressió de l'error per a aquesta fórmula, aproximeu $\int_0^1 e^{ex}dx$ i afiteu l'error comès.

5. Donada la integral $\int_0^1 xe^{2x}dx$

   (a) Calculeu el nombre d'intervals necessaris per obtenir una aproximació amb 3 decimals exactes segons la regla de Simpson.

   (b) El mateix utilitzant la regla dels trapezis.

   (c) Calculeu el valor de l'aproximació que s'obté segons l'apartat a). Compareu-lo amb el valor exacte.

6. Determineu els valors de n i h que són necessaris per aproximar la integral $\int_0^1 x \cos 2x dx$ amb 5 decimals exactes per

   (a) La regla dels trapezis.

   (b) La regla de Simpson.

   Calculeu aquesta aproximació per qualsevol d'aquests dos mètodes i compareu-la amb el valor real.

7. Aplicant la regla de Barrow, comproveu que

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{12}$$

   (a) Quants intervals caldria usar per a aproximar la integral anterior pel mètode de Simpson compost amb un error menor que $\frac{1}{2}10^{-4}$?

   (b) Usant els dos apartats anteriors, calculeu els quatre primers decimals del nombre π.

8. (a) Prenent $h = x_{i+1} - x_{i-1}$ i fent servir interpolació només en l'abscissa mitjana, deduïu la fórmula del rectangle sobre l'interval $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq hf(x_i)$$

(b) Dividint l'interval $[a, b]$ en $2n$ subintervals iguals, trobeu la fórmula composta del rectangle, (aplicada sobre n intervals).

(c) Sabent que el terme de l'error en la fórmula composta és $\dfrac{h^3}{24n^2}f^{(2)}(\xi)$, calculeu n per tal d'aproximar $\int_0^1 x^2dx$ amb un error menor que $\frac{1}{2}10^{-4}$. Compareu l'aproximació obtinguda amb el valor real.

9. Volem calcular l'àrea limitada per la funció $f(x) = 1 + arctg(x)$ i els eixos de coordenades amb una precisió de $\frac{1}{2}10^{-3}$.

(a) Quants intervals caldria fer si utilitzéssim el mètode del trapezi compost?

(b) I si utilitzéssim la regla de Simpson ?

(c) Aproximeu el valor de l'àrea per un qualsevol dels mètodes anteriors.

(d) Calculeu el valor exacte i compareu-lo amb l'aproximació obtinguda a l'apartat anterior.

10. Volem aproximar amb dos decimals exactes el valor de la integral

$$I = \int_1^e x \ln(x)\, dx$$

(a) Calculeu el nombre d'intervals necessaris per obtenir aquesta precisió si apliquem:

i. la regla del trapezi composta

ii. la regla de simpson composta.

(b) Calculeu el valor de l'aproximació que resulta d'aplicar el millor dels dos mètodes amb el nombre d'intervals obtinguts a l'apartat (a).

(c) Calculeu el valor de la integral exacte i l'error absolut. Són raonables aquests resultats?

11. Calculeu en quants subintervals cal dividir l'interval $[0, 1]$ per trobar una aproximació de la integral

$$I = \int_0^1 (x+1)^2 \ln(x+1)\, dx$$

amb quatre decimals exactes pel mètode de Simpson compost. Trobeu aquesta aproximació.

12. Volem aproximar amb un decimal exacte, la integral

$$I = \int_0^\pi x \cos(x)\, dx$$

(a) En quants intervals haurem de dividir l'interval $[0, \pi]$, si volem usar trapezi compost?

(b) En quants intervals haurem de dividir l'interval $[0, \pi]$, si volem usar simpson compost?

(c) Aproximeu el valor de la integral amb la precisió que es demana i usant el mètode més adient dels dos anteriors.

(d) Calculeu la integral exacte i compareu-la amb el resultat de l'apartat anterior.

13. Quin grau de precisió té la següent fórmula de quadratura:

$$\int_0^3 f(x)\, dx \approx \frac{1}{2} f(0) + 2f(1.5) + \frac{1}{2} f(3)$$

14. Els resultats d'integrar la recta $y = x + 1$ de 0 a 2 i d'aplicar la regla del trapezi per a aproximar $\int_0^2 (x^2 - x + 1)\, dx$ són exactament iguals. Per què? (Ind.: feu una representació gràfica).

15. Donada la integral $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$

(a) Calculeu el seu valor exacte.

(b) Calculeu el nombre d'interval necessaris per obtenir una aproximació amb 3 decimals exactes a partir de la fórmula de Simpson composta.

(c) Trobeu l'aproximació anterior.

16. Determineu A_0, A_1, A_2 perquè la següents fórmula de quadratura tingui grau de precisió 2.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_0 f(0) + A_1 f(0.5) + A_2 f(1)$$

Quina fórmula heu obtingut?

17. Calculeu el nombre d'intervals necessaris per a obtenir una aproximació amb 2 decimals exactes segons el mètode de trapezi compost per la integral $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$. Quant val h?

18. Trobeu els valors de a, b, c per tal que la fórmula de quadratura

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = a\,f(0) + b\,f(1) + c\,f(2)$$

sigui exacta per a polinomis de grau no superior a 2.