CURS D'INTRODUCCIÓ A L'ARQUITECTURA TÈCNICA

MATEMÀTIQUES

Montserrat Bruguera Padró
Albert Ferrer Biosca
Antoni Guillamon Grabolosa
Margarida Mitjana Riera
Francesc Panyella Brustenga
Joan J. Rodríguez Jordana
Carles Serrat Piè

Escola Universitària Politècnica de Barcelona
Secció EUPB del Dept. de Matemàtica Aplicada I
2001

La formació matemàtica dels estudiants que accedeixen a la fase selectiva de les titulacions impartides a l'EUPB és molt heterogènia. A més, no sempre coincideix amb el que, inevitablement, s'ha d'establir com a punt de partida en els ensenyaments de les Matemàtiques en el primer curs d'uns estudis universitaris, en particular en una Escola Tècnica Universitària.

L'objectiu general d'aquest text és reforçar i, si cal, complementar els coneixements adquirits en els diferents crèdits de Matemàtiques de l'ensenyament secundari per tal que l'alumne que ho consideri necessari, pugui suplir la possible mancança de coneixements previs i superar amb èxit els estudis de la fase selectiva.

Aquest material docent és el resultat de la reflexió que els autors, professors del Departament de Matemàtica Aplicada I a l'Escola Universitària Politècnica de Barcelona, han realitzat a partir de la seva experiència en la docència de les assignatures de Matemàtiques a les titulacions impartides a l'EUPB, en particular en el Curs d'Introducció a l'Arquitectura Tècnica.

En el text es tracten temes bàsics per al seguiment de les assignatures amb contingut matemàtic tant dels estudis d'Arquitectura Tècnica com dels d'Enginyeria Tècnica Topogràfica, en especial les de la fase selectiva. Per a cada tema desenvolupat hi ha una breu introducció teòrica, un conjunt de problemes i exercicis resolts, una col.lecció de problemes proposats, amb la corresponent solució, i una bateria de preguntes tipus test que solen fer referència a qüestions teòriques, per a les quals es dóna la solució de forma que poden servir d'autoavaluació. S'ha procurat que cada tema sigui mínimament autocontingut, en el sentit que la introducció de caire més teòric i els exercicis resolts, permetin la resolució dels exercicis del tema. Amb tot, al final del text hi ha una bibliografia complementària que es pot consultar quan calgui.

L'elaboració d'aquest material docent ha estat possible gràcies a l'ajut que la Universitat Politècnica de Catalunya dóna al curs d'Introducció a l'Arquitectura Tècnica. Aquest suport ha permès comptar amb la col.laboració d'alguns becaris que han ajudat en l'edició del material, en especial volem agrair a la Iolanda Benavente i al Carles Sagués el seu interès en aquest treball.

Barcelona, setembre de 2000

Els autors

Índex

Lliçó 1

Polinomis. Arrels i divisibilitat

Objectius

L'objectiu d'aquesta lliçó és que l'alumne recordi el concepte de funció polinòmica i relacioni les seves arrels, els seus zeros amb la divisibilitat i amb la descomposició d'un polinomi en factors primers.
Dintre de la divisibilitat repassarem els conceptes de màxim comú divisor i mínim comú múltiple.
Finalment, recordarem el concepte de funció racional, a fi que l'alumne s'hi familiaritzi i s'acostumi a operar amb aquest tipus de fraccions.

Resum Teòric

Introducció

Molts problemes de la física i de l'economia es poden descriure per lleis polinomials, és a dir, per expressions que són sumes i restes de potències naturals de les variables que intervenen en aquests tipus de problemes. Podem donar un exemple concret, tenim una urbanització que ven parcel.les quadrades de diferents tamanys, així doncs, tenim quadrats que medeixen x metres de costat. Venem les parcel.les a 1000 ptes el m^2 i a més hem de cobrar 2000 ptes per m lineal de vorera de la parcel.la perquè és el cost d'enrajorlar-la. Les despeses del notari són 145000 ptes. El possible comprador d'una parcel.la haurà de pagar

$$P = 145000 + 2000x + 1000x^2$$

En cada cas de venda, substituirem la variable x per la longitud del costat de la parcel.la en qüestió. L'expressió anterior és un polinomi de segon grau en la variable x.

DEFINICIÓ 1.0.1 *Un* ***polinomi*** *en la* ***variable*** *x, i que té com a coeficients números reals, és tota expressió del tipus*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \text{ on } a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0 \ \text{ i } \ n \in \mathbb{N}.$$

El ***grau*** *del polinomi és el número natural n, i els* ***coeficients*** *són els números reals a_i que multipliquen a les potències de x. El polinomi de la forma ax^p s'anomena* ***monomi***.

Tot número real és un polinomi de grau zero.

Suma i producte de polinomis

Donats els polinomis

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

definim les operacions de ***suma*** i ***producte*** de polinomis de la següent forma

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) = &\quad (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\ P(x) \cdot Q(x) = &\quad a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

es compleix que

$$\text{grau } (P(x) + Q(x)) \leq \text{màxim } (\text{grau } P(x), \text{ grau } Q(x))$$

$$\text{grau } (P(x) \cdot Q(x)) = \text{grau } P(x) + \text{grau } Q(x)$$

Exemple 1 $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $Q(x) = x + 3$
$P(x) + Q(x) = 3x^2 + 3x + 4$
$P(x) \cdot Q(x) = 3 + 7x + 11x^2 + 3x^3$

Divisió entera de polinomis

Donats els polinomis $P(x)$ i $Q(x)$ tals que el (grau $P(x)$) > (grau $Q(x)$), $Q(x) \neq 0$, existeixen dos polinomis $C(x)$ i $R(x)$ tals que

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x), \text{ grau } R(x) < \text{grau } Q(x)$$

$P(x)$ és el ***dividend***
$Q(x)$ és el ***divisor***
$C(x)$ és el ***quocient***
$R(x)$ és el ***residu*** (Si $R = 0$ es diu que $P(x)$ és ***divisible*** per $Q(x)$)
Per tal d'explicar com es fa la divisió de polinomis ho farem a partir d'un exemple

$$\begin{array}{rrrr|rr}
8x^3 & +4x^2 & +5x & +3 & 2x^2 & +1 \\ \cline{5-6}
-8x^3 & & -4x & & 4x & +2 \\ \cline{1-4}
/ & 4x^2 & +x & +3 & & \\
 & -4x^2 & & -2 & & \\ \cline{2-4}
 & & x & +1 & &
\end{array}$$

$C(x) = 4x + 2$
$R(x) = x + 1.$

Regla de Ruffini

Un cas de divisió especialment senzill, és la divisió per un divisor del tipus $x - a$. Es pot fer amb la ***Regla de Ruffini***, que és la següent:
Sigui $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & ... & a_1 & a_0 \\
a & & a_n a & ... & a_n a^{n-1} + a_{n-2}a^{n-2} + ... + a_2 a & a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_1 a \\ \hline
 & a_n & a_n a + a_{n-1} & ... & a_n a^{n-1} + a_{n-2}a^{n-2} + ... + a_2 a + a_1 & a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0
\end{array}$$

D'on obtenim que:

$$C(x) = a_n \cdot x^{n-1} + (a_n \cdot a + a_{n-1}) \cdot x^{n-2} + ... + (a_n \cdot a^{n-1} + a_{n-2} \cdot a^{n-2} + .. + a_2 \cdot a + a_1)$$
$$R(x) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + ... + a_1 \cdot a + a_0$$

Exemple 2 *Dividir* $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 4x - 25$ *per* $x - 3$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & -7 & 3 & 4 & -25 \\
3 & & 6 & -3 & 0 & 12 \\ \hline
 & 2 & -1 & 0 & 4 & -13
\end{array}$$

$C(x) = 2x^3 - x^2 + 4 \qquad R(x) = -13$

Arrels d'un polinomi i descomposició factorial

El ***valor numèric*** d'un polinomi en el punt x_0 és el número que s'obté en substituir x per x_0 en l'expressió $P(x)$ del polinomi. En l'exemple introductori, si la parcel.la té 50 metres de costat, el preu que pagarà el comprador serà el valor numèric del polinomi per $x_0 = 50$, és a dir

$$P(50) = 145000 + 2000 \cdot 50 + 1000 \cdot 50^2 = 2745000$$

PROPOSICIÓ 1.0.2 *El valor numèric d'un polinomi $P(x)$, per $x = a$ és igual al residu de dividir $P(x)$ per $x - a$.*

Demostració: $P(x) = (x - a)C(x) + R$, igualtat que no és més que la divisió entera de $P(x)$ per $(x - a)$. En el cas de la divisió entera, grau $R <$ grau $(x - a)$, però com que el grau de $(x - a)$ és 1, el grau de R ha de ser zero, per tant R és un número real. I si substituïm x per a en l'expressió anterior, obtenim

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 + R = R.$$

$\diamond$

Si dividim el polinomi $P(x) = 145000 + 2000x + 1000x^2$ de l'exemple introductori per $x - 50$, ens donarà com a residu el valor de P(50)=2745000.

Fem la comprovació

	1000	2000	145000
50		50000	2600000
	1000	52000	2745000

Direm que x_0 és una arrel del polinomi $P(x)$ si el valor numèric del polinomi per x_0 és zero, és a dir que $P(x_0) = 0$. Per tant, trobar les arrels del polinomi $P(x)$ equival a resoldre l'equació $P(x) = 0$

Exemple 3 *Sigui l'equació* $ax^2 + bx + c = 0$, *les seves arrels són*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ *és el discriminant de l'equació. Si* $\Delta > 0$, *l'equació té dues arrels reals. Si* $\Delta < 0$, *té dues arrels imaginàries i si* $\Delta = 0$, *té una arrel* $x = -\frac{b}{2a}$ *que direm que és doble.*

PROPOSICIÓ 1.0.3 *Les arrels enteres d'un polinomi de coeficients nombres enters, es troben entre els divisors del coeficient que multiplica* x^0 *(terme independent).*

Exemple 4 *Les arrels enteres del polinomi* $P(x) = x^3 - 7x + 6$, *es troben entre els divisors de 6, és a dir,* ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
Es comprova que
$P(1) = P(2) = P(-3) = 0$, *per tant les arrels enteres del polinomi són 1, 2, -3.*

PROPOSICIÓ 1.0.4 *Com a conseqüència de les proposicions anteriors, és condició necesària i suficient per tal que* $x = a$ *sigui arrel del polinomi* $P(x)$ *que sigui divisible per* $x - a$, *és a dir, que si* $x = a$ *és arrel de* $P(x)$, *aleshores* $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

DEFINICIÓ 1.0.5 *Direm que a és una* ***arrel múltiple*** *d'ordre o multiplicitat k del polinomi* $P(x)$, *si* $P(x)$ *és divisible* $(x - a)^k$, *però no per* $(x - a)^{k+1}$.

Teorema Fonamental de l'Àlgebra (Gauss)

PROPOSICIÓ 1.0.6 *Tot polinomi amb coeficients reals o complexos de grau més gran o igual que* 1, *admet com a mínim una arrel complexa.*

PROPOSICIÓ 1.0.7 *Sigui* $P(x)$ *un polinomi amb coeficients reals o complexes, de grau n més gran o igual que* 1 *i* $x_1, x_2, \cdots x_r$ *les diferents arrels reals o complexos de* $P(x)$, *de multiplicitats* $k_1, k_2, \cdots k_r$, *respectivament. Aleshores*
$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r}$ *on* $k_1 + k_2 + \cdots k_r = n$ *i* a_n *és el coeficient del monomi de grau més alt.*

PROPOSICIÓ 1.0.8 *Si* $(a + bi)$ *és una arrel del polinomi de coeficients reals* $P(x)$, *aleshores* $(a - bi)$ *és també arrel de* $P(x)$.

DEFINICIÓ 1.0.9 *Un **polinomi** $P(x)$, direm que és **primer o irreduïble** si no es pot escriure com a producte de dos polinomis de grau més gran o igual que* 1.

Corol.lari: Els únics polinomis primers amb coeficients reals són els de grau 1, i els de grau 2 amb discriminant negatiu.

DEFINICIÓ 1.0.10 *El **màxim divisor comú** de dos polinomis $A(x)$ i $B(x)$, és el polinomi de major grau possible que és divisor alhora de $A(x)$ i de $B(x)$. La notació és $m.d.c(A(x), B(x))$.*

PROPOSICIÓ 1.0.11 *Si el grau de $A(x)$ és més gran que el grau de $B(x)$ i $R(x)$ és el residu de la divisió entera de $A(x)$ i $B(x)$, aleshores $m.d.c\ (A(x), B(x)) = m.d.c\ (B(x), R(x))$. La demostració es pot fer com a exercici.*

Càlcul del màxim divisor comú de dos polinomis per l'algorisme d'Euclides

Aplicant reiteradament la proposició anterior, es pot trobar el màxim divisor comú de dos polinomis. La manera concreta com farem les successives divisions s'anomenen ***Algorisme d'Euclides***. Fem un exemple.

Exemple 5 $m.d.c\ (x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 - x - 1)$

c	x	$-x + 1$	$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$x^4 + x^3 - x - 1$	$x^3 + x^2 + x + 1$	$-x^2 - 2x - 1$	$2x + 2$
$-x^4 - x^3 - x^2 - x$	$-x^3 - 2x^2 - x$	$x^2 + x$	
$-x^2 - 2x - 1$	$-x^2 + 1$	$-x - 1$	
	$x^2 + 2x + 1$	$x + 1$	
	$2x + 2$	0	

Aleshores $m.d.c\ (x^4 + x^3 - x - 1, x^3 + x^2 + x + 1) = m.d.c\ (x^3 + x^2 + x + 1, -x^2 - 2x - 1) = m.d.c\ (-x^2 - 2x - 1, 2x + 2) = 2x + 2$.

L'última divisió té per residu zero, per tant $2x+2$ divideix a $(-x^2-2x-1)$ i a si mateix; per tant és el màxim divisor comú que buscàvem.

DEFINICIÓ 1.0.12 *El **mínim multiple comú** dels polinomis $A(x)$ i $B(x)$ és el polinomi de menor grau possible que és múltiple de $A(x)$ i de $B(x)$. La notació és $m.m.c(A(x), B(x))$.*

PROPOSICIÓ 1.0.13 *El mínim múltiple comú de $A(x)$ i de $B(x)$, multiplicat pel màxim divisor comú de $A(x)$ i de $B(x)$ és igual al producte de $A(x)\cdot B(x)$, és a dir*

$$m.m.c\,(A(x), B(x)) \cdot m.d.c\,(A(x), B(x)) = A(x) \cdot B(x).$$

Exemple 6 *Calculeu el $m.m.c(x^4+x^3-x-1, x^3+x^2+x+1)$.*
Per la proposició anterior sabem que $m.m.c\,(A(x), B(x)) = \dfrac{A(x)\cdot B(x)}{m.d.c\,(A(x), B(x))}$, en aquest cas el m.d.c dels dos polinomis ja l'havíem calculat anteriorment i és $2x+2$ o $(x+1)$, per tant

$$m.m.c\,(x^4+x^3-x-1,\;\; x^3+x^2+x+1) =$$

$$= \frac{x^7+2x^6+2x^5+x^4-x^3-2x^2-2x-1}{x+1} =$$

$$= x^6+x^5+x^4-x^2-x-1$$

Fraccions Racionals

Hem estudiat la divisibilitat entre polinomis i hem vist que el residu de la divisió entre polinomis no és sempre zero, això ens porta a estudiar les fraccions racionals.

DEFINICIÓ 1.0.14 *Una **fracció racional** és una expressió del tipus $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, on $A(x)$ i $B(x)$ són polinomis, $A(x)$ s'anomena **numerador** de la fracció i $B(x)$ **denominador**.*

Les propietats de les fraccions racionals són equivalents a les de les fraccions numèriques.

Propietats:

1. Equivalència:
$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A'(x)}{B'(x)} \quad \text{sii} \quad A(x) \cdot B'(x) = A'(x) \cdot B(x)$$
2. Si $P(x) \neq 0$,
$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \cdot P(x)}{B(x) \cdot P(x)}$$
3. Si $D =$ m.d.c $(A(x), B(x))$
$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)/D}{B(x)/D}$$

Exemples d'operacions amb fraccions racionals.

(a)
$$\frac{x+3}{x^2+1} + \frac{2x}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)+2x(x^2+1)}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3}$$

(b)
$$\frac{3x-1}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{2x} = \frac{(3x-1)(x+3)}{(x^2-9)2x} = \frac{(3x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)2x} = \frac{3x-1}{2x^2-6x}$$

(c)
$$\frac{3x-1}{x^2} : \frac{x^5}{x+1} = \frac{(3x-1)}{(x^2)} \cdot \frac{x+1}{x^5} = \frac{3x^2+2x-1}{x^7}$$

Descomposició d'una fracció racional en suma de fraccions simples

Sigui la fracció racional $\frac{A(x)}{B(x)}$. Si $B(x)$ es pot descomposar com a producte de polinomis de grau 1 diferents, $B(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_k)$, aleshores la fracció racional es pot descomposar en suma de fraccions simples:
$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_k}{x-x_k}$$
Per obtenir $A_1, A_2..., A_k$ cal considerar la següent igualtat de polinomis:

$$A(x) = A_1(x-x_2)\cdot(x-x_3)..(x-x_k)+A_2(x-x_1)\cdot(x-x_3)..(x-x_k)+....+A_k(x-x_1)\cdot(x-x_2)..(x-x_{k-1})$$

1.1 Exercicis resolts

---

1. Efectueu les divisions següents utilitzant l'algorisme de la divisió habitual:

a) $(x^7 - 4x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 3x + 6) : (x^3 + 2x^2 - 3)$,

b) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$.

---

a) Per resoldre aquest problema apliquem l'algorisme de la divisió directament.

$$
\begin{array}{cccccccc|cccc}
x^7 & & -4x^5 & -2x^4 & +6x^3 & -4x^2 & -3x & +6 & x^3 & +2x^2 & -3 & \\
\cline{9-12}
-x^7 & -2x^6 & & 3x^4 & & & & & x^4 & -2x^3 & x & -2 \\
\cline{1-8}
/ & -2x^6 & -4x^5 & x^4 & 6x^3 & -4x^2 & -3x & 6 & & & & \\
 & 2x^6 & 4x^5 & & -6x^3 & & & & & & & \\
\cline{2-8}
 & / & / & x^4 & & -4x^2 & -3x & 6 & & & & \\
 & & & -x^4 & -2x^3 & & 3x & & & & & \\
\cline{4-8}
 & & & / & -2x^3 & -4x^2 & / & 6 & & & & \\
 & & & & 2x^3 & 4x^2 & & -6 & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & / & / & & / & & & &
\end{array}
$$

Observem que aquesta divisió és exacta, és a dir, no té reste. Això vol dir, que el dividend factoritza de la següent forma

$$x^7 - 4x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 3x + 6 = (x^3 + 2x^2 - 3)(x^4 - 2x^3 + x - 2).$$

b) Com en el cas anterior apliquem l'algorisme de la divisió directament.

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
6x^4 & -x^3 & +5x^2 & +3x & -14 & & 2x^2 & -3x & +7 \\ \cline{7-9}
-6x^4 & +9x^3 & -21x^2 & & & & 3x^2 & +4x & -2 \\ \cline{1-5}
/ & 8x^3 & -16x^2 & +3x & -14 & & & & \\
 & -8x^3 & +12x^2 & -28x & & & & & \\ \cline{2-5}
 & / & -4x^2 & -25x & -14 & & & & \\
 & & 4x^2 & -6x & +14 & & & & \\ \cline{3-5}
 & & / & -31x & / & & & &
\end{array}
$$

El quocient de la divisió: $3x^2 + 4x - 2$.
El residu de la divisió: $-31x$.
El polinomi dividend admet la descomposició

$$6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14 = (2x^2 - 3x + 7)(3x^2 + 4x - 2) - 31x$$

---

2. Calculeu el quocient i el residu de les divisions següents utilitzant el mètode de Ruffini:

a) $(3x^5 + 2x + 1) : (x + 1)$,

b) $(x^5 - 2x^4 + x^3 - x + 1) : (x - 2)$.

---

a) Apliquem de forma directa el mètode de Ruffini.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & & -3 & 3 & -3 & 3 & -5 \\ \hline
 & 3 & -3 & 3 & -3 & 5 & -4
\end{array}
$$

El polinomi quocient resultant és $3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 5$.
El residu de la divisió és -4.

b) Com en el cas anterior, resolem mitjançant l'aplicació del mètode de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}$$

El polinomi quocient resultant és $x^4 + x^2 + 2x + 3$.
El residu de la divisió és 7.

---

3. Calculeu el valor de m en els polinomis següents, tenint en compte que:

a) $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$ és divisible per $x + 1$,

b) $3x^2 - mx + 10$ té valor numèric 0 per $x = 5$,

c) $x - 3$ és divisor de $3x^3 - 7x^2 - 9x - m$.

---

a) El polinomi serà divisible per $x + 1$ si i només si -1 n'és una arrel. Per resoldre el problema, substituirem el -1 al polinomi i resoldrem l'equació de primer grau resultant.

$$5(-1)^4 + m(-1)^3 + 2(-1) - 3 = 0,$$

$$5 - m - 2 - 3 = 0,$$

$$m = 0.$$

b) El nostre polinomi s'anul.la quan $x = 5$, 5 és una arrel del polinomi. Per trobar el valor de m que compleix les condicions, procedirem de forma anàloga al cas anterior. Substituïm i resolem l'equació que resulta

$$3(5)^2 - 5m + 10 = 0,$$

$$75 - 5m + 10 = 0,$$

$$m = \frac{-85}{-5},$$

$$m = 17.$$

c) Procedim de manera anàloga als casos anteriors (substituïm el 3 al polinomi i aïllem la m) i obtenim

$$3(3)^3 - 7(3)^2 - 9(3) - m = 0,$$

$$81 - 63 - 27 - m = 0,$$

$$m = -9.$$

---

4. Factoritzeu els polinomis següents calculant-ne alguna de les arrels enteres:

a) $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$,

b) $q(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

---

a) Les possibles arrels racionals, a/b, d'aquest polinomi són:
Com a numerador, a: ± 1 i ± 2 (divisors del terme independent, 2).
Com a denominador, b: ± 1, ± 2, ± 3 i ± 6 (divisors del coeficient dominant, 6).
Qualsevol d'aquestes possibles arrels si ho és de fet ha d'anu.lar el polinomi. Per exemple suposem que volem saber si -1 és o no arrel de $p(x)$; caldrà que substituïm el valor -1 al polinomi i comprovem si realment fa que el seu valor sigui 0.

$$6(-1)^3 + 7(-1)^2 - 9(-1) + 2 = -6 + 7 + 9 + 2 = 12.$$

Per tant, -1 no és arrel del polinomi. Després de successives proves hem trobat que -2 n'és una. Apliquem el mètode de Ruffini de forma reiterada i obtenim

	6	7	-9	2	
-2		-12	10	-2	
	6	-5	1	0	$p(x) = (x+2)(6x^2 - 5x + 1)$
$1/2$		3	-1		
	6	-2	0		$p(x) = (x+2)(x-1/2)(6x-2)$
$1/3$		2	0		
	6	0			$p(x) = (x+2)(x-1/2)(x-1/3)\cdot 6$

Per a la descomposició del polinomi $6x^2 - 5x + 1$ també hauríem pogut resoldre l'equació de segon grau mitjançant la seva fórmula[1] i d'aquesta forma trobar les arrels. Procedint així obtenim

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6}}{2\cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$x_1 = 1/2 \text{ i } x_2 = 1/3.$$

[1]La fórmula de l'equació de segon grau: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

El polinomi $6x^2 - 5x + 1$ quedaria factoritzat $6 \cdot (x - 1/2)(x - 1/3)$. Finalment el polinomi $p(x)$ té la següent descomposició en factors

$$p(x) = (x + 2)(2x - 1)(3x - 1).$$

Aquest polinomi té una arrel entera que és -2 i dues en forma de fracció que són $1/2$ i $1/3$.

b) Les possibles arrels racionals, a/b, d'aquest polinomi són:
Com a numerador, a: ± 1, ± 2 i ± 4 (divisors del terme independent, 4).
Com a denominador, b: ± 1 (divisors del coeficient dominant, 1).
Com en el cas anterior mitjançant la substitució de les possibles arrels en $q(x)$ trobarem quins valors fan que el polinomi s'anul.li. Comprovem per exemple si l'1 és o no arrel de $q(x)$. Procedint de la mateixa manera

$$(1)^4 + 2(1)^3 - 3(1)^2 - 4(1) + 4 = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0.$$

Hem comprovat que 1 és arrel del polinomi, per tant comencem a aplicar el mètode de Ruffini a partir d'aquesta arrel.

$$\begin{array}{r|ccccc l}
 & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 & \\
1 & & 1 & 3 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & -4 & \multicolumn{1}{|c}{0} & q(x) = (x-1)(x^3+3x^2-4) \\
1 & & 1 & 4 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{0} & & q(x) = (x-1)(x-1)(x^2+4x+4) \\
-2 & & -2 & -4 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{0} & & & q(x) = (x-1)^2(x+2)(x+2) \\
-2 & & -2 & & & & \\
\hline
 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{0} & & & & q(x) = (x-1)^2(x+2)^2
\end{array}$$

De la mateixa manera que en el cas anterior les arrels del polinomi $x^2 + 4x + 4$ les podem trobar aplicant la fórmula de l'equació de segon grau. En aquest cas, però no és necessari ja que aquest polinomi es factoritza fàcilment perquè és el quadrat d'una suma[2]. Aleshores la factorització del polinomi $x^2 + 4x + 4$ és $(x+2)^2$. El polinomi $q(x)$ queda factoritzat

$$p(x) = (x+2)^2(x-1)^2.$$

Aquest polinomi té dues arrels enteres dobles que són -2 i 1.

---

5. Resoleu les equacions següents:

a) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$,

b) $x^6 - x^3 - 1 = 0$.

---

a) El primer pas que cal que fem per resoldre equacions d'aquest tipus és un canvi de variable que redueixi l'equació a una de segon grau. El canvi adequat serà

$$x^2 = t.$$

Si substituïm t a l'equació original i obtenim la nova equació que haurem de resoldre

$$t^2 - 26t + 25 = 0.$$

Resolem l'equació anterior de la forma habitual

$$t = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 25}}{2}.$$

Les solucions d'aquesta equació són:

$$t_1 = 50/2 = 25,$$
$$t_2 = 2/2 = 1.$$

De la resolució anterior, hem obtingut les arrels de l'equació transformada. Atès que ens demanen les arrels de l'equació original, haurem de desfer el canvi que hem realitzat per a trobar-les.

$$x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}.$$

(Per a cada valor de t en tindrem dos de x).
Les quatre solucions de la nostra equació seran

$$x_1 = \sqrt{25} = 5 \ , \ x_2 = -5$$
$$x_3 = \sqrt{1} = 1 \text{ i } x_4 = -1.$$

[2]Quadrat d'una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b) Procedim de la mateixa manera que en el cas anterior, és a dir, busquem quin és el canvi convenient. En aquest cas serà

$$x^3 = t.$$

Si fem la substitució en l'equació original, la nova equació que hem de resoldre és, com en el cas anterior, una de segon grau

$$t^2 - t - 1 = 0.$$

Així,

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Les solucions d'aquesta equació són

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Amb la transformació $x = \sqrt[3]{t}$ desfem el canvi que hem fet i trobem les solucions de la nostra equació (cal destacar que en aquest cas per cada valor de t en tenim un únic valor de x). Les dues solucions de la nostra equació seran

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$
$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

La diferència amb el cas anterior és que la segona equació només té dues arrels reals (de les sis possibles que podria tenir) mentre que la primera té quatre arrels reals que és el nombre màxim d'arrels que admet.

---

6. Determineu els coeficients del polinomi $ax^2 + bx + 4$ si sabeu que és divisible per $x + 2$ i que els residus obtinguts quan es divideix per $x + 1$ i $x + 3$ són iguals.

Atès que tenim dos paràmetres com a incògnites necessitem dues equacions per resoldre el problema.
Per trobar la primera com que el nostre polinomi és divisible per $x+2$ sabem que -2 n'és una arrel i per tant fa que el polinomi s'anul.li. Substituïm el -2 al polinomi i

aconseguim la primera equació:

$$a(-2)^2 + b(-2) + 4 = 0 \text{ i } 4a - 2b + 4 = 0, \text{ és a dir, } 2a - b = -2.$$

Per a obtenir la segona equació, ens diuen que els residus que resulten de la divisió del polinomi per $(x+1)$ i $(x+3)$ són iguals. Per tant, calculem aquests residus mitjançant el mètode de Ruffini (podríem fer-ho aplicant l'algorisme de divisió o simplement substituint els corresponents valors al polinomi).

$$\begin{array}{r|ccc} & a & b & 4 \\ -1 & & -a & a-b \\ \hline & a & b-a & \multicolumn{1}{|c}{a-b+4} \end{array}$$

El residu que resulta de dividir el polinomi per $(x+1)$ és $a-b+4$.
Procedim de forma anàloga amb el divisor $(x+3)$

$$\begin{array}{r|ccc} & a & b & 4 \\ -3 & & -3a & 9a-3b \\ \hline & a & b-3a & \multicolumn{1}{|c}{9a-3b+4} \end{array}$$

El residu que resulta de dividir el polinomi per $(x+3)$ és $9a-3b+4$.
Si substituïm $x=-1$ i $x=-3$ al polinomi ax^2+bx+4 trobem també els residus. En el cas de $x=-1$ s'obté $a-b+4$ i quan $x=-3$ obtenim $9a-3b+4$.
Com que ambdós residus han de ser iguals, tenim:

$$a-b+4 = 9a-3b+4, \quad -8a+2b=0.$$

La segona equació és doncs $-8a+2b=0$, o equivalentment $-4a+b=0$. Amb l'equació que havíem obtingut de la primera condició del problema i la que acabem d'obtenir podem trobar els valors de a i de b tot resolent el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a-b & = & -2 \\ -4a+b & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Si resolem per reducció (qualsevol mètode alternatiu per a la resolució de sistemes d'equacions lineals és vàlid), obtenim

$$a = 1 \text{ i } b = 4.$$

---

7. Resoleu l'equació $12x^3 - 8x^2 - x + 1 = 0$, sabent que una de les seves arrels és doble.

Si x_0 és l'arrel doble i x_1 és la simple, tenim que

$$\begin{aligned} 12x^3 - 8x^2 - x + 1 &= 12(x - x_0)^2(x - x_1) = \\ &= 12(x^3 - x_1x^2 - x_0^2x_1 - 2x^2x_0 + 2x \cdot x_0x_1 + x_0^2x) \end{aligned}$$

Si igualem els coeficients que tenen les mateixes potències de x en els dos costats de la igualtat

1. coeficient en x^3: $12 = 12$

2. coeficient en x^2: $-8 = 12(-x_1 - 2x_0)$

3. coeficient en x: $-1 = 12(2x_1x_0 + x_0^2)$

4. terme independent: $1 = 12(-x_1x_0^2)$

Tenim quatre equacions (tot i que de fet en tenim tres atès que la primera és una igualtat) que ens donen les condicions que han de complir x_0 i x_1.
Si resolem la segona obtenim quin és el valor de x_1 que està en funció del de x_0
$24x_0 + 12x_1 = 8$, per tant $x_1 = \dfrac{2 - 6x_0}{3}$
Si resolem la tercera obtenim els possibles valors de x_0

$$\begin{aligned} 12\left(x_0^2 + 2x_0 \cdot \frac{2 - 6x_0}{3}\right) &= -1 \\ 36x_0^2 - 16x_0 - 1 &= 0 \\ x_0 &= \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 36}}{72} \end{aligned}$$

Els dos valors possibles de x_0 són

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ o } x_0 = -\frac{1}{18}.$$

Les arrels han de complir la quarta condició (la que ve donada per l'equació associada al terme independent), per tant la solució és

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ i } x_1 = -\frac{1}{3}$$

ja que $1 = 12(-x_1 \cdot x_0^2)$ només es compleix si x_0 i x_1 valen el resultat que hem donat. Veiem-ho, tot substituint els valors corresponent

$$1 = 12\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

---

8. Donada l'equació $x^3 - 7x + \lambda = 0$, calculeu λ per tal que una arrel sigui doble que l'altre i resoleu l'equació.

Les arrels seran x_0, $2x_0$ i x_1. Per tant l'equació també la podem expressar de la següent manera

$$x^3 - 7x + \lambda = (x - x_0)(x - 2x_0)(x - x_1).$$

Si igualem els coeficients de les mateixes potències de x tenim les tres equacions següents

$$\left\{\begin{array}{rl} 3x_0 + x_1 = & 0 \\ 2x_0^2 + x_0 \cdot x_1 + 2x_0 \cdot x_1 = & -7 \\ 2x_0^2 \cdot x_1 = & -\lambda \end{array}\right.$$

De la primera equació podem obtenir el valor de x_1 en funció de x_0 per tant $x_1 = -3x_0$. Si substituïm a la segona obtenim

$$2x_0^2 + 3x_0(-3x_0) = -7,$$

resolent aquesta equació s'obtenen els dos possibles valors de x_0 que són ± 1.
Si considerem aquests dos valor de x_0 les dues solucions del problema són

Si $x_0 = 1$ de la primera equació obtenim que $x_1 = -3$ i de la tercera resulta que $\lambda = 6$.

Si $x_0 = -1$ de la primera equació obtenim que $x_1 = 3$ i de la tercera resulta que $\lambda = -6$.

9. Demostreu que si a és una arrel doble del polinomi $P(x)$, és una arrel simple de $P'(x)$ (derivada de $P(x)$).

Per resoldre aquest problema ens cal recordar que $[(x-a)^n]' = n(x-a)^{n-1}$ i que $(P \cdot Q)' = P'Q + PQ'$.
Si tenim en compte això, aleshores si suposem que a és una arrel doble de $P(x)$, llavors

$$P(x) = (x-a)^2 \cdot Q(x),$$

si derivem $P(x)$ tenim que

$$\begin{aligned} P'(x) &= [(x-a)^2 \cdot Q(x)]' = \\ &= 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) = \\ &= (x-a)[2Q(x) + (x-a)Q'(x)] \end{aligned}$$

és a dir $P'(x) = (x-a) \cdot T(x)$ i per $x = a$, $P'(a) = 0$.

10. Sabem que $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$. Trobeu A i B.

Per resoldre aquest problema, farem les operacions indicades a l'enunciat.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} \end{aligned}$$

Si dos fraccions racionals són iguals i tenen els mateixos denominadors, els numeradors han de ser iguals.

$$1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$$

és a dir, igualant els coeficients que tenen les mateixes potencies de x, tenim

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B &= 1 \end{aligned}$$

D'aquí obtenim que $A = \dfrac{1}{2}$ i $B = -\dfrac{1}{2}$.

11. Obtingueu el reste de dividir un polinomi per $x^2 - 4$ sabent que si es divideix aquest polinomi per $x - 2$ el reste obtingut és 11 i que el reste és 27 si es divideix el mateix polinomi per $x + 2$.

Per tal de resoldre aquest problema suposarem que P(x) és el nostre polinomi; aleshores

$$P(x) = (x^2 - 4)C(x) + (ax + b)$$

on el reste que ens demanen és de grau menor o igual a 1, ja que el divisor és de grau 2, i per tant tindrà la forma $(ax + b)$.

Sabent que $P(2) = 11$ i $P(-2) = 27$

aleshores tenim

$$P(2) = (2^2 - 4)C(x) + 2a + b = 11$$

$$P(-2) = ((-2)^2 - 4)C(x) - 2a + b = 27$$

i aïllant,obtenim

$$b = 19 \text{ i } a = -4$$

Per tant, el reste de dividir el polinomi P(x) per $(x^2 - 4)$ resulta ser

$$(-4x + 19)$$

12. Calculeu el valor de k per tal que els polinomis $kx^3 + 5x^2 + 7x - 6$ i $x^2 + 7x - 31$ tinguin el mateix reste quan els dividim per $x - 5$.

Si els dos polinomis han de tenir el mateix reste quan els dividim per $x - 5$ això implica:

$$k5^3 + 5^3 + 35 - 6 = 5^2 + 35 - 31$$

amb la qual cosa tenim que

$$5^3(1 + k) = 0$$

$$k = -1$$

1.2 Exercicis proposats

1. Efectueu les divisions següents utilitzant la divisió ordinària i comproveu el resultat final:

   a) $(x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4) : (x^2 + x + 2)$,

   b) $(x^3 + 4x^2 + 6) : (x - 4)$.

2. Calculeu el quocient i el residu de les divisions següents utilitzant el mètode de Ruffini:

   a) $(x^6 + x^2 - 3) : (x + 3)$,

3. Calculeu el valor de m en els polinomis següents, tenint en compte que:

   a) $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$ és divisible per $x + 1$,

   b) $3x^2 - mx + 10$ té valor numèric 0 per $x = 5$,

   c) $x - 3$ és divisor de $3x^3 - 7x^2 - 9x - m$.

4. Factoritzeu els polinomis següents calculant-ne alguna de les arrels enteres:

   a) $x^3 - x^2 - 4$,

   b) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$.

5. Resoleu les equacions biquadrades següents:

   a) $x^4 - 10x^2 + 90 = 0$,

   b) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

6. El Teorema de Descartes diu que: *el nombre d'arrels positives d'un polinomi, contada cadascuna tants cops com ens indica la seva multiplicitat, no supera el nombre de variacions del signe que presenta la successió de coeficients del polinomi, i a mès, tots dos nombres tenen la mateixa paritat.*

   Comproveu el Teorema de Descartes pels polinomis del problema 5.

7. Calculeu el valor d'm perquè el polinomi $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 2m$ tingui per valor numèric 12 per $x = -2$

8. Quin valor ha de prendre m perquè $x + 1$ sigui un factor del polinomi $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$.

9. Desenvolupeu $(x + a)^3$.

10. Calculeu el m.d.c$(16x^3 + 36x^2 - 12x - 18, 8x^2 - 2x - 3)$.

11. Calculeu reduint a mínim comú denominador

$$\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x+1}$$

12. Simplifiqueu la fracció racional

$$\frac{x^2-5x+6}{2xy-6y}$$

13. Comproveu que x^3-x^2+2x-2 no es pot descomposar en factors de primer grau.

14. Sense efectuar la divisió demostreu que

    a) x^6-a^6 és divisible per x^2-a^2,

    b) $x^{12}-a^{12}$ és divisible per x^3-a^3 i per x^4-a^4.

15. Demostreu que $(x^n-1)(x^{n+1}-1)$ és divisible per $(x+1)(x-1)^2$.

16. Utilitzant l'algorisme de Ruffini feu la divisió

$$(x^8-6x^4+x^2+8):(x^2-5).$$

17. Determineu els coeficients del polinomi x^3+ax^2+bx+c, de manera que sigui divisible per $x+1$ i doni els mateixos residus que en dividir-lo per $x-1$, $x-2$ i $x-3$.

18. Resoleu

$$(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x+1)^2=0.$$

19. Calculeu els coeficients a i b de ax^4+bx^3+1 per tal que sigui divisible per $(x-1)^2$.

20. Calculeu els coeficients a i b de ax^4+bx^3+1 de manera que sigui divisible per $(x+1)^2$.

21. Calculeu el valor de m tal que el polinomi $2(m+1)x^2+3x+(m-2)$ sigui divisible per $x-2$.

22. Un polinomi $P(x)$ dividit per $x+1$ té per reste 3, $P(2)=6$ i $P(1)=-5$. Determineu el reste de la divisió de P(x) per $(x-2)(x+1)(x-1)$.

23. Trobeu un polinomi de segon grau amb coeficients reals sabent que una de les seves arrels és $2-5i$

24. Donada l'equació $x^3-7x+n=0$

    a) Calculeu n per tal que una arrel sigui el doble que l'altre.

    b) Resoleu l'equació

25. Descomposeu en suma de fraccions simples:

a)

$$\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}$$

b)

$$\frac{-7x-10}{x^3+x^2-4x-4}$$

1.3 Solució als exercicis proposats

1. a) quocient:$=x^2-7x+7$, residu:$=10x-18$,
b) quocient:$=x^2+8x+32$, residu:$=134$.

2. a)quocient:$=x^5-3x^4+9x^3-27x^2+82x-246$, residu:$=735$,

3. a) $m=0$, b) $m=17$, c) $m=-9$.

4. a) $(x-2)(x^2+x+2)$,
b) $(x-1)(x-4)(x+4)(x-5)$.

5. a) no té solucions reals
b) $x=-3$, $x=\frac{-1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=3$.

7. $m=16$.

8. $m=0$.

9. $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$.

10. $4x-3$.

11. $\frac{-x^2+2x+2}{x^2-1}$.

12. $\frac{x-2}{2y}$.

13. $(x-1)(x^2+2)$

16. $C=x^6+5x^4+19x^2+96$ i $R=488$

17. $a=-6$, $b=11$ i $c=18$.

18. $x=2$, $x=-1$ i $x=-4$

19. $a = 3$ i $b = -4$

20. $a = 3$ i $b = 4$

21. $m = -\dfrac{4}{3}$

22. El reste és: $5x^2 - 4x - 6$

23. $(x - (2 - 5i))(x - (2 + 5i)) = x^2 - 4x + 29$

24. a) $n = 6$ ó $n = -6$
b) Si $n = 6$ aleshores les solucions són $x_0 = 1$, $x_1 = 2 = 2x_0$ i $x_2 = -3$.
Si $n = -6$ aleshores les solucions són $x_0 = -1$, $x_1 = -2 = 2x_0$ i $x_2 = 3$

25. a) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2}{x+1}$

b) $\dfrac{-2}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

1.4 Preguntes de test

1. Assenyaleu quina de les següents afirmacions és certa.

   a) Un polinomi de grau 5 amb coeficients reals pot tenir 5 arrels complexes no reals.

   b) Un polinomi de grau 3 amb coeficients reals té, com a mínim, una arrel real.

   c) Un polinomi de grau 4 amb coeficients reals, sempre es pot descompondre en producte de quatre polinomis de grau 1 amb coeficients reals.

2. Sigui $P(x)$ un polinomi de grau 4 amb coeficients reals i amb l'arrel complexa $a+ib$.

   a) El nombre complex $a-ib$ és arrel de $P(x)$.

   b) $P(x)$ pot tenir 3 arrels reals.

   c) $P(x)$ pot tenir 1 arrel real i 3 complexes.

3. Donat un polinomi $P(x)$ de grau n i coeficients reals, es pot descompondre, com a màxim, en producte de polinomis

   a) de grau 1 i coeficients reals.

   b) de grau 1 i coeficients complexos.

   c) de grau 1 i de grau 2 amb coeficients complexos.

4. Sigui el polinomi de coeficients reals $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{2n} z^{2n}$. Quina de les següents afirmacions és FALSA?

   a) $p(z)$ descomposa en producte de polinomis de grau 2 amb coeficients reals.

   b) Totes les solucions complexes, no reals, de l'equació $p(z) = 0$ estan aparellades.

   c) $p(z) = 0$ admet sempre una solució real.

5. Sigui el polinomi de coeficients reals $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Quina de les següents afirmacions és FALSA ?

   a) $p(z) = 0$ admet sempre una solució real.

   b) Totes les solucions complexes, no reals, de l'equació $p(z) = 0$ estan aparellades.

   c) $p(z) = 0$ té n solucions i totes estan a $\mathbb{C}$.

1.5 Solució del test

1. b
2. a
3. b
4. c
5. a

Lliçó 2

Nombres complexos

Objectius

L'objectiu d'aquesta lliçó és que l'alumne s'acostumi a operar amb els nombres complexos, es familiaritzi amb les seves expressions binòmiques i trigonomètriques i pugui decidir amb naturalitat quan utilitzar unes expressions o unes altres.

Resum Teòric

Introducció

L'equació $x^2 + 1$ no té solució en el cos dels nombres reals, $\mathbb{R}$, ja que el quadrat d'un nombre real no nul és positiu, és a dir, no existeix cap $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.
Per aconseguir la solució de l'equació $x^2 + 1 = 0$, es va introduir el símbol $i = \sqrt{-1}$, que es va considerar com un nombre imaginari amb el que es podia operar com un nombre dels ja coneguts, tenint tant sols en compte que $i^2 = -1$.

DEFINICIÓ 2.0.1 *Designarem per $\mathbb{C}$, el conjunt dels elements $\{a+bi\}$ amb a i b nombres reals.*
Als elements de $\mathbb{C}$ en direm ***nombres complexos****. En el conjunt $\mathbb{C}$, definim les operacions de* ***suma*** *i* ***producte*** *de la manera següent*

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Amb aquestes operacions el conjunt $\mathbb{C}$, té les mateixes propietats que tenen els nombres reals.
El conjunt $\mathbb{R}$ està inclòs en $\mathbb{C}$, mitjançant l'aplicació $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida per

$$f(x) = x + 0i$$

L'expressió de $a + bi$ rep el nom de ***forma binòmica*** *del nombre complex.*

DEFINICIÓ 2.0.2 *Si $z = a + bi$, es diu* ***conjugat*** *de z al complex $\overline{z} = a - bi$*

Representació gràfica del nombre complex

La representació del nombre complex $z = a + bi$ en el pla cartesià, ve donada pel punt (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

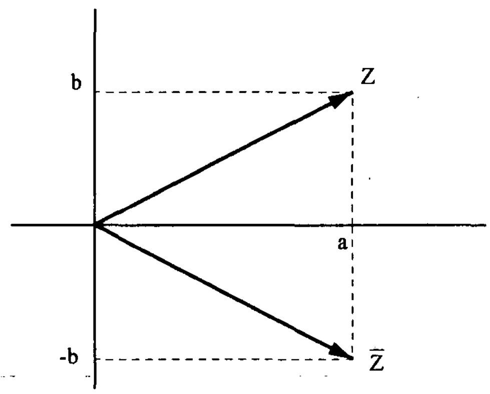


Figura 2.1: Representació gràfica del nombre complex i el seu conjugat

Quocient de dos nombres complexos

Per calcular el quocient de dos nombres complexos, s'escriu el quocient en forma de fracció i es multipliquen el numerador i el denominador pel conjugat del denominador.

Exemple 7 *Escrivim el nombre complex* $(1 + i) : (2 + 3i)$ *en forma binòmica:*

$$(1 + i) : (2 + 3i) = \frac{(1+i)}{(2+3i)} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(5-i)}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

DEFINICIÓ 2.0.3 *Si* $z = a + bi$, *el* ***mòdul*** *de* z *és el nombre real positiu*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Expressió Trigonomètrica i Polar del nombre complex

Si representem el nombre complex $z = a + bi$ en el pla cartesià, pel punt (a, b), la distància de (a, b) a l'origen és el mòdul de z, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$ i si l'angle que forma el vector

(a, b) amb l'eix x és α, l'***argument*** de z és el conjunt

$$\{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Per comoditat d'escriptura, prendrem com a argument de z, l'angle $0 \leq \alpha < 2\pi$ Llavors $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ s'anomena ***expressió trigonomètrica*** del nombre com; z.

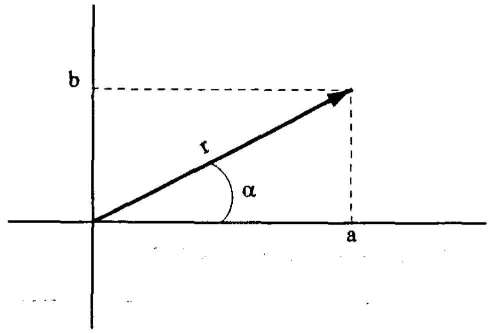


Figura 2.2: Representació gràfica del nombre complex indicant el módul i l'angle

Una forma simplificada d'escriure un nombre complex, és la forma polar $z = r_\alpha$.

El producte i el quocient de nombres complexos en forma polar es realitza de la forma següent:

PROPOSICIÓ 2.0.4 *Si* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *i* $z' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$

$$z \cdot z' = r \cdot r'(\cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha')) = r \cdot r'_{(\alpha+\alpha')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i\sin(\alpha - \alpha')) = \left(\frac{r}{r'}\right)_{(\alpha-\alpha')}$$

Gràficament la suma de nombres complexos correspon a la suma de vectors i per tant l'aplicació $f(z) = z + z_0$ és una translació. És interessant observar que donat un nombre complex z_0 de mòdul r_0 i argument α_0, multiplicar per z_0 és fer una homotècia de raó r_0 i un gir d'angle α_0.

Corol.lari (*Fórmula de Moivre*): Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

Corol.lari: Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \text{ amb } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Tot nombre complex no nul té n arrels n-éssimes diferents.

Observem que gràficament les n arrels n-éssimes d'un nombre complex r_α divideixen la circumferència de radi $\sqrt[n]{r}$ en n parts iguals. (Tal i com es pot comprovar en l'exercici resolt 9 i en l'exercici proposat 16)

2.1 Exercicis resolts

1. Efectueu les següents operacions amb nombres complexos:

a) $2(3-i)-4(5+2i)$,

b) $(2-3i)^2+7-5i$,

c) i^{1996},

d) $1+i+i^2+...+i^{2001}$.

---

a) Efectuem les operacions aplicant les propietats de les operacions entre nombres complexos.

$$2(3-i)-4(5+2i)=6-2i-20-8i=-14-10i.$$

b) Procedim de la mateixa manera que en l'apartat anterior.

$$(2-3i)^2+7-5i=4-12i+9i^2+7-5i=11-9-17i=2-17i.$$

c) Si tenim en compte la seqüència cíclica

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ \ldots.$$

tenim que

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1 \text{ i } i^{4k+3}=-i.$$

Així doncs per a calcular i^{1996} només ens cal calcular el residu de dividir 1996 per 4 (o equivalentment el de dividir 96 per 4) i per tant

$$i^{1996}=i^{96}=i^0=1.$$

d) Si tenim en compte la seqüència cíclica anterior podem posar la suma de la següent forma

$$1+i+i^2+...+i^{2001}=\underbrace{1+i-1-i}_{0}+\underbrace{1+i-1-i}_{0}+\ldots+1+i=1+i.$$

(Només cal observar que cada quatre termes la suma val 0.)

2. Calculeu les solucions de les següents equacions:

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$,

b) $x^2 - x + 4 = 0$,

c) $x^2 - 8x + 30 = 0$,

d) $x^2 + ix - 2 = 0$.

Per resoldre les equacions proposades apliquem la fórmula de l'equació de segon grau.

a)

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{-1}}{2},$$
$$x_1 = \frac{-6 + 2i}{2} = -3 + i,$$
$$x_2 = \frac{-6 - 2i}{2} = -3 - i.$$

b)

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{15}\, i}{2},$$
$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i,$$
$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i.$$

c)

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-56}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{56}\, i}{2} = \frac{8}{2} \pm \frac{2 \cdot \sqrt{14}\, i}{2},$$
$$x_1 = 4 + \sqrt{14} i,$$
$$x_2 = 4 - \sqrt{14} i.$$

d)

$$x = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-1 + 8}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{7}}{2} = \frac{-i}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2},$$
$$x_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2},$$
$$x_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Observeu que en els tres primers apartats, en tractar-se de polinomis amb coeficients reals, els dos nombres complexos solució són conjugats l'un de l'altre.

---

3. Calculeu a) $\dfrac{i}{2+3i}$, b) $\dfrac{4-5i}{i}$ i c) $(3+4i)^{-1}$.

Per dividir complexos procedirem sempre multiplicant i dividint pel conjugat[1] del denominador.

a) Multipliquem i dividim per $2-3i$, i obtenim

$$\frac{i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{2i-3i^2}{4-9i^2}=\frac{3+2i}{13}.$$

b) Multipliquem i dividim per $-i$, i obtenim

$$\frac{4-5i}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-4i+5i^2}{-i^2}=\frac{-5-4i}{1}=-5-4i.$$

c) Multipliquem i dividim per $3-4i$, i obtenim

$$(3+4i)^{-1}=\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{3-4i}{9-16i^2}=\frac{3-4i}{25}.$$

---

4. Resoleu l'equació

$$2z+5i-4=\frac{z-i-4}{3}.$$

Utilitzant l'àlgebra de les operacions del cos dels complexos obtenim

$$\begin{aligned}
2z+5i-4 &= \frac{z-i-4}{3},\\
3(2z+5i-4) &= z-i-4,\\
6z+15i-12 &= z-i-4,\\
6z-z &= 12-4-15i-i,\\
5z &= 8-16i,\\
z &= \frac{8}{5}-\frac{16}{5}i.
\end{aligned}$$

[1]El conjugat d'un nombre complex $z=a+bi$ és $\overline{z}=a-bi$.

5. Calculeu el valor de m i n perquè es verifiqui la igualtat

$$(2+i)(m-i) = n+3i.$$

Per resoldre aquest problema tindrem en compte que perquè dos nombres complexos $z = a+bi$ i $z' = a'+b'i$ siguin iguals cal que les respectives parts reals i imaginàries coincideixin, és a dir, que $a = a'$ i $b = b'$. Tenint en compte això obtenim,

$$2m - i^2 + mi - 2i = n+3i,$$

$$2m+1+(m-2)i = n+3i,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2m+1 & = & n \\ m-2 & = & 3 \end{array}\right.$$

Aïllant m de la segona equació i substituint a la primera per a trobar el valor de n, s'obté

$$m = 5 \text{ i } n = 11.$$

6. Determineu el valor de a perquè el nombre complex $z = \dfrac{a+6i}{2-i}$

a) sigui un nombre real,

b) sigui un nombre imaginari pur,

c) estigui sobre la bisectriu del segon i quart quadrants.

Primer calculem l'expressió del complex z

$$z = \frac{a+6i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{(2a-6)+(12+a)i}{5}.$$

La part real de z és $a = \dfrac{2a-6}{5}$ i la part imaginària $b = \dfrac{12+a}{5}$.

a) Per tal que z sigui un nombre real cal que la part imaginària sigui 0. Per tant, hem de trobar el valor de a que fa que $\dfrac{12+a}{5} = 0$.
Solucionem l'equació anterior i obtenim

$$a = -12.$$

b) En aquest cas, el que ens demanem és el valor de a que fa que z tingui només part imaginària, és a dir, volem que $\dfrac{2a-6}{5} = 0$. Tot resolent l'equació, s'obté

$$a = 3.$$

c) Perquè z estigui a la bisectriu del segon i quart quadrant, s'ha de complir que la seva part real i la seva part imaginària siguin oposades.

$$\begin{aligned} \frac{2a-6}{5} &= -\frac{12+a}{5}, \\ 2a-6 &= -12-a, \\ a &= -2. \end{aligned}$$

---

7. Sigui el triangle de vèrtexs $A(2,4)$, $B(4,6)$ i $C(6,2)$

a) Trobeu els vèrtexs A', B' i C' del triangle transformat segons una rotació de 30° i una homotècia de raó 2 des de l'origen.

b) Calculeu el vèrtex transformat A'' de punt $A(2,4)$ si fem una rotació i una homotècia iguals a les de l'apartat anterior però des del punt $O'(1,2)$.

---

a) Per transformar el triangle, segons les condicions que ens diu el problema, cal que multipliquem cadascun dels vèrtexs pel nombre complex 2_{30°. Primer cal doncs transformar els vèrtexs a forma polar o bé 2_{30° a forma binòmica. Atès la menor complexitat d'aquest darrer càlcul, transformarem el complex pel que hem de multiplicar a forma binòmica.

$$z = 2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

Multiplicant cadascun dels vèrtex del triangle per z, obtenim les noves coordenades del vèrtexs de triangle traslladat i rotat. Els nous vèrtexs són

A' $= (2+4i)(\sqrt{3}+i) = (2\sqrt{3}-4) + (2+4\sqrt{3})i,$

B' $= (4+6i)(\sqrt{3}+i) = (4\sqrt{3}-6) + (4+6\sqrt{3})i,$

C' $= (6+2i)(\sqrt{3}+i) = (6\sqrt{3}-2) + (6+2\sqrt{3})i.$

b) Per transformar el vèrtex A segons la mateixa rotació i homotècia de l'apartat anterior però considerant que la fem des del punt $O'(1,2)$, procedirem de la forma següent

$$\begin{aligned} \vec{O'A''} &= \vec{O'A} \cdot 2_{30^\circ}, \\ A'' - O' &= (A - O') \cdot 2_{30^\circ}, \\ A'' &= (A - O') \cdot 2_{30^\circ} + O', \end{aligned}$$

$$A'' = [(2,4) - (1,2)]2_{30^\circ} + (1,2) = \sqrt{3} - 1 + (3 + 2\sqrt{3})i.$$

Per tant el que fem és trasl.ladar les coordenades del punt A segons el nou centre de referència i seguidament procedim de forma anàloga a l'apartat anterior.

---

8. Escriviu en forma polar i en forma trigonomètrica els següents nombres complexos:

a) $z = i$,

b) $z = -1 + \sqrt{3}i$,

c) $z = -2$,

d) $z = 3 + 4i$.

La forma polar[2] d'un nombre complex z és r_α on r és el mòdul i α és l'angle que z forma amb el semieix positiu de l'eix de les x's.
La forma trigonomètrica d'un nombre complex z és $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.
Tenint en compte això, sempre podem escriure

$$z = a + bi = (a,b) = r_\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

com les diferents expressions de z en forma binòmica, cartesiana, polar i trigonomètrica, respectivament.

a)

$$r = \sqrt{0+1} = 1,$$

$$\alpha = \arctan\frac{1}{0}, \text{ busquem un angle la tangent del qual sigui } \infty.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$z = i = (0,1) = 1_{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

b)

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\alpha = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = \arctan -\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3},$$

(α és del segon quadrant),

$$z = -1 + \sqrt{3}i = (-1, \sqrt{3}) = 2_{\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

---

[2] El mòdul i l'argument d'un nombre complex $z = a + bi$ són $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ i $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$, respectivament

c)

$$r = \sqrt{(-2)^2} = 2,$$

$$\alpha = \arctan \frac{0}{-2} = \arctan 0; \quad \alpha = \pi,$$

$$z = -2 = (-2, 0) = 2_\pi = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$$

d)

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 53^\circ,$$

$$z = 3 + 4i = (3, 4) = 5_\alpha = 5(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right).$$

Observem que la forma trigonomètrica es pot deduir de l'expressió binòmica de z quan en factoritzem el mòdul.

---

9. Calculeu i representeu les arrels cinquenes del nombre complex $z = 16\sqrt{3} - 16i$.

Per calcular les arrels cinquenes de z és més senzill si ho fem a partir de la seva forma polar.

$$r = \sqrt{16^2(\sqrt{3})^2 + 16^2} = 32,$$

$$\alpha = \arctan \frac{-16}{16\sqrt{3}} = \frac{-\pi}{6} = -30^\circ,$$

$$z = 32_{\frac{-\pi}{6}}.$$

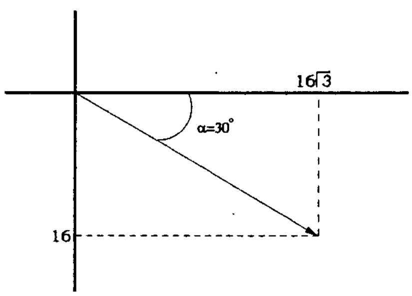


Figura 2.3: Representació gràfica del nombre complex $z = 16\sqrt{3} - 16i$

Si s_β és una de les arrels, s'ha de complir que $(s_\beta)^5 = s^5_{5\beta} = r_\alpha$, cosa que només passa quan $s = \sqrt[5]{r}$ i $\beta = \dfrac{\alpha}{5} + \dfrac{2k\pi}{5}$, per algun valor de k enter.
Així doncs,

$$2_{\frac{-\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}} = 2_{-6^\circ+k72^\circ}, \quad k = 0, ..., 4$$

Per $k = 0$, $s_1 = 2_{-6^\circ} = 2(\cos 6^\circ - i \sin 6^\circ)$,

Per $k = 1$, $s_2 = 2_{66^\circ} = 2(\cos 66^\circ + i \sin 66^\circ)$,

Per $k = 2$, $s_3 = 2_{138^\circ} = 2(\cos 138^\circ + i \sin 138^\circ)$,

Per $k = 3$, $s_4 = 2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$,

Per $k = 4$, $s_5 = 2_{282^\circ} = 2(\cos 282^\circ + i \sin 282^\circ)$,

que són els vèrtexs d'un pentàgon regular inscrit en la circumferència de centre l'origen i radi 2.

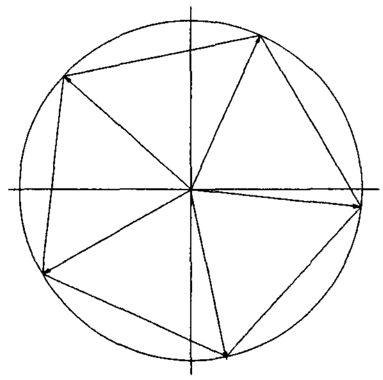


Figura 2.4: Representació gràfica de les arrels cinquenes del nombre complex $16\sqrt{3} - 16i$

---

10. Comproveu que:

a) Si $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ és un polinomi a coeficients reals, prova que si $z = a + bi$ és un nombre complex aleshores es satisfà la igualtat $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$. (*Indicació: aplica les propietats bàsiques de la conjugació de nombres complexos.*)

b) Aplicant el resultat anterior demostra que les solucions complexes d'un polinomi a coeficients reals van aparellades.

---

a) Si z és un nombre complex, tenim

$$p(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n,$$

$\overline{p(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + ... + \overline{a_n z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z}^n = p(\overline{z})$.

b) Volem demostrar que les arrels complexes van aparellades, és a dir, si hi ha una arrel complexa, n'hi ha una altra. Aplicant la propietat de l'apartat anterior, anem a veure que si $z = a + bi$ és una solució d'un polinomi, $p(x)$, amb coeficients reals aleshores, el seu conjugat $\overline{z} = a - bi$ també n'és una solució. Volem veure si $p(\overline{z}) = 0$, és solució de $p(x)$. Podem aplicar la propietat anterior i obtenim

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Hem demostrat que $\overline{z}$ és també solució.
Observem doncs, que a partir d'aquest resultat, tot polinomi amb coeficients reals i que sigui de grau senar té, com a mínim una solució real. Així, per exemple, un polinomi de grau 3 pot tenir:
les tres solucions reals,
una real i dues complexes
però no pot tenir dues reals i una complexa.

2.2 Exercicis proposats

1. Sigui $z_1 = 1 + 3i$ i $z_2 = 2 + i$. Calculeu i representeu,

a) l'oposat i el conjugat de z_1 i de z_2, respectivament,

b) $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ i $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Efectueu les operacions següents:

a) $(-2 + 5i)(1 - i) + (4 + 3i)$,

b) $(-2 + 5i) - (1 - i) : (4 + 3i)$,

c) $(1 + i)^{-4} + (1 - i)^{-4}$.

3. Calculeu en forma binòmica $\sqrt{3 - 4i}$.

4. Expresseu en forma trigonomètrica i en forma polar els nombres complexos:

a) $4 + 4\sqrt{3}i$,

b) $-4i$,

c) $-1 + i$.

5. Calculeu les potències següents:

a) $(1 + i)^5$,

b) $(-2 + 2\sqrt{3}i)^6$,

c) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

6. Calculeu les arrels següents:

a) $\sqrt[4]{1 - i}$,

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1 - i}{2 - i}}$,

c) $\sqrt[3]{-i}$

7. Resoleu les equacions següents:

   a) $(1+i)z^2 + (2-i)z - i = 0$,

   b) $z^3 - 8 = 0$,

   c) $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$,

   d) $z^5 + 32 = 0$

8. Trobeu un nombre complex tal que si el sumem amb $\dfrac{1}{2}$ doni un altre complex de mòdul $\sqrt{3}$ i argument $60°$.

9. Calculeu m amb la condició que $(2+i)(m+i)$ sigui un nombre real.

10. Determineu el valor de m perquè el mòdul del quocient $\dfrac{m+2i}{1-i}$ sigui 2.

11. Sabrieu explicar el significat geomètric de multiplicar un nombre complex per i, i^2 i i^3.

12. Donat un nombre complex $z = a + bi$, dibuixeu en el pla cartesià els nombres complexos z, $\overline{z}$, $-z$, $-\overline{z}$ i $\overline{-z}$. Quina igualtat podem deduir de l'apartat anterior?

13. La suma de dos nombres complexos és $3+2i$, i la part real del segon és 2. Trobeu aquests dos nombres si el quocient del primer pel segon és imaginari pur.

14. D'un quadrat es coneixen els vèrtexs $O(0,0)$ i $A(2,4)$. Trobeu els altres vèrtexs B i C, sabent que el sentit del gir $OABC$ és directe

15. Deduïu les fórmules de $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$, en funció de $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$, comparant els desenvolupaments de $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2$ pel binomi de Newton i per la fórmula de Moivre.

16. Calculeu $\sqrt[3]{-8}$ i representeu-les gràficament.

17. Dos nombres complexos tenen el mateix mòdul i els seus arguments sumen $60°$. Un d'ells és conjugat del quadrat de l'altre. Trobeu aquests dos nombres.

18. Demostreu que si z_1 i z_2 són dos nombres complexos, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

19. Calculeu
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}; \quad \frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$$

20. Calculeu
$[2(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ] \cdot [5(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)]$

21. Calculeu el valor de b per tal que
$$\frac{3+bi}{5-3i}$$
sigui un nombre impaginari pur.

22. Calculeu dos nombres complexes sabent que el producte entre ells és $2i$ i que el quadrat d'un dels dos dividit per l'altre és $\frac{1}{2}$.

23. Trobeu el nombre complex tal que multipicat per i dongui un altre complex de mòdul 5, part real -4 i situat al tercer quadrant.

2.3 Solució als exercicis proposats

1. a) $-1-3i$,$1-3i$,$-2-i$,$2-i$,
b) $3+4i$, $-1+2i$, $-1+7i$, $1+i$.

2. a) $7+10i$,
b) $\frac{-51}{25}+\frac{132}{25}i$,
c) $\frac{-1}{2}$.

3. $2-i$, $-2+i$.

4. a) $8_{\frac{\pi}{3}}$,
b) $4_{\frac{3\pi}{2}}$,
c) $\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$.

5. a) $-4-4i$,
b) 4096,
c) -1.

6. a) $\sqrt[8]{2}_{\frac{-\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}}$,
b) $\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{-6.15^\circ+120k^\circ}$,
c) $1_{\frac{\pi}{2}+120k^\circ}$.

7. a) $i,\ \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$,
b) $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$,
c) $2,\ 2i,\ -2i$,
d) $2_{36^\circ+72k^\circ}$.

8. $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ i $b=\dfrac{3}{2}$.

9. $m=-2$.

10. $m=\pm 2$.

11. Girs de $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$.

12. Els operadors de conjugació i d'oposició són commutatius.

13. $1+(1\pm\sqrt{3})i,\ \ 2+(1\mp\sqrt{3})i$.

14. $B=(-2,6)$, $C=(-4,2)$

15. $\cos 2\alpha = cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

16. $1+\sqrt{3}i,\ \ -2,\ 1-\sqrt{3}i$.

17. $1_{120},\ 1_{-60}$

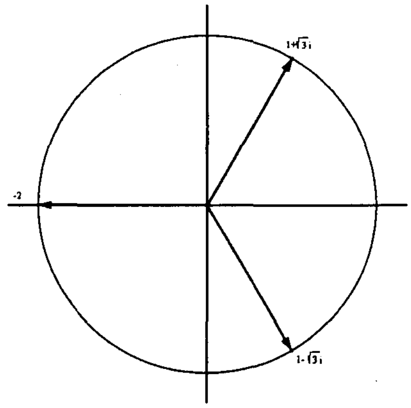


Figura 2.5: Representació gràfica de les arrels cúbiques del nombre complex $z = -8$

19. $-1, \ \dfrac{16}{5} - \dfrac{2}{5}i.$

20. $-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i.$

21. b=5

22. si $z_1 = 1_{\frac{\pi}{6}}$ aleshores $z_2 = 2_{\frac{\pi}{3}}$
si $z_1 = 1_{\frac{5\pi}{6}}$ aleshores $z_2 = 2_{\frac{5\pi}{3}}$
si $z_1 = 1_{\frac{3\pi}{2}}$ aleshores $z_2 = 2_{\pi}$

23. $z = -3 + 4i$

2.4 Preguntes de test

1. Assenyaleu quina de les següents afirmacions és certa.

   a) 4 és un nombre complex d'argument $\frac{\pi}{2}$.

   b) $4 \in \mathbb{R}$ i, per tant, no és un nombre complex.

   c) 4 és un nombre complex d'argument zero.

2. Assenyaleu quina de les següents afirmacions és certa.

   a) -1 és un nombre complex d'argument π i, per tant, té dues arrels quadrades d'argumets $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$.

   b) $-1 \in \mathbb{R}$ i, per tant, no és un nombre complex.

   c) -1 és un nombre complex d'argument $\frac{\pi}{2}$ i, per tant, té una arrel quadrada d'argumet $\frac{\pi}{2}$.

3. Si z_1 i z_2 són els nombres complexos $r\cos\alpha + ir\sin\alpha$ i $r\cos\beta + ir\sin\beta$ respectivament, aleshores $z_1^2 z_2$ és

   a) un nombre complex de mòdul $3r$.

   b) un nombre complex de mòdul r^3.

   c) un nombre complex d'argument $\alpha\beta$.

4. L'equació $z^5 + 32 = 0$, on $z \in C$,

   a) no té cap arrel doncs $\sqrt{-32}$ no és real.

   b) té cinc arrels diferents de mòdul 2.

   c) té cinc arrels diferents d'arguments $2k\pi/5,\ k = 0, 1, ..., 4$.

5. Si z el nombre complex $r\cos\alpha + ir\sin\alpha$, aleshores z^3 és

   a) un nombre complex de mòdul $3r$.

   b) un nombre real.

   c) un nombre complex d'argument 3α.

6. El nombre $\sqrt{2}$

   a) és irracional.

   b) és imaginari.

   c) No és real.

7. Assenyaleu quina de les següents afirmacions és certa.
   a) 1 és un nombre complex d'argument zero.
   b) $1 \in \mathbb{R}$ i, per tant, no és un nombre complex.
   c) 1 és un nombre complex d'argument π.

8. Si z és el nombre complex $r\cos\alpha + ir\sin\alpha$, aleshores $3z^2$ és
   a) un nombre complex de mòdul $3r^2$
   b) un nombre complex de mòdul $6r$
   c) un nombre complex d'argument 6α

2.5 Solució del test

1. c
2. a
3. b
4. b
5. c
6. a
7. a
8. a

Lliçó 3

Sistemes d'equacions lineals

Objectius

L'objectiu d'aquesta lliçó és resoldre sistemes d'equacions lineals

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

en tots els casos possibles. És a dir, volem trobar les n-ples $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ que satisfan totes les equacions. Cada n-ple s'anomena solució del sistema. Per tant, es tracta de:

1. Saber si el sistema té solució
2. Saber quantes solucions té
3. Donar mètodes per trobar totes les solucions

I ho farem escrivint els sistemes en forma matricial i utilitzant el sistema de reducció de Gauss i determinats.

Dividirem el resum teòric en tres apartats:

- matrius
- determinats
- resolució de sistemes

Els objectius del primer d'aquests punts són:

- introduir les matrius i mostrar les operacions bàsiques
- fer transformacions elementals per a obtenir matrius equivalents
- explicar el mètode de reducció de Gauss per trobar el rang d'una matriu

En el segon apartat definiren els determinants i donarem les principals propietats

Resum Teòric

Matrius. Suma i producte per escalars

Una ***matriu*** és un conjunt de nombres col.locats en files i columnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Denotarem per $\mathbb{M}_{m\times n}$ el conjunt de matrius $m \times n$, de m files i n columnes. En aquest conjunt es poden definir 2 operacions:

1. ***Producte per escalars***:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{m\times n} & \rightarrow & \mathbb{M}_{m\times n} \\ (\alpha, A) & \rightarrow & \alpha \cdot A \end{array}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} & \cdots & \alpha\, a_{1n} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \cdots & \alpha\, a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{m1} & \alpha\, a_{m2} & \cdots & \alpha\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. ***Suma*** de matrius:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{M}_{m\times n} \times \mathbb{M}_{m\times n} & \rightarrow & \mathbb{M}_{m\times n} \\ (A, B) & \rightarrow & A + B \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Producte de matrius

El ***producte de matrius*** només es pot definir entre dues matrius que compleixin que la primera té el nombre de columnes igual al nombre de files de la segona.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{m\times n} \times \mathbb{M}_{n\times p} & \rightarrow & \mathbb{M}_{m\times p} \\ (A,B) & \rightarrow & A\cdot B \end{array}$$

Si tenim dues matrius amb coeficients reals:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{m2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

on el primer subíndex indica la fila i el segon indica la columna en què es localitza el corresponent element de cada matriu, llavors el producte AB:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{m files}}\boxed{\text{n columnes}}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \vdots & \boxed{b_{2j}} & \vdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & \vdots & \boxed{b_{nj}} & \vdots & b_{np} \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{n files}}\boxed{\text{p columnes}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{m files}}\boxed{\text{p columnes}}}$$

és una matriu C tal que l'element de la fila i i la columna j de $C = A \cdot B$ s'obté efectuant la suma de productes dels elements de la fila i de A pels elements respectius de la columna j de B, és a dir

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

i, això, naturalment, per cada i i per cada j amb $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq p$.

El producte de matrius no és commutatiu.

Mètode de reducció de Gauss

Donada una matriu, volem trobar-ne una altra en la qual els elements que estan per sota de la diagonal siguin zero. I això fent ***transformacions*** que anomenarem ***elementals***, que conservin certes propietats de la matriu, per exemple el rang. La ***matriu*** que s'obté no és la mateixa del principi però direm que és ***equivalent***.

Les transformacions elementals entre les files són:

1. Permutar-ne dues entre elles

2. Multiplicar-ne una per un escalar no nul

3. Sumar-li, a una d'elles, una altra multiplicada per un escalar no nul

Així doncs, donada una matriu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

si la fila i-éssima la multipliquem per a_{11} i li restem la primera fila multiplicada per a_{i1} i això per cada $i = 2 \dots m$, obtenim:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & \cdots & a_{2n}a_{11} - a_{1n}a_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}a_{11} - a_{12}a_{m1} & \cdots & a_{mn}a_{11} - a_{1n}a_{m1} \end{pmatrix}$$

En aquest primer pas queda igual la primera fila. Ara es pot repetir aquest procés amb cada fila i les matrius que s'obtenen són de la forma:

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{*} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

El que s'obté en el darrer pas depèn de m, n i del rang de la matriu.

a) Si $m = n = \text{ rang } A$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}}_{n = m \text{ columnes}} \quad m = n \text{ files no nules}$$

b) Si $n \geq m \geq r = \text{ rang } A$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ columnes}} \quad \begin{array}{l} r \text{ files no nules} \\ \\ m - r \text{ files nules} \end{array}$$

c) Si $m \geq n \geq r =$ rang A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ columnes}} \begin{matrix} \\ \\ r \text{ files no nules} \\ \\ \\ m-r \text{ files nules} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Exemples

a) $m = n = r = 3$

$$\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} f_1 = f_1' \\ -2f_1 + f_2 = f_2' \\ f_1 + f_3 = f_3' \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} f_1' \\ f_2' \\ f_2' - 3f_3' \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $n = 4$, $m = 3$, $r = 2$

$$\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} f_1 = f_1' \\ f_1 + f_2 = f_2' \\ f_1 - f_3 = f_3' \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1' \\ f_2' \\ f_2' + f_3' \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $m = 5, n = r = 3$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{array}{r} f_1 = f_1' \\ -2f_1 + f_2 = f_2' \\ f_1 + f_3 = f_3' \\ f_4 = f_4' \\ -3f_1 + f_5 = f_5' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{array}{r} f_1' = f_1'' \\ f_2' = f_2'' \\ f_2' - 3f_3' = f_3'' \\ f_2' - f_4' = f_4'' \\ f_2' - 3f_5' = f_5'' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{array}{r} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ 2f_3'' - 3f_4'' \\ f_5'' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang d'una matriu

El ***rang*** d'una matriu és el màxim nombre de files o columnes linealment independents. Donada una matriu per calcular el rang, podem aplicar el mètode de reducció de Gauss a la matriu i el nombre de files diferents de zero és el rang de la matriu.

Determinants

A tota matriu quadrada $n \times n$ se li pot associar un nombre, que anomenarem ***determinant*** de la matriu, que es pot utilitzar per detectar la dependència o independència lineal, calcular el rang d'una matriu, resoldre sistemes d'equacions, etc. Ho definirem per recurrència:

1. El determinant d'una matriu 1×1 és $\det(A) = a$.

2. El determinant d'una matriu 2×2 és:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. El determinant d'una matriu 3×3 és:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

4. El determinant d'una matriu $n \times n$ és:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}A_{rj} = \sum_{i=1}^{n} a_{it}A_{it}$$

on A_{ij} és el determinant de la matriu que resulta de suprimir la fila i-ésima i la columna j-ésima de A, multiplicat per $(-1)^{i+j}$, i s'anomena l'***adjunt*** de a_{ij}.

Exemples

1. Si $A = (-3)$, llavors $\det(A) = -3$.

2. Si $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(B) = (-1) \cdot 3 - (-5) \cdot 2 = 7$

3. Si $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(\mathrm{C}) = 5 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) \cdot 7 = 16$

4. Un altre forma de fer el determinant de la matriu C és:

$$\det(\mathrm{C}) = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

Propietats dels determinants

Sigui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Per descriure més fàcilment les propietats dels determinants denotarem per A_i la columna i-ésima.

1. Si multipliquem tots els elements d'una columna per un nombre real, el determinant queda multiplicat per aquest nombre,

$$\det(A_1, A_2, ..., cA_j, ..., A_n) = c \cdot \det(A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_n).$$

2. Si es permuten dues columnes entre elles, el determinant canvia de signe,

$$\det(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n) = -\det(A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n).$$

3. Si dues columnes són iguals, el determinant és zero,

$$\det(A_1, ..., A_i, ..., A_i, ..., A_n) = 0.$$

4. Si els elements d'una columna poden descompondre's en suma de dos, aleshores el determinant pot descompondre's en suma de dos,

$$\det A = \det(A_1, A_2, ..., A_i' + A_i'', ..., A_n) =$$

$$= \det(A_1, A_2, ..., A_i', ..., A_n) + \det(A_1, A_2, ..., A_i'', ..., A_n).$$

5. Si a una columna se li suma una combinació lineal de les restants el determinant no varia,

$$\det\left(A_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i A_i, A_2, ..., A_n\right) = \det(A_1, A_2, ..., A_n).$$

6. Si una columna és combinació lineal de les restants, el determinant és zero,

$$\det\left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i A_i, A_2, ..., A_n\right) = 0.$$

7. $\det(A_1, A_2, ..., A_n) = 0 \Leftrightarrow A_1, A_2, ..., A_n$ són linealment dependents
$\Leftrightarrow$ rg $A_1, A_2, ..., A_n < n$

8. $\det(A_1, A_2, ..., A_n) \neq 0 \Leftrightarrow A_1, A_2, ..., A_n$ són linealment independents
$\Leftrightarrow$ rg $A_1, A_2, ..., A_n = n$
Totes aquestes propietats continuen essent vàlides canviant columnes per files.

Donada una matriu $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

S'anomena ***menor d'ordre*** p al determinant d'una matriu quadrada $p \times p$ que resulta en suprimir $m - p$ files i $n - p$ columnes.
El rang de A és l'ordre més gran dels menors no nuls.

Resolució de sistemes

Sigui

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

un ***sistema d'equacions lineals***.
Tenim m equacions i n incògnites.

Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

i llavors podem escriure el sistema en forma matricial

$$AX = b$$

Anomenarem a la matriu A dels coeficients, ***matriu del sistema***, i a la matriu formada pel coeficients i els termes independents, $(A|b)$, ***matriu ampliada***.
Observem que quan considerem la matriu ampliada d'un sistema d'equacions i apliquem el mètode de reducció de Gauss, el que obtenim és un sistema equivalent.
Si de la matriu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

obtenim, per reducció de Gauss, matrius equivalents

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{in} & \beta_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{mi} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

això significa que les solucions del sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
\alpha_{11}\, x_1 + & \alpha_{12}\, x_2 + & \cdots & \cdots & +\alpha_{1n}\, x_n & = & \beta_1 \\
 & \alpha_{22}\, x_2 + & \cdots & \cdots & +\alpha_{2n}\, x_n & = & \beta_2 \\
 & & \vdots & \vdots & & & \\
 & & \alpha_{ii}\, x_i + & \cdots & +\alpha_{in}\, x_n & = & \beta_i \\
 & & \vdots & \vdots & & & \\
 & & \alpha_{mi}\, x_i + & \cdots & +\alpha_{mn}\, x_n & = & \beta_m
\end{array}\right\}$$

són les mateixes que les del sistema

$$\left.\begin{array}{ccccc}
a_{11}\, x_1 + & \cdots & +a_{1n}\, x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}\, x_1 + & \cdots & +a_{mn}\, x_n & = & b_m
\end{array}\right\}$$

I segons els casos ens quedarem en el pas que més ens convingui.

1. Tenir o no solució depèn de la relació entre el rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada (Teorema de Rouché-Frobenius).

- SISTEMA INCOMPATIBLE: no té solució

$$\text{rang }(A) < \text{rang }(A|b)$$

- SISTEMA COMPATIBLE: si té solució

$$\text{rang }(A) = \text{rang }(A|b)$$

2. El nombre de solucions depèn de la relació del rang amb el nombre d'incògnites (Teorema de Rouché-Frobenius).

- SISTEMA COMPATIBLE DETERMINAT: té una única solució

$$\text{rang }(A) = \text{nombre d'incògnites}$$

- SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT: té infinites solucions

$$\text{rang }(A) < \text{nombre d'incògnites}$$

En aquest cas, si $r =$ rang (A) i $n =$ nombre d'incògnites, les solucions depenen de $n - r$ paràmetres.

Sistema compatible determinat:

- De la matriu reduïda per Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nm} & \beta_n \end{array}\right)$$

es dedueix immediatament:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{1}{\alpha_{n-1n-1}}(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1n}x_n) \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{1}{\alpha_{11}}(\beta_1 - \alpha_{1n}x_n - \cdots - \alpha_{12}x_2) \end{aligned}$$

El mètode de reducció de Gauss es pot aplicar també als elements que estan per sobre de la diagonal i obtenir una matriu diagonal

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} & \mu_n \end{array}\right)$$

D'on s'obtenen encara més fàcilment les solucions del sistema:

$$x_i = \frac{\mu_i}{\lambda_{ii}} \text{ amb } i = 1, \ldots, n$$

- Utilitzant determinats: per la regla de Cramer

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

Sistema compatible indeterminat:

Podem utilitzar mètodes molt semblants, considerant algunes incògnites com a paràmetres. Seleccionem un menor d'ordre r diferent de 0.

Suposem que $M = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, llavors $x_{r+1}, \cdots, x_n$ prenen tots els valors de $\mathbb{R}$ i en funció d'aquests s'obté el valor de les altres incògnites.

- Per Gauss

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1\,r+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r} & \alpha_{2\,r+1} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{rr} & \alpha_{r\,r+1} & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \end{pmatrix}$$

ens dóna

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{\alpha_{rr}}(\beta_r - \alpha_{rn}x_n - \cdots - \alpha_{r\,r+1}x_{r+1}) \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{1}{\alpha_{11}}(\beta_1 - \alpha_{1n}x_n - \cdots - \alpha_{12}x_2) \end{aligned}$$

- Per Cramer

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 - a_{1n}x_n - \cdots - a_{1r+1}x_{r+1} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{ri-1} & b_r - a_{rn}x_n - \cdots - a_{rr+1}x_{r+1} & a_{ri+1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}{M}; \quad i = 1 \ldots n$$

3.1 Exercicis resolts

1. Calculeu la intersecció entre les rectes r i s i interpreteu el resultat:

a) $r:\ 2x+y=1$ i $s:\ 3x-2y=5$,

b) $r:\ x-3y=2$ i $s:\ -2x+6y=3$,

c) $r:\ -x+4y=5$ i $s:\ 3x-12y=-15$.

Trobar la intersecció entre rectes és trobar els punts que tenen en comú, per tant s'ha de resoldre el sistema format per les equacions de les rectes. Utilitzarem els mètodes ja coneguts de resolució de sistemes d'equacions lineals (igualació, substitució, reducció).

a) Aïllem y en la primera recta i substituïm a la segona per trobar el valor de x. D'aquesta manera

$$y = 1 - 2x,$$

$$x = 1 \ \text{ i } \ y = -1.$$

Des del punt de vista geomètric, les rectes es tallen en el punt (1,-1). Des del punt de vista dels sistemes d'equacions lineals, diríem que el sistema és compatible determinat.

b) Procedim de forma anàloga, tot aïllant x de la primera recta i substituint a la segona.

$$x = 2 + 3y,$$

$$-2(2+3y) + 6y = 3,$$

$$0 = 7.$$

Les rectes no es tallen en cap punt, atès que el sistema és incompatible, per tant r i s són dues rectes paral.leles diferents.

c) Aquest apartat el resoldrem mitjançant matrius i utilitzarem el *Mètode de Gauss* per trobar la solució.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -12 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat o bé podem dir que la matriu no és de rang màxim. Des del punt de vista geomètric les dues rectes són coincidents. De fet si observem l'equació de les rectes veiem, que ambdós vectors directors són proporcionals, per tant no calia resoldre el sistema per adonar-nos que els punts d'intersecció d'aquesta recta són infinits (són la mateixa recta).

---

2. a) Estudieu la intersecció entre les rectes $r : 3x - 2y = -1$ i $s : x + ay = 11$ segons els diferents valors del paràmetre real a.

b) Representeu matricialment el sistema resultant de l'apartat anterior i resoleu el problema mitjançant *transformacions elementals (Mètode de Gauss o "del pivot")*.

---

a) Per a estudiar la intersecció de r i s en funció del valors d'a ho farem com ho hem fet en l'exercici anterior.
Aïllem x de la recta s i substituïm a r

$$x = 11 - ay,$$

$$(-3a - 2)y = 34.$$

Mirem quan $-3a - 2 = 0$.

Cas 1. Si $a = \dfrac{-2}{3}$, tenim que r i s són paral.leles no coincidents

Cas 2. Si $a \neq \dfrac{-2}{3}$, tenim que r i s es tallen en un punt que depèn del valor de a (per a cada valor d'a les rectes es tallen en un punt diferent).

b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 11 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 11 \\ 0 & -2-3a & -34 \end{array}\right)$$

Cas 1. Si $a = \dfrac{-2}{3}$ el sistema és incompatible.

Cas 2. Si $a \neq \dfrac{-2}{3}$ el sistema és compatible determinat per a cada valor d'a tindrem una solució diferent.

---

3. a) Demostreu que dos vectors $v_1 = (a, b)$ i $v_2 = (c, d)$ són proporcionals si i només si $ad - bc = 0$.

b) Demostreu l'equivalència entre aquests dos sistemes quan a és diferent de 0:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & m \\ cx + dy & = & n \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{rcccl} ax & + & by & = & m \\ & & (ad - bc)y & = & an - cm \end{array}\right.$$

---

a) Dos vectors són proporcionals si la relació entre les seves components és igual. Això és aplicable també per més de dos vectors.
Si tenim que $v_1 = (a, b)$ i $v_2 = (c, d)$, que v_1 i v_2 siguin proporcionals, equival a dir que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, que és el mateix que dir que el producte creuat sigui igual $ad = bc$. Per tant la diferència de productes creuats, $ad - bc = 0$, ha de ser 0.

b) Per demostrar l'equivalència entre els dos sistemes que ens proposa l'exercici, ho farem matricialment. El primer sistema es pot expressar

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ c & d & n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ 0 & \frac{-bc}{a} + d & \frac{-cm}{a} + n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ 0 & ad - cb & an - cm \end{array}\right)$$

L' última matriu és la forma matricial del sistema pel qual volíem demostrar la seva equivalència amb el primer. Val a dir, però, que per tal que aquesta equivalència estigui garantida, $a \neq 0$ ja que hem de dividir per a en alguna de les pivotacions que fem.

---

4. Donat el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 10 \\ x - ky & = & 5 \end{array}\right.$ calculeu:

a) el valor de k perquè la solució del sistema sigui de la forma $(0, y)$,

b) el valor de k perquè el sistema sigui incompatible.

---

a) Si volem que la solució del sistema sigui de la forma $(0, y)$, el que hem de fer és trobar quin és el valor de k que fa que la coordenada de l'abcissa sigui nul.la. Si aïllem la x de la primera equació tenim que per tal de què $x = 0$, $y = 5$. El valor de k que satisfà aquesta condició és -1 (si substituïm $x = 0$ i $y = 5$ en la segona equació, trobem el valor de k).

b) Busquem un valor de k que faci que el sistema no tingui solució, és a dir que sigui incompatible. Resoldrem aquest apartat mitjançant el *Mètode de Gauss*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 1 & -k & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -k-2 & -5 \end{array}\right).$$

Per tal que el sistema sigui incompatible, s'ha de complir que $-k-2=0$, cosa que passa si $k=-2$

---

5. Resoleu el següent sistema d'equacions,

$$\begin{cases} 2x+3y-z &= -2 \\ x+y+z &= 4 \\ 3x-y+2z &= 13 \end{cases}$$

Resoldrem el sistema mitjançant dos mètodes diferents.

Per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -13 & 39 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema és compatible determinat i la solució és

$$x = 2,\ y = -1 \text{ i } z = 3$$

El segon mètode per resoldre'l és mitjançant *la regla de Cramer.* Per això cal que calculem primer el determinant de la matriu dels coeficients de les x, y i z del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$det(A) = [(2\cdot1\cdot2)+(1\cdot(-1)\cdot(-1))+(3\cdot1\cdot3)]-[((-1)\cdot1\cdot3)+(3\cdot1\cdot2)+(1\cdot(-1)\cdot2)] = 13 \neq 0$. El sistema és compatible determinat.

Trobem la solució del sistema aplicant la *Regla de Cramer* directament i obtenim

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 13 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{13} = \frac{26}{13} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix}}{13} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 13 \end{vmatrix}}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

---

6. Resoleu el següent sistema d'equacions,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z + 2t & = & 0 \\ -x - 2y + 3z + 2t & = & 1 \\ 8x + 16y - 4z + 4t & = & -3 \end{array} \right.$$

Resoldrem mitjançant de la mateixa manera que hem fet el cas anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 16 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat. Si suposem que $y = y$ i $t = t$, la solució del sistema és

$$x = \frac{-1}{4} - 2y + t,\ y = y,\ z = \frac{1}{4} - t \text{ i } t = t.$$

---

7. Discutiu i resoleu el següent sistema pels diferents valors del paràmetre real k i interpreteu el resultat

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 3 \\ -x + 2y & = & 1 \\ 3x + 4y & = & k \end{array}\right.$$

Hem de trobar per a quins valors de k el sistema és compatible i per a quins és incompatible.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & \mathrm{k} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & \mathrm{k+3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & \mathrm{k+3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & \mathrm{k+3} \end{array}\right)$$

Les solucions d'aquest sistema són $x = 1$ i $y = 1$. De la tercera de les equacions, tenim que $10y = k + 3$. D'aquí s'obté que $k = 7$ per tal que $y = 1$, és a dir, per tal de què el sistema sigui compatible determinat. En cas que $k \neq 7$, obtindríem dos valors diferents per a la y i això voldria dir que el sistema seria incompatible.

8. Discutiu el següent sistema d'equacions pels diferents valors del paràmetre real k.

$$\begin{cases} kx + 3y + 5z &= -8 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 2 \end{cases}$$

Discutirem quin tipus de sistema és el que ens proposen segons els diferents valors del paràmetre k. Ho farem de dues formes diferents.

- Mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ k & 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3+k & 5-k & -8 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3+k & 5-k & -8 \\ 0 & 0 & 15-3k+5(3+k) & 6+2k+24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3+k & 5-k & -8 \\ 0 & 0 & 30+2k & 30+2k \end{array}\right)$$

Per tal que el sistema sigui compatible hem de resoldre la següent equació $30+2k = 0$, d'on s'obté que $k = -15$. Per tant si $k = -15$, la matriu no és de rang màxim, tindrem doncs un grau de llibertat i el sistema serà compatible indeterminat. Si $k \neq -15$, el sistema serà compatible determinat.

- Per determinants

Calculem primer el determinant de la matriu dels coeficients de les x, y i z del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} k & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

El determinant d' A ens queda en funció del valor de k

$$det(A) = 2k + 30.$$

Quan el determinant es faci 0, és a dir quan $k = -15$, hem d'estudiar la matriu ampliada i veiem que també té rang 2, per tant el sistema serà indeterminat. En cas contrari el sistema serà determinat.

---

9. Calculeu a i b per tal que la següent família de rectes tingui un punt en comú i trobeu el punt (o punts).

$$\begin{cases} r_1 : 2x + y &= a \\ r_2 : x - y &= 2 \\ r_3 : 3x + y &= a + b \\ r_4 : x - 2y &= a - b \end{cases}$$

Calcularem els valors d'a i b que fan que les rectes es tallin.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \text{a} \\ 3 & 1 & \text{a+b} \\ 1 & -2 & \text{a-b} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & \text{a-4} \\ 0 & 4 & \text{-6+a+b} \\ 0 & -1 & \text{a-b-2} \end{array}\right)$$

Ara tenim que

$$y = b - a + 2, \;\; y = \frac{a + b - 6}{4} \;\text{ i }\; y = \frac{a - 4}{3}.$$

D'aquestes tres condicions podem obtenir el punt d'intersecció de les tres rectes. Perquè es tallin hem d'imposar que les coordenades de y han de ser iguals en les tres equacions resultants. Per tant,

$$b - a + 2 = \frac{a + b - 6}{4}$$

$$b - a + 2 = \frac{a - 4}{3}.$$

Si resolem aquest sistema obtenim que els valor que han de prendre a i b perquè les rectes es tallin són 4 i 2, respectivament. El punt d'intersecció de les 4 rectes és $(2,0)$.

---

10. Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z &= -5 \\ x + y - 2z &= -4 \\ 2x + y - z &= -1 \end{cases}$$

Calculem primer el determinant de la matriu dels coeficients de les x, y i z del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El $\det(A) = 0$, cosa que ens està indicant que la matriu A no és de rang màxim, per tant el sistema que volíem resoldre és indeterminat o incompatible. Hem d'estudiar la matriu ampliada.

La matriu ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ no és quadrada, no té sentit parlar del determinant d'aquesta matriu, però podem estudiar el rang, estudiant els menors. Tots els menors d'ordre 3 són nuls. Però els d'ordre 2 no. Per tant el rang $(A) =$ rang $(A|b) = 2$. El sistema és compatible indeterminat.

Solució: agafem 2 equacions independents i una de les variables com a paràmetre

$$\begin{cases} 3x + 2y &= -5 + 3z \\ x + y &= -4 + 2z \end{cases}$$

3.2 Exercicis proposats

1. Resoleu els següents sistemes d'equacions:

a) $$\left\{\begin{array}{rcl} x+5y & = & 11 \\ 2x-3y & = & -4 \end{array}\right.$$ b) $$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ 2x+y & = & 5 \\ 3x-2y & = & 2 \end{array}\right.$$

2. Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 2x+5y+3z & = & 0 \\ 5x+11y+6z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Discuteix els següents sistemes d'equacions pels diferents valors del paràmetre real k:

a) $$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+6z & = & 0 \\ 2x+y+kz & = & 0 \\ x-3y-2z & = & 0 \end{array}\right.$$ b) $$\left\{\begin{array}{rcl} kx+2z & = & 0 \\ ky-z & = & k \\ x+3y+z & = & 5 \end{array}\right.$$

4. Calculeu a i b per tal que la següent família de rectes tingui un punt en comú i troba el punt

$$\left\{\begin{array}{lrcl} r_1: & x+2y & = & a \\ r_2: & 3x-y & = & a-b \\ r_3: & x-y & = & b \end{array}\right.$$

5. Resoleu el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+4y-z & = & -1 \\ 2x+3y-2z & = & -4 \\ -3x+2y-3z & = & 6 \\ x+4y-4z & = & 5 \end{array}\right.$$

6. Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 0 \\ 3x+2y-z &= 0 \\ -2x-2y-z &= 0 \\ x-4y-12z &= 0 \end{cases}$$

7. Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ 2x+2y+z+t &= 0 \\ x+y+2z+2t &= 0 \\ x-3y-z+t &= 0 \end{cases}$$

8. Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ -x+y-3z &= 0 \\ 2x-y-2z &= 0 \end{cases}$$

9. Discutiu i resoleu el sistema segons els valors d'a i b

$$\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ 3x+ay-3z &= 0 \\ 2x+by-2z &= 0 \end{cases}$$

10. Discutiu i resoleu el sistema segons els valors d'a

$$\begin{cases} 2y-z &= a \\ 3x-2z &= 11 \\ y+z &= 6 \\ 2x+y-4z &= a \end{cases}$$

11. Discutiu i resoleu el sistema segons els valors de a

$$\begin{cases} x + ay + z &= a+2 \\ x + y + az &= -2(a+1) \\ ax + y + z &= a \end{cases}$$

12. Trobeu els valors reals de α, β i γ perquè es verifiqui l'equació

$$\alpha(-2x + 6y + 2z) + \beta(x + y + 5z) + \gamma(x - y + 2z) = 0$$

per tots els valors x, y i z reals.

13. Fem dos tipus de barreges diferents. Per la primera necessitem tres unitats d'un producte A, 3 d'un producte B i 5 d'un producte C.
Per l'altre necessitem 6 unitats d'A, 1 de B i 6 de C. Si tenim 30 unitats del producte A, 15 del B i 45 del C, quantes barreges podem preparar de cada tipus? Sobren unitats d'algun producte?, quantes?

Donat el sistema $AX = b$ d'm equacions i n incògnites, raoneu si són vertaderes o falses les següents afirmacions

14. rang $(A) \leq$ rang $(A|b) \leq$ rang $(A) + 1$

15. Si $n = m$ el sistema és compatible determinat.

16. Si $m < n$ el sistema és compatible indeterminat o incompatible.

17. Si $n < m =$ rang $(A|b)$ el sistema és incompatible.

18. Si rang $(A) = n$ el sistema és compatible determinat

19. En un sistema homogeni, si $n > m$, el sistema és compatible indeterminat.

20. Un sistema amb més equacions que incògnites és sempre incompatible.

3.3 Solució als exercicis proposats

1. a) El sistema és compatible determinat i té solució: $x = 1, \quad y = 2$

b) El sistema és incompatible.

2. Sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. La solució, en funció d'un paràmetre, és: $x = z, \quad y = -z, \quad z = z$

3. a) Si $k \neq \dfrac{40}{11}$, el sistema és compatible determinat, sinó, el sistema és compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat.

b) Si $k = 0$, el sistema és compatible indeterminat; si $k = -1$, el sistema és incompatible i si $k \neq 0$ i $k \neq -1$, el sistema és compatible determinat

4. $a = 10b$. Per a cada b el punt d'intersecció és $(4b, 3b)$.

5. El sistema és incompatible perquè el rang de la matriu és 3 i el de l'ampliada és 4.

6. El sistema és compatible indeterminat perqué el rang de la matriu i el de l'ampliada és 2 i el número d'incògnites és 3.
La solució en funció d'un paràmetre és $x = 2z \quad y = -\dfrac{5}{2}z \quad z = z$

7. El sistema és compatible indeterminat perquè el rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada és 3 i el número d'incògnites és 4. La solució en funció d'un paràmetre és

$$x = -\frac{t}{2} \quad y = \frac{t}{2} \quad z = -t \quad t = t$$

8. El sistema és compatible determinat i pel fet de ser homogeni la solució és $x = y = z = 0$.

9. És un sistema homogeni, per tant és sempre compatible. Per a tot valor de a i de b, el determinant de la matriu del sistema és 0, així doncs, el sistema és sempre indeterminat.

I) Per $a \neq 6, \quad b \neq 4$ el sistema té 1 grau de llibertat i la solució és

$$x = z \quad y = 0 \quad z = z$$

II) Per $a = 6$

a) Si $b = 4$ el sistema té 2 graus de llibertat i la solució és

$$x = z - 2y \quad y = y \quad z = z$$

b) Si $b \neq 4$ el sistema té 1 grau de llibertat i la solució és

$$x = z \quad y = 0 \quad z = z$$

III) Per $a \neq 6$, $b = 4$ el sistema té 1 grau de llibertat i la solució és

$$x = z \quad y = 0 \quad z = z$$

10. El rang de la matriu del sistema és 3. Si $a \neq 6$ el sistema és incompatible.
Si $a = 6$ el sistema és compatible determinat i la solució és $x = 5$, $y = 4$ i $z = 2$.

11. Per $a = 1$, el sistema és incompatible.
Per $a = -2$, el sistema és compatible indeterminat i la solució és
$x = \frac{4}{3} + z$, $y = \frac{2}{3} + z$ i $z = z$.
Per $a \neq 1$ i $a \neq -2$ el sistema és compatible determinat i la solució és
$x = \dfrac{a}{a-1}$, $y = -\dfrac{a+2}{1-a}$, $z = \dfrac{-2(a+1)}{a-1}$

12. $\alpha = -\frac{1}{2}\beta$ i $\gamma = -2\beta$

13. Hem de resoldre el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 6y & = & 30 \\ 3x + y & = & 15 \\ 5x + 6y & = & 45 \end{array}\right.$.

Aquest sistema és incompatible. Si fem 4 barreges del primer tipus i 3 de l'altre, sobren 7 unitats del producte C.

14. Vertader, A és una matriu $m \times n$ i $(A|b)$ és $m \times (n+1)$

15. Fals, perquè pot passar que $m = n > \text{rang}\,(A|b) > \text{rang}\,(A)$

16. Vertader, $\text{rang}\,(A) \leq \text{rang}\,(A|b) \leq m < n$

17. Vertader, rang $(A) \leq \min n, m = n < m =$ rang $(A|b)$

18. Fals, es pot donar que rang $(A|b) >$ rang (A) si $m > n$.

19. Vertader, en un sistema homogeni sempre rang $(A|b) =$ rang $A. \leq m < n$.

20. Fals, depèn dels rangs.

3.4 Preguntes de test

1. Siguin A i B matrius quadrades d'ordre n. Quina de les següents afirmacions és certa?

   a) $A+B=B+A$

   b) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

   c) $AB=BA$

2. El rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ és

   a) 2

   b) 3

   c) 4

3. Siguin A i B dues matrius quadrades d'ordre n i $\lambda \in \mathbb{R}$. Quina de les següents afirmacions és FALSA?

   a) $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$

   b) $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$

   c) $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

4. Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Per quins valors de x el determinant de A és 0?

   a) per tot $x \in \mathbb{R}$

   b) només per $x=1$

   c) per cap valor real de x

5. El rang de la matriu $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ és?

a) 1 si $x = 1$

b) 2 només per $x = 1$

c) 2

6. Quina de les afirmacions següents és correcta?

a) $\det(\alpha A_1 + \beta A_2, A_2, A_3, \ldots, A_n) = \alpha \det(A_1, A_2, \ldots, A_n)$

b) $\det(\alpha A_1 + \beta A_2, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0$

c) $\det(\alpha A_1 + \beta A_2, \alpha A_2, \alpha A_3, \ldots, \alpha A_n) = \alpha \det(A_1, A_2, \ldots, A_n)$

7. Quina de les següents afirmacions és certa?

a) Un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites és sempre compatible.

b) Un sistema de 4 equacions amb 3 incògnites és sempre incompatible.

c) Un sistema de 2 equacions amb 3 incògnites no pot ser compatible determinat.

8. Sigui $AX = b$ un sistema d'equacions, on A és una matriu $m \times n$. Quina de les següents afirmacions és FALSA?

a) si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$ el sistema és compatible

b) si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = n$ el sistema és compatible determinat

c) si $m = n$ el sistema és compatible

9. Un sistema de m equacions amb n incògnites és compatible si

a) $m \leq n$.

b) $m \geq n$.

c) cap de les anteriors.

10. Si el rang de la matriu de coeficients d'un sistema de m equacions amb n incògnites és p, aleshores:

a) si $p < n$, el sistema és compatible indeterminat o incompatible.

b) si $p < m$, el sistema és compatible.

c) si $p = n$, el sistema és compatible determinat.

11. Quina de les afirmacions següents és certa?

a) Un sistema homogeni és sempre compatible.

b) Un sistema homogeni és sempre indeterminat.

c) El zero és sempre solució de tot sistema d'equacions lineals compatible i determinat.

12. Un sistema de m equacions amb n incògnites, on $m < n$, MAI no pot ser

    a) compatible determinat

    b) compatible indeterminat

    c) incompatible

13. Un sistema de m equacions amb n incògnites, on $m \geq n$, MAI no pot ser

    a) compatible

    b) incompatible

    c) cap de les anteriors

3.5 Solució del test

1. a
2. b
3. c
4. a
5. c
6. a
7. c
8. c
9. c
10. a
11. a
12. a
13. c

Lliçó 4

Geometria plana i a l'espai

Objectius

L'objectiu d'aquest tema és l'estudi de les varietats lineals de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, els diferents tipus d'equacions que poden tenir, l'estudi de la seva posició relativa, els conceptes de paral.lelisme i incidència.

Considerarem el producte escalar i la noció habitual de distància.

Donarem una descripció de les còniques de $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^3$ utilitzarem el producte vectorial. Amb això podrem trobar la distància entre dues varietats, àrees i volums.

Resum Teòric

Producte escalar i distància

En $\mathbb{R}^2$ (d'igual manera que podem fer a $\mathbb{R}^3$), si considerem dos vectors $\vec{u} = (x, y)$ i $\vec{v} = (x', y')$, el ***producte escalar*** és

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

i el ***mòdul*** és

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

d'on s'obté la fòrmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos \alpha$$

essent α l'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
Donats dos punts $p = (x_1, y_1)$ i $q = (x_2, y_2)$, la ***distància*** entre els dos punts és

$$d(p, q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = ||\vec{pq}||$$

També considerem la noció d'ortogonalitat :

$$\vec{u} \text{ i } \vec{v} \text{ són } \textbf{\textit{ortogonals}} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Còniques

- Circumferència

  La ***circumferència*** de centre (x_0, y_0) i de radi r són els punts que estan a una distància r de (x_0, y_0). Això fa que aquests punts compleixin l'equació

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

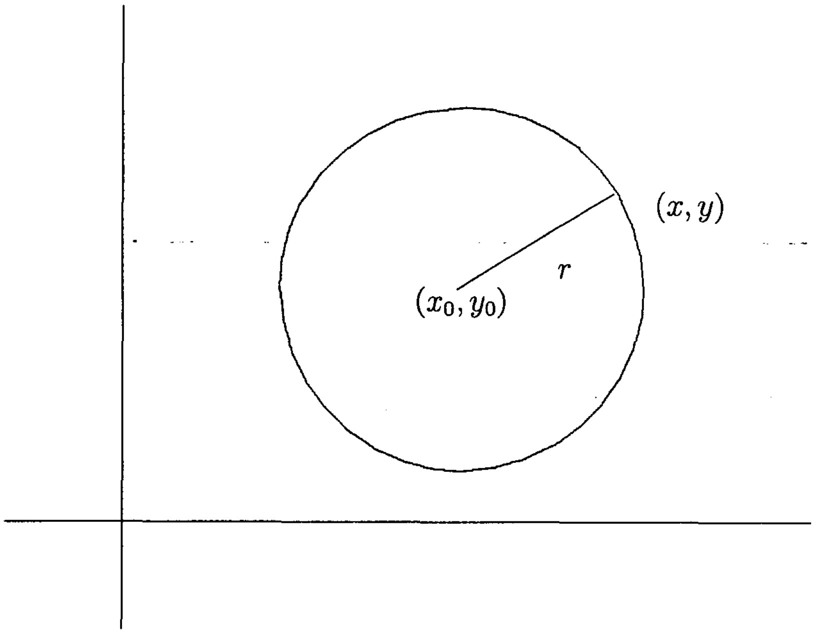


Figura 4.1: Circumferència de centre (x_0, y_0) i radi r

- Paràbola

  Una ***paràbola*** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat ***focus*** i d'una recta fixa anomenada ***directriu de la paràbola***.
  Per obtenir una equació senzilla d'aquest lloc geomètric escollirem els eixos de coordenades de la manera següent:

  -com a eix d'abcisses, la recta perpendicular a la directriu que passa pel focus

  -com a eix d'ordenades, la recta paral.lela a la directriu, que passa pel punt mitjà del segment d'abcisses comprès entre el focus i la directriu
  D'aquesta manera l'equació de la directriu serà

$$x = -k$$

i les coordenades del focus $F(k,0)$.
Aleshores, per la definició de paràbola tindrem que:

$$d((x,y),d) = d((x,y),F) \Leftrightarrow x + k = \sqrt{(x-k)^2 + y^2}$$

amb la qual cosa obtindrem:

$$y^2 = 4kx$$

L'equació reduïda o canònica d'una paràbola ès

$$y^2 = 2px$$

on p designa la distància entre el focus i la directriu ($k = \frac{p}{2}$)

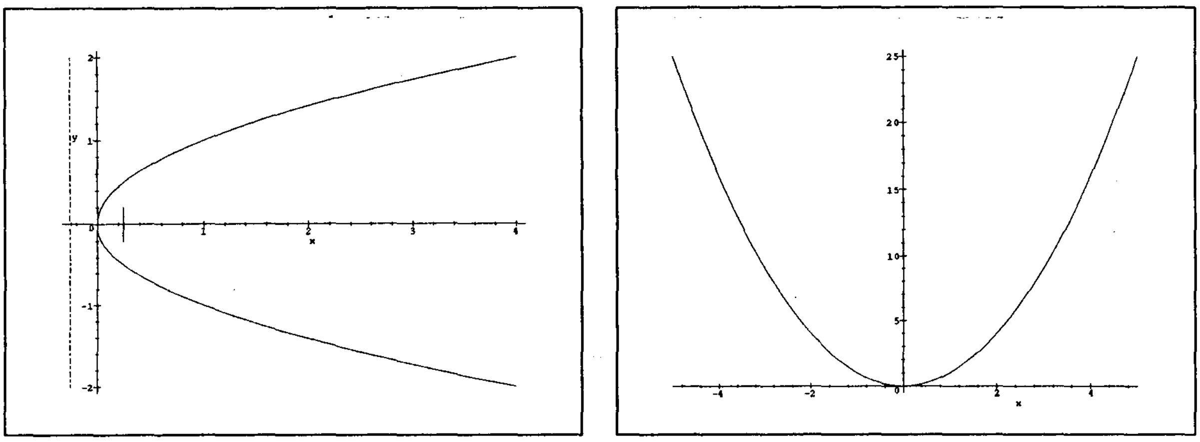


Figura 4.2: Gràfica de les paràboles $y^2 = 2px$ i $y = x^2$

- El.lipse

  Una ***el.lipse*** és el lloc geomètric dels punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts fixos anomenats ***focus*** és constant.
  Per obtenir l'equació de l'el.lipse en forma reduïda o canònica, escollirem uns eixos de coordenades adients:

  -l'eix d'abcisses serà la recta determinada pels dos focus

  -l'eix d'ordenades serà la mediatriu del segment determinat pels dos focus
  Les coordenades dels focus seran $(c,0)$, $(-c,0)$ amb $c > 0$.
  LLavors, per definició:

$$d((x,y),(c,0)) + d((x,y),(-c,0)) = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

L'equació redüıda de l'el.lipse és:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

i es compleix que $a^2 = b^2 + c^2$, on a i b són els ***semi-eixos*** de l'el.lipse.
Anomenarem ***excentricitat*** de l'el.lipse al quocient $e = \frac{c}{a}$.

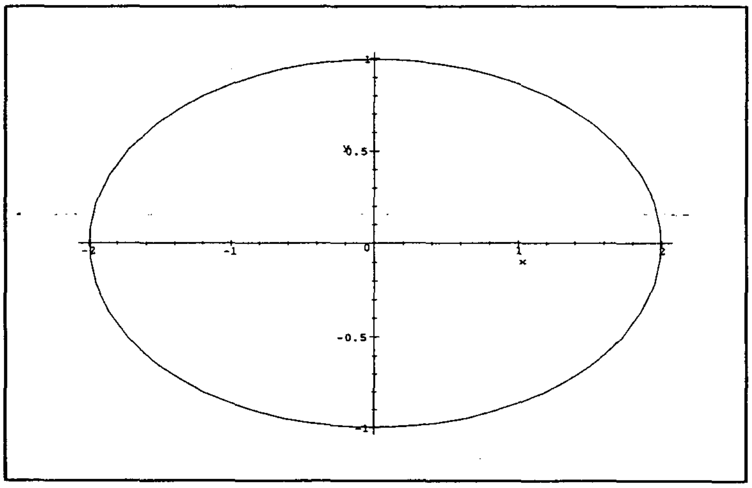


Figura 4.3: Gràfica de l'el.lipse

- Hipèrbola

  Una ***hipèrbola*** és el lloc geomètric dels punts del pla tals, que la diferència de les seves distàncies a dos punts fixos anomenats ***focus*** és constant.
  Per obtenir l'equació de la hipèrbola en forma reduïda o canònica, escollirem uns eixos de coordenades adients:

  -l'eix d'abcisses serà la recta determinada pels dos focus

  -l'eix d'ordenades serà la mediatriu del segment determinat pels dos focus

  Amb aquesta elecció, les coordenades dels focus seran $(-c, 0)$, $(c, 0)$, on $c > 0$.
  D'aquesta manera l'equació reduïda de la hipèrbola és

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

  i es compleix que $c^2 = a^2 + b^2$.

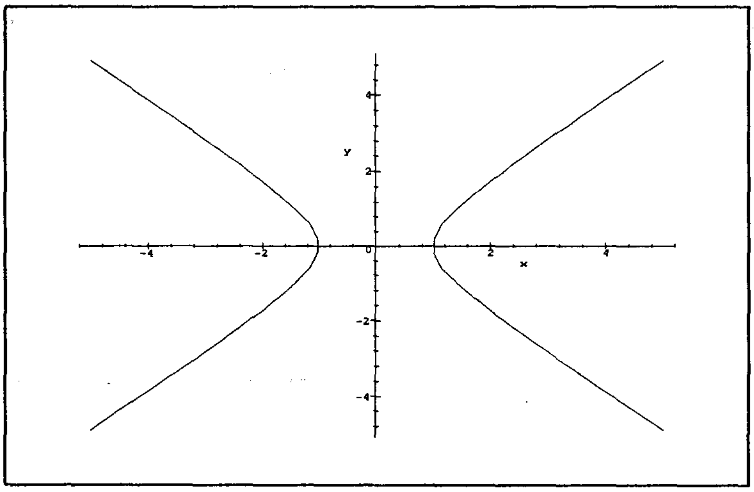


Figura 4.4: Gràfica de la hipèrbola

Producte vectorial

En $\mathbb{R}^3$ es defineix una operació que s'anomena ***producte vectorial*** de la forma següent: a cada dos vectors, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ se li fa correspondre un altre vector $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\hat{uv})$ i és ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
S'obté

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Propietats

- Segons la definició resulta evident que el producte vectorial no és commutatiu,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

- $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- Es pot demostrar que el producte vectorial és distributiu amb relació a l'addició de vectors,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

- El producte vectorial de dos vectors no nuls és zero si i només si els dos vectors tenen la mateixa direcció

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} || \vec{v}$$

Aplicacions

- Càlcul de l'àrea d'un triangle
- Volum d'un tetraedre

Varietats lineals

En $\mathbb{R}^n$ considerem un conjunt de vectors independents $\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}\}$ i un punt p. Anomenarem ***varietat lineal*** al conjunt de punts de la forma

$$V \equiv \{(x_1, \cdots, x_n) = p + \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_m \vec{v_m}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Per $m = 0$ tenim un ***punt***

$m = 1$ una ***recta***

$m = 2$ un ***pla***

$\vdots$

$m = n - 1$ un ***hiperplà***

Varietats lineals en el pla

Les varietats lineals a $\mathbb{R}^2$ són els punts i les rectes

Equacions de la recta

Una recta ve determinada per un punt i un vector director:

$$r \equiv (x, y) = p + \lambda \vec{v} \text{ on } p = (x_0, y_0) \text{ i } \vec{v} = (a, b)$$

com es pot veure a la figura 4.5.

L'equació que verifiquen els punts de la recta pot venir donada de diferents formes:

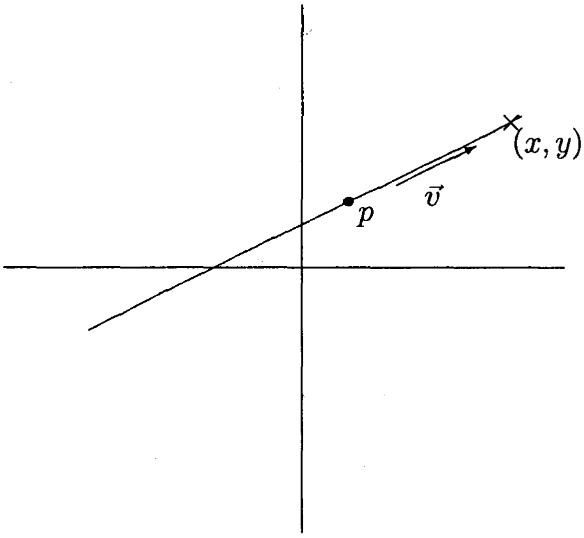


Figura 4.5: Recta a $\mathbb{R}^2$

- Equació vectorial

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$$

- Equació paramètrica

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$

- Equació contínua

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

- Equació general o implícita

$$Ax + By + C = 0$$

- Equació explícita

$$y = mx + n$$

  on m és el pendent i n l'ordenada a l'orígen.

- Equació de la recta que passa per (x_0, y_0) i té pendent m

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Posició relativa de dues rectes

Siguin

$$r \equiv (x, y) = p + \lambda\vec{v} \quad \text{i} \quad s \equiv (x, y) = q + \lambda\vec{u}$$

dues rectes. Per estudiar la posició relativa de r i de s es pot fer de dues formes: vectorialment o resolent el sistema d'equacions format per les equacions contínues de les dues rectes.
Suposem que el sistema és $AX = b$

Cas 1. Les dues rectes són la mateixa si i només si
$\text{rang}\,(\vec{pq}, \vec{u}, \vec{v}) = 1 \Leftrightarrow \text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(A|b) = 1$

Cas 2. Les dues rectes són paral.leles si i només si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{rang}\,(\vec{u}, \vec{v}) & = & 1 \\ \text{rang}\,(\vec{pq}, \vec{u}) & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \text{rang}\,(A) & = & 1 \\ \text{rang}\,(A|b) & = & 2 \end{array} \right.$$

Cas 3. Les dues rectes es tallen si i només si
$\text{rang}\,(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \Leftrightarrow \text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(A|b) = 2$

Distància d'un punt a una recta

Donada una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ i un punt $q = (x_0, y_o)$, es defineix

$$d(q, r) = \min\{d(p, q) : p \in r\}$$

El punt de r que està a mínima distància de q és el punt intersecció de r amb la recta perpendicular a r que passa per q.
Es pot utilitzar també la fórmula

$$d(q, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Varietats lineals en l'espai

Les varietats lineals en $\mathbb{R}^3$ són els punts, les rectes i els plans. Procedirem com hem fet a $\mathbb{R}^2$.

Equacions de la recta

Donat un punt $p = (x_0, y_0, z_0)$ i un vector $\vec{v} = (a, b, c)$, les diferents formes de l'equació de la recta que passa pel punt p i té com a vector director $\vec{v}$ són:

- Equació vectorial
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$
- Equació paramètrica
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda a \\ y & = & y_0 + \lambda b \\ z & = & z_0 + \lambda c \end{array}\right.$$
- Equació contínua
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Observem que, en forma contínua, una recta en $\mathbb{R}^3$ ve donada per dues equacions. Geomètricament la interpretació d'aquest fet és que tota recta està determinada com a intersecció de dos plans.

Equacions del pla

Un pla de $\mathbb{R}^3$ ve determinat per tres punts, un punt i dos vectors o un punt i el vector ortogonal.
$$\Pi \equiv (x, y, z) = p + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$
amb $p = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f)$.

Les equacions del pla són:

- Equació vectorial
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(d, e, f)$$

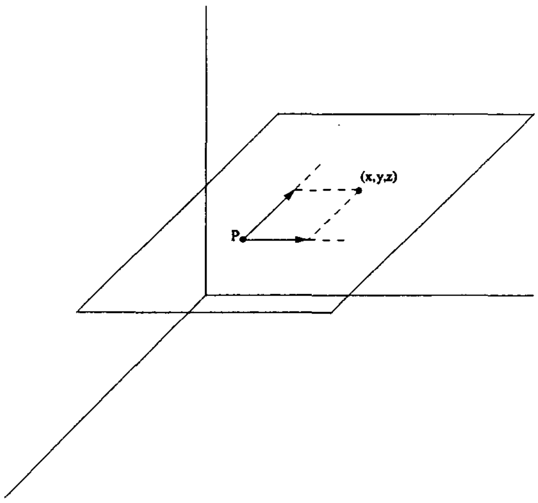


Figura 4.6: Pla a $\mathbb{R}^3$

- Equació paramètrica

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu d \\ y = y_0 + \lambda b + \mu e \\ z = z_0 + \lambda c + \mu f \end{cases}$$

- Equació general o implícita
Un pla en forma contínua té una única equació de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

S'obté a partir de les equacions paramètriques en eliminar els paràmetres λ i μ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a & d \\ y - y_0 & b & e \\ z - z_0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

Observem que $(A, B, C) = (a, b, c) \wedge (d, e, f)$ és el vector perpendicular al pla.
Així doncs, el pla que passa pel punt $p = (x_0, y_0, z_0)$ i que té (A, B, C) per vector perpendicular és:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Posició relativa de varietats lineals

L'estudi de posicions relatives es pot fer, com a $\mathbb{R}^2$, vectorialment o mitjançant sistemes d'equacions. Anem a fer un cas.
Siguin

$$r \equiv (x, y, z) = p + \lambda\vec{u} \quad \text{i } \Pi \equiv (x, y, z) = q + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$

una recta i un pla.
En forma contínua tenim un sistema $AX = B$ de tres equacions amb tres incògnites.

Cas 1. La recta està continguda en el pla si i només si
rang $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) =$ rang $(\vec{pq}, \vec{v}, \vec{w}) = 2 \Leftrightarrow$ rang $(A) =$ rang $(A|B) = 2$

Cas 2. La recta és paral.lela al pla si i només si

$$\begin{cases} \text{rang } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2 \\ \text{rang } (\vec{pq}, \vec{v}, \vec{w}) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rang } (A) = 2 \\ \text{rang } (A|B) = 3 \end{cases}$$

Cas 3. La recta i el pla es tallen si i només si
rang $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3 \Leftrightarrow$ rang $(A) =$ rang $(A|B) = 3$

Distància entre varietats

Siguin V_1 i V_2 dues varietats lineals

$$d(V_1, V_2) = \min\{d(p, q) : p \in V_1, q \in V_2\}$$

Els punts de mínima distància són els punts d'intersecció de cada varietat amb la recta perpendicular a les dues varietats.
També es poden obtenir fórmules que poden facilitar els càlculs.
Per exemple:
Siguin $p = (x_0, y_0, z_0)$ i $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un punt i un pla, aleshores,

$$d(p, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4.1 Exercicis resolts

1. Calculeu les coordenades dels punts que divideixen en dues i tres parts iguals, respectivament, els segments d'extrems:

   a) $A(1,2); B(7,5)$,

   b) $C(-5,-3); D(7,-1)$,

   c) $M(6,3); N(-1,-2)$.

Per dividir un segment en dues parts iguals, el que volem és trobar un punt P d'aquest segment que compleixi la següent condició

$$P = A + \frac{\vec{AB}}{2} = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Per tant, les coordenades del punt mitjà d'un segment són la semisuma de les coordenades dels extrems.

$$p_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{ i } p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}.$$

Per dividir un segment en tres parts, el que busquem són dos punts T_1 i T_2 que estiguin situats a una distància $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ del punt A, respectivament. El que han de complir ara T_1 i T_2 és que

$$T_1 = A + \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{2A+B}{3},$$

$$T_2 = A + \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{A+2B}{3}.$$

a)Si procedim de la manera primerament descrita pel càlcul del punt mitjà tenim

$$m_1 = \frac{1+7}{2} = 4 \text{ i } m_2 = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2},$$

Les coordenades del punt que buscàvem són $\left(4, \frac{7}{2}\right)$.

Calculem ara els punt que divideixen el segment en tres parts.

$$T_1 = \frac{2(1,2)+(7,5)}{3} = \left(\frac{9}{3}, \frac{9}{3}\right) = (3,3),$$

$$T_2 = \frac{(1,2)+2(7,5)}{3} = \left(\frac{15}{3}, \frac{12}{3}\right) = (5,4),$$

Les coordenades dels punts que busquem són $(3,3)$ i $(5,4)$.

b) Calculem primer les coordenades del punt mitjà

$$m_1 = \frac{-5+7}{2} = 1 \text{ i } m_2 = \frac{-3-1}{2} = -2,$$

Les coordenades del punt que buscàvem són $(1, -2)$.
Ara calculem com hem vist anteriorment els punt que divideixen el segment en tres parts iguals.

$$T_1 = \frac{2(-5,-3)+(7,-1)}{3} = \left(-1, \frac{-7}{3}\right),$$
$$T_2 = \frac{(-5,-3)+2(7,-1)}{3} = \left(3, \frac{-5}{3}\right),$$

Les coordenades dels punts que busquem són $\left(-1, \frac{-7}{3}\right)$, $\left(3, \frac{-5}{3}\right)$.

c) Punt mitjà del segment $\vec{MN}$.

$$m_1 = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2} \text{ i } m_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2},$$

Les coordenades del punt que buscàvem són $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Ara calculem com hem vist anteriorment els punt que divideixen el segment en tres parts iguals.

$$T_1 = \frac{2(6,3)+(-1,-2)}{3} = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right),$$
$$T_2 = \frac{(6,3)+2(-1,-2)}{3} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right),$$

Les coordenades dels punts que busquem són $\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

---

2. Determineu:

a) si estan alineats els punts $A(-9,2); B(-5,1); C(1,2)$.

b) el vèrtex C d'un triangle si coneixes els vèrtexs $A(4,3), B(10,-5)$ i el baricentre $G(5,-1)$.

---

a) Dir que tres punts estan alineats, equival a dir que pertanyen a una mateixa recta, o que hi ha una recta que passa per aquests tres punts. Si A, B i C són els tres punts, direm que, per exemple C està alineat amb A i B quan $\vec{AC}$ i $\vec{AB}$ tenen la mateixa direcció. Això equival a l'existència d'un nombre k tal que $\vec{AC} = k\vec{AB}$. Calculem primer $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$

$$\vec{AB} = (-5+9, 1-2) = (4, -1),$$

$$\vec{AC} = (1+9, 2-2) = (10, 0).$$

Tenim que $(10, 0) = k(4, -1)$ i la solució és $k = \frac{10}{4}$ i $k = 0$. Si estiguessin alineats el valor de k hauria de ser únic.

b) Una forma, la de caire més geomètric, de resoldre el problema, és tenint en compte que el baricentre és el lloc geomètric on es tallen les medianes, que són les rectes que uneixen cada vèrtex d'un triangle amb el punt mig del costat oposat. Una característica del baricentre és que es troba el doble de lluny del vèrtex que del punt mig del cantó oposat. Utilitzarem aquesta propietat per a trobar el tercer vèrtex del triangle, atès que en sabem les coordenades de dos i les coordenades del baricentre.
Suposem que les coordenades del vèrtex C són (c_1, c_2). D'altra banda, suposem que M és el punt mig del segment que uneix $\vec{AB}$ i finalment sabem que el vèrtex C del triangle compleix la següent relació $C = M + 3\vec{MG}$. Si resolem d'aquesta forma, obtenim

$$M = (4, 3) + \frac{(6, -8)}{2} = (7, -1),$$

$$C = (7, -1) + 3(5-7, -1+1) = (1, -1).$$

Una forma més algebràica de dur a terme el càlcul d'aquest vèrtex és considerant la següent relació

$$\frac{A+B+C}{3} = G,$$

$$C = 3G - A - B.$$

Si ho apliquem al nostre exemple concretament tenim

$$C = 3(5, -1) - (4, 3) - (10, -5) = (1, -1).$$

3. Calculeu:

a) una equació paramètrica de la recta $3x - 2y = 12$,

b) una equació continua de la recta $x + 5y = -20$,

c) l'angle amb l'eix x de la recta $2x - 2y = -1$,

d) l'angle de la recta de l'apartat c) amb la recta $\sqrt{3}x + y = -2$.

---

a) Ens donen l'equació implícita de la recta i en demanen que trobem una equació paramètrica (cal recordar que una recta pot tenir moltes equacions paramètriques però només té una equació implícita). Si tenim l'equació d'una recta de la forma $ax + by = c$, sabem que un vector director d'aquesta recta és $(-b, a)$ o bé $(b, -a)$. D'altra banda necessitem un punt de la recta. Per a trobar-lo només cal donar-li un valor a x o a y i trobar el valor de y o x, respectivament. En el nostre cas tenim $(2,3)$, com a vector director i si fem que $y = 0$ aleshores es té $3x - 2 \cdot 0 - 12 = 0$ i per tant un punt de la recta és $(4,0)$. Una equació paramètrica seria

$$\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$$

b) En aquest cas ens demanen trobar l'equació contínua de la recta. Procedirem de la mateixa manera que hem fet a l'apartat anterior ja que, de fet, necessitem també un vector director i un punt. L'únic que varia és l'equació.
Un vector director és $(5, -1)$ i un punt $(0, -4)$. Amb això, obtenim

$$\frac{x}{5} = \frac{y+4}{-1}.$$

c) Calcular l'angle que una recta forma amb l'eix de les x, és equivalent a trobar l'angle que el seu vector director forma amb el mateix eix.
Per aquest cas en concret hem de trobar l'angle que $(2,2)$ forma amb l'eix de les x.

$$\alpha = \arctan\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

La nostra recta té una inclinació de 45° i el seu pendent val 1.

d) L'angle que formen dues rectes és l'angle que formen els seus vectors directors.

$$\alpha(r,s) = \arccos\frac{\vec{v_s} \cdot \vec{v_r}}{||\vec{v_s}|| \cdot ||\vec{v_r}||}$$

El vector director de la recta de l'apartat c) $r : 2x - 2y = -1$ és $(2,2)$ i el de la recta $s : \sqrt{3}x + y = -2$ és $(-1, \sqrt{3})$. Ara només resta calcular l'angle que formen aquests dos vectors, a partir de la fórmula que hem donat anteriorment. Per tant

$$\cos\alpha = \frac{(2,2)\cdot(-1,\sqrt{3})}{\sqrt{(2^2+2^2)}\cdot\sqrt{(1^2+(\sqrt{3})^2)}} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$\alpha = \arccos\frac{-2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 75^\circ.$$

---

4. Una recta passa pels punts $A(1,0), B(a,2)$. Determineu el valor d'a de manera que:

a) el pendent de la recta valgui $m = 1$,

b) la recta formi un angle de 30° amb l'eix y,

c) la recta sigui perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$,

d) la recta sigui paral.lela a $4x - 2y = 1$.

---

a) Ens demanen que trobem el valor d'a que fa que el pendent de sigui 1. El vector director de la recta és $(a-1, 2)$. Sabem que $m = \dfrac{v_2}{v_1}$. Per tant tenim que

$$\frac{2}{a-1} = 1,$$

$$a = 3.$$

b) Ara ens donen l'angle que volem que la nostra recta formi amb l'eix de les x, o equivalentment el seu vector director. Sabem que la tangent de l'angle està relacionada amb les coordenades del vector de la següent manera $\tan\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$. D'aquesta manera s'obté

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\frac{2}{a-1} = \sqrt{3},$$

$$a = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}.$$

c) Volem saber quin és el valor de a de tal manera que la recta que uneix els punts A i B sigui perpendicular a $r : 2x - 3y = 5$. Que dues rectes siguin perpendiculars equival a dir que ho són els seus vectors directors. Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

són perpendiculars si el seu producte escalar és 0.
Així doncs, tindrem

$$(a-1,2)\cdot(3,2)=0$$
$$3a-3+4=0$$
$$a=-\frac{1}{3}$$

d) Volem ara que la recta que uneix A i B sigui paral.lela a $r: 4x-2y=1$. Dues rectes són paral.les quan els seus vectors directors ho són. Per tal que dos vectors siguin paral.lels les seves coordenades han de ser proporcionals. És a dir, que $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.
Si l'equació de la recta que busquem és $s: -2x+(a-1)y+c'=0$, aleshores tenim que

$$\frac{2}{4}=\frac{a-1}{2},$$
$$a=2.$$

---

5. Calculeu:

a) l'equació de la recta que té pendent $m=\frac{-2}{3}$ i la suma de la longitud dels segments que determina en els semieixos positius sigui 5.

b) l'equació de la recta perpendicular a $3x-4y=2$ que determina en el semieix negatiu de l'eix x un segment de longitud $\frac{1}{2}$.

---

a) Si la recta que ens demanen que busquem té pendent $\frac{-2}{3}$, el vector director d'aquesta recta serà $\vec{v}(3,-2)$; per tant l'equació de la nostra recta és $2x+3y=c$, amb $c>0$ ja que talla els semieixos positius. Hem de trobar ara el valor de c. Per fer-ho, ens diuen que la suma dels segments que defineix la recta que busquem amb els semieixos positius val 5, és a dir, hem de buscar els punts de tall de la recta amb els eixos i calcular la longitud dels segments que uneixen aquests punts amb l'origen.
D'una banda si $x=0$ aleshores $y=\frac{c}{3}$. El punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades és el $P\left(0,\frac{c}{3}\right)$ (per trobar aquest punt substituïm el valor de x a l'equació de la recta i trobem el valor de y). La longitud del vector $\vec{OP}$, on O és l'origen de coordenades, és $\frac{c}{3}$.
El punt Q d'intersecció de la recta amb l'eix de les x's és $\left(\frac{c}{2},0\right)$ (calculat de forma

anàloga al punt anterior). La longitud del segment que uneix el punt Q amb l'origen de coordenades és $\dfrac{c}{2}$.
La suma d'ambdós segments ens diuen que val 5. Per tant tenim

$$\frac{c}{3}+\frac{c}{2}=5,$$
$$c=6.$$

L'equació de la recta que busquem és $2x+3y=6$.

b) En el segon cas ens demanen que trobem una recta perpendicular a $3x-4y=2$. Un vector director de la recta que busquem és $(-3,4)$ per tant $4x+3y=c$. Sabem que aquesta recta forma un segment amb el semieix negatiu de les x's de longitud $\dfrac{1}{2}$. És a dir, ha de passar pel punt $(-\frac{1}{2},0)$. Per tant tenim

$$4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot 0=c$$
$$c=-2$$

I l'equació de la recta queda

$$4x+3y=-2.$$

---

6. Calculeu la distància:

a) entre les rectes r i s de quatre formes diferents.

$$r:\begin{cases} x+y &= -2 \\ 2x-z &= -1 \end{cases}$$
$$s:(-2,2,3)+\mu(1,1,0),$$

b) del punt $P(9,2)$ a la recta $r: 3x+4y=20$,

c) entre les rectes paral.leles $r: 2x+5y=7$, $s: 2x+5y=10$.

---

a) Distància entre rectes:

1. La primera forma de calcular la distància entre r i s, serà a partir de la fórmula per al càlcul de distàncies

$$d(r,s)=\frac{\left|\,|\vec{P_rP_s},\vec{v_r},\vec{v_s}|\,\right|}{||\vec{v_r}\wedge\vec{v_s}||}$$

on $|\vec{P_rP_s}, \vec{v_r}, \vec{v_s}|$ és el determinant format pel vector que uneix P_r, que és un punt de r i P_s, punt de s, i els vectors directors de les dues rectes.
Calculem primer $\vec{P_rP_s}$ per la qual cosa primer hem de trobar un punt de la recta r ja que ve donada com a la intersecció de dos plans. Fixem per exemple la $x = 0$ i trobem els valor de $y = -2$ i $z = 1$, aleshores el $\vec{P_rP_s} = (-2, 4, 2)$.
El càlcul de la distància entre ambdues rectes és immediat

$\vec{v_r} = (1, 1, 0) \wedge (2, 0, -1) = (-1, 1, -2) \sim (1, -1, 2)$
$\vec{v_s} = (1, 1, 0)$
$\vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = (1, -1, 2) \wedge (1, 1, 0) = (-2, 2, 2)$

$$d(r, s) = \frac{\left|\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{12}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

2. La següent resolució que proposem té un caràcter més geomètric i passarà pel càlcul de la recta perpendicular , t, a les rectes donades i els punts d'intersecció de t amb r i s. Calcularem la distància entre les rectes com a distància entre els punts A i B d'intersecció de la recta t amb r i s.

3. La tercera forma que proposem és trobar un vector $\vec{AB}$, on A i B són punts de r i s, respectivament, de tal manera que sigui perpendicular a $\vec{v_r}$ i a $\vec{v_s}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{v_r} = 0,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v_s} = 0,$$

Un punt arbitrari de la recta r, és del tipus $A(\lambda, -2 - \lambda, 1 + 2\lambda)$ i un de la recta s, $B(-2 + \mu, 2 + \mu, 3)$. Per tant $\vec{AB}$ serà

$$\vec{AB} = (-2 - \lambda + \mu, 4 + \lambda + \mu, 2 - 2\lambda).$$

El sistema que hem de resoldre és el format per les dues equacions següents

$$(-2 - \lambda + \mu, 4 + \lambda + \mu, 2 - 2\lambda)(1, -1, 2) = -2 - 6\lambda,$$

$$(-2 - \lambda + \mu, 4 + \lambda + \mu, 2 - 2\lambda)(1, 1, 0) = 2 + 2\mu$$

$$\begin{cases} -2-6\lambda &= 0 \\ 2+2\mu &= 0 \end{cases}$$

Els valors de λ i μ que satisfan les equacions anteriors són $\frac{-1}{3}$ i -1, respectivament. D'aquesta manera obtenim

$$A\left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$B(-3,1,3),$$
$$\vec{AB} = \left(\frac{-8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

La distància entre dos punts es calcula com el mòdul del vector que els uneix, per tant

$$d(r,s) = d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

4. La darrera forma de calcular aquesta distància serà a partir del càlcul de la distància d'un punt a un pla. Per això, trobarem el pla que té per vectors directors $\vec{v_r}$ i $\vec{v_s}$ i que passa pel punt P_r. La distància del punt P_s al pla serà la distància entre ambdues rectes.
L'equació vectorial del pla serà

$$(x,y,z) = (0,-2,1) + \alpha(1,-1,2) + \beta(1,1,0),$$

Que en forma implícita $-2x+2y+2z=-2$.
La distància entre el punt i el pla es troba

$$d(P_s,\pi) = \frac{|ap_{s1} + bp_{s2} + cp_{s3} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Aplicat al nostre cas

$$d(P_s,\pi) = \frac{|(-2)\cdot(-2) + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Com a darrer comentari, cal destacar que mentre que en l'apartat a) i d) calculem la distància directament (mitjançant l'aplicació d'una fórmula), en els apartats b) i c), primer pasem pel càlcul dels punts A i B, un per cada recta i són els punts que estan a distància mínima entre ambdues, i trobem la distància a partir del mòdul del vector que els uneix.

b) La distància d'un punt a una recta sempre és la més curta possible mesurada des de la perpendicular. Per tant, per calcular la distància d'un punt a una recta trobarem primer la projecció ortogonal del punt sobre la recta; la distància entre ambdós punts serà la distància entre el punt i la recta. Per això primer cal que trobem la recta que és perpendicular a la que ens donen i que passa pel punt P. Un vector perpendicular a la recta r és $(3,4)$, per tant la recta que passa pel punt $P(9,2)$ i que té per vector director $(3,4)$ és $s: 4x-3y=30$. La intersecció de r i s ens donarà un punt, que és el punt P projectat sobre la recta r. Trobar el punt d'intersecció es limita a resoldre el sistema que formen les dues rectes

$$\begin{cases} 4x-3y &= 30 \\ 3x+4y &= 20 \end{cases}$$

Si resolem, per exemple per igualació

$$3(30+3y)=4(20-4y),$$

El punt I d'intersecció de la recta r amb s és $\left(\frac{36}{5},\frac{-2}{5}\right)$. La $d(P,I)=d(P,r)$.

$$d(P,I)=\sqrt{\left(\frac{36}{5}-9\right)^2+\left(\frac{-2}{5}-2\right)^2}=3.$$

Es pot emprar la fórmula de la distància del punt a la recta

$$d(P,r)=\frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

on x i y prenen el valor del punt P de qui volem saber la distància a la recta d'equació $ax+by=c$. En el nostre exemple

$$d(P,r)=\frac{|3\cdot 9+4\cdot 2-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3.$$

Una forma anàloga de resoldre el problema que ens plantegen és a partir del càlcul de la projecció ortogonal.

Si tenim que $\vec{v}$ és el vector director de la recta, P el punt del qual volem saber quant dista de la recta i A és un punt qualsevol de la recta, aleshores la projecció ortogonal de $\vec{AP}$ sobre el vector $\vec{v}$ és

$$\left|\vec{AP}\cdot\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\right|.$$

Primer cal saber un punt de la recta que el trobem fixant per exemple un valor de la x i trobant el valor d'y; d'aquesta forma s'obté el punt $A(0,5)$. Aplicant això al nostre problema, s'obté

$$\frac{|((9,2)-(0,5))\cdot(-4,3)|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}},$$

$$\frac{|(9,-3)\cdot(-4,3)|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|-36-9|}{5}=\frac{45}{5}=9.$$

La projecció del segment $\vec{AP}$ sobre la recta és 9. Val a dir, però que aquesta no és la distància del punt a la recta. Per a calcular-la utilitzarem el Teorema de Pitàgores. El segment $\vec{AP}$ juntament amb la seva projecció sobre la recta i amb la distància del punt P a la recta, formen un triangle rectangle del que només desconeixem un dels cantons (la distància de P a la recta). La longitud del segment $\vec{AP}$ (hipotenusa del triangle) és $\sqrt{(9-0)^2+(2-5)^2}=\sqrt{90}$.
Si $h^2=p^2+d^2$, on p i d són la projecció i la distància, respectivament,

$$d^2=\sqrt{90}^2-9^2=90-81=9,$$

$$d=3.$$

c) La distància entre dues rectes r i s paral.leles és la distància que hi ha des de qualsevol punt d'una de les rectes a l'altra (atès que tots els punts de cadascuna de les rectes equidisten de l'altra). Per tant calcular aquesta distància es limitarà a calcular la distància d'un punt a una recta com ja hem fet a l'apartat anterior. Busquem primer un punt A de r com hem fet anteriorment i obtenim $A\left(0,\frac{7}{5}\right)$, ara només hem de calcular $d(A,s)$ de forma anàloga a com s'ha fet a l'apartat anterior. D'aquesta manera s'obté

$$\begin{aligned} d(A,s) &= \frac{\left|\left((0,2)-\left(0,\frac{7}{5}\right)\right)\cdot(-5,2)\right|}{\sqrt{(-5)^2+2^2}} \\ &= \frac{\left|\left(0,\frac{3}{2}\right)\cdot(-5,2)\right|}{\sqrt{25+4}} = \\ &= \frac{|0+3|}{\sqrt{29}}=\frac{3}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

---

7. Calculeu:

a) l'àrea del triangle de vèrtexs $A(-3,1)$; $B(-2,-5)$ i $C=(4,-1)$.

b) l'àrea del que té com a vèrtex els punts $A(-1,2)$, $B(5,-1)$ i els altres dos vèrtexs estan situats sobre la recta $x+2y+4=0$.

---

a) Ens proporcionen els tres vèrtexs d'un triangle i ens demanen que calculem la seva àrea. L'àrea d'un triangle és $\frac{b \cdot h}{2}$, on b és la base del triangle i h és la seva alçada. En el nostre cas, si agafem com a base $||\vec{AB}||$, l'alçada serà la distància del punt C a la recta $\vec{AB}$. Tindrem,

$$S = \frac{||\vec{AB}|| \cdot d(c, \vec{AB})}{2}.$$

Primer calcularem el mòdul del vector $\vec{AB}$,

$$||\vec{AB}|| = ||B-A|| = ||(1,-6)|| = \sqrt{37}$$

L'equació de la recta $\vec{AB}$ serà de la forma $6x+y=c$. Substituint x,y per un dels punts de la recta, $A(-3,1)$, obtindrem que el valor de c és 17. I l'equació serà

$$6x+y=-17$$

La distància del punt C a la recta $\vec{AB}$ serà

$$d(c, \vec{AB}) = \frac{|6 \cdot 4 - 1 + 17|}{\sqrt{6^2+1}} = \frac{40}{\sqrt{37}}$$

i per tant,

$$S = \frac{\sqrt{37} \cdot \frac{40}{\sqrt{37}}}{2} = 20$$

b) Ens demanen calcular l'àrea d'un paral.lelogram i ens donen els vèrtexs de dos punts i la recta on estan els altres dos. Si calculem el vector director de la recta $\vec{AB}$,

$$\vec{AB} = B - A = (6,-3)$$

observarem que és paral.lel al vector director de la recta $x+2y+4=0$. Obviament, en tractarse d'un paral.lelogram aquestes dues rectes són paral.leles. L'àrea del paral.lelogram és la base, que agafarem la distància entre els dos vèrtexs coneguts, per l'alçada, que serà la distància d'un d'aquests dos punts a la recta donada. La base, tindrà com a mòdul

$$||\vec{AB}|| = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{45}$$

L'alçada serà

$$d(A,r) = \frac{|-1+2\cdot 2+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

i l'àrea del paral.lelogram serà

$$S = ||\vec{AB}|| \cdot d(A,r) = \sqrt{45}\cdot\frac{7}{\sqrt{5}} = 3\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{5}} = 21$$

---

8. Calculeu:

a) les coordenades dels vèrtexs i els focus de l'el.lipse $16x^2 + 25y^2 = 100$,

b) l'excentricitat i les asímptotes de la hipèrbola $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$,

c) el vèrtex,.el focus, l'eix i la recta directriu de la paràbola $y^2 = -x + 2$.

---

a) Sabem que l'equació canònica d'una el.lipse és

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dividim tota la nostra equació per 100, per obtenir-ne una del tipus expressat anteriorment.

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

De l'expressió anterior tenim $a^2 = \frac{25}{4}$ i $b^2 = 4$, a més sabem que $c^2 = a^2 - b^2$.
Per tant el semieix major té per coordenades $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$ i $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
El semieix menor $(0,-2)$ i $(0,2)$.
Finalment les coordenades del focus són $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ i $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

b) Per realitzar aquest exercici, hem de saber que l'excentricitat d'una hipèrbola es defineix com $e = \frac{c}{a}$ i que les equacions de les asímptotes són $y = \pm\frac{b}{a}x$. D'altra banda, l'equació canònica de la hipèrbola és

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aplicat al nostre exemple és

$$a^2 = 36,\ a = \pm 6$$

$$b^2 = 64,\ b = \pm 8,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 100,\ c = \pm 10.$$

Amb aquesta informació prèvia necessària per trobar el que ens demanen, obtenim

$$e = \frac{10}{6} = \frac{5}{3},$$

$$y = \frac{8}{6}x = \frac{4}{3}x \text{ i } y = \frac{-4}{3}x.$$

c) La paràbola és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix anomenat focus i d'una recta fixa anomenada directriu de la paràbola. La seva equació és

$y^2 = 2px$ on $p = d(F, d)$; F i d són el focus i la recta directriu, respectivament.

L'equació de la paràbola, en aquest cas, es

$$y^2 = -x + 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{-x+2}$$

Podem veure que la paràbola és simètrica respecte l'eix x, l'eix de la paràbola. La paràbola talla aquest eix en el punt $(2, 0)$, el vèrtex de la paràbola. $\frac{p}{2}$ és la distància del focus i la recta directriu al vèrtex, en el nostre cas

$$2p = -1 \rightarrow p = -\frac{1}{2} \rightarrow \left|\frac{p}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

Per tant, el focus serà $(\frac{7}{4}, 0)$ i la recta directriu $x = \frac{9}{4}$.

---

9. Calculeu les equacions de:

a) la circumferència de centre $C(2, 4)$ i radi $r = 3$,

b) l'el.lipse, referida al eixos de coordenades, que té un vèrtex a $A(5, 0)$ i un focus al punt $F(3, 0)$

c) la hipèrbola, referida als eixos de coordenades, d'asímptotes $y = \pm 2x$, i un vèrtex real $A(3, 0)$,

d) la paràbola de vèrtex $A(3, 1)$ i recta directriu $x = 6$.

---

a) L'equació d'una circumferència de radi r i no centrada a l'origen és

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Aplicant-ho al nostre exemple, tenim

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 3^2 = 0,$$

La circumferència té per equació

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0.$$

b) L'equació canònica de l'el.lipse és

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on a és el semieix major, b el semieix menor

$$a^2 = 25 \text{ i } b^2 = 25 - 3^2 = 16,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

c) Si les asímptotes de la hipèrbola són $y = \pm 2x$ aleshores $\pm\frac{b}{a} = \pm 2$. Sabem que $a = 3$ per tant $b = 6$. L'equació d'aquesta hipèrbola queda

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

d) La paràbola que busquem té el seu vèrtex al punt $A(3, 1)$ i la recta directriu $x = 6$. Aleshores la dist(Focus,directriu)= 12 i de signe negatiu ja que té el focus a l'esquerra de la directriu.

$$(y - 1)^2 = -12(x - 3).$$

---

10. Els punts $A = (11, -2, 8)$, $B = (9, 2, 12)$ i $C = (8, 1, 8)$ són tres vèrtexs d'un quadrat.

a) Trobeu l'altre vèrtex.

b) Busqueu l'equació del pla perpendicular al pla que conté els quatre punts i que passa per AB.

---

a) Observem que els vectors $\vec{CA} = (3, -3, 0)$ i $\vec{CB} = (1, 1, 4)$ són ortogonals. Si anomenem D al vèrtex que estem buscant, $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{CB}$, d'on s'obté: $D = C + \vec{CA} + \vec{CB} = (12, -1, 12)$.

b) El vector ortogonal al pla que conté als quatre punts és $\vec{CA} \wedge \vec{CB} = (-12, -12, 6)$.
El pla que busquem queda determinat per aquest vector, el punt A i el vector $\vec{AB} = (-2, 4, 4)$:

$$(x, y, z) = (11, -2, 8) + \lambda(-2, -2, 1) + \mu(-1, 2, 2).$$

4.2 Exercicis Proposats

1. Trobeu l'equació de cadascuna de les rectes determinades per les condicions següents:

a) passa pels punts $A(5,2), B(9,4)$,

b) passa pel punt $A(6,2)$ i té pendent $m = \frac{-3}{8}$,

c) passa pel punt $A(0,5)$ i té per vector director $\vec{v} = (2,-1)$,

d) passa pel punt $A(3,-1)$ i és perpendicular a la recta $2x + y = 5$.

2. Determineu:

a) L'equació del pla que passa pel punt $A(1,2,0)$ sabent que el vector $n(3,1,1)$ n'és perpendicular.

b) Els punts d'intersecció d'aquest pla amb els eixos.

3. Donat el pla $\Pi : 2x + y - z = 1$ i el punt $P(2,0,1)$, trobeu:

a) L'equació de la recta que és perpendicular a Π i que passa per P.

b) L'equació de la recta que és paral.lela a Π i que passa per P.

4. Decideix la posició relativa de $\Pi_1 : 2x + y - 2z = 1$ i

$$\Pi_2 : \begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= \lambda + \mu \\ z &= \lambda - \mu \end{cases}$$

5. Donats els plans $\Pi_1 : 3x - 2y + 5z = 2$ i $\Pi_2 : ax + 7y + z = 0$, determineu:

a) El valor que ha de tenir a per tal que Π_1 i Π_2 siguin perpendiculars

b) Pel valor d'a trobat en l'apartat anterior, el vector director de la recta intersecció d'ambdós plans.

6. Sigui $\Pi : 2x - y + z = 2$, trobeu l'equació de la recta simètrica de $r : \frac{x-1}{3} = y = \frac{z+1}{2}$ respecte al pla Π.

7. Siguin els plans $\Pi_1 : x + 2y + 2z = 0$ i $\Pi_2 : 2x - z = -1$. Determineu l'equació del lloc geomètric dels punts que equidisten de Π_1 i Π_2.

8. Determineu la recta que passa per l'origen i la direcció de la qual és simultàniament perpendicular a la de

$$r_1 : \begin{cases} x &= 1 + 3\lambda \\ y &= 2 - \lambda \\ z &= 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{i } r_2 : \begin{cases} x &= -\lambda \\ y &= 1 - 2\lambda \\ z &= 1 \end{cases}$$

9. Sigui $\Pi : x + 2y - z = -2$ i $r : x + 2 = y = z$

a) Trobeu l'equació de la projecció ortogonal de la recta r sobre Π, r'.

b) Calculeu l'angle que formen r i r' i comproveu que és igual a l'angle format per la recta r i pla Π.

10. Calculeu de forma analítica la distància entre la diagonal del cub d'aresta 1 que està situat al primer quadrant de l'espai $\mathbb{R}^3$ i la diagonal d'una de les seves cares.

11. La distància entre dues emissores és d i la primera té una potència doble de l'altra. Se sap que la intensitat amb què un receptor rep els senyals emesos és proporcional a la potència i inversament proporcional al quadrat de la distància emissora-receptor. Determineu els punts del pla en què la qualitat de recepció d'aquestes dues emissores és la mateixa.

12. Escriviu de totes les formes possibles les equacions de les rectes següents:

a) $(x, y, z) = (-3, 2, 0) + \lambda(2, 0, 1)$

b) $\begin{cases} x &= 3 - 2\lambda \\ y &= 4\lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{cases}$

c) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{5} = z$

d) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 3 &= 0 \\ 3x + y - 4z + 1 &= 0 \end{cases}$

13. Escriviu de totes les formes possibles les equacions dels plans següents:

a) $\begin{cases} x &= 1-2\lambda+3\mu \\ y &= 1+\lambda-3\mu \\ z &= \lambda+\mu \end{cases}$

b) $3x-y+2z-4=0$.

14. Estudieu la posició relativa del pla $3x-5y-2z-8=0$ amb cadascuna de les rectes següents. En el cas en què es tallin, busqueu la intersecció

a) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-9}{-1}$

b) $\begin{cases} 3x+y+2z &= 0 \\ 6x-3y+4z &= 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} &= \dfrac{y-1}{3} \\ z &= 7 \end{cases}$

15. Trobeu la posició relativa de les rectes d'equacions:

a) $\begin{cases} x-z=2 \\ x=y \end{cases}$ i $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$

b) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ i $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ x-2y+z-3=0 \end{cases}$

c) $x=y=z$ i $\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$

d) $2x-1=y+2=z-1$ i $3x+1=2y+5=z$

16. Trobeu els valors de a i de b perquè la recta $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y+2}{b}=\dfrac{z+3}{5}$ i el pla $2x+5y-7z+4=0$ siguin: **a)** perpendiculars, **b)** paral.lels.

17. Trobeu la distància del punt $P = (1, -2, -1)$ a la recta $r \equiv \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = z$.

18. Siguin $\begin{cases} r \equiv (x, y, z) = (2, -3, 0) + \lambda(0, 1, 1) \\ s \equiv (x, y, z) = (1, 0, -1) + \mu(2, -1, 1) \end{cases}$ dues rectes. Trobeu els punts d'intersecció de la recta perpendicular a r i a s amb cadascuna d'elles.

19. Trobeu el volum del tetraedre format pels plans coordenats i el pla $2x + 3y + z = 6$.

20. Trobeu la recta que passa pel punt $(5, -2, 1)$ i és perpendicular al pla $7x + 4y - 3z = 13$.

4.3 Solució als exercicis proposats

1. a) $x - 2y - 1 = 0$ b) $3x + 8y - 34 = 0$ c) $x + 2y - 10 = 0$ d) $x - 2y - 5 = 0$

2. a) $3x + y + z = 5$
b) $P_1(\frac{5}{3}, 0, 0)$, $P_2(0, 5, 0)$ i $P_3(0, 0, 5)$, interseccions amb OX, OY i OZ, respectivament.

3. a) $\dfrac{x-2}{2} = y = \dfrac{z-1}{-1}$
b) Hi ha infinites ja que només cal que es compleixi que v sigui perpendicular a (2,1,-1). Per exemple si $v(0, 1, 1)$ la recta és $\dfrac{x-2}{0} = y = z - 1$.

4. Els dos plans són secants (però no perpendiculars).

5. a) $a = 3$
b) $(-37, 12, 27)$

6. L'equació vectorial de la recta és $(x, y, z) = \left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, \frac{-5}{7}\right) + \lambda(-5, 10, -1)$

7. $(\sqrt{5} - 6)x + 2\sqrt{5}y + (2\sqrt{5} + 3)z = 3$
$(\sqrt{5} + 6)x + 2\sqrt{5}y + (2\sqrt{5} - 3)z = -3$

8. $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -7\lambda \end{cases}$

9. a) L'equació vectorial de la recta és $(x, y, z) = (-2, 0, 0) + \lambda(2, 1, 4)$.
b) 28.12°.

10. $d = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

11. Suposant que la primera de les emisores està situada a l'origen i l'altra al punt $(d, 0)$: els punts del pla en què la qualitat de recepció de les dues emissores és la mateixa és la circumferència $(x - 2d)^2 + y^2 = 2d^2$, centrada a $C = (2d, 0)$ i amb radi $r = \sqrt{2}d$.

12. c) Equació vectorial: $(x, y, z) = (-3, 2, 0) + \lambda(2, 5, 1)$.
d) Equació vectorial: $(x, y, z) = (0, -9, -2) + \lambda(1, 17, 5)$

13. a) Equació vectorial: $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-2, 1, 1) + \mu(3, -3, 1)$
Equació contínua: $4(x - 1) + 5(y - 1) + 3z = 0$.
b) Equació vectorial: $(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(1, 3, 0) + \mu(0, 2, 1)$.

14. a) La recta està continguda en el pla.
b) La recta i el pla es tallen en el punt $(\frac{4}{3}, 0, -2)$.
c) La recta i el pla són paral.leles.

15. a) Les dues rectes són paral.leles.
b) Les dues rectes es creuen.
c) Les dues rectes es tallen en el punt $(1, 1, 1)$.
d) Les dues rectes es creuen.

16. a)Sabent que $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{-5}{7}$, aleshores $a = \dfrac{-10}{7}$ i $b = \dfrac{-25}{7}$.
b)Tots els a i b que compleixen l'equació $2a + 5b - 35 = 0$.

17. El pla $\Pi \equiv 2(x - 1) + 3(y + 2) + (z + 1) = 0$ és perpendicular a r i passa per P.
$q = \Pi \cap r = \left(\dfrac{-24}{7}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{-5}{7}\right)$
$d(p, r) = d(p, q) = \dfrac{\sqrt{1365}}{7}$

18. Els punts de tall són $p = (2, -2, 1) \in r$ i $q = (3, -1, 0) \in s$.

19. El volum és 6.

20. $\dfrac{x - 5}{7} = \dfrac{y + 2}{4} = \dfrac{z - 1}{-3}$

4.4 Preguntes de test

1. Siguin les dues rectes de $\mathbb{R}^3$: r_1 que passa pel punt p_1 i té la direcció del vector $\vec{v_1}$ i r_2 que passa pel punt p_2 i té la direcció del vector $\vec{v_2}$. Si el determinant format per les coordenades dels vectors $\vec{p_1p_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ s'anul.la, aleshores podem assegurar que les dues rectes
   a) es tallen b) es creuen c) són coplanàries.

2. El sistema d'equacions $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ amb $AB' \neq BA'$, representa
   a) un punt de $\mathbb{R}^3$
   b) una recta de $\mathbb{R}^3$ o un punt de $\mathbb{R}^2$
   c) un pla de $\mathbb{R}^3$

3. Siguin
$$r \equiv (x, y, z) = p + \lambda\vec{u}$$
$$\pi \equiv (x, y, z) = q + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$
   La recta r talla el pla π si
   a) rg$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$=3
   b) rg$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$=2
   c) rg$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{pq})$=2

4. Siguin, en $\mathbb{R}^3$, els punts $p = (x_0, y_0, z_0)$ i $q = (x_1, y_1, z_1)$, i els vectors $\vec{v} = (a, b, c)$ i $\vec{u} = (A, B, C)$, que determinen la recta i el pla següents
$$r \equiv \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$\pi \equiv A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$
   r i π són paral.lels si
   a) rg$(\vec{u}, \vec{v})$=2
   b) rg$(\vec{u}, \vec{v})$=1

c) $aA + bB + cC = 0$

5. El pla $x - 2y + z = 3$ i la recta $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$
   a) són paral.lels
   b) són perpendiculars
   c) la recta està continguda en el pla
6. Una cònica és
   a) una varietat lineal
   b) una corba plana d'equació algebraica de segon grau
   c) un polinomi de segon grau
7. Per quins valors de a es tallen les rectes $x - 1 = y - 1 = -z + a$ i $x - 1 = -y + 1 = z - a$?
   a) per tot $a \in \mathbb{R}$
   b) només per $a = 0$
   c) per cap valor de $a \in \mathbb{R}$

4.5 Solució del test

1. c
2. b
3. a
4. c
5. b
6. b
7. a

Lliçó 5

Funcions elementals

Objectius

- Definició d'alguns conceptes necessaris en l'estudi d'una funció real.
- Donar les característiques principals de les anomenades funcions elementals.
- Representar gràficament les funcions que s'obtenen en fer transformacions – simetries, trasl.lacions, etc– de les funcions elementals.

Resum Teòric

Funció

Una ***funció*** real de variable real és un correspondència entre dos conjunts, U i V de nombres reals que s'escriu

$$f : U \to V$$

i que associa a cada element $x \in U$, un únic valor real $f(x) \in V$. A cada element $x \in U$ se'n diu ***variable independent*** o ***original*** i el seu corresponent a V s'escriu $f(x)$ i és la ***imatge*** de x.

Donada una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
el ***domini*** de f és el conjunt d'elements de $\mathbb{R}$ que tenen imatge,

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}.$$

El conjunt de tots els possibles valors que pot prendre f se'n diu ***imatge*** de f,

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \text{ dom } f, \text{ amb } y = f(x)\}.$$

La ***gràfica*** de la funció f està formada pels punts (x, y) del pla tals que $x \in \text{dom } f$ i $y = f(x)$,

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{ dom } f, \text{ amb } y = f(x)\}.$$

Exemple 8 *Siguin les funcions $f(x) = x + 1$ i $g(x) = x^2 - 4$, f és una funció lineal i g és una funció quadràtica, dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}$, dom $g = \mathbb{R}$ i Im $g = [-4, \infty)$.*

Les gràfiques d'aquestes funcions estan a la Fig. 5.1:

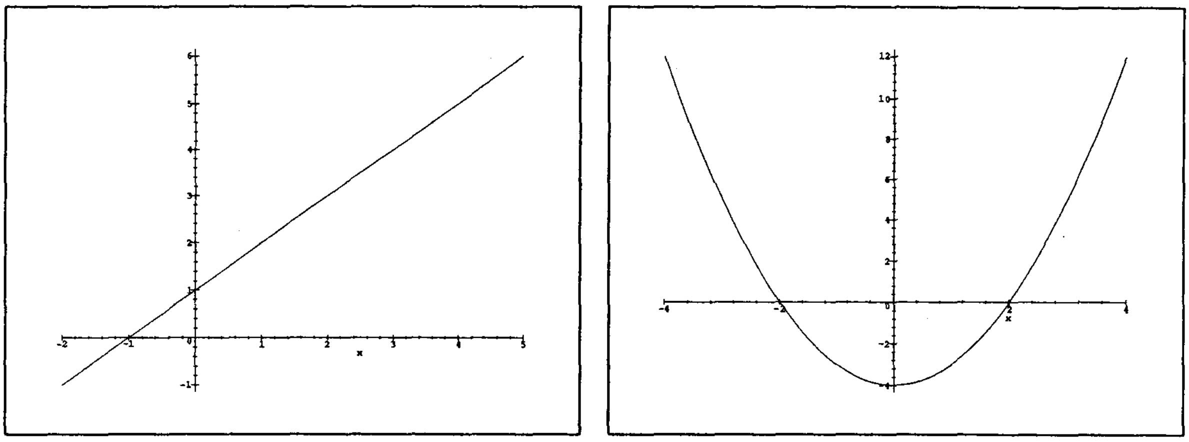


Figura 5.1: Representació gràfica de les funcions $f(x) = x + 1$ i $g(x) = x^2 - 4$

Funció Inversa

Una funció f diem que és ***injectiva*** si compleix que punts diferents tenen imatges diferents. Suposem que tenim $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ que és injectiva i a més $f(I) = J$, llavors es pot definir la ***funció inversa de*** f, que s'escriu f^{-1} i és $f^{-1} : J \rightarrow I$. La funció f^{-1}, compleix $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$. Notem que si $(x, f(x))$ és un punt de la gràfica de f, llavors $(f(x), x)$ és de la gràfica de f^{-1} i per tant les gràfiques de les funcions f i f^{-1} són simètriques respecte la recta $y = x$, la bisectriu del primer quadrant.

Funcions Monòtones

Diem que la funció $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ és ***monòtona creixent*** en l'inteval $I \subset U$, si per a cada $x_1, x_2 \in I$ amb $x_1 < x_2$ es compleix que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Anàlogament, si per a $x_1, x_2 \in I$ amb $x_1 < x_2$ es compleix que $f(x_1) \geq f(x_2)$ llavors diem que la funció f és ***monòtona decreixent*** en l'inteval $I \subset U$.

Exemple 9 *La funció lineal de l'exemple anterior és monòtona creixent en tot el domini de definició, mentre que la funció quadràtica del mateix exemple és monòtona decreixent en l'interval* $(-\infty, 0)$ *i és monòtona creixent en l'interval* $(0, +\infty)$.

Màxims i Mínims relatius

Diem que la funció $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ té un ***màxim relatiu*** en el punt $x_0 \in U$ si existeix un interval $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que per a cada $x \in I$ es compleix que $f(x) \leq f(x_0)$, si en canvi es compleix que per a qualsevol $x \in I$ és $f(x) \geq f(x_0)$, direm que la funció f té un ***mínim relatiu*** en el punt $x_0 \in U$. En general es parla d'***extrem relatiu*** quan ens referim indistintament a un màxim o un mínim relatiu.

Exemple 10 *Una funció lineal no té mai extrems relatius. Una funció quadràtica té un únic extrem relatiu.*

Límit d'una funció en un punt

Suposem que volem estudiar el comportament de la funció f quan $x \longrightarrow a$. Prenem successions $(x_n) \longrightarrow a$, i estudiem la corresponent successió $(f(x_n))$. Si per a qualsevol que sigui la sucessió $(x_n) \longrightarrow a$, es compleix que $f(x_n) \longrightarrow l$, diem que el ***límit de la funció*** f ***en el punt*** a és l i s'escriu

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

(la definició anterior és extensiva també als casos de $l = +\infty$, $l = -\infty$ i $l = \pm\infty$).

En el cas en que tinguem

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

direm que la funció f té una ***asímptota vertical*** en el punt $x = a$.

Exemple 11 $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x + 1}{3x + 1} = 1 \qquad \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2} = +\infty$

En el cas que considerem qualsevol successió $(x_n) \longrightarrow a$ amb $x_n \geq a$ i calculem el límit de la successió de les imatges i es compleix que $f(x_n) \longrightarrow l$, llavors diem que el ***límit lateral de la funció*** f quan x tendeix a a ***per la dreta*** és l, i s'escriu

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

Anàlogament es defineix el ***límit lateral de la funció*** f quan x tendeix a a ***per l'esquerra***, prenent ara successions $(x_n) \longrightarrow a$ amb $x_n \leq a$. En aquest cas s'escriu:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

Si existeix el límit de la funció f en el punt a, llavors també existeixen els límits laterals i es compleix

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = l$$

en canvi, pot ser que existeixin els límits laterals en a, però que la funció no tingui límit en aquest punt, com a l'exemple següent.

Exemple 12 *Sigui la funció* $f(x) = \begin{cases} x-1 & si \;\; x<0 \\ x+1 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$
Veiem que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x-1 = -1$ *i per l'altre costat* $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x+1 = 1$. *Com que els límits laterals en* $x=0$ *no coincideixen, la funció* $f(x)$ *no té límit en* $x=0$.

Podem trobar altres tipus de funcions en les quals no existeix el límit en un punt.

Exemple 13 *Tal i com es pot veure a la Fig. 5.2, el* $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *no existeix, ja que* $\sin\frac{1}{x}$ *va oscil.lant entre* -1 *i* 1. *En canvi el* $\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$, *ja que és el límit del producte d'una funció acotada per una altra que tendeix a 0.*

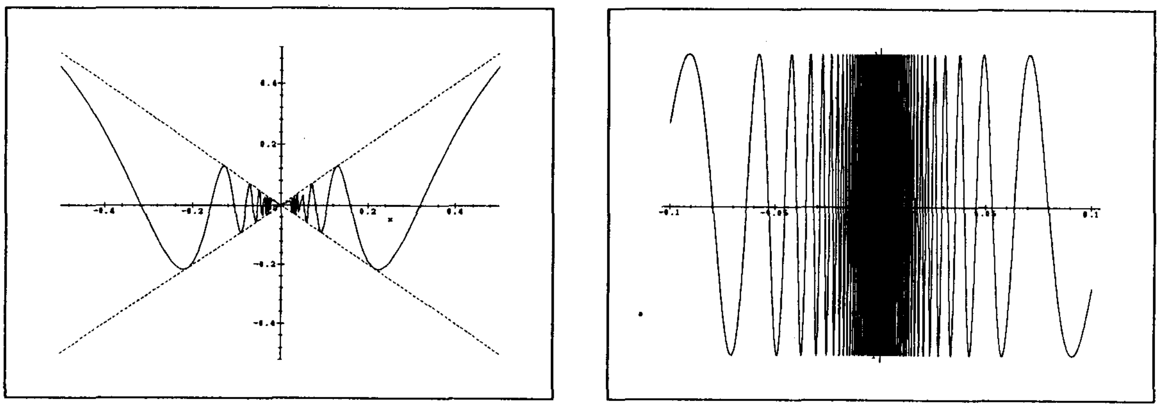


Figura 5.2: Existència i no existència de límit en $x=0$

Infinitèsims

Direm que la funció f té un ***infinitèsim*** per $x\to x_0$ ($x_0\in\mathbb{R}$) si es verifica

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Exemple 14 *Per $x \to 0$ són infinitèsims les funcions*

$$\sin x, \quad \tan x, \quad 2^x - 1, \quad 1 - \cos x$$

Infinitèsims equivalents

Dos ***infinitèsims***, f i g, per $x \to x_0$, es diu que són ***equivalents*** si es verifica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

L'equivalència dels infinitèsims s'expressa mitjançant el símbol $\sim$, o sigui

$$f \sim g \text{ per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Exemple 15 *Com que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

aleshores resulta que

$$\sin x \sim x \quad per \quad x \to 0$$

tal i com es pot observar a la fig 5.3 on la funció $g(x) = x$ està representada en línia discontínua

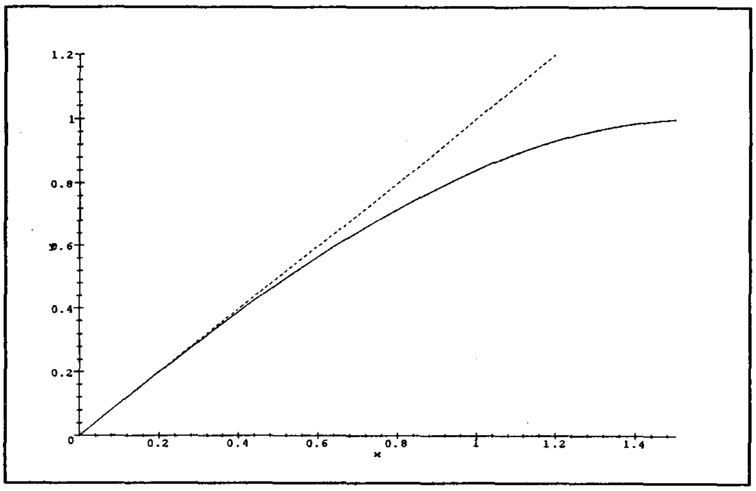


Figura 5.3: Les funcions $g(x) = x$ i $f(x) = \sin x$

Com a conseqüència de l'equivalència del $\sin x$ *s'obtenen també les equivalències*

$$\tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad \textit{per} \quad x \longrightarrow 0$$

També per $x \longrightarrow 0$ *tenim les equivalències*

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x$$

Continuïtat d'una funció en un punt

Diem que la ***funció*** $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ és ***contínua*** en el punt $x_0 \in U$ si i només si es compleix:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5.1}$$

Exemple 16 *La funció* $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{3x+1}$ *és contínua en el punt* $x = 2$ *perquè* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x+1}{3x+1} = 1 = f(2)$, *en canvi la funció* $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, *no és contínua en* $x = 1$ *perquè* $f(1)$ *no està definit (el denominador s'anul.la) i, a més* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Classificació de les discontinuïtats

Si una funció f és ***discontínua*** en un punt x_0, és que no es compleix la igualtat 5.1.

- ***discontinuïtat evitable***: existeix $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i és un número real, però no coincideix amb $f(x_0)$, que pot ser que no estigui definit.
- ***discontinuïtat de salt***: existeixen els límits laterals de f en el punt x_0, però no coincideixen. Per tant, no existeix $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- ***discontinuïtat asimptòtica***: Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. En aquest cas diem que la funció té una ***asímptota vertical*** que és la recta $x = x_0$. Parlem de ***semi–asímptota vertical*** per la dreta (o per l'esquerra) si és el límit lateral per la dreta (o l'esquerra) el que val $\pm\infty$.
- En els altres casos, diem que la funció té una ***discontinuïtat essencial***.

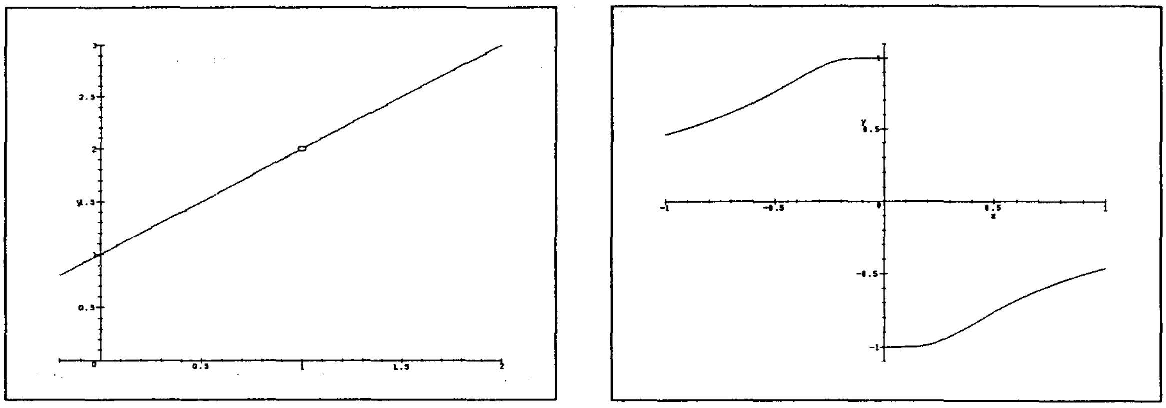


Figura 5.4: Discontinuïtat evitable en $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$ i de salt en $f(x) = \dfrac{1 - e^{(1/x)}}{1 + e^{(1/x)}}$ en $x = 0$

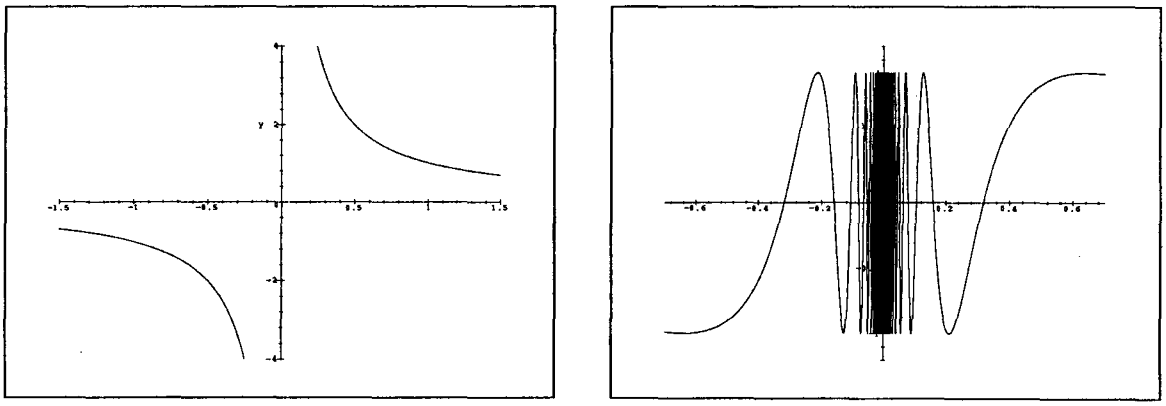


Figura 5.5: Discontinuïtat asimptòtica en $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$ i essencial en $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$

Límit d'una funció en l'infinit

Prenem successions $(x_n) \to \infty$, i estudiem la corresponent successió $(f(x_n))$. Si per a qualsevol que sigui la sucessió $(x_n) \to \infty$, es compleix que $f(x_n) \to l$, diem que ***el límit de la funció f en l'infinit*** és l i s'escriu

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

(com en el cas del límit d'una funció en un punt, la definició anterior és extensiva també als casos de $l = +\infty$, $l = -\infty$ i $l = \pm\infty$).

En el cas en que tinguem

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

amb l un número real, direm que la funció f té una ***asímptota horitzontal*** per $x \to +\infty$, en la recta $y = l$. Anàlogament es defineix asímptota horitzontal per $x \to -\infty$.

Exemple 17 $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3}$

Exemple 18 *Tal i com es pot comprovar a la fig 5.6*

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

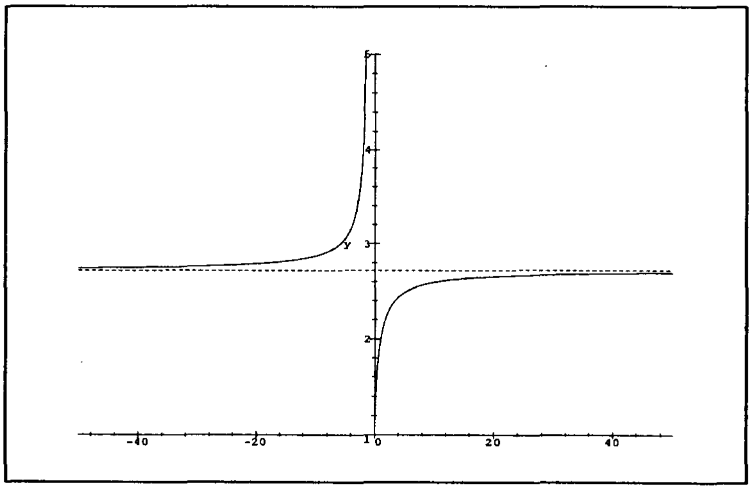


Figura 5.6: La funció $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ *tendeix al nombre e quan x tendeix a* ∞

Per tant, i en general, tenim

$$\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e \text{ si } \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Mitjançant aquesta definició podrem resoldre els límits de la forma

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{H(x)} \quad \text{on } \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 1 \text{ i } \lim_{x \to x_0} H(x) = \pm\infty$$

Exemple 19 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{1}{3x}2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{3x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x}} = e^{\frac{2}{3}}$

En canvi, si tenim

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

aleshores, si

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$$

amb m i n nombres reals, direm que la funció f té una ***asímptota obliqua*** per $x \to +\infty$ amb equació

$$y = mx + n$$

Anàlogament es defineix asímptota obliqua per $x \to -\infty$.

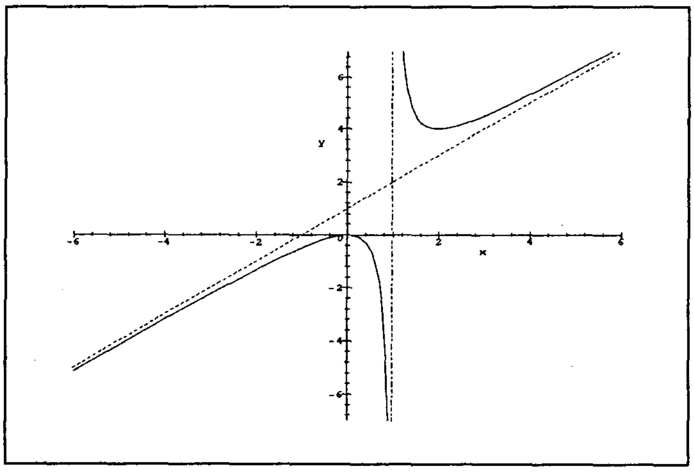


Figura 5.7: La funció $\dfrac{x^2}{x-1}$ té dues asímptotes: $y = x + 1$ i $x = 1$

Les funcions trigonomètriques

En un sistema de coordenades, considerem una circumferència de radi 1 com a la Figura 5.8.

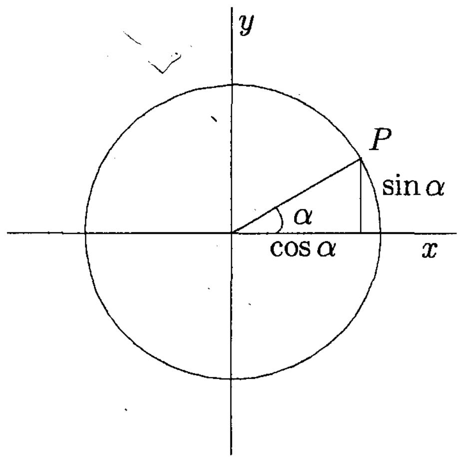


Figura 5.8: Representació de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ en el cercle de radi 1

Es defineixen el $\cos\alpha$ i el $\sin\alpha$ com les projeccions sobre l'eix OX i OY respectivament del punt P. Per a obtenir el punt P, es representa l'angle de α radiants[1] de forma que un dels costats de l'angle coincideixi amb el semieix positiu de les abscisses i l'altre costat el que s'obtingui en girar α radiants en el sentit contrari a les agulles del rellotge. Aquest segon costat és el que talla la circumferència unitat en el punt P.

De la definició es dedueix:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Estudiem ara les propietats d'aquestes dues funcions

La funció sinus $f(x) = \sin x$, (Fig. 5.9), té les següents propietats:

- dom f$=\mathbb{R}$, Im f$=[-1, 1]$
- És periòdica de període 2π.
- És creixent a l'interval $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ i bijectiva de $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ en $]-1, 1[$, per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És decreixent a l'interval $\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$ i bijectiva de $\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$ en $]-1, 1[$, per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És contínua en el seu domini de definició.

[1] un radiant és un angle que comprèn un arc de longitud igual al radi, i per tant 2π rad.$\equiv 360°$

Es defineix la funció inversa del sinus $f(x) = \arcsin x$ de $[-1, 1]$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (Fig. 5.10).

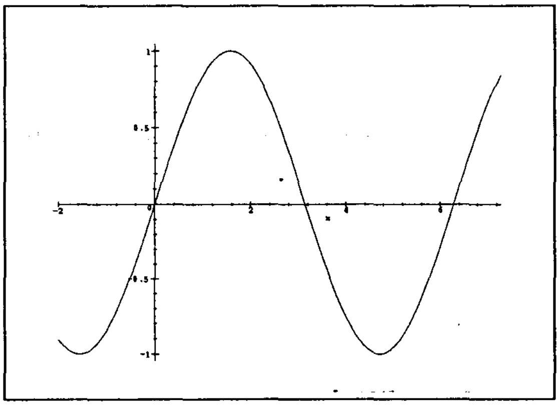


Figura 5.9: La funció $f(x) = \sin x$

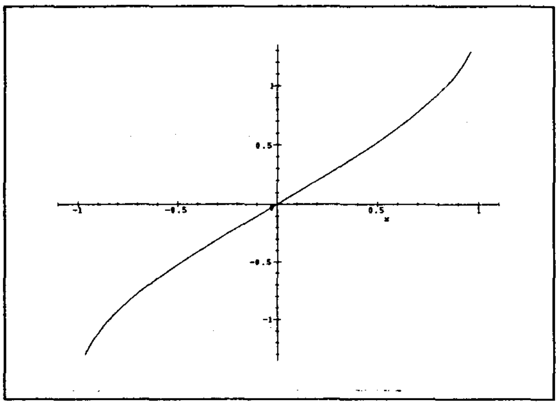


Figura 5.10: La funció $f(x) = \arcsin x$

La funció cosinus $f(x) = \cos x$, (Fig. 5.11), té les següents propietats:

- dom f= $\mathbb{R}$, $Imf = [-1, 1]$

- És periòdica de període 2π.

- És decreixent als intervals $]2k\pi, (2k+1)\pi[$ i és creixent als intervals $](2k-1)\pi, 2k\pi[$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.

- És contínua en el seu domini de definició.

La funció arccosinus és la inversa del cosinus $f(x) = \arccos x$ de $[-1, 1]$ en $[0, \pi]$ (Fig. 5.12).

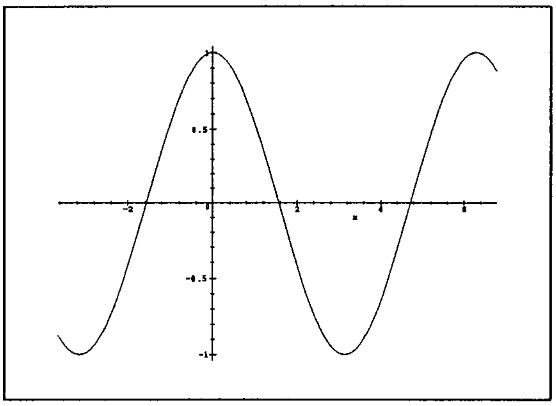


Figura 5.11: La funció $f(x) = \cos x$

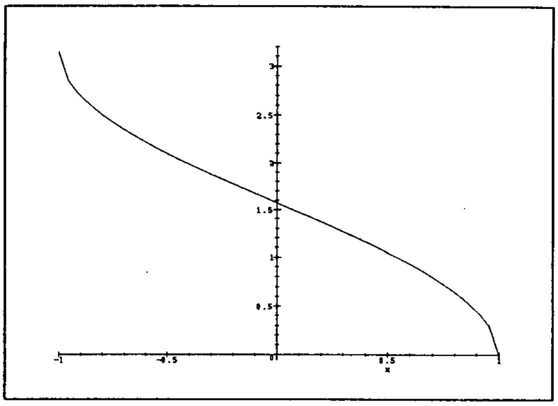


Figura 5.12: La funció $f(x) = \arccos x$

La funció tangent es defineix a partir de les dues funcions anteriors com

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La **funció tangent**, $f(x) = \tan x$, (Fig. 5.13), té les següents propietats:

- El domini consta de tots el nombres reals que no siguin múltiples de $\frac{\pi}{2}$ i pren valors tots els nombres reals, Im f=$\mathbb{R}$
- És periòdica de període π.
- És creixent a cada interval $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.

Es defineix també la funció arctangent com la inversa de la tangent, $f(x) = \arctan x$ (Fig. 5.14).

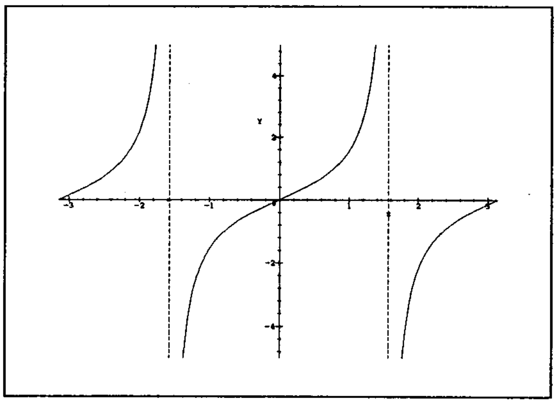


Figura 5.13: La funció $f(x) = \tan x$

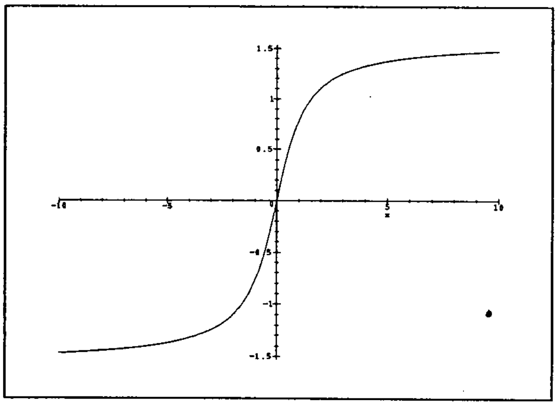


Figura 5.14: La funció $f(x) = \arctan x$

Anàlogament es defineix la funció cotangent

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

La funció cotangent, $f(x) = \text{cotan}x$, (Fig. 5.15), té les següents propietats:

- El domini consta de tots el nombres reals que no siguin múltiples de π i pren valors tots els nombres reals, Im f=$\mathbb{R}$
- És periòdica de període π.
- És decreixent a cada interval $(k\pi, (k+1)\pi)$, per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.

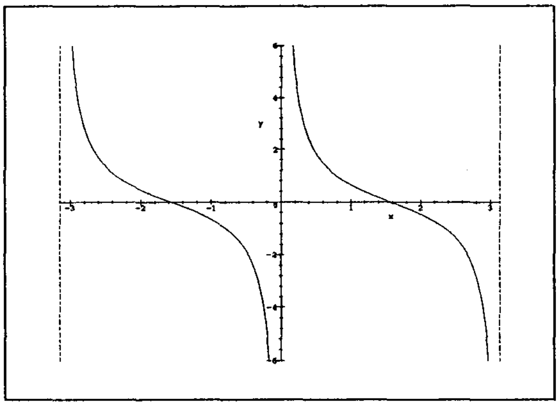


Figura 5.15: La funció $f(x) = \text{cotan}x$

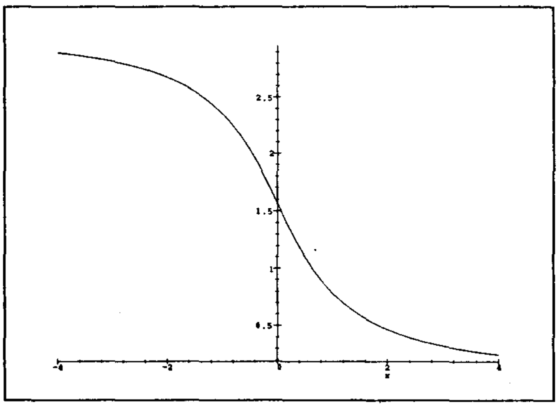


Figura 5.16: La funció $f(x) = \text{arcotan}x$

Les funcions exponencial i logaritme

La funció exponencial és de la forma $f(x) = a^x$, on a, que se'n diu la base, és un número real positiu i diferent de 1. Compleix que per a qualsevol $a \neq 1$,

$$f(0) = a^0 = 1$$

i que

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y)$$

La funció exponencial té les següents propietats:

- El domini de definició és el conjunt de tots els nombres reals. La funció exponencial de base a, pren valors sempre positius, és a dir Im f=$\mathbb{R}^+$.

- Si la base és $a > 1$, la funció exponencial és creixent, mentre que si $a < 1$, és decreixent.

- És contínua en el seu domini.

- El comportament de la funció exponencial és diferent per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$. Si $a > 1$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Si $a < 1$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ i $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$. Vegeu la Fig 5.17

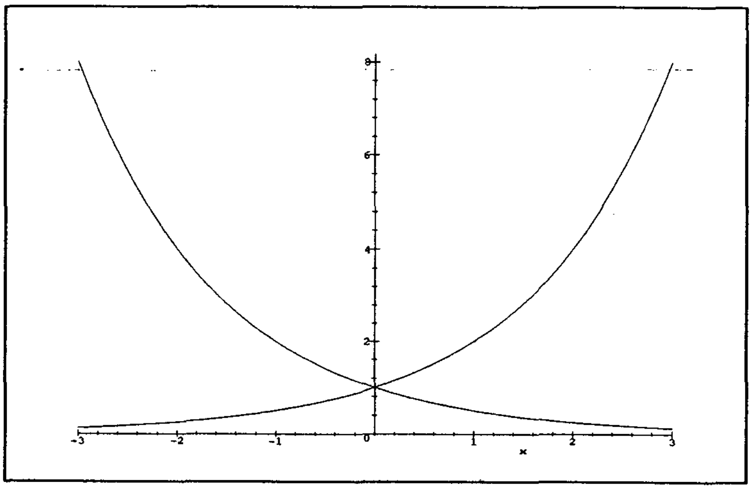


Figura 5.17: Les funcions $f(x) = 2^x$ i $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Com que la funció exponencial de base a, $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és injectiva, es pot definir la funció inversa que se'n diu la ***funció logaritme*** en base a i s'escriu $f(x) = \log_a x$. És a dir, es compleix:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Com a conseqüència de la definició, les seves propietats són:

- El seu domini és: dom $f = \mathbb{R}^+$.

- $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- Per a qualsevol $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ i $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \\ \log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \\ \log_a x^n = n \log_a x. \end{cases}$$

- La relació entre logaritmes de bases diferents és $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

- La funció $f(x) = \log_a x$ és creixent en tot el seu domini si $a > 1$ i és decreixent si $a < 1$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, si $a > 1$ i $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$, si $a < 1$. Vegeu la Fig 5.18

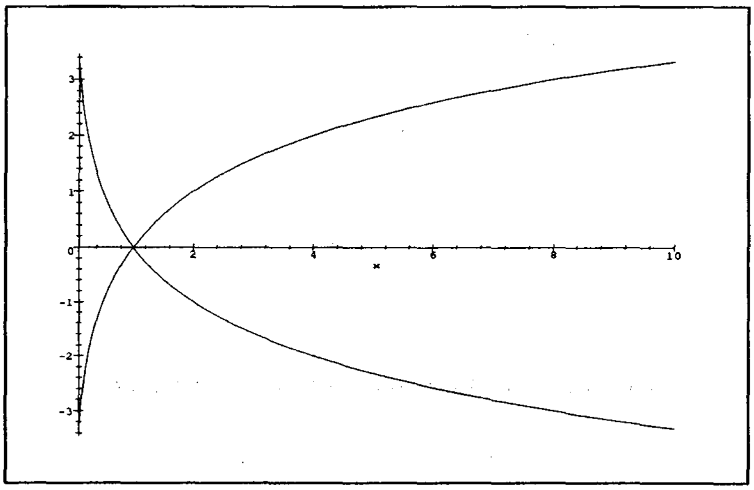


Figura 5.18: La funció $f(x) = \log_2 x$ i $f(x) = \log_{(\frac{1}{2})} x$

El logaritme més utilitzat és el logaritme en base ***e*** (e=2.718281...), que s'anomena ***logaritme neperià o natural*** i s'escriu ***ln x*** en lloc de $\log_e x$

5.1 Exercicis resolts

1. Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-2x^2+3}{x^3+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^3-x}{x^6+x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^4-3x^2+1}{6x^3+x^3-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-2x+7}{2x^3-2}$

f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

g) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2-x+1}\right)^{3x}$

---

a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-5x+6} \Rightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x-2)} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x-2} = 27$$

b) $$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-2x^2+3}{x^3+1} \Rightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = 2$$

c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^3-x}{x^6+x^2} \Rightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x(3x^2-1)}{x^2(1+x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2-1}{x(1+x^4)} = -\infty$$

d) $$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^4-3x^2+1}{6x^3+x^2-3x} \Rightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^4}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{6+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \infty$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+7}{2x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{2}{x^3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{0-0+0}{2-0}=0$$

f) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\Rightarrow\left(\frac{0}{0}\right)\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$$

g) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-x+1}\right)^{3x}\Rightarrow(1^\infty)\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^2-x+1}-1\right)^{3x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x^2-x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+1}{x-1}}\right)^{3x\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x^2-x+1}\right)}=$$
$$=e^{\lim_{x\to\infty}3x\cdot\frac{x-1}{x^2-x+1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x}{x^2-x+1}}=e^3$$

---

2. Trobeu el domini i les interseccions amb els eixos de les funcions

a) $f(x)=\dfrac{9x^2-5x+1}{x^2-2}$

b) $f(x)=\dfrac{\log_3(x-2)}{x^2-16}$

---

a) $f(x)=\dfrac{9x^2-5x+1}{x^2-2}$

El domini de la funció són tots els reals menys els que fan zero el denominador, és a dir

$$\text{dom } f=\{x\in\mathbb{R}|x^2-2\neq 0\}$$

Els zeros del denominador són

$$x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=2 \text{ és a dir, } x=\pm\sqrt{2}.$$

D'aquesta manera obtenim que dom $f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

Busquem ara les interseccions amb els eixos,

Per trobar les interseccions amb OX hem de resoldre $f(x)=0$, és a dir,

$\dfrac{9x^2-5x+1}{x^2-2}=0\Rightarrow 9x^2-5x+1=0$, que no té arrels reals.

Per trobar les interseccions amb OY hem de calcular $f(0)$

$$f(0)=\frac{9\cdot 0^2-5\cdot 0+1}{0^2-2}=-\frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+7}{2x^3-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{2}{x^3}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{0-0+0}{2-0} = 0$$

f) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \Rightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}$$

g) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-x+1}\right)^{3x} \Rightarrow (1^\infty) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{x^2}{x^2-x+1}-1\right)^{3x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{x-1}{x^2-x+1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+1}{x-1}}\right)^{3x\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x^2-x+1}\right)} =$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty} 3x\cdot\frac{x-1}{x^2-x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3x}{x^2-x+1}} = e^3$$

---

2. Trobeu el domini i les interseccions amb els eixos de les funcions

a) $f(x) = \dfrac{9x^2-5x+1}{x^2-2}$

b) $f(x) = \dfrac{\log_3(x-2)}{x^2-16}$

---

a) $f(x) = \dfrac{9x^2-5x+1}{x^2-2}$

El domini de la funció són tots els reals menys els que fan zero el denominador, és a dir

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} | x^2-2 \neq 0\}$$

Els zeros del denominador són

$$x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \text{ és a dir, } x=\pm\sqrt{2}.$$

D'aquesta manera obtenim que dom $f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Busquem ara les interseccions amb els eixos,

Per trobar les interseccions amb OX hem de resoldre $f(x)=0$, és a dir,

$\dfrac{9x^2-5x+1}{x^2-2} = 0 \Rightarrow 9x^2-5x+1=0$, que no té arrels reals.

Per trobar les interseccions amb OY hem de calcular $f(0)$

$$f(0) = \frac{9\cdot 0^2-5\cdot 0+1}{0^2-2} = -\frac{1}{2}$$

b) $f(x) = \dfrac{\log_3(x-2)}{x^2-16}$

Per calcular el domini de $f(x)$ calculem primer el domini de cadascun dels termes.
$g(x) = x^2 - 16 \Rightarrow \ \text{dom}\ \ g(x) = \mathbb{R}$,
$h(x) = \log_3(x-2) \Rightarrow \ \text{dom}\ \ h(x) = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$
El domini del quocient estarà format pels nombres reals que siguin del domini de g i de h (simultàniament) i que no anul.lin el denominador. El denominador s'anul.la per $x = \pm 4$, per tant el $\ \text{dom}\ \ f(x) = (2, +\infty) - \{4\}$.
Les interseccions amb els eixos les calculem de la mateixa manera que ho hem fet a l'apartat anterior.
La interseccions amb l'eix OX la trobem resolent
$f(x) = \dfrac{\log_3(x-2)}{x^2-16} = 0 \Rightarrow \log_3(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3.$
$f(0)$ no es pot calcular perquè el zero no pertany al domini. Per tant no hi ha interseccions amb l'eix de les Y

---

3. Estudieu la continuïtat de

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \cos x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2\pi \\ \tan x & \text{si} \quad 2\pi < x \le 3\pi \end{cases}$$

Aquesta funció està definida en els intervals $(-\infty, 0) \cup [0, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi] - \{\frac{5\pi}{2}\}$, respectivament. En els intervals $(-\infty, 0)$ i $[0, 2\pi]$ la funció és contínua, però a $[2\pi, 3\pi]$ la funció $\tan x$ presenta una discontinuïtat en $x = \frac{5\pi}{2}$. Cal estudiar què passa en $x = 0, x = 2\pi$ i $x = \frac{5\pi}{2}$. En el cas $x = 0$, cal tenir en compte que l'expressió de la funció a l'esquerra de $x = 0$ és diferent de la funció a la dreta de $x = 0$ i per tant cal calcular els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Anàlogament per $x = 2\pi$

$$\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} \cos x = 1$$
$$\lim_{x \to 2\pi^+} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^+} \tan x = 0$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $x = 0$ però no ho és a $x = 2\pi$. En aquest punt

$f(x)$ té una discontinuïtat de salt.

Ara ens queda estudiar què passa per $x = \frac{5\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{5\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{5\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$$

En aquest punt tindrem una asímptota vertical, ja que la funció per l'esquerra tendeix a $+\infty$ i per la dreta a $-\infty$.

---

4. Estudieu la continuïtat de
$$f(x) = \frac{\ln|x+1|}{\ln(x-1)}$$

En el numerador, la funció és contínua per a qualsevol $x \neq -1$ ja que en aquest cas $|x+1| > 0$.
La funció del denominador, està definida per $x > 1$ i s'anul.la per $x = 2$. Per tant, el domini és $(1,2) \cup (2,+\infty)$.
Per $x = 1$, com la funció està definida per la dreta, calcularem només el seu límit lateral per $x \to 1^+$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0^-$

Per $x = 2$, els límits laterals seran

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

per tant, en $x = 2$ la funció té una asímptota vertical.

---

5. Estudieu i dibuixeu la gràfica de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

El domini de la funció és $\mathbb{R} - \{0\}$ i la funció és contínua en tot el domini. Estudiem el punt $x = 0$: $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ i $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, perquè $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ i $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
Hi ha una asímptota vertical $x = 0$ (per la dreta).
Ara estudiem la funció en l'infinit: $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ i $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. Tenim una asímptota hortitzontal $y = 1$. La gràfica de la funció és la següent:

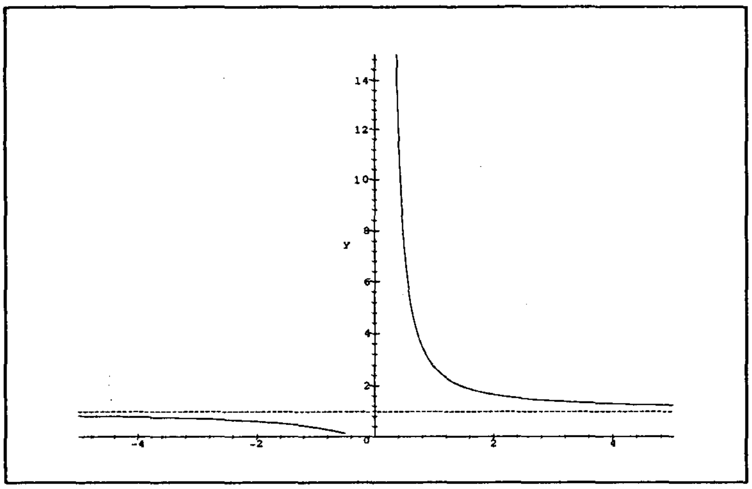


Figura 5.19: La funció $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ i la seva asímptota horitzontal $y = 1$

---

6. Comproveu que la funció $f(x) = \dfrac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}}$ té una discontinuïtat de salt en $x = 0$.

Calculem els límits laterals en $x = 0$ i veiem que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}} = -1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}} = 1$$

Si $x \longrightarrow 0^+$, tenim que $\lim\limits_{x \to 0+} 2^{1/x} = +\infty$, per tant els termes més significatius de la funció són els $2^{1/x}$, i tenim un cas de $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ d'infinits del mateix grau.
Si $x \longrightarrow 0^-$, tenim que $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 0$, per tant els termes més significatius seran els 1 del numerador i el denominador.

---

7. Donada la funció $f(x) = x^2 + 2x$ trobeu $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 + 2(x+h)) - (x^2 + 2x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h + 2xh}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 2 + 2x) = 2x + 2$$

8. Quina relació hi ha entre les gràfiques de les següents funcions

a) 2^x i 2^{-x}

b) $\log_3 x$, $\log_3 2x$ i $2\log_3 x$

c) $\log_2 x$, $\log_2 x - 1$ i $2\log_2 x + 1$

- a) Tal i com es pot veure a la Fig 5.17 les funcions 2^x i 2^{-x} són simètriques respecte l'eix y.

- b) Observem la relació en la figura següent

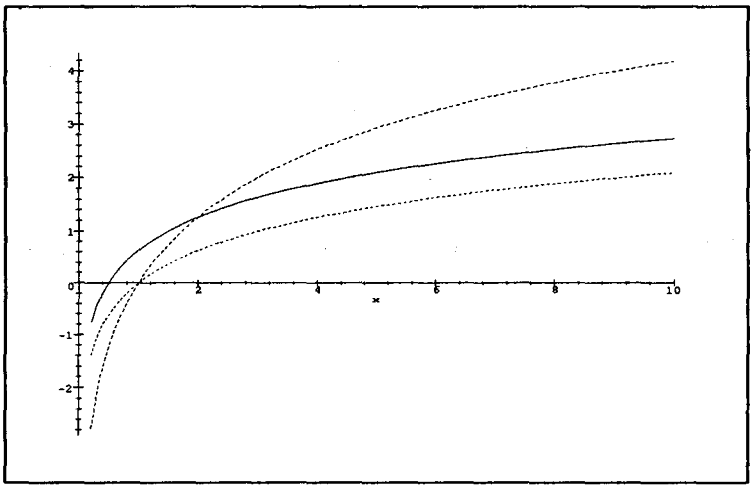


Figura 5.20: Gràfica de $\log_3 x$, $\log_3 2x$ i $2\log_3 x$.

- c) Observem la relació en la figura següent

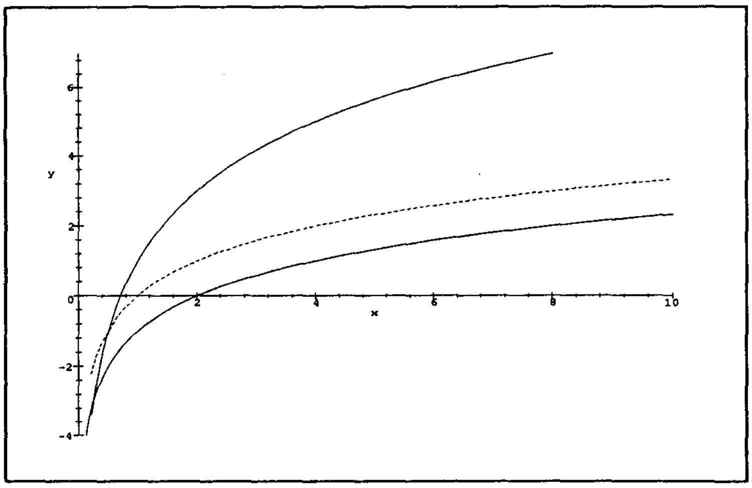


Figura 5.21: Gràfica de $\log_2 x$, $\log_2 x - 1$ i $2\log_2 x + 1$.

---

9. Estudieu la gràfica de $f(x) = 3 + 5\cos(x - \pi)$ a partir de la funció $g(x) = \cos x$

La funció $g(x) = \cos x$ és una funció trigonomètrica, amb un període de 2π i una amplitud igual a 1 (que oscil.la entre 1 i -1). Si li restem a la x π radians, l'únic que fem és retrassar la funció π radians, però no canviarem ni el seu període ni la seva amplitud. Si multipliquem per 5 el $\cos(x - \pi)$, variarem la seva amplitud 5 cops, i si li sumem 3 unitats a tota la funció cosinus la deplaçarem 3 unitats cap amunt, i la seva amplitud final oscil.larà entre -2 i 8.

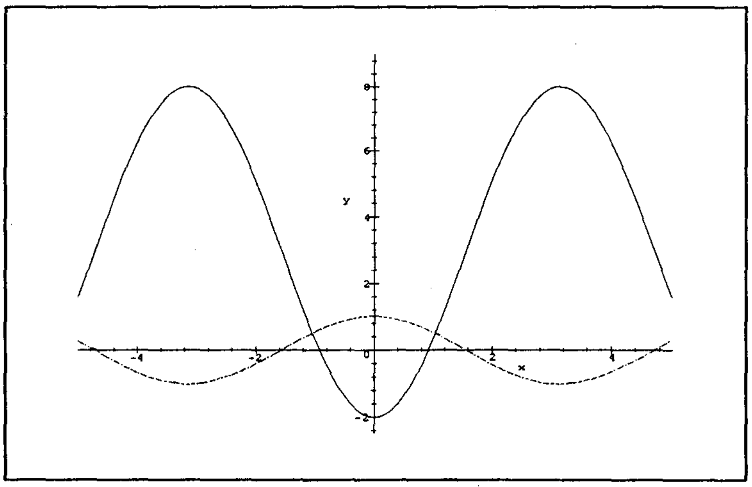


Figura 5.22: Gràfica de $f(x) = 3 + 5\cos(x - \pi)$ i $g(x) = \cos x$.

10. Trobeu una funció que permeti trobar l'àrea de qualsevol triangle isósceles de perímetre 16m en funció de la base: $2x$. Trobeu quins són els possibles valors de la base.

Pel triangle isósceles que té base $2x$ i costat y, es pot calcular l'altura fent servir el teorema de Pitàgoras: $h = +\sqrt{y^2 - x^2}$. Com que tenim el valor del perímetre, podem obtenir una altra equació, $16 = 2x + 2y$, que condicionarà la primera.
S'obté $h = +\sqrt{(8-x)^2 - x^2}$; $h = +\sqrt{64 - 16x}$; $h = +4\sqrt{4-x}$.
La base pot tenir qualsevol valor menor o igual que 8.
Així doncs, la funció superfície serà

$$S(x) = 4x\sqrt{4-x}$$

11. A partir de les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ i de $g(x) = \tan x$, calculeu el domini de $f(x) \cdot g(x)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$.

En cada cas es tracta de calcular els valors que permeten calcular la funció. La funció $f(x)$ només té un punt que no és del domini, $x = 2$. La funció $g(x)$ té com a punts que no són del domini el conjunt $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$(f \cdot g)(x) = \frac{\tan x}{x-2}$$
$$\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R} - \left\{2, \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

$$(f/g)(x) = \frac{1}{(x-2)\tan x}$$
$$\mathrm{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \left\{2, 0 + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tan x) = \frac{1}{-2 + \tan x}$$
$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{\tan x = 2, \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x-2}) = \tan(\frac{1}{x-2})$$
$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{2, \frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

12. Trobar els valors a i b per tal que sigui contínua en els punts $x = 0$ i $x = 1$ la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} (4ax+1)^{1/x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{x^3+x-2}{x^2-1} & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ bx^2+x+1 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

Començarem estudiant la funció al voltant de $x = 0$. Aleshores tenim

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = 2 = \lim_{x\to 0^-} (4ax+1)^{1/x}$$

que podem transformar en

$$\lim_{x\to 0^-} \left[\left(1 + \frac{1}{\dfrac{1}{4ax}} \right)^{\dfrac{1}{4ax}} \right]^{4a} = e^{4a}$$

Per tant

$$e^{4a} = 2 \ \text{ d'on obtenim } \ a = \frac{\ln 2}{4}$$

Una vegada trobat el valor de a anem a trobar el valor de b estudiant la funció al voltant de $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

Per tant,

$$\lim_{x\to 1+} bx^2+x+1 = b+2 \quad \text{i per tant } b+2 = 2 \quad \text{d'on} \quad b = 0$$

5.2 Exercicis Proposats

1. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x}{4x^2-3x-1}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-5x-2(2x+1)^2}{3x^2+1}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{5x}\right)^{x+1}$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$ (utilitzeu el canvi $x^3 = 8+h$)

e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)$

2. Utilitzant les propietats dels infinitèsims equivalents calculeu:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

3. Trobeu la relació entre a i b per tal que $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{4+xb}$

4. Trobeu els punts de discontinuïtat de

$$f(x) = \frac{1}{1+2\sin x}$$

5. Dibuixeu la gràfica de les següents funcions polinòmiques:

a) $y = 3x^2$, $y = 9x - x^2$, $y = x^2 - 3x + 2$,

b) $y = x^3$, $y = x - x^3$.

6. Qüestions sobre funcions racionals:

a) Quins són els zeros de $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{x^3+5}$.

b) Trobeu i classifiqueu les discontinuïtats de $f(x) = \dfrac{-4x^3+3x+1}{x^4-10x^2+9}$.

c) Trobeu les interseccions amb els eixos de $f(x) = \dfrac{4x^3-16x^2-x+4}{1-x^3}$.

7. Estudieu la continuïtat de les funcions següents en el punt que s'indica:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

en $x=0$ i $x=1$

b)

$$f(x) = \begin{cases} |1+x| & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en $x=2$

c) Definiu $f(4)$ perquè la següent funció sigui contínua en $x=4$

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16} \quad \text{si} \quad x \neq 4.$$

8. Dibuixeu dues funcions diferents que compleixin simultàniament les condicions següents:

1. decreixent a $(-\infty, -3)$,
2. asímptota vertical a $x=-3$ i a $x=2$,
3. s'anul.la a $x=0$,
4. asímptota horitzontal per $x \to \infty$.

9. Qüestions sobre funcions trigonomètriques

a) Per a quins valors de la variable x és $\sin x > 0$.

b) Quins són els intervals de creixement de la funció $y = \cos x$.

c) Trobeu les discontinuïtats de $f(x) = \tan x$.

10. Qüestions sobre funcions ciclomètriques

a) Quin és el domini de $y = \arcsin x$.

b) Quin és el recorregut o el conjunt de possibles valors de $y = \arctan x$

c) Respecte quina recta són simètriques la gràfica d'una funció i la de la seva inversa?

11. Qüestions sobre la funció exponencial

a) Quin és el domini i el recorregut de $y = a^x$, $a > 0$?

b) Per a quins valors de a la funció és creixent? I decreixent?

c) Per quin punt passa qualsevol funció exponencial?

12. Qüestions sobre la funció exponencial

a) Quina relació hi ha entre les gràfiques de $y = 2^x$ i $y = 2^{-x}$

b) Quin signe té x, si $0.3^x = 7$?

c) Si $a^{-2.3} = 6$, la base a és més gran o més petita que 1?

13. Resoleu les següents equacions

a) $\log_x 8 = -3$

b) $\log_3 x = 4$

c) $\log_1 62 = x$

14. Qüestions sobre la funció logaritme

a) Quin és el domini de $y = \log_a x,\ \ a > 0$?

b) Per quin punt passa sempre la funció logaritme?

c) Quina relació hi ha entre les gràfiques de les funcions $y = \log_a x$ i $y = \log_{\frac{1}{a}} x$?

15. Comproveu que $f(x) = \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ té una discontinuïtat evitable a $x = 0$.

16. A partir de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ deduïu l'expressió de la funció suma $f + g$.

a) $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 2^{-x}$

b) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin(-x)$

c) $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \log_2(x - 3)$

17. Donades les funcions $f(x)$ i $g(x)$ de l'exercici anterior, deduïu l'expressió de $f(x) \cdot g(x)$

18. Si la funció $y = f(x)$ és creixent a l'interval $[a, b]$, estudieu si les funcions $g(x) = x \cdot f(x)$ i $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ també ho són (distingiu segons x i $f(x)$ siguin positius o negatius).

19. Si la funció $y = f(x)$ té un extrem relatiu en el punt x_0, estudieu si les següents funcions també en tenen

a) $y = f(x - 2)$

b) $y = 2 + f(x)$

c) $y = f(2x)$

d) $y = x \cdot f(x)$

20. Per a quins valors de x és

a) $\log_a x < 0$

b) $\sin 2x > 0$

c) $\log_2(3x - 4) = 2$

21. Quins valors pot prendre a per tal que

a) $\log_a 5 < 0$

b) $0 < \sin 3a < \dfrac{1}{2}$

c) $0 < a^3 < 1$

22. Preneu f una funció elemental i dibuixeu en un mateix gràfic

a) $f(x - 1)$

b) $f(x + 1)$

c) $f(x) + 1$

23. Donada la funció $f(x) = \log_2 x$, dibuixeu

a) $f(2x)$

b) $2f(x)$

c) $\dfrac{f(x)}{3}$

24. Refeu l'exercici anterior per $f(x) = 2^x$

5.3 Solució als exercicis proposats

1. a) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-3x}{4x^2-3x-1} = -\infty$ i $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^3-3x}{4x^2-3x-1} = +\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{8x^2-5x-2(2x+1)^2}{3x^2+1} = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^{x+1} = e^{\frac{2}{5}}$

d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h} = \dfrac{1}{12}$

e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{3x+5}\right) = \dfrac{1}{32}$

2. a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

3. La relació serà: $b = 2a-2$

4. $x = \dfrac{7\pi}{6} \pm 2n\pi,\ x = \dfrac{11\pi}{6} \pm 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

5. a) $y = 3x^2$ és una paràbola, talla els eixos només en $(0,0)$.
$y = 9x - x^2$ és una paràbola que talla l'eix x en $(0,0)$ i $(0,9)$ i té el coeficient de grau màxim negatiu.
$y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ talla l'eix x en $(0,1)$ i $(0,2)$.

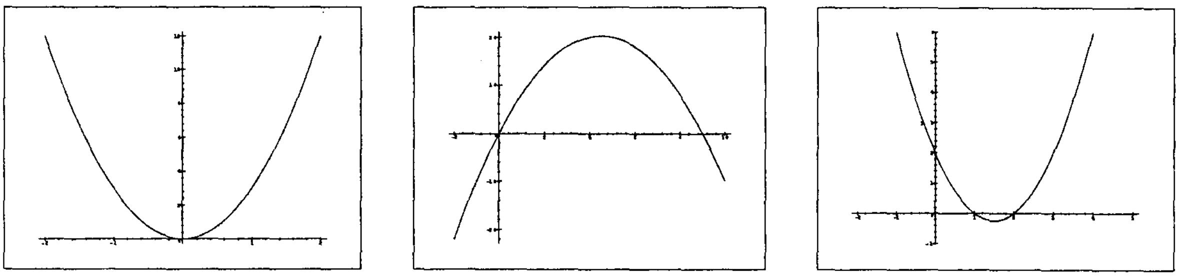


Figura 5.23: Gràfiques de l'exercici 5.a

b) $y = x^3$ és una cúbica que talla els eixos en $(0,0)$ en un punt triple.
$y = x - x^3 = x(x-1)(x+1)$, és una cúbica que talla els eixos en $(-1,0)$,$(0,0)$ i $(1,0)$ i té $\lim_{x \to +\infty} x - x^3 = -\infty$.

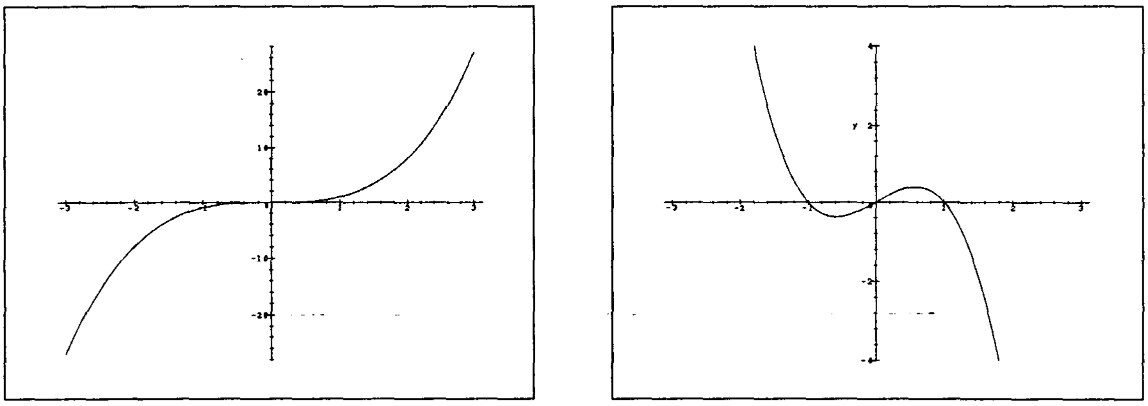


Figura 5.24: Gràfiques de l'exercici 5.b

6. a) $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Per $x = 3, x = -3$ i $x = -1$ trobem asímptotes verticals.
Per $x = 1$ trobem una discontinuïtat evitable.

c) $\left(\pm\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $(4,0)$ i $(0,4)$.

7. a) És contínua a $x = 0$ i té una discontinuïtat de salt a $x = 1$.

b) Té una discontinuïtat asimptòtica per la dreta a $x = 2$.

c) $f(4) = \dfrac{1}{8}$.

8.

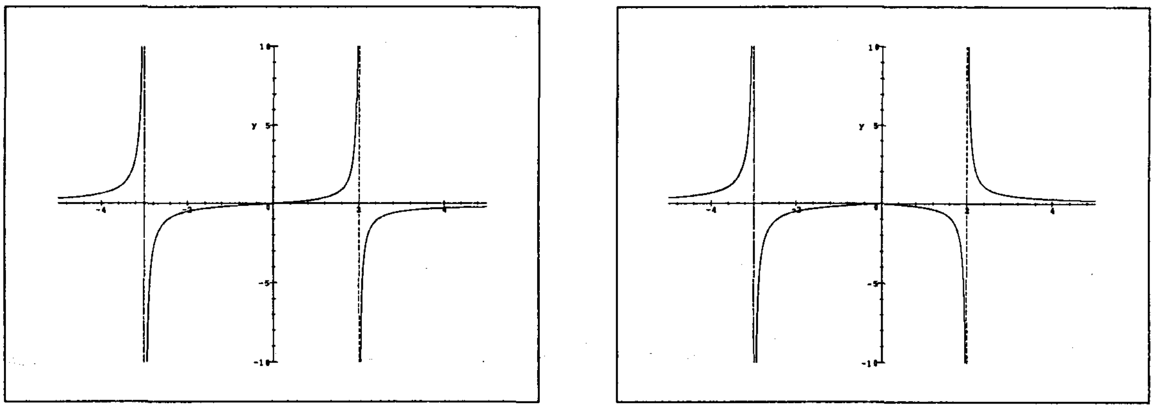


Figura 5.25: Gràfiques de les funcions $f(x) = \frac{-x}{(x+3)(x-2)}$ i $g(x) = \frac{|x|}{(x+3)(x-2)}$

9. a) $x \in (2k\pi,\ (2k+1)\pi)\ \ k \in \mathbb{Z}$

b) $((2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi)\ \ k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

10. a) $[-1, 1]$

b) $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

c) $y = x$

11. a) dom $a^x = \mathbb{R}$, Im $a^x = \mathbb{R}^+$

b) Creix per $a > 1$, i decreix per $0 < a < 1$.

c) $(0, 1)$

12. a) 2^{-x} és l'invers de 2^x, i les gràfiques seran simètriques respecte l'eix de les $y's$.

b) Negatiu.

c) $a < 1$ (Si observem la figura 5.17, l'antiimatge de 6 és un negatiu, només si $a < 1$)

13. a) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 3^4 = 81$

c) No té sentit la funció logaritme de base 1.

14. a) Dom $f = \mathbb{R}^+$

b) Pel punt $(1, 0)$.

c) Les dues funcions són simètriques respecte l'eix de les x's, ja que

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$, però no existeix $f(0)$.

16. a) $\dfrac{4^x+1}{2^x}$

b) 0

c) $\log_a(x^2-3x)$

17. a) 1

b) -$\sin^2 x$

c) $\log_2 x \cdot \log_2(x-3)$

18. a) Distingirem 3 casos, segons el signe de x i d'$f(x)$.

i) Cas $0 < a < b$ i $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$.

Sigui $0 < x_1 < x_2$ aleshores $0 < f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \cdot f(x_1) < x_2 \cdot f(x_2)$; per tant $x \cdot f(x)$ creix.

Veiem un exemple a la gràfica de la Fig.5.26

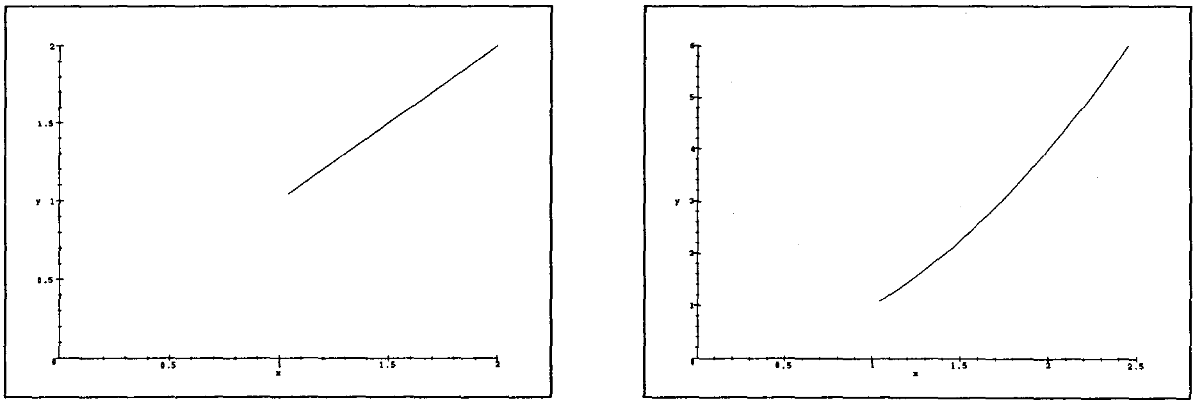


Figura 5.26: La funció $f(x) = x$ i $g(x) = x \cdot x$ en l'interval $[1,2]$

ii) Cas $a < b < 0$ i $f(x) < 0, \forall x \in [a,b]$.

Sigui $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0$; $f(x_1) < f(x_2) < 0 \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2) > 0$ aleshores $x_1 \cdot f(x_1) > x_2 \cdot f(x_2)$; per tant $x \cdot f(x)$ decreix, tal i com es veu a la gràfica de la Fig.5.27

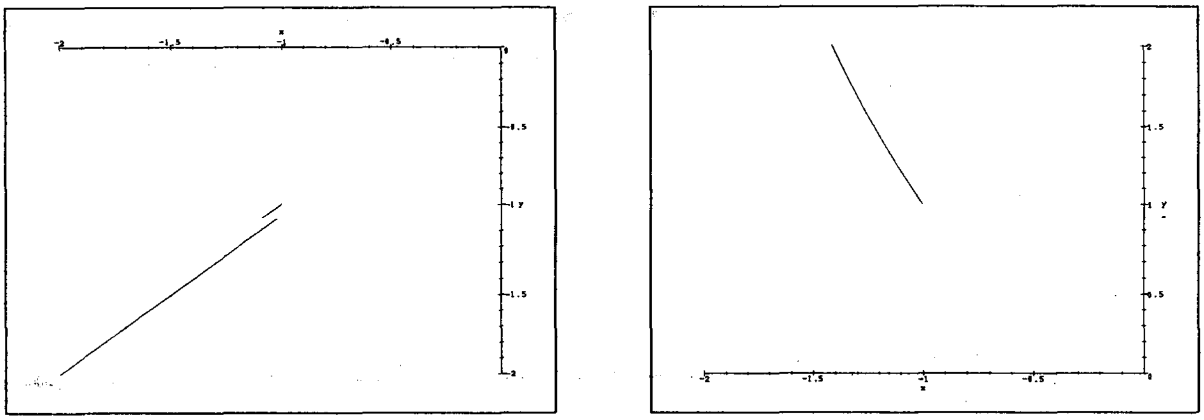


Figura 5.27: La funció $f(x) = x$ i $g(x) = x \cdot x$ en l'interval $[-2, -1]$

iii) En els altres dos casos (quan x sigui positiu i $f(x)$ negatiu i quan x sigui negatiu i $f(x)$ positiu) no podrem assegurar el que succeirà amb la funció $g(x) = x \cdot f(x)$. Per exemple si $f(x) = x + 3$ en l'interval $[-2, 0]$.(Figura 5.28).

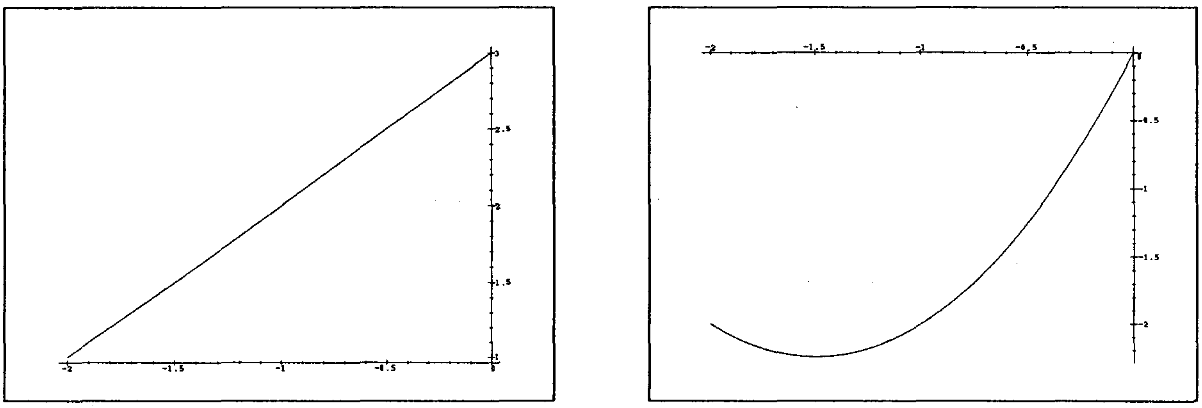


Figura 5.28: La funció $f(x) = x + 3$ i $g(x) = x^2 + 3x$ en l'interval $[-2, 0]$

b) Si $f(x)$ és creixent, en general, no podem dir res de $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Per exemple: si $f(x) = e^x$ en l'interval $[0, 3]$ (Figura 5.29).

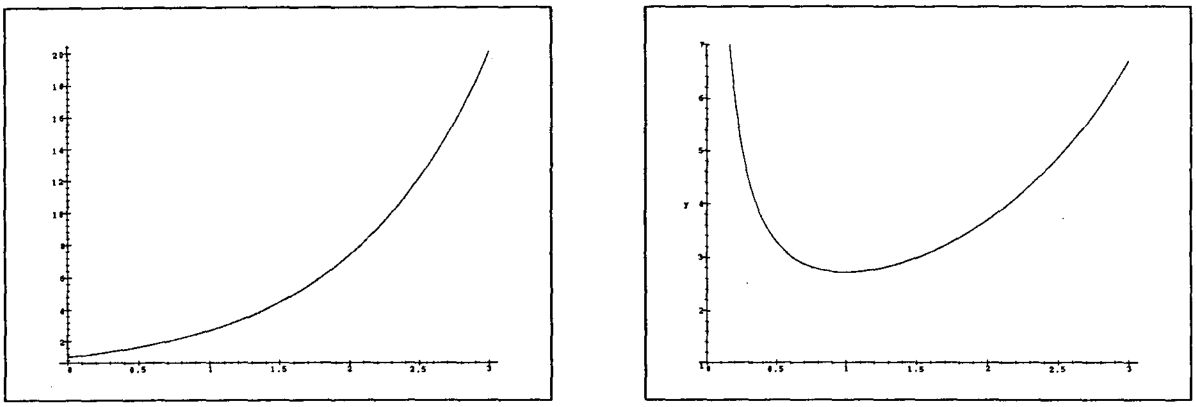


Figura 5.29: La funció $f(x) = e^x$ i $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

19. a) Sí, en $x_0 + 2$

b) Sí, en x_0

c) Sí, en $\dfrac{x_0}{2}$

d) No, depèn de la funció f. Per exemple, la funció de la Fig.5.30 té un mínim relatiu en $x = 2$ i la gràfica de $x \cdot f(x)$ també en té un mínim relatiu en $x = 2$.

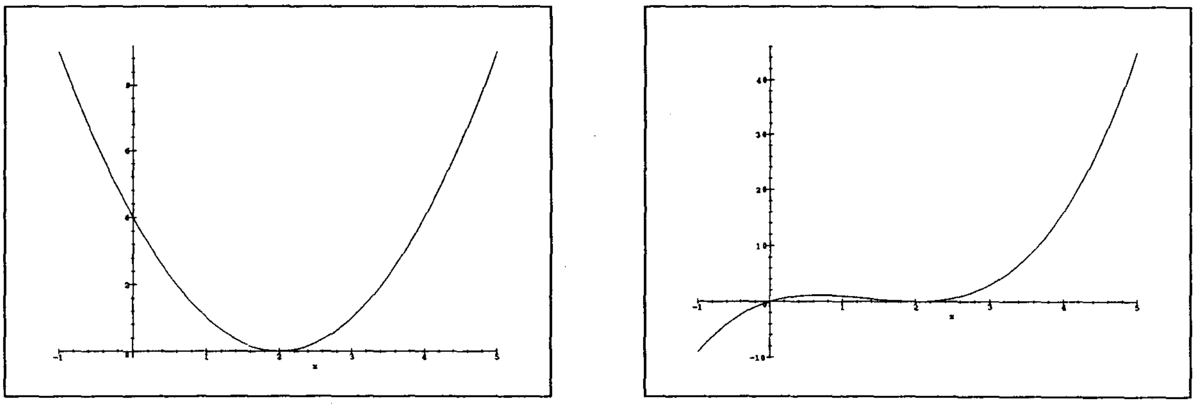


Figura 5.30: La funció $f(x) = (x-2)^2$ i $g(x) = x \cdot (x-2)^2$

En canvi, tot i que a simple cop d'ull pot semblar el contrari, la funció $f(x) = \sin x$ i la $g(x) = x \cdot \sin x$ no tenen els extrems relatius als mateixos punts, tal i com es veu a la Fig.5.31.

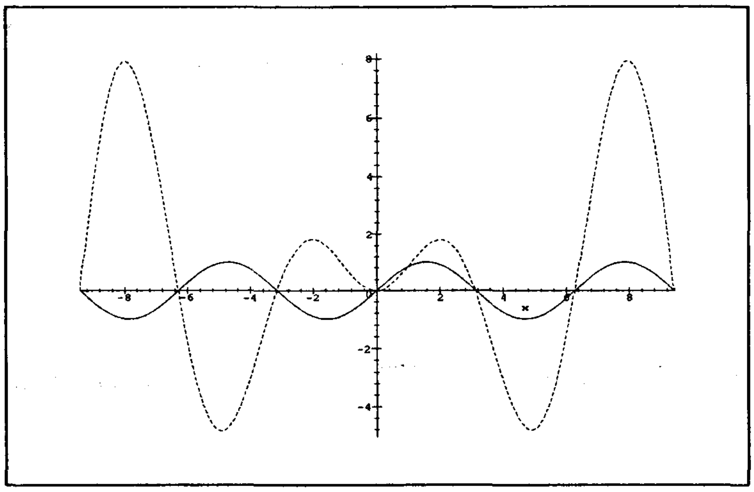


Figura 5.31: Gràfiques de les funcions $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x \cdot \sin x$.

20. a) si $a > 1$ $x \in (0, 1)$; si $a < 1$ $x \in (1, \infty)$

b) $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{8}{3}$

21. a) $0 < a < 1$

b) $a \in \left(\frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $0 < a < 1$

22.

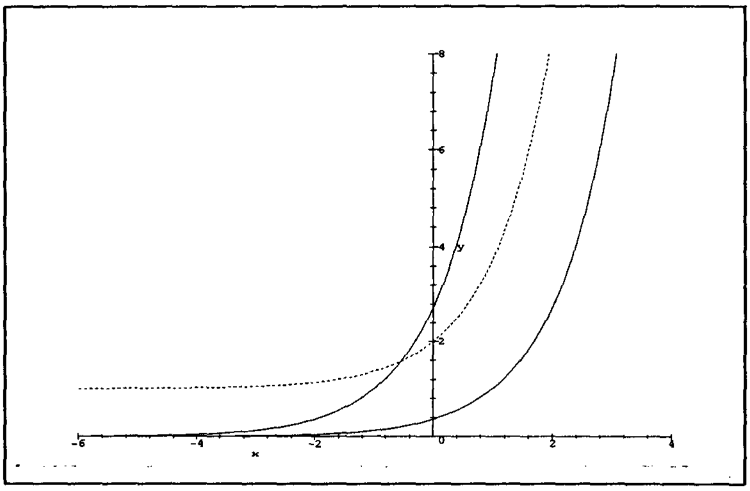


Figura 5.32: Gràfiques de les funcions $e^{(x-1)}$, $e^{(x+1)}$ i $e^x + 1$.

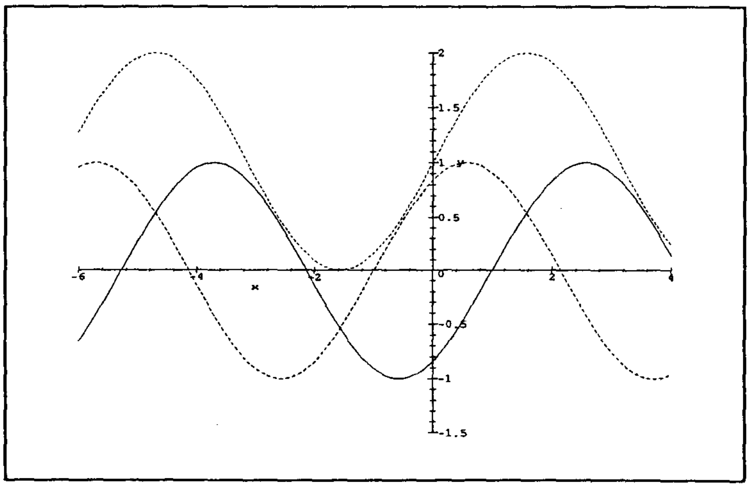


Figura 5.33: Gràfiques de les funcions $\sin(x+1)$, $\sin(x-1)$ i $\sin(x)+1$.

23.

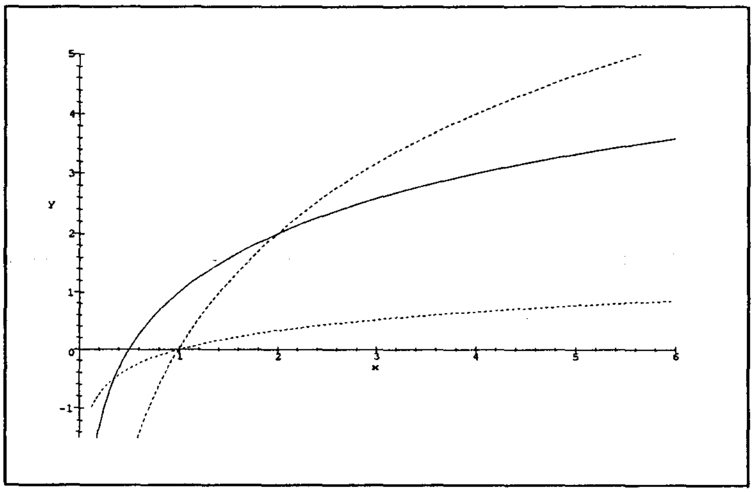


Figura 5.34: Gràfiques de les funcions $\log_2(2x)$, $2\log_2 x$ i $\dfrac{\log_2 x}{3}$.

24.

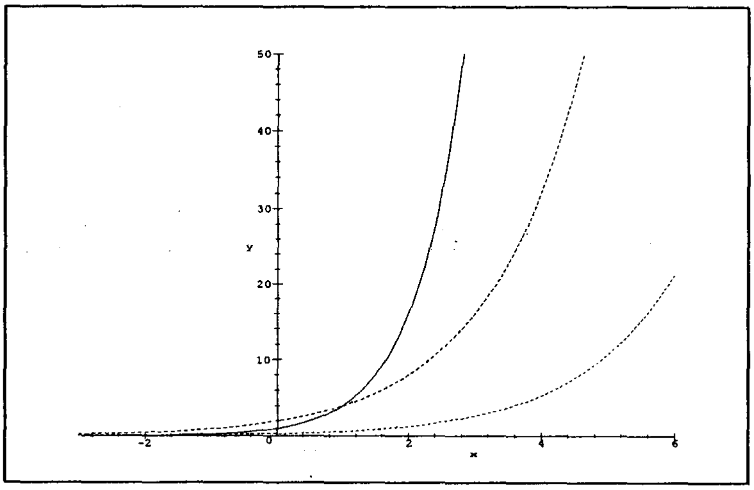


Figura 5.35: Gràfiques de les funcions 2^{2x}, $2 \cdot 2^x$ i $\dfrac{2^x}{3}$.

Lliçó 6

Derivades

Objectius

- Obtenir agilitat en el càlcul de derivades
- Utilització de la interpretació geomètrica del concepte de derivada
- Estudiar la relació que hi ha entre el comportament d'una funció i les seves derivades
- Càlcul de màxims i mínims relatius i resolució de problemes d'optimització

Resum Teòric

Definició de derivada

DEFINICIÓ 6.0.1 *Donada una funció $f(x)$ podem considerar el següent quocient:*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

on el valor del denominador h s'anomena ***increment de la variable*** *x, el numerador $f(x+h)-f(x)$* ***increment de la funció*** *$f(x)$ i el quocient* ***raó incremental de la funció*** *$f(x)$* ***relatiu al punt*** *x* ***i a l'increment*** *h.*

DEFINICIÓ 6.0.2 *Anomenem* ***derivada de la funció*** *$f(x)$* ***en el punt*** *x al límit, si existeix i és finit, de la raó incremental, quan h s'acosta a zero. En aquest cas diem que* ***la funció*** *$f(x)$* ***és derivable en el punt*** *x i indiquem la derivada amb la notació $f'(x)$. És a dir:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

A continuació donem diferents notacions per indicar la derivada d'una funció en un punt.,

$$y'(x)=f'(x)=Df(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Si una funció $y=f(x)$ és derivable en tots el punts d'un interval, la seva derivada $f'(x)$ és en general un altre funció (***funció derivada*** de $f(x)$). Si aquesta funció és derivable la seva derivada l'indiquem amb la notació y'' o $f''(x)$ i l'anomenem ***derivada segona*** de $f(x)$. La $f''(x)$ és una nova funció d'x, si admet derivada, aquesta la indiquem y''' o $f'''(x)$ i l'anomenem ***derivada tercera*** de $f(x)$. I així successivament. Aquestes derivades també les expressem amb la notació:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots$$

Interpretació geomètrica de la derivada.

Si pensem en la recta tangent a una corba en un punt P com la posició límit, si existeix, d'una recta PQ, secant a la corba en el punt P i un altre punt Q, quan el punt Q tendeix a P sobre la corba, aleshores podem observar, sobre el gràfic,

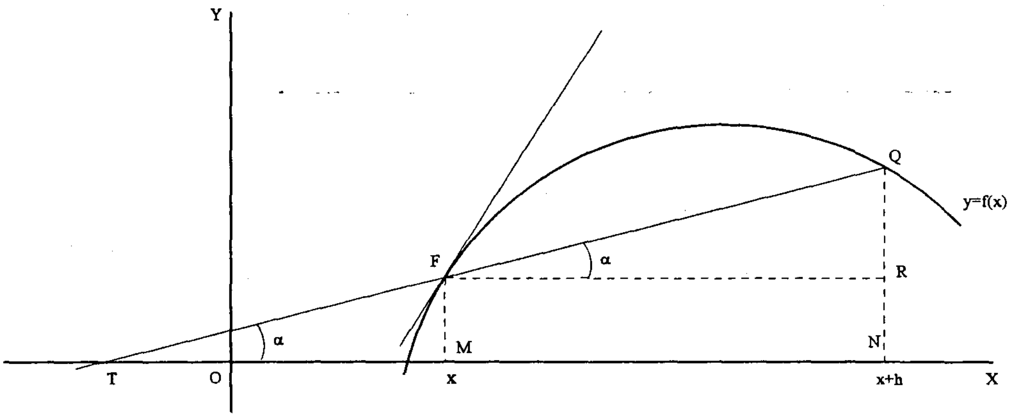


Figura 6.1: Recta tangent a una corba

que la corba d'quació $y = f(x)$, la secant FQ, la paral.lela a l'eix y passant per F i la paral.lela a l'eix x per F verificant:

$$MN = FR = h, \qquad \widehat{QFR} = \widehat{QTN} = \alpha, \qquad MF = NR = f(x),$$

$$NQ = f(x+h), \quad RQ = NQ - NR = f(x+h) - f(x),$$

i tenint en compte el triangle FQR veiem que: $RQ = FR \cdot \tan\alpha$,
i d'aquesta expressió deduïm:

$$\tan\alpha = \frac{RQ}{FR} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

que és el coeficient angular de la secant que passa pel punt F d'abcisa x amb el punt Q d'abcisa $x + h$.

Si volem calcular el coeficient angular m de la recta tangent a la corba en el punt F n'hi ha prou en fer tendir el punt Q al punt F. Això significa fer tendir $x_0 + h$ a x_0 i per tant cal que h s'acosti a zero. Llavors, tenim que **el coeficient angular m de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abcisa x_0 val:**

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \tan \alpha_0.$$

La recta tangent passant pel punt $(x_0, f(x_0))$ de la gràfica de la corba $y = f(x)$ val:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Taula de les derivades fonamentals.

Donem la següent taula de derivades que l'estudiant hauria de fer l'esforç de recordar.

y	y'
constant	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\log_a x$	$(1/x) \log_a e = 1/(x \ln a)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$

Derivada de la suma, diferència, producte i quocient de funcions.

Donades dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ derivables, aleshores es verifica que,

- la **derivada de la suma (diferència)** de dues funcions és igual a la suma (diferencia) de les derivades de cadascuna de les funcions. En fórmula:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

Demostració:

$$\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x).
\end{aligned}$$

$\diamond$

Les altres propietats tan sols les enunciem sense donar-ne la demostració.

- la **derivada del producte** de dues funcions és igual al producte de la derivada del primer factor pel segon sense derivar més el producte del primer factor per la derivada del segon.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

- la **derivada del quocient** de dues funcions és una fracció que té com a denominador el quadrat del divisor i com a numerador el producte divisor per la derivada del dividend disminuït en el producte del dividend per la derivada del divisor.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Regla de la cadena i conseqüències.

Siguin $y = f(z)$ i $z = g(x)$ dues funcions derivables de manera que la funció f pren valors en els punts de la imatge de g. És a dir:

$$y = f(z), \quad z = g(x).$$

Aleshores, té sentit que considerem la funció $y = f(g(x))$ que anomenem ***funció composada*** de g amb f i indiquem amb el símbol $(f \circ g)(x)$ (o simplement $(fg)(x)$). Tenint en compte aquesta notació podem escriure:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

L'anomenada **Regla de la cadena** ens explica com es comporta aquesta funció respecte de la derivació.

- **Regla de la cadena.** Si f és una funció derivable respecte de la variable z i g és una funció derivable respecte de la variable x, aleshores la funció $f \circ g$ és derivable respecte de la variable x i la seva derivada és igual al producte de la derivada de f respecte de z per la derivada de g respecte d'x. En fórmula:

$$(f \circ g)'(x) = f'(z) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Enunicerem dos resultats que cal tenir en compte quan fem càlcul de derivades i que són conseqüència de la regla de la cadena.

- **Derivada de la funció inversa d'una funció.** Siguin f i g dues funcions inverses; es a dir, $(f \circ g)(x) = x$. Si sabem el que val la derivada de la funció f, aleshores podem afirmar que g és derivable i la seva derivada es pot calcular en funció de la derivada de f i val:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Això és així ja que, $(f \circ g)'(x) = 1$, i $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$ d'on deduïm la propietat anterior. Com exemple:

Sigui la funció:

$$x = \sin z, \text{ que té per derivada, } x' = \cos z.$$

Sabem que la funció inversa val:

$$z = \arcsin x$$

i aplicant la regla de derivació de la funció inversa, podem calcular la seva derivada:

$$z' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- **Derivada logarítmica.** Utilitzant la regla de la cadena és fàcil obtenir el resultat $(\log f(x))' = f'(x)/f(x)$ que permet expressar la derivada d'una funció en la forma:

$$f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'.$$

Aquesta fórmula és molt útil en el càlcul d'algunes derivades com la de l'exemple següent:

Donada la funció

$$y = x^x,$$

prenem logaritmes i tenim que:

$$\ln y = x \cdot \ln x.$$

Un cop fet això derivem i queda:

$$\frac{1}{y} = \ln \qquad \frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

d'on, finalment deduïm:

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

Funcions creixents i decreixents. Màxims i mínims relatius.

DEFINICIÓ 6.0.3 *Donada una funció $f(x)$ direm que és* ***creixent (decreixent) en un punt*** *c del seu domini si podem trobar un interval $(c, c+h)$ i un interval $(c-h, c)$ amb $h > 0$ on els valors que pren la funció són més grans (més petits) que $f(c)$.*

Per tant si f és creixent (decreixent) en el punt c tenim:

$$f \text{ creixent a } c \text{ si } \begin{cases} \forall x \in (c-h, c) \Rightarrow f(x) < f(c) \\ \forall x \in (c, c+h) \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}$$

$$f \text{ decreixent a } c \text{ si } \begin{cases} \forall x \in (c-h, c) \Rightarrow f(x) > f(c) \\ \forall x \in (c, c+h) \Rightarrow f(x) < f(c) \end{cases}$$

Propietat 1: Si una funció és derivable en un punt c i $f'(c) > 0$, la funció $f(x)$ és creixent a c. Analogament, si una funció és derivable en un punt c i $f'(c) < 0$, la funció $f(x)$ és decreixent a c.

Propietat 2: Si en un interval $]a, b[$ la derivada de la funció $f(x)$ és sempre positiva o sempre negativa, la funció és respectivament creixent o decreixent en aquest interval.

DEFINICIÓ 6.0.4 *Recordem que es diu que la funció $f(x)$ té en un punt c un **màxim relatiu**, si es pot trobar un interval $]c-h, c+h[$ amb $h > 0$, contingut en el seu domini, de manera que $\forall x \in]c-h, c[\Rightarrow f(x) < f(c)$ i $\forall x \in]c, c+h[\Rightarrow f(x) < f(c)$. Anàlogament, la funció $f(x)$ té en un punt c un **mínin relatiu**, si es pot trobar un interval $]c-h, c+h[$ amb $h > 0$, contingut en el seu domini , de manera que $\forall x \in]c-h, c[\Rightarrow f(x) > f(c)$ i $\forall x \in]c, c+h[\Rightarrow f(x) > f(c)$*

Propietat 3: Si una funció $f(x)$ és derivable en un punt c on té un màxim o un mínim relatiu, aleshores $f'(c) = 0$.

Una regla pràctica per determinar els màxims i els mínims relatius d'una funció derivable és la següent:

Regla I.: Donada una funció derivable $f(x)$, calculem $f'(x)$ i resolem l'equació $f'(x) = 0$. Si aquesta equació té una solució c que pertany al domini de $f(x)$, estudiem el signe de $f'(x)$ en un entorn del punt c. Tenim aleshores que:

$$f(c) \text{ és un màxim relatiu si: } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per} \quad x < c \\ f'(x) < 0 & \text{per} \quad x > c \end{cases}$$

Observem que la condició anterior ens diu que la funció $f'(x)$ és decreixent en el punt c. Si existeix la segona derivada $f''(x)$, aleshores tenim la propietat,

$$f(c) \text{ és un màxim relatiu si: } f''(c) < 0.$$

Analogament,

$$f(c) \text{ és un mínim relatiu si: } \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{per} \quad x < c \\ f'(x) > 0 & \text{per} \quad x > c \end{cases}$$

O també, si la funció $f(x)$ admet derivada segona, la condició,

$$f(c) \text{ és un mínim relatiu si: } f''(c) > 0.$$

En forma més general es pot demostra que:

Regla II.: Donada una funció derivable $f(x)$, calculem $f'(x)$ i resolem l'equació $f'(x) = 0$. Si aquesta equació té una solució c que pertany al domini de $f(x)$, calculem les derivades successives de $f(x)$ en el punt c fins trobar-ne una diferent de zero. Llavors tenim que,

$$f'(c) = 0, \qquad f''(c) = 0, \quad ...,$$
$$f^{(n-1)}(c) = 0 \quad f^{(n)}(c) \neq 0,$$

podem concloure que:

- $f(c)$ és un màxim relatiu si: $f^{(n)}(c) < 0$, amb n parell,
- $f(c)$ és un mínim relatiu si: $f^{(n)}(c) > 0$, amb n parell,
- $f(c)$ no és un màxim o un mínim relatiu si n és senar.

Punts d'inflexió.

DEFINICIÓ 6.0.5 *Direm que una funció derivable $f(x)$ és* ***còncava*** *en un punt d'abcisa c si la recta tangent en aquest punt està per sota la funció en un cert interval de la forma $]c - h, c + h[$ amb $h > 0$ sense tenir en compte el punt c. És a dir:*

$$\forall x \in]c - h, c + h[, x \neq c \Rightarrow f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$$

Direm que una funció derivable $f(x)$ és ***convexa*** *en un punt d'abcisa c si la recta tangent en aquest punt està per sobre la funció en un cert interval de la forma $]c - h, c + h[$ amb $h > 0$ sense tenir en compte el punt c. És a dir:*

$$\forall x \in]c - h, c + h[, x \neq c \Rightarrow f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$$

Direm que una funció derivable $f(x)$ té un ***punt d'inflexió*** *a c si la funció és còncava a un costat de l'interval $]c - h, c + h[$ i convexa a l'altre.*

En realitat, un punt d'inflexió és un extrem relatiu de la funció $f'(x)$. Aleshores, si la funció $f(x)$ admet derivades successives tenim que en un punt d'inflexió s'anul.la la segona derivada $f''(c) = 0$, independentment de si s'anul.la o no la primera derivada. Per tant, tenint en compte les regles establertes en el cas dels màxims i mínims podem considerar les següents regles pel càlcul dels punts d'inflexió:

Regla I.- Donada la funció $f(x)$, calculem $f''(x)$ i resolem l'equació $f''(x) = 0$. Si aquesta té una solució c pertanyent al domini d'f, estudiem el signe de $f''(x)$ en un interval de la forma $]c-h, c+h[$ que no tingui cap altre solució de $f''(x)$. Llavors tenim un punt d'inflexió a c si, el signe de $f''(x)$ en els punts de l'interval a l'esquerra de c és contrari del signe en els punts de l'interval a la dreta de c.

Regla II.- Donada la funció $f(x)$, calculem $f''(x)$ i resolem $f''(x) = 0$. Si aquesta equació té una solució c pertanyent al domini d'f, calculem en el punt c les derivades successives de $f(x)$ a partir de la segona fins trobar-ne una diferent de zero. És a dir:

$$f''(c) = 0, f'''(c) = 0, ..., f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Si n és senar la funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en el punt d'abcisa c.

6.1 Exercicis resolts

---

1. Calculeu la primera i la segona derivada de la funció $y = (2x - 3x^2)(x^2 - x^3)$.

Per a calcular la derivada de la funció y podem procedir de dues maneres diferents:

a) calculant-la com a la derivada d'un producte,

b) calculant el producte i posteriorment derivant el resultat.

Si procedim com proposem a l'apartat a), tenim

$$\begin{aligned} y' &= (2x - 3x^2)'(x^2 - x^3) + (2x - 3x^2)(x^2 - x^3)' = \\ &= (2 - 6x)(x^2 - x^3) + (2x - 3x^2)(2x - 3x^2) = \\ &= (2 - 6x)(x^2 - x^3) + (2x - 3x^2)^2, \end{aligned}$$

fent operacions el resultat que obtenim és

$$y' = x^2(6 - 20x + 15x^2).$$

Ara calcularem novament la primera derivada però primerament expressarem y com una suma (tot desfent el producte), la derivada l'obtindrem derivant cadascun dels seus termes. D'aquesta forma obtenim,

$$y = (2x - 3x^2)(x^2 - x^3) = 2x^3 - 3x^4 - 2x^4 + 3x^5,$$

derivant l'expressió anterior i simplificant obtenim

$$y' = 6x^2 - 20x^3 + 15x^4 = x^2(6 - 20x + 15x^2).$$

La segona derivada és la derivada de la primera derivada de y. Per a calcular-la ho podem fer a partir de l'expressió $y' = x^2(6 - 20x + 15x^2)$, tot calculant-la com la derivada d'un producte, o bé utilitzant l'expressió $y' = 6x^2 - 20x^3 + 15x^4$ i obtindrem la segona derivada calculant la derivada de cadascun dels termes de y'.
Si fem servir la segona forma obtenim

$$y'' = (6x^2 - 20x^3 + 15x^4)' = 12x - 60x^2 + 60x^3 = 12x(1 - 5x + 5x^2).$$

2. Calculeu la primera derivada del quocient de funcions $y = \dfrac{x \ln x}{1-x}$.

La primera derivada del quocient anterior, la calcularem de la següent manera

$$y' = \frac{(x \ln x)'(1-x) - (x \ln x)(1-x)'}{(1-x)^2}.$$

Si procedim d'aquesta manera obtenim

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\ln x + 1)(1-x) + x \ln x}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{\ln x - x \ln x + 1 - x + x \ln x}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1 - x + \ln x}{(1-x)^2} \end{aligned}.$$

3. Calculeu la primera derivada de la funció de funcions $y = \ln \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$.

Per derivar el quocient de funcions anterior aplicarem els regles habituals de derivació de funcions,

$$y' = \left(\ln \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right)' =$$

$$\frac{1}{\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}} \cdot \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right)'$$

Si procedim de la forma que hem descrit anteriorment el resultat que obtenim és

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(1-\tan x)+\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(1+\tan x)}{(1-\tan x)^2}\right) = \\
&= \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{1-\tan^2 x} = \\
&= \frac{2}{\cos^2 x(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})} = \\
&= \frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \\
&= \frac{2}{\cos 2x}
\end{aligned}$$

---

4. Calculeu l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció $y = x + \sin x$ en el punt on $x = 2\pi$ i l'angle que la recta forma amb l'eix d'abcisses.

Hem de trobar una recta que sigui tangent al gràfic de la funció y en punt que ens donen.
Sabem que la derivada avaluada en un punt fixat és el pendent de la recta tangent en aquest punt.

$$m = y' = (x + \sin x)' = 1 + \cos x,$$

avaluem la derivada en el punt $x = 2\pi$ i sabrem quant val el pendent de la recta tangent al gràfic de la funció y,

$$m = y'(2\pi) = 1 + \cos 2\pi = 2.$$

L'equació de la recta que busquem és de la forma $(y - y_0) = m(x - x_0)$, on x_0 és el punt que ens donen i y_0 és el valor que pren la funció y avaluada al punt x_0. El que obtenim doncs, tenint en compte el que hem explicat anteriorment és

$$y - (2\pi + \sin 2\pi) = 2(x - 2\pi),$$

L'equació de la recta és doncs

$$y = 2x - 2\pi.$$

Trobar l'angle és immediat ja que sabem que $\tan\alpha = m$, aleshores només cal fer $\alpha = \arctan 2 \approx 63°26'$.

5. Calculeu a i b de manera que la tangent a la funció $y_1 = \dfrac{x^2}{a}$ per $x_1 = 4$ coincideixi amb la tangent a la funció $y_2 = \dfrac{(x-20)^2}{b} + 17$ per $x_2 = 18$.

Hem de trobar els valors de a i de b que fan que les rectes tangents a les dues funcions del problema siguin iguals. Per resoldre aquest problema trobarem primer les dues rectes tangents a les funcions en els punts que ens diuen com hem fet a l'apartat anterior. Trobem primer la tangent a y_1 en el punt $x_1 = 4$. Procedint de la forma descrita en l'exercici anterior,

$$m_1 = y_1' = \left(\frac{x^2}{a}\right)' = \frac{2x}{a},$$

si avaluem la $y_1'(4) = \dfrac{8}{a}$ obtindrem el pendent de la recta que busquem. Així doncs, l'equació de la recta tangent és

$$y_1 - \frac{16}{a} = \frac{8}{a}(x-4).$$

Procedim de la mateixa forma per a la funció y_2 i obtenim

$$m_2 = y_2' = \left(\frac{(x-20)^2}{b} + 17\right)' = \frac{2(x-20)}{b},$$

avaluem la derivada en el punt $x_2 = 18$ i obtenim $m_2 = \dfrac{-4}{b}$.
L'equació de la recta tangent és en aquest cas

$$y_2 - \left(\frac{4}{b} + 17\right) = \frac{-4}{b}(x-18).$$

Cal resoldre

$$\frac{8}{a} = \frac{-4}{b},$$

que ens indica que els pendents d'ambdues rectes han de ser iguals. D'altra banda,

$$\begin{aligned}\frac{4\cdot 18}{b} + \frac{4}{b} + 17 &= \frac{-32}{a} + \frac{16}{a}\\ \frac{76}{b} + 17 &= \frac{-16}{a}\end{aligned}$$

que ens diu que els termes independents han de ser iguals.
Aquestes dues condicions ens proporcionen el següent sistema per a resoldre

$$\begin{cases} 4a & +8b & & = 0 \\ 76a & +16b & +17ab & = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema anterior aïllant la a de la primera equació $a = -2b$ i substituint a la segona tenim,

$$34b^2 + 136b = 0.$$

Aquesta equació dóna dues condicions possibles de a i de b:

$$\begin{cases} b = 0 & a = 0 \\ b = -4 & a = 8 \end{cases}$$

La primera solució no és factible ja que no podem dividir per 0. Si $a = 8$ i $b = -4$, aleshores les rectes tangents a les funcions y_1 i y_2 en els punts $x_1 = 4$ i $x_2 = 18$ són iguals.

---

6. Calculeu els extrems relatius de la funció $y = x^8 e^{-x^2}$.

Per trobar els extrems relatius de y, buscarem primer els punts on la primera derivada s'anul.la (que són extrems relatius, o bé punts d'inflexió) i amb el signe de la segona derivada avaluada en aquests punts sabrem si són màxims (segona derivada negativa, mínims, segona derivada positiva o bé punts d'inflexió si la segona derivada val 0).
Una forma alternativa de trobar els extrems relatius és estudiant el creixement i decreixement de la funció (a partir del canvi de signe de la derivada). En un primer pas calcularíem la primera derivada i un cop trobats els punts on s'anul.la, miraríem com es comporta la funció a la dreta i l'esquerra d'aquests punts.
Si procedim de la primera manera que hem descrit, tenim que

$$\begin{aligned} y' = & \; 8x^7 \cdot e^{-x^2} - 2x^9 \cdot e^{-x^2} = \\ = & \; e^{-x^2}(-2x^9 + 8x^7) = \\ = & \; 2x^7 \cdot e^{-x^2}(-x^2 + 4) = \\ = & \; 2x^7 \cdot e^{-x^2}(2 - x)(2 + x). \end{aligned}$$

La derivada s'anul.la quan un dels factors que la composa s'anul.la, és a dir

$$y' = 0, \text{ si } 2x^7 \cdot e^{-x^2} \text{ cosa que passa quan } x = 0,$$

$$y' = 0, \text{ si } 2 - x = 0 \text{ cosa que passa quan } x = 2,$$

$$y' = 0, \text{ si } 2 + x = 0 \text{ cosa que passa quan } x = -2.$$

Així doncs els punts $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$ són extrems relatius de y. Trobem ara la segona derivada per a veure quin tipus d'extrem són: màxim o mínim.

$$\begin{aligned} y'' &= -2x \cdot e^{-x^2}(-2x^9 + 8x^7) + e^{-x^2}(-18x^8 + 56x^6) = \\ &= e^{-x^2} \cdot (4x^{10} - 16x^8 - 18x^8 + 56x^6) = \\ &= e^{-x^2} \cdot (4x^{10} - 34x^8 + 56x^6) = \\ &= 2e^{-x^2} \cdot x^6(2x^4 - 17x^2 + 28). \end{aligned}$$

Calculem el signe de y'' per $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$,

si $x = 0$, la segona derivada s'anula. Però podem deduïr que es tracta d'un mínim relatiu ja que per la dreta $f' > 0$ i per l'esquerre $f' < 0$.

si $x = 2$, la segona derivada és negativa, per tant en aquest punt hi ha un màxim relatiu. (Per trobar el signe de la segona derivada només cal substituir $x = 2$ en y'').

si $x = -2$, la segona derivada és també negativa, per tant en aquest punt hi ha un màxim relatiu.

---

7. Calculeu el punt de la funció $y = 2\sqrt{x}$ més proper al punt $(-3, 6)$.

Ens estan demanant que minimitzem la distància entre un punt donat i la funció $y = 2\sqrt{x}$, és a dir, que trobem el punt de y que fa que la distància entre el punt donat i el punt de la funció sigui el més petita possible. Sabem que els punts de la funció y són del tipus $(x, 2\sqrt{x})$. Aleshores la distància entre ambdós punts la podem expressar:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 10x - 24\sqrt{x} + 45}$$

operant i simplificant ens queda la següent expressió de la derivada del quadrat de la distància:

$$d^{2'} = 2x + 10 - \frac{12}{\sqrt{x}}.$$

El que nosaltres volem és que aquesta distància sigui mínima, per tant hem de buscar els punts on la funció pot tenir extrems relatius i d'entre ells triarem el que correspongui a un mínim. Per això hem de trobar quins són els punts on la derivada s'anul.la. Calculem doncs la derivada de d i trobem els seus zeros.

$$d^{2'} = 2x + 10 - \frac{12}{\sqrt{x}} = 0.$$

L'equació anterior és la que hem de resoldre.

$$\begin{aligned}
2x + 10 &= \frac{12}{\sqrt{x}} \\
x + 5 &= \frac{6}{\sqrt{x}} \\
(x+5)^2 &= (\frac{6}{\sqrt{x}})^2 \\
x^2 + 10x + 25 &= \frac{36}{x}
\end{aligned}$$

Finalment obtenim una equació de tercer grau, per tant hi ha tres punts possibles on la funció pot anul.lar-se.

$$x^3 + 10x^2 + 25x - 36 = 0,$$

Per solucionar aquesta equació podem utilitzar el mètode de factorització de Ruffini, que vam veure al tema 1. Si procedim com ja hem vist obtenim

$$(x-1)(x^2 + 11x + 36).$$

Si solucionem l'equació de segon grau, observem que el discriminant és negatiu, per tant la nostra equació te dues arrels complexes (conjugades entre si) i una arrel real que és 1.

Per tal d'estar segurs, que realment aquest punt correspon a un mínim mirarem el signe de la segona derivada en aquest punt.

$$d^{2''} = 2 + \frac{6}{\sqrt{x^3}}$$

$$d^{2''}(1) = 8.$$

Atés que la segona derivada és positiva, al punt 1 hi ha un mínim. El punt de y que buscàvem és el $(1, 2)$ (la coordenada de y, la trobem substituint $x = 1$ en l'expressió de y).

8. Calculeu el con circular recte inscrit en una esfera de radi 3 i de volum màxim.

Volem el con circular recte que inscrit en una circumferència de radi 3, el seu volum sigui el màxim. La situació és la que mostra la figura. El volum d'un con recte ve donat per la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, on h és l'alçada de l'esfera al pic del con i r és el seu radi. Sabem que $h = x + R$, on R és el radi de l'esfera on es troba inscrit i el con i x és la distància entre el centre de l'esfera i la base del con. Com es veu a la figura, es pot formar un triangle rectangle amb R, que serà la hipotenusa, x que seràn l'alçada i r que actuarà de base. Aplicant Pitàgores , obtenim el següent

$$R^2 = x^2 + r^2,$$

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2,$$

$$r^2 + h^2 = 6h,$$

Hem aconseguit doncs expressar el radi en funció de h de la següent manera

$$r^2 = 6h - h^2.$$

El nostre objectiu és trobar un con de volum màxim, aleshores si substituïm l'expressió del radi que hem obtingut anteriorment a la fórmula del volum del con, l'expressió que resulatarà dependrà només de h de la manera que veiem a continuació

$$V = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h.$$

Per trobar les dimensions del con de volum màxim necessitem derivar la funció del volum i trobar on s'anul.la la primera derivada i avaluar la segona derivada en aquest punt per comprovar que és negativa i que per tant hi ha un màxim. Si procedim d'aquesta manera obtenim

$$\begin{aligned} V' &= \tfrac{1}{3}\pi(6h - h^2) + \tfrac{1}{3}h(6 - 2h) = \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(6h - h^2 + 6h - 2h^2) = \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(12h - 3h^2) = \\ &= \pi h \cdot (4 - h). \end{aligned}$$

Hem de trobar el valor de h que fa que la derivada del volum sigui 0. L'equació que hem de resoldre és

$$V' = \pi \cdot (4 - h)h.$$

De l'equació anterior, s'obtenen dos possibles valors per h que són

$$h = 0$$

$$4 - h = 0 \quad \rightarrow h = 4.$$

El valor de $h = 0$ no té gairé sentit atès que busquem una longitud. Per tant $h = 4$. A partir d'aquí calcularem la resta del con amb les relacions que hem trobat anteriorment.

$$r = \sqrt{6 \cdot 4 - 4^2} = 2\sqrt{2}, \text{ només considerem l'arrel positiva.}$$

Caldria comprovar ara si la segona derivada evaluada al punt $h = 4$ és negativa, per garantir d'aquesta manera que el con que hem trobat és de volum màxim. La segona derivada és

$$V'' = \pi \cdot (4 - 2h)$$

Si evaluem $V''(4) = -4\pi$, que és efectivament negativa.

---

9. Calculeu els intervals de concavitat i convexitat de la funció $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$.

El primer que podem deduïr observant el denominador, és que la funció no està definida per $x = 1$. Per tant, la funció no es contínua en $x = 1$.
Per poder calcular els intervals de concavitat i convexitat, calcularem la primera i la segona derivada

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^2+1)'(x-1) - (2x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{4x \cdot (x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

La derivada segona $y'' = (y')'$, d'aquesta manera obtenim

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(2x^2-4x-1)'(x-1)^2 - (2x^2-4x-1)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{(4x-4) \cdot (x-1)^2 - 2(2x^2-4x-1) \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Els punts que fan que la primera derivada sigui 0 seran els possibles extrems relatius de la funció

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}\ ,\ x = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$$

Com que la segona derivada mai s'anula, sabem que la funció no té inflexions.
Com que en el punt $x = 1$ la funció té una discontinuïtat, estudiem el signe de la segona derivada a dreta i esquerra, prenent dos valors aleatoris que facilitin els càlculs

$$y''(0) = \frac{6(0-1)}{(0-1)^4} = -6, \quad y''(2) = \frac{6(2-1)}{(2-1)^4} = 6,$$

en conseqüència direm que la funció es còncava per a valors més petits que $x = 1$, és a dir, la recta tangent de la corba sempre està per sobre de la funció, i tindrà el seu màxim per a $x = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$. I per a valors més grans que $x = 1$ la funció serà convexa, amb la recta tangent sempre per sota de la funció, i tindrà el seu mínim per a $x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

---

10. Calculeu els punts d'inflexió de la funció $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Els punts d'inflexió són els punts en què la funció passa de còncava a convexa o bé a l'inrevés. Per tant si fem com a l'exercici anterior i calculem els intervals de concavitat i convexitat ja sabrem quins són els punts d'inflexió de y.
La primera derivada de y és $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ i la segona és $y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.
Els punts on s'anul.la la segona derivada són $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ i $x = \sqrt{3}$

$(-\infty, -\sqrt{3})$ $y'' < 0$ la funció és còncava

$(-\sqrt{3}, 0)$ $y'' > 0$ la funció és convexa

$(0, \sqrt{3})$ $y'' < 0$ la funció és còncava

$(\sqrt{3}, \infty)$ $y'' > 0$ la funció és convexa

Per trobar el signe de la segona derivada en cadascun d'aquests intervals, es troba prenent un punt de l'interval i substituint a l'expressió de la segona derivada. Efectivament, els punts on s'ha anulat la segona derivada són inflexions.

6.2 Exercicis Proposats

1. Calculeu la derivada de les funcions:

a) $y = x - \cos x$, b) $y = (1+2x)^2$,

c) $y = 2\sqrt{x}$, d) $y = x^5(x^2+7)$,

e) $y = (x^2+2)(x^2-1)$, f) $y = e^x(xe^x - e^x)$,

g) $y = x\sin x + \cos x$.

2. Calculeu la derivada dels següents quocients de funcions:

a) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, b) $y = \dfrac{3}{\sin x}$,

c) $y = \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$, d) $y = \dfrac{2x^3}{1-x^2}$,

e) $y = \dfrac{e^x}{x}$, f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$,

g) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

3. Calculeu la derivada de les funcions següents:

a) $y = \ln(2-3x)$, b) $y = 3\sqrt{2-x}$,

c) $y = 3^{-x}$, d) $y = \sqrt{3x^2+5}$,

e) $y = e^{x^2}$, f)$y = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,

g) $y = e^{\ln \sin x}$.

4. Donada la funció $y = 3x^2 - 2x + 1$, calculeu el valor de x on s'anul.la la derivada.

5. Per a quins valors de x la derivada de $y = 2x - \dfrac{1}{x}$ val 3?

6. Per a quins valors de x la derivada de $y = x^3$ és igual a la derivada de $y = x^2 + x$?

7. Calculeu el pendent de la recta tangent al gràfic de les funcions en el punt d'abcisa indicat al seu costat.

a) $y = 8x - 3x^2$, per a $x = 2$,

b) $y = x + \dfrac{2}{x}$, per a $x = 2$,

c) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, per a $x = \dfrac{-1}{2}$,

d) $y = \sqrt{5-\sqrt{x}}$, per a $x = 1$,

8. Calculeu el pendent i l'angle amb l'eix d'abcises de la recta tangent al gràfic de les funcions en el punt d'abcisa indicat al seu costat.

a) $y = x^3 + 3x - 2$, per a $x = 1$,

b) $y = \dfrac{2}{x}$, per a $x = 2$,

c) $y = \dfrac{1}{x}$, per a $x = \dfrac{3}{2}$.

9. Calculeu els punts de la gràfica de les funcions següents en què el pendent m de la recta tangent té el valor indicat al seu costat.

a) $y = 2x^4 - 4x^3 + 5$, $m = 0$,

b) $y = 3x^2 - 6x + 6$, $m = 2$,

c) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, $m = 0$.

10. Calculeu l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció en el punt d'abcisa indicat al seu costat.

a) $y = \dfrac{3}{2-x}$, per a $x = 3$,

b) $y = x(2-x)^2$, per a $x = 1$,

c) $y = \dfrac{4x}{x^2+9}$, per a $x = 0$.

11. Calculeu l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció de manera que el pendent m de la recta sigui l'indicat al seu costat

a) $y = 4x^2 - 5$, $m = 3$,

b) $y = \sqrt{x+2}$, $m = \dfrac{1}{8}$,

c) $y = \dfrac{3}{2-x}$, $m = \dfrac{1}{3}$.

12. Calculeu l'angle format per les rectes tangents en els punts d'intersecció de les gràfiques de les parelles de funcions

a) $\begin{cases} y = x^3 + x \\ y = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = & \dfrac{x^2}{2} - 1 \\ y = & \dfrac{8}{x^2+4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = & x^2 + x - 2 \\ y = & x^2 - 5x + 4 \end{cases}$

13. Aplicacions geomètriques de la derivada.

a) Calculeu les equacions de les rectes tangents al gràfic de $y = x^2 - 5x + 7$ en els punts de tall amb la recta $y = 1$,

b) Calculeu l'equació de la recta perpendicular a la gràfica de $y = x^2(x-3)$ en els punts on les tangents són paral.leles a la recta $9x - y - 1 = 0$,

c) Calculeu l'equació de les tangents a la gràfica de la funció $y = \dfrac{4}{x^2-4}$ en els punts de tall amb la recta $3x - 5y = 5$,

d) Calculeu l'equació de la recta perpendicular a la gràfica de la funció $y = x^4$ i paral.lela a la recta $2x + y = 3$.

14. Calculeu els intervals de creixement i decreixement de les funcions:

a) $y = x^4 - 2x^2$,

b) $y = \ln x - \dfrac{x^2}{2}$,

c) $y = e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

15. Calculeu la derivada segona de les funcions:

a) $y = x(x-1)^3$, b) $y = x \ln x$,

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, d) $y = \sqrt{2x} + x$,

e) $y = e^x \ln x$, f) $y = \cos^3(2x)$.

16. Calculeu els màxims i els mínims relatius de les funcions:

a) $y = (x+1)(x-1)^2$, b) $y = x^2(x-3)^3$,

c) $y = \dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$, d) $y = \dfrac{4x}{x^2-4}$,

e) $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$, f) $y = x\sqrt{x+1}$.

17. Determineu,

a) els paràmetres a i b de manera que la funció $y = x^3 + ax^2 + b$ tingui un extrem relatiu en el punt (2,5),

b) el paràmetre a de manera que el mínim valor de la funció $y = x^3(x + a)$ sigui -27.

18. Problemes d'optimització

a) Calculeu dos nombres que sumin 12 i el seu producte sigui màxim.

b) Calculeu dos nombres positius de manera que el seu producte sigui 64 i la seva suma sigui mínima.

c) Calculeu el punt de la recta $y = x$ més proper al punt (4,1).

d) Calculeu l'àrea màxima d'un triàngle isòsceles de perímetre $18cm$.

e) Calculeu dos nombres que sumin 20 i tals que el producte del quadrat d'un d'ells per l'arrel quadrada de l'altre sigui màxima.

f) Calculeu les dimensions d'un con circular recte de màxima superfície lateral inscrit en una esfera de radi $3cm$.

19. Calculeu els intervals de concavitat i convexitat de les funcions:

a) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$, b) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$,

c) $y = \dfrac{x^4+5}{x^2+x+1}$, d) $y = e^x$,

e) $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$, f) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

20. Calculeu els punts d'inflexió de les funcions:

a) $y = x(x^2-5)^2$, b) $y = x^3(x-1)$,

c) $y = \dfrac{x^3}{3+x^2}$, d) $y = \dfrac{1-x}{x^2+1}$,

e) $y = e^{-x^2}$, f) $y = x^4 e^{-x}$.

6.3 Solució als exercicis proposats

1. a) $y' = 1 + \sin x$,

b) $y' = 4(1+2x)$,

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

d) $y' = 7x^4(x^2+5)$,

e) $y' = 2x(2x^2+1)$,

f) $y' = e^{2x}(2x-1)$,

g) $y' = x\cos x$.

2. a) $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

b) $y' = -\frac{3\cos x}{\sin^2 x}$,

c) $y' = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$,

d) $y' = \frac{2x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$,

e) $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

f) $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

g) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

3. a) $y' = \frac{3}{3x-2}$,

b) $y' = \frac{-3}{2\sqrt{2-x}}$,

c) $y' = -3^{-x}\ln 3$,

d) $y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}$,

e) $y' = 2xe^{x^2}$,

f) $y' = \frac{1}{1-\sin x}$,

g) $y' = \cos x$.

4. $x = \dfrac{1}{3}$.

5. $x = \pm 1$.

6. $x = 1$, $x = -\dfrac{1}{3}$.

7. a) $m = -4$,

b) $m = \dfrac{1}{2}$,

c) $m = \dfrac{-16}{25}$,

d) $m = \dfrac{-1}{8}$.

8. a) $m = 6$, $\alpha = 80°32'$,

b) $m = \dfrac{-1}{2}$, $\alpha = 153°26'$,

c) $m = \dfrac{-4}{9}$, $\alpha = -23°58'$.

9. a) $A(0, 5)$, $B(\frac{3}{2}, \frac{13}{8})$,

b) $A(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$,

c) cap.

10. a) $3x - y = 12$,

b) $x + y = 2$,

c) $4x - 9y = 0$.

11. a) $y = 3x - \dfrac{89}{16}$,

b) $-x + 8y = 18$,

c) $x - 3y = -4$, $x - 3y = 8$.

12. a) $\alpha = 45°$,

b) $\alpha = 90°$,

c) $\alpha = 36°52'$.

13. a) $x - y = 2$, $x + y = 3$,

b) $x + 9y = 3$, $x + 9y = -37$,

c) $24x + 25y = 92$, $54x - 25y = -27$, $y = -1$.

d) $32x + 16y = 17$.

14. a) creix a $]-1, 0[$, $]1, \infty[$ i decreix a $]-\infty, -1[$ i $]0, 1[$.

b) creix a $]0, 1[$ i decreix a $]1, \infty[$

c) decreixent a tots els punts.

15. a) $y'' = 6(x-1)(2x-1)$,

b) $y'' = \frac{1}{x}$,

c) $y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$,

d) $y'' = -\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x^3}}$,

e) $y'' = e^x(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x)$,

f) $y'' = 4\cos 2x(6 - 9\cos^2 x)$.

16. Els punts on hi ha extrems relatius són

a) $\frac{-1}{3}$, 1.

b) 0, 3,3, $\frac{6}{5}$.

c) Per $x = -1 \Rightarrow$ màxim, per $x = 0 \Rightarrow$ mínim, Per $x = 1 \Rightarrow$ màxim.

d) $2i$, $-2i$. (No té extrems)

e) Per $x = 2 \Rightarrow$ màxim, per $x = -2 \Rightarrow$ mínim.

f) $\frac{-2}{3}$.

17. a) $a = -3$ i $b = 9$.

b) $a = 4$.

18. a) $x = y = 6$.

b) $x = y = 8$.

c) $A(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

d) $s = 9\sqrt{3}$ cm^2.

e) $x = 16$ i $y = 4$.

f) $h = 4$ cm, $r = 2\sqrt{2}$ cm.

19. a) Per a $x = 1$ la funció no està definida. Com la primera derivada no s'anul.la mai la funció no té extrems relatius.

b) $]-\infty, -1[\rightarrow$ còncau, $]-1, 0[\rightarrow$ convex, $]0, 1[\rightarrow$ còncau, $]1, +\infty[\rightarrow$ convex.

d) La segona derivada no s'anul.la mai. No té extrems relatius.

e) $]-\infty, 0[\rightarrow$ còncau, $]0, +\infty[\rightarrow$ convex.

20. a) $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$,

b) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$,

c) $x = 0$, $x = \pm 3$,

d) $x = -1$, $x = 2 \pm \sqrt{3}$,

e) $x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$,

f) $x = 2$, $x = 6$.

Lliçó 7

Representació gràfica

Objectius

- Aprendre a representar gràficament les funcions elementals.
- Saber distingir en una gràfica quin tipus de funcions elementals hi intervenen, a través de periodicitats, comportaments asimptòtics,...
- Assumir els paral.lelismes existents entre les característiques analítiques d'una funció i la seva representació gràfica. En particular, inferir propietats de les funcions a partir de la seva gràfica.

Resum Teòric

Ens referirem a gràfiques de funcions reals d'una variable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les mateixes tècniques es poden adaptar a la representació gràfica de corbes qualssevol a $\mathbb{R}^2$, però no és el nostre objectiu.

Exposarem la manera estàndard de representar funcions, que recull els factors necessaris per veure plasmat al paper tot allò que el *"nostre ull"* pot veure d'una corba. Cal ser conscients, però, que moltes vegades no ens interessa la gràfica completa; per resoldre segons quines qüestions sovint n'hi ha prou amb estudiar algun/s del/s punt/s que exposarem a continuació. Per això, creiem important observar la missió particular de cada un dels passos i **no** pensar que representar una gràfica és simplement aplicar una *"recepta màgica"* que consisteix en:

1. Saber, d'entrada, per a quins valors de la variable x la funció $f(x)$ està definida. En altres paraules, convé estudiar el domini de f. Funcions com $\tan x$, $\log x$, $\frac{1}{x} \cdots$ no estan definides arreu de $\mathbb{R}$, circumstància que s'ha de tenir en compte.

2. Detectar *"repeticions de patrons"*; és a dir, esbrinar si una part de la gràfica es repeteix en un altre lloc. Aquest, que no és un pas important, ens pot servir per a estalviar-nos feina o, si més no, per corroborar els resultats que vagin sortint més endavant (en llenguatge informàtic, diríem que ha d'estar en *"memòria resident"*, llest per a actuar en qualsevol moment). Les *"repeticions de patrons"* més habituals són:

   Paritat:

$f(x)$ és una ***funció parella*** si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D(f)$.

$f(x)$ és una ***funció senar*** si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Aquestes propietats asseguren que quan es tracta amb funcions simètriques (nom genèric) es pot deduir la gràfica per a $x < 0$ de la gràfica per a $x > 0$.
Per exemple, les funcions $\cos x$, x^{2m} $(m \in \mathbb{Z})$ o les de la forma $g(x) + g(-x)$ són parelles, mentre que les funcions x^{2m+1} $(m \in \mathbb{Z})$, $\sin x$ o les $g(x) - g(-x)\ldots$ són senars.

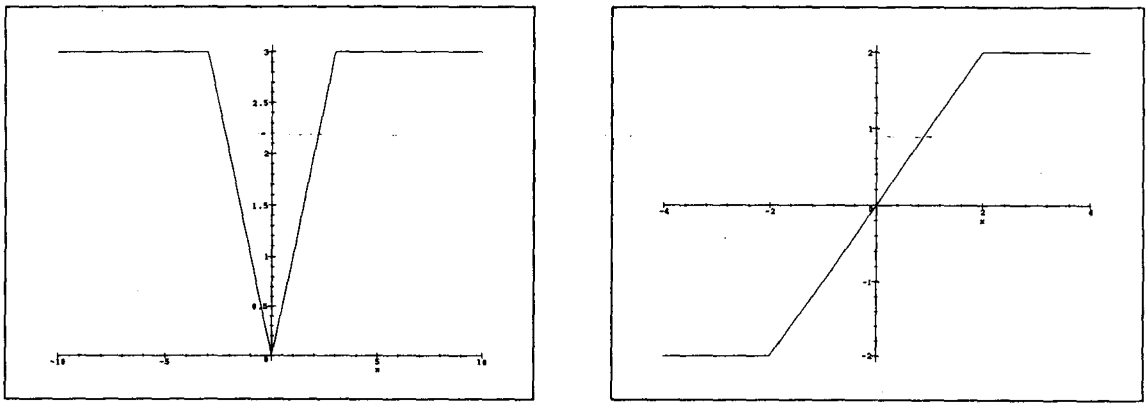


Figura 7.1: Una funció parella i una funció senar.

Periodicitat:

$f(x)$ és periòdica si $\exists \tau > 0$ tal que $f(x + \tau) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.
El mínim nombre τ que satisfà aquesta propietat s'anomena el ***període de la funció*** Així, doncs, per a representar una funció periòdica, només cal representar-la en un interval de longitud τ dins de $D(f)$ i reproduir aquest tros de gràfica indefinidament al llarg de tot el domini.
Els exemples més coneguts són les funcions trigonomètriques: $\sin x$ (període 2π), $\cos x$ (període 2π), $\tan x$ (període π), $\sin 2x$ (període π), $\cos 3x$ (període $\frac{2\pi}{3}$), $\sin mx$ (període $\frac{2\pi}{m}$)$\cdots$, així com d'altres funcions que les utilitzen com a variables: $f(\sin x)$, $f(\cos x)$,..., com ara, per exemple, $e^{\sin x}$ o $\ln(\cos x)$.

3. Controlar el comportament asimptòtic de les funcions; és a dir, decidir els llocs en què la gràfica se'n va a infinit i en quina direcció ho fa. Principalment, hi ha dos motius d'escapament: perquè x tendeixi a ∞ o perquè hi tendeix $f(x)$.

En el primer cas tenim les asímptotes horitzontals o obliqües, i en el segon, asímptotes verticals. La manera de tractar-les analíticament és la següent:

Asímptotes horitzontals: $y = y_0$ és AH si i només si

$$y_0 = \lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

Per exemple, totes les funcions $f(x) = \dfrac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$, amb $a_m \cdot b_m \neq 0$ i $m \in \mathbb{N}$, tenen una AH en $y = \dfrac{a_m}{b_m}$ tant per a $x \to -\infty$ com per a $x \to +\infty$. La funció e^x té una AH per a $x \to -\infty$.

Asímptotes obliqües: $y = mx + n$, amb $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{R}$, és AO si i només si

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx.$$

Per exemple, totes les funcions $f(x) = \dfrac{a_{m+1} x^{m+1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$, amb $a_{m+1} \cdot b_m \neq 0$ i $m \in \mathbb{N}$ tenen una AO.

Observeu que tant les AH com les AO ens descriuen el comportament de la funció quan $x \to \pm\infty$ i que, per tant, per a valors finits de x poden ser tallades per la gràfica. D'altra banda, aquest mateix raonament ens diu que no poden coexistir. El que si pot passar és que tinguem una AH quan $x \to -\infty$ i una AO quan $x \to +\infty$, o viceversa.

Asímptotes verticals: $x = x_0$ és una AV si i només si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

El cas més freqüent d'AV es dóna quan la funció es pot expressar en forma de fracció que té zeros al denominador, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tot i que cal estudiar que $Q(x)$ no tingui zeros en comú amb $P(x)$.

Per exemple:

$$\frac{x}{x-1} \quad \text{té una AV en } \; x = 1,$$

$$\frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{no té AV en } \; x = 1 \; \text{ però sí a } \; x = -1.$$

4. Estudiar els zeros i singularitats de les derivades de f. Això ho farem basant-nos en els següents fets (suposem que f és m-vegades derivable en un entorn de x_0):

f és creixent en x_0 (resp., decreixent) si $f'(x_0) > 0$ (resp., < 0).

f és convexa en x_0 (resp., còncava) si $f''(x_0) > 0$ (resp., < 0).

Si $f'(x_0) = 0$, cal estudiar les derivades d'ordre superior fins que en trobem una diferent de zero ($f^{(m)}(x_0) \neq 0$). Llavors, sorgeixen dos casos:

a) si m és parell i $f^{(m)}(x_0) > 0$ (resp. < 0), x_0 és mínim (resp., màxim) relatiu de f.

b) si m és senar, x_0 és un punt d'inflexió de f.

En una funció suficientment derivable, aquests són els únics extrems relatius (màxims o mínims) o punts d'inflexió que poden sortir. Fixem-nos que, en particular, x_0 és mínim (resp., màxim) relatiu de f si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ (resp., < 0). I també, que x_0 és punt d'inflexió si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$.

Aquests fets ens obliguen a calcular, d'entrada, les dues primeres derivades i els seus zeros. A més, cal tenir cura dels punts en què la funció deixi de ser derivable, ja que poden marcar un canvi de comportament, tant en el creixement com en la concavitat (vegeu, per exemple, l'exercici 17 de la secció 7.2).

5. Concretar els intervals de creixement/decreixement de la funció dins del seu domini. Els extrems d'aquests intervals han de ser: extrems del domini, extrems relatius, punts de discontinuïtat o punts en què la funció deixi de ser derivable. Els marcarem gràficament damunt una recta i a cadascun dels intervals resultants estudiarem el signe de la derivada ($f' > 0$, creixent; $f' < 0$, decreixent).

   Anàlogament, per concretar els intervals de concavitat/convexitat, dividirem el domini de la funció usant com a fites els punts d'inflexió, els extrems del domini, els punts de discontinuïtat i aquells en què alguna de les dues primeres derivades de la funció deixi d'existir. A cadascun dels intervals resultants, hi estudiarem el signe de la segona derivada ($f'' > 0$, f convexa; $f'' < 0$, f còncava).

Tal com hem dit a l'inici d'aquesta exposició, convé no aplicar aquests punts automàticament. Cal preguntar-se, en cada pas, què significa el càlcul que estem duent a terme. Només així es poden estalviar errors de concepte, contradiccions i, sovint, més d'un càlcul superflu.

7.1 Exercicis resolts

1. Estudieu i representeu gràficament les funcions $f(x) = |x|$ i $g(x) = E(x) = [x]$.

La funció valor absolut $f(x) = |x|$ es pot escriure com una funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

El domini són tots els reals; és contínua en tot el domini, ja que per $x < 0$ és una recta i per $x > 0$ també ho és. En $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} -x = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Però no és derivable en $x = 0$ ja que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

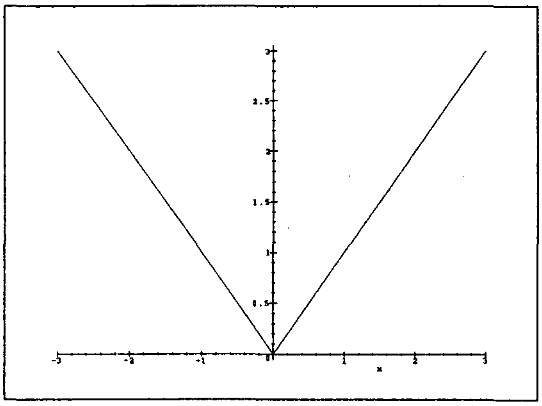
La funció part entera de x, $g(x) = E(x) = [x]$, es pot definir com:

$$g(x) = k \quad \text{si} \quad k \leq x < k + 1 \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

El domini són tots els reals però en els punts $x = k \in \mathbb{Z}$ no és contínua,

$$\lim_{x \to k^-} g(x) = k - 1 \quad , \quad \lim_{x \to k^+} g(x) = k \quad \text{i} \quad g(k) = k$$

per tant la funció part entera de x té discontinuïtats de salt.



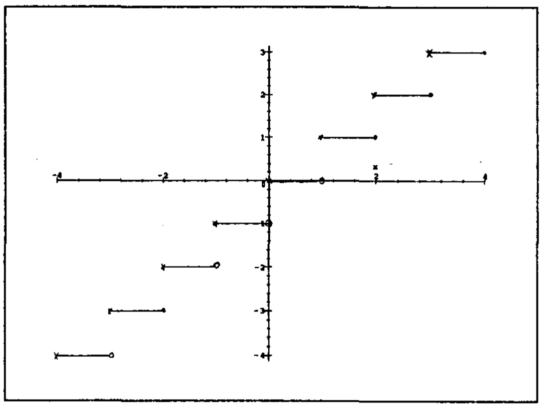


Figura 7.2: Gràfiques de les funcions $f(x) = |x|$ i $g(x) = E(x)$.

---

2. Representeu gràficament $f(x) = \log(1 + \sin x)$.

El domini de la funció serà aquell on $1 + \sin x > 0$, per tal que tingui sentit aplicar logaritmes. Llavors, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La funció és periòdica de període 2π atès que la primera funció que actua sobre x és un sinus. Dit d'una altra manera: com que $\sin x = \sin(x + 2\pi)$, aleshores $\log(1 + \sin x) = \log(1 + \sin(x + 2\pi))$.

Donada la periodicitat, restringim l'estudi de la funció a l'interval $(-\pi, \pi]$. Observem, primer, que

$$\lim_{x \to -\pi/2} f(x) = -\infty.$$

Així, $x = -\pi/2$ és una asímptota vertical.

La pròpia periodicitat fa que sigui absurd parlar d'asímptotes horitzontals i obliqües.

Calculem ara les derivades:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}; \qquad f''(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}.$$

Clarament, $f'(x) = 0$ si i només si $x = \pm\pi/2$. El creixement/decreixement, doncs, queda resumit així:

$$(-\pi, -\pi/2) \downarrow, \quad (-\pi/2, \pi/2) \uparrow, \quad (\pi/2, \pi) \downarrow .$$

D'altra banda, la segona derivada mai no s'anul.la, i l'estudi de la concavitat/convexitat resulta ser:

$$(-\pi, -\pi/2)\cap, \quad (-\pi/2, \pi) \cap .$$

El resultat final de la gràfica queda reflectit a la Figura 7.3

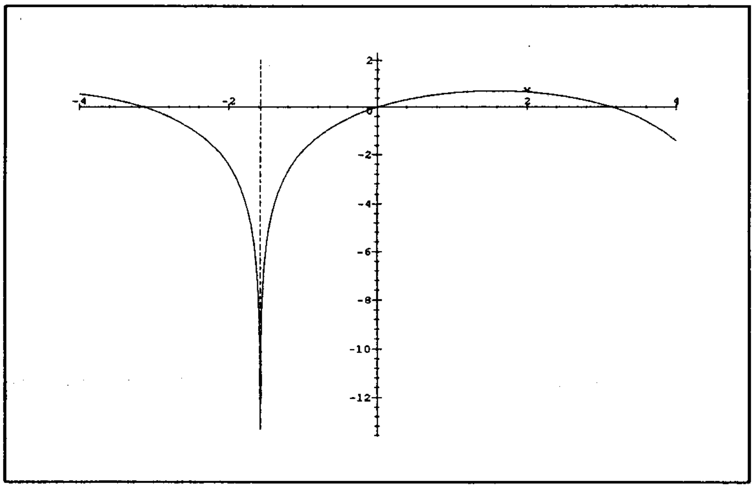


Figura 7.3: Gràfica de $\log(1+\sin x)$.

3. Representeu gràficament $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

El domini de $f(x)$ és

$$D(f(x)) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

La funció és senar ja que $f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$.

Vegem si té cap asímptota. Començarem amb les AH. Per això, hem de calcular el següent límit:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$$

Per tant, no hi ha AH.

Quant a les asímptotes obliqües, veiem que:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Així, $y = -x$ és AO, tant per a $x \to +\infty$ com per a $x \to -\infty$.

Pel que fa les AV, el fet que

$$\lim_{x\to\pm 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$$

ens confirma que $x = \pm 1$ són AV.

Les dues primeres derivades de la funció són:

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}; \quad f''(x) = \frac{x^2(2x^2+6)}{(1-x^2)^3}.$$

L'estudi del creixement el fem observant primer que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$. Dividim, doncs, els intervals en:

$$(-\infty, -\sqrt{3}) \downarrow,\ (-\sqrt{3}, -1) \uparrow,\ (-1, 0) \uparrow$$

.

Per estudiar les $x > 0$, utilitzem el fet que la funció és senar.

Per a la concavitat/convexitat, tenim en compte que la segona derivada només s'anul.la a $x = 0$. Els intervals que considerem són

$$(-\infty, -1)\cup,\ (-1, 0)\cap,$$

i apliquem la simetria altra vegada.

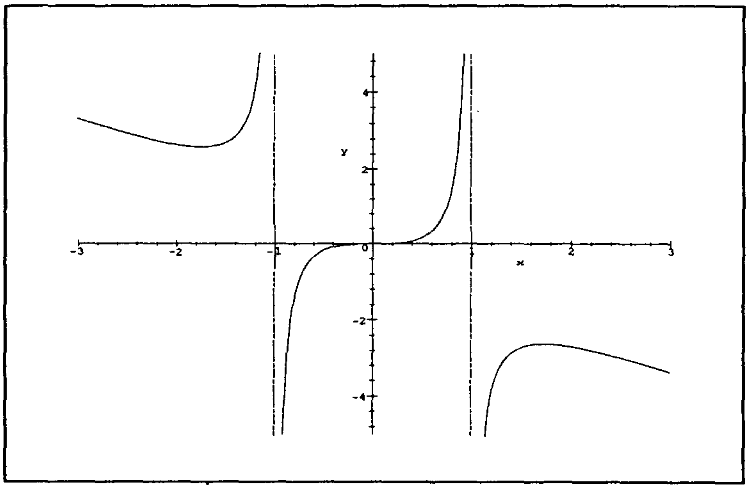


Figura 7.4: Gràfica de la funció $x^3/(1 - x^2)$.

---

4. Representeu gràficament $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

El domini de $f(x)$ són tots els reals excepte els que fan 0 el denominador, és a dir, $D(f(x)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f(x)$ no és ni parella ni senar, ni tampoc és periòdica.

Passem ara a l'estudi de les asímptotes. Observem que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{x} = 0;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = +\infty.$$

Aquestes igualtats ens informen que hi ha una AH, $y = 0$, per a $x \to -\infty$, però que no hi ha ni AH ni AO quan $x \to +\infty$.

D'altra banda, $x = 0$ és AV i compleix que $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{e^{2x}}{x} = \pm\infty$.

Per estudiar el creixement i decreixement necessitem conèixer la primera derivada. Aplicant les regles de derivació usual, obtenim que

$$f'(x) = \left(\frac{e^{2x}}{x}\right)' = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

El punt on s'anul.la $f'(x)$ és $x = \frac{1}{2}$. Tenint en compte això i el punt $x = 0$, on la derivada no està definida, els intervals de creixement/decreixement són

$$(-\infty, 0) \downarrow,\ (0, \frac{1}{2}) \downarrow,\ (\frac{1}{2}, \infty) \uparrow$$

A $x = \frac{1}{2}$ hi ha un mínim relatiu, atès que la funció passa de decréixer a l'esquerra d'aquest punt a créixer a la seva dreta.

L'estudi de la concavitat/convexitat de la funció requereix estudiar el signe de la segona derivada i per això ens cal saber els punts on s'anul.la (o bé on no està definida). En aquest cas,

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3},$$

que no té solucions reals. Així, $f(x)$ és còncava a $(-\infty, 0)$ i convexa a $(0, +\infty)$.

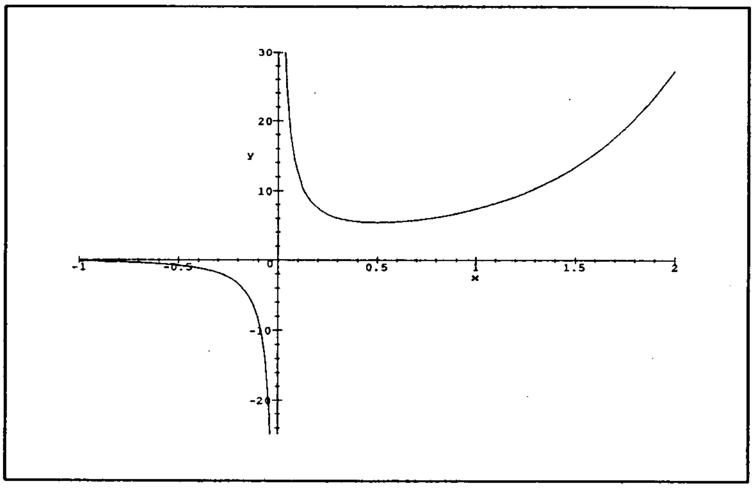


Figura 7.5: Gràfica de la funció e^{2x}/x.

5. Representeu gràficament la funció $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

El domini de la funció és $D(f) = [-1, 1]$.

No té sentit plantejar-se si hi ha periodicitat ni si hi ha asímptotes. En canvi, es veu directament que és una funció parella.

Les derivades són $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ i $f''(x) = \dfrac{-1}{(1 - x^2)^{3/2}}$. Així, $f(x)$ és creixent a $[-1, 0)$ i decreixent a $(0, 1]$. En canvi, és còncava a tot l'interval $[-1, 1]$.

La gràfica serà la de la Figura 7.6.

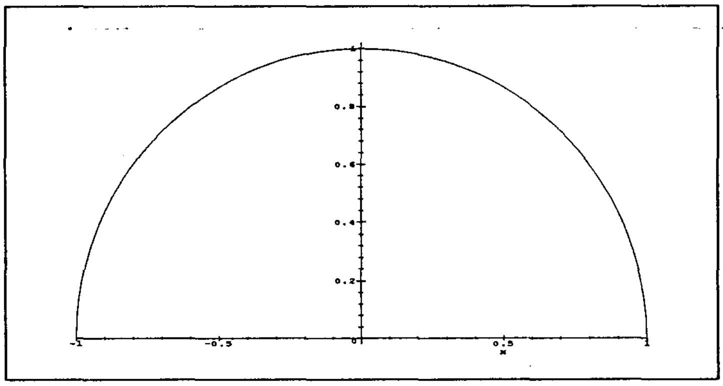


Figura 7.6: Gràfica de la funció $\sqrt{1 - x^2}$.

Observeu, a més, que $y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. És a dir, que el que hem dibuixat és la semicircumferència superior de radi 1. Evidentment, $y = -\sqrt{1 - x^2}$ donaria la semicircumferència inferior.

6. Representeu gràficament la funció $f(x) = \sin(\arccos x)$.

Hi ha dues alternatives:

1. Començar a fer l'anàlisi habitual de representació gràfica. . . i passar-s'hi una bona estona!
2. "Enflairar" que $\sin(\arccos x)$ admet una simplificació i dur-la a terme. De fet, com que $\cos(\arccos x) = x$ i $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$, es dedueix que

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. Només cal una mica de memòria o la vista prou àgil per adonar-se que aquesta és la funció de l'Exercici 9, i plegar veles.

Val a dir que si hom s'obstina en seguir la primera opció, ben aviat, en buscar el domini o fer les derivades, es pot adonar de les coincidències amb la funció analitzada a l'Exercici 4.

---

7. a) Representeu gràficament $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

b) Utilitzeu el resultat per demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

---

a) Estudi de la funció $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

- El domini de $f(x)$ és $D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$
- Pel tipus de domini, no té sentit plantejar-se simetries (parella o senar). A més, en no haver-hi funcions trigonomètriques, tampoc tenim cap mena de periodicitat.
- Pel que respecta a les asímptotes, observem que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty;$$
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$
fets els quals ens permeten assegurar que hi ha una AV en $x = 1$ i no n'hi ha d'horitzontals ni d'obliqües. El primer límit anul.la la possibilitat d'una AV en $x = 0$, mentre que els dos darrers exclouen les AH i les AO.
- Les primeres derivades de la funció són $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$.
- Així, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Donat que $f''(e) = \dfrac{1}{e} > 0$, això ens indica que en $x = e$ la funció té un mínim relatiu, i ens permet fer l'anàlisi del creixement/decreixement:

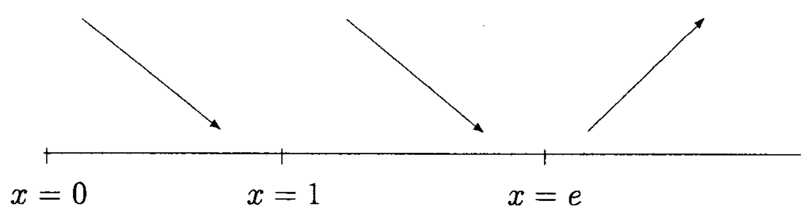


Figura 7.7: Intervals de creixement/decreixement.

- D'altra banda, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = \ln x \Leftrightarrow x = e^2$. Aquest és el candidat a punt d'inflexió, aspecte que queda confirmat en l'anàlisi de la concavitat/convexitat:

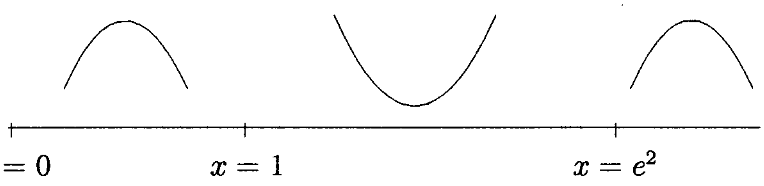


Figura 7.8: Intervals de concavitat/convexitat.

- En resum, la gràfica queda així

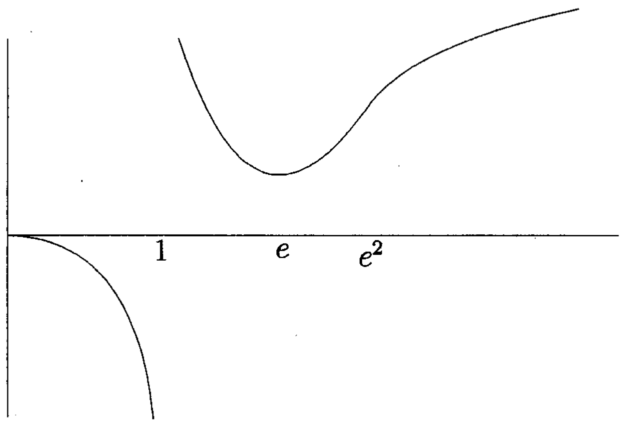


Figura 7.9: Gràfica de la funció $x/\log x$.

b) Hem vist a l'apartat a) que la funció és creixent a $(e, +\infty)$, i que $x = e$ és el mínim absolut de $f(x)$ a $(1, +\infty)$. Està clar, doncs, que $f(\pi) > f(e)$ i, per tant,

$$\frac{\pi}{\ln \pi} > \frac{e}{\ln e} \Leftrightarrow \pi \ln e > e \ln \pi$$

Finalment, la darrera desigualtat és equivalent a $e^\pi > \pi^e$, ja que el logaritme també és una funció creixent.

8. Les gràfiques (a), (b), (c) i (d) de les Figures 7.10 i 7.11 corresponen a les funcions $e^{\cos x}$, $e^{\sin x}$, $\sin(e^x)$ i $\sin(\log x)$, a l'interval $[0, 7]$. El problema és que no en coneixem l'ordre. Sense fer cap càlcul sobre paper, seríeu capaços de dir quina és quina?

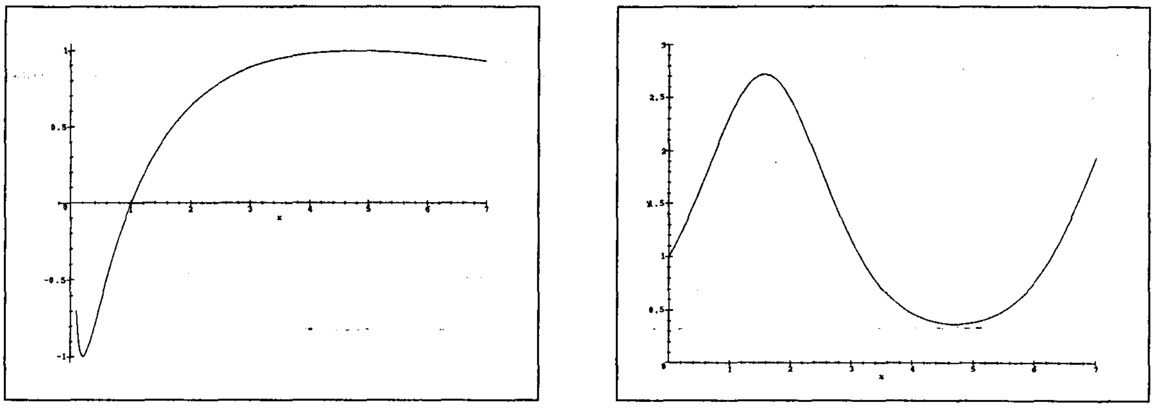


Figura 7.10: Gràfiques (a) i (b).

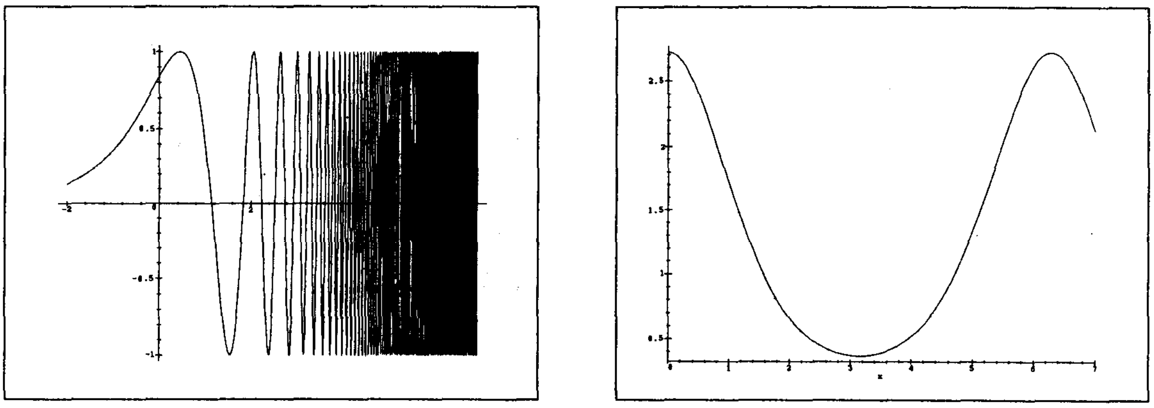


Figura 7.11: Gràfiques (c) i (d).

Fixem-nos que tant $e^{\cos x}$ com $e^{\sin x}$ han de ser funcions periòdiques de període 2π. Això es dóna perquè, malgrat que després es composi amb una exponencial, la variable es veu afectada en *primera instància* per una funció trigonomètrica. Per tant, només cal distingir entre les gràfiques (b) i (d). Hi ha moltes maneres de distingir aquests dos casos; en particular, en un entorn a la dreta del zero, $e^{\cos x}$ ha de ser decreixent, mentre que $e^{\sin x}$ ha de ser creixent. Així, (b) correspon a $e^{\sin x}$ i (d), a $e^{\cos x}$.

Per distingir les altres dues, només cal pensar que e^x creix més ràpidament que $\log x$, fet que provoca que les oscil.lacions sota la funció $\sin x$ siguin més ràpides en el cas exponencial. Així, (c) correspon a aquesta, mentre que (a) correspon a $\sin(\log x)$.

---

9. Cerqueu una funció que tingui dues asímptotes verticals, una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ però que no en tingui quan $x \to +\infty$. Justifiqueu la vostra resposta.

La manera més habitual d'obtenir una funció amb AV és que sigui fraccionària i provocar que s'anul.li el denominador. Així, per tenir-ne dues, cal pensar en una funció del tipus

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \quad \text{amb} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha \neq \beta).$$

El *"paradigma"* de les funcions amb AH quan $x \to -\infty$ i sense AH quan $x \to +\infty$ són les exponencials. Així, combinant les dues propietats requerides, podríem proposar una funció del tipus

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)(x-\beta)} \quad \text{amb} \quad a, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \beta,\ a > 0.$$

La seva gràfica seria com ara:

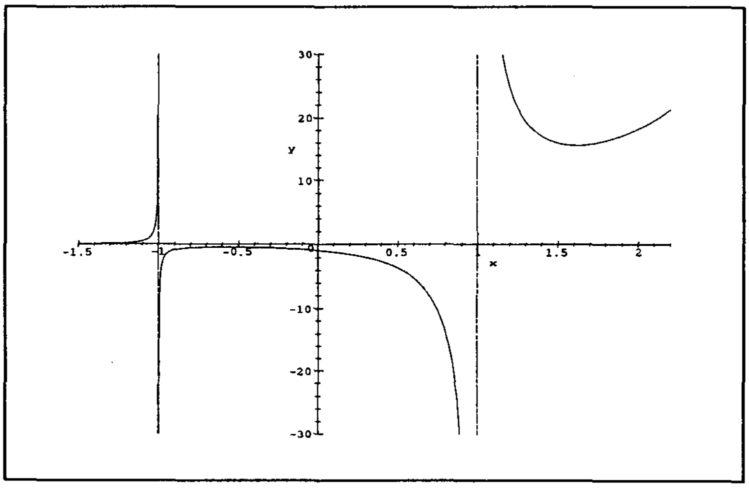


Figura 7.12: Aspecte genèric de les funcions $e^{ax}/((x-\alpha)(x-\beta))$

10. Considereu les funcions

$$F_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}^{n} \frac{\cos k\pi}{k^2}.$$

a) Desenvolupeu l'expressió per a $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Utilitzeu un manipulador algebraic per a representar-les gràficament.

c) Feu l'estudi de la gràfica de $F_n(x)$ per a $n = 1, 2$ (en algun punt us convindrà utilitzar que $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ i que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$).

---

a) Per realitzar aquest primer primer apartat només cal substituir el valor de n a l'expressió de $F_n(x)$.

$$F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos x$$

$$F_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{\cos 2x}{4})$$

$$F_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9})$$

$$F_4(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16})$$

b) A la Figura 7.13 hi ha els casos $n = 1$ i $n = 2$; a la Figura 7.14, els casos $n = 3$ i $n = 4$.

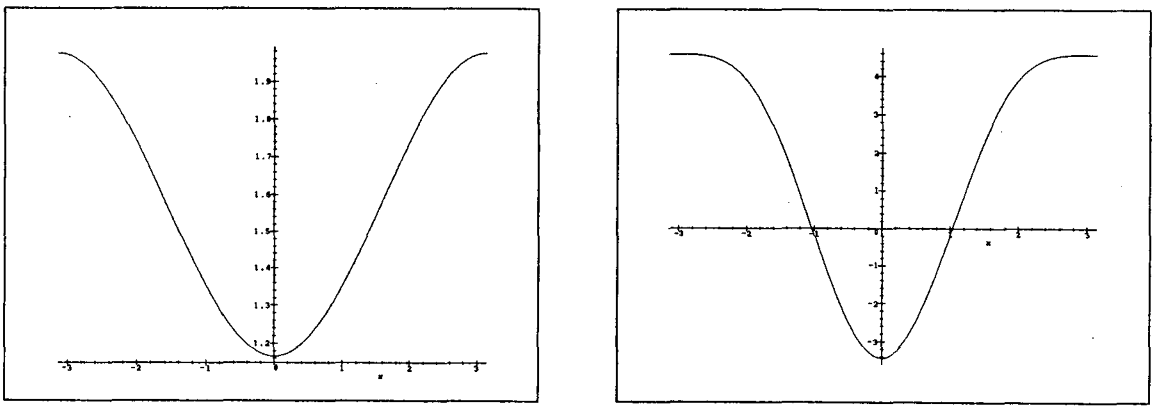


Figura 7.13: Gràfiques de les funcions $F_1(x)$ i $F_2(x)$ a l'interval $[-\pi, \pi]$.

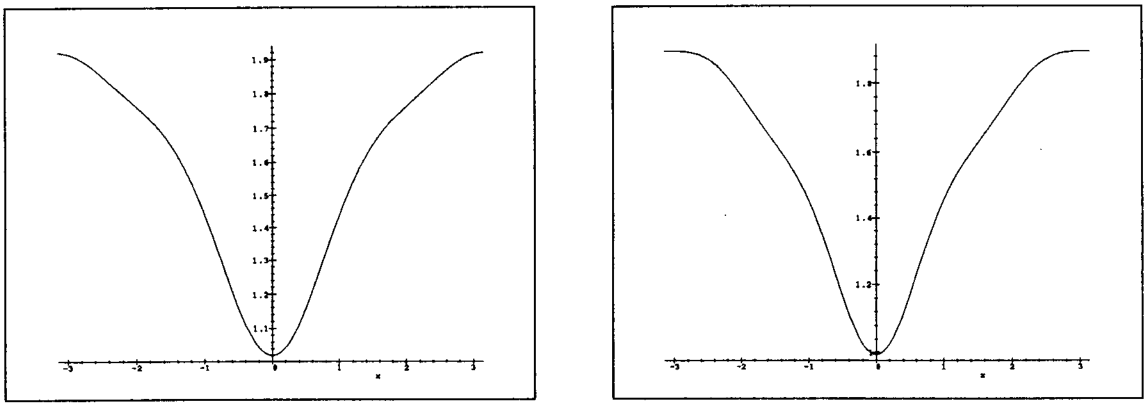


Figura 7.14: Gràfiques de les funcions $F_3(x)$ i $F_4(x)$ a l'interval $[-\pi, \pi]$.

c) Les funcions $F_n(x)$ són periòdiques de període 2π. Per això només les estudiarem a l'interval $[0, 2\pi]$.

Vegem què passa per a $n = 1$: $F_1(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\cos x$.
No cal fer un estudi convencional perquè ja coneixem la funció cosinus. A partir d'aquesta, multipliquem y pel factor de $-\dfrac{4}{\pi^2}$ i li sumem $\dfrac{\pi}{2}$, vegeu la primera gràfica de la Figura 7.13.

Vegem què passa per a $n = 2$: $F_2(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}(\cos x + \dfrac{\cos 2x}{4})$.
Per ser periòdica, ens estalviem tots els passos preliminars (el més important és que no té asímptotes) i passem directament a l'estudi de les derivades:

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{4}{\pi^2}(\sin x + \frac{\sin 2x}{2}) \\ F_2''(x) &= \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \cos 2x) \end{aligned}$$

Detectem els possibles extrems relatius resolent $F_2'(x) = 0$:
$F_2'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow -2\sin x = \sin 2x$.
Si utilitzem la indicació de l'enunciat, veiem que això equival a

$$-2\sin x = 2\sin x \cos x.$$

Per tant,

$$F_2'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \sin x &=& 0, \\ \text{o bé} && \\ \cos x &=& -1, \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi.$$

L'estudi dels intervals de creixement/decreixement es pot resumir així:

$$(0,\pi)\uparrow, \quad (\pi,2\pi)\downarrow.$$

Per tant, i tenint en compte la periodicitat, ja veiem que els punts $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, són mínims relatius i que $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, són màxims relatius.
En referència als punts d'inflexió i a la concavitat, tenim que

$$F_2''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\cos 2x \Leftrightarrow \cos x = -(2\cos^2 x - 1) \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Si fem el canvi $y = \cos x$, hem de solucionar l'equació de segon grau

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -1, \\ y & = & \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Per tant, $F_2''(x)$ només s'anul.la quan $\cos x = -1$ o bé quan $\cos x = \frac{1}{2}$. Els valors de x que compleixen aquests requisits són $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$.
Ja hem vist que $x = \pi$ era un màxim; per tant, els únics punts d'inflexió són $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$. Això es confirma veient que

$$F_2'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -F_2'''\left(\frac{5\pi}{3}\right) \neq 0.$$

---

11. Considereu les funcions del tipus $f(x) = \dfrac{x^m}{a + x^n}$, amb $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Quant han de valer a i n perquè $D(f) = \mathbb{R}$?

b) Suposeu que $n = 3$. Quant ha de valer m perquè $f(x)$ tingui algun extrem relatiu?

---

a) El domini serà $\mathbb{R}$ si i només si l'equació $a + x^n = 0$ no té solució real. Analitzarem els diferents casos:

(i) Si $a > 0$, $x^n + a = 0$ té solució real $x = \sqrt[n]{-a}$, només quan n és senar.

(ii) Si $a = 0$, $f(x) = x^{m-n}$, funció que té domini complet si i només si $m \geq n$.

(iii) Si $a < 0$, l'equació $x^n + a = 0$ té solució real per a tota $n \in \mathbb{N}$.

En conclusió, $D(f) = \mathbb{R}$ només en els següents casos:

(i) $a > 0$, n parell.

(ii) $a = 0$, $m \geq n$.

b) Si $n = 3$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{-a}\}$ i $x = \sqrt[3]{-a}$ és una AV. Per a avaluar els extrems relatius, efectuem la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x^{m-1}(am + (m-3)x^3)}{(a+x^3)^2}.$$

Això ens planteja diferents casos:

(i) Si $m = 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$. Els intervals de creixement/decreixement són aleshores:

$$(-\infty, \sqrt[3]{-a}) \uparrow,\ (\sqrt[3]{-a}, \sqrt[3]{a/2}) \uparrow,\ (\sqrt[3]{a/2}, +\infty) \downarrow .$$

En aquest cas, doncs, s'assoleix un màxim relatiu.

(ii) Si $m = 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \sqrt[3]{2a}$. Tenim la següent situació:

$$(-\infty, \sqrt[3]{-a}) \downarrow,\ (\sqrt[3]{-a}, 0) \downarrow,\ (0, \sqrt[3]{2a}) \uparrow,\ (\sqrt[3]{2a}, +\infty) \downarrow .$$

També s'assoleix un màxim relatiu.

(iii) Si $m = 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$(-\infty, \sqrt[3]{-a}) \uparrow,\ (\sqrt[3]{-a}, 0) \uparrow,\ (0, +\infty) \uparrow .$$

No hi ha, doncs, cap màxim relatiu.

(iv) $m \neq 1, 2, 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \sqrt[3]{\frac{am}{3-m}}$. El comportament és lleugerament diferent segons si m és parell o senar. El cas m senar presenta la següent estructura:

$$(-\infty, \sqrt[3]{-a}) \downarrow,\ (\sqrt[3]{-a}, \sqrt[3]{\frac{am}{3-m}}) \downarrow,\ (\sqrt[3]{\frac{am}{3-m}}, 0) \uparrow,\ (0, +\infty) \uparrow .$$

i, per tant, no aporta màxims relatius però sí mínims. I el cas m parell:

$$(-\infty, \sqrt[3]{-a}) \uparrow,\ (\sqrt[3]{-a}, \sqrt[3]{\frac{am}{3-m}}) \uparrow,\ (\sqrt[3]{\frac{am}{3-m}}, 0) \downarrow,\ (0, +\infty) \uparrow,$$

que aporta tant màxims com mínims relatius.

7.2 Exercicis Proposats

Representeu gràficament les funcions següents:

1) $(x^2-1)^2$	2) $x^{2/3}(1-x)$
3) $\dfrac{x}{x^2+1}$	4) $x+1+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$
5) $\lvert 2-x^2\rvert$	6) $e^x\cos x$
7) $x(x^2+4)^2$	8) $\sqrt{x-x^2}$
9) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$	10) $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-3}}$
11) $\dfrac{3x-2}{x+1}e^{(3x-2)/(x+1)}$	12) $\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$
13) $\dfrac{x^3}{1-x^3}$	14) $x\sqrt{9-x^2}$
15) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$	16) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-3x+2}}$
17) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$	18) $200x(1-x)$
19) $x^3-3x^2+\dfrac{299}{100}x-\dfrac{99}{100}$	20) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{200}$

Les tres darreres, proveu de visualitzar-les en una calculadora o ordinador. Hi veieu directament els màxims, mínims i punts d'inflexió que heu predit?

7.3 Solució als exercicis proposats

Abreviacions i símbols usats. Dom = Domini; PT = Punts de tall; Sim = Simetries; As = Asímptotes; Mm = Màxims i mínims; $\uparrow\ \downarrow$ = Creixement/Decreixement; PI = Punts d'inflexió; $\cup\ \cap$ = Convexitat/Concavitat; $\wedge$ = Funció no derivable en aquest punt; (H), (V), (O) = Asímptotes horitzontals, verticals i obliqües, resp.

1. $(x^2-1)^2$.

   Dom: $\mathbb{R}$ PT: $(-1,0),\ (1,0),\ (0,1)$

   Sim: Parella As: No

   Mm: $x=-1,1$ (M), $x=0$(m) C/D: $(-\infty,-1)\downarrow,\ (-1,0)\uparrow,\ (0,1)\downarrow,\ (1,+\infty)\uparrow$

   PI: $x=-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}$ Conc.: $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup,\ (-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})\cap,\ (\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)\cup$

2. $x^{2/3}(1-x)$.

   Dom: $\mathbb{R}$ PT: $(0,0),\ (1,0)$

   Sim: No As: No

   Mm: $x=2/5$ (M), $x=0\ \wedge$ (m) C/D: $(-\infty,0)\downarrow,\ (0,2/5)\uparrow,\ (2/5,+\infty)\downarrow$

   PI: $x=-1/5$ Conc.: $(-\infty,-1/5)\cup,\ (-1/5,0)\cap,\ (0,+\infty)\cap$

3. $\dfrac{x}{x^2+1}$.
   Dom: $\mathbb{R}$
   PT: $(0,0)$
   Sim: Senar
   As: $y=0,\ x\to\pm\infty$(H)
   Mm: $x=1$ (M), $x=-1$ (m)
   PI: $x=0,-\sqrt{3},\sqrt{3}$

C/D: $(-\infty,-1)\downarrow,\ (-1,1)\uparrow,\ (1,+\infty)\downarrow$
Conc.: $(-\infty,-\sqrt{3})\cap,\ (-\sqrt{3},0)\cup,\ (0,+\sqrt{3})\cap,\ (+\sqrt{3},+\infty)\cup$

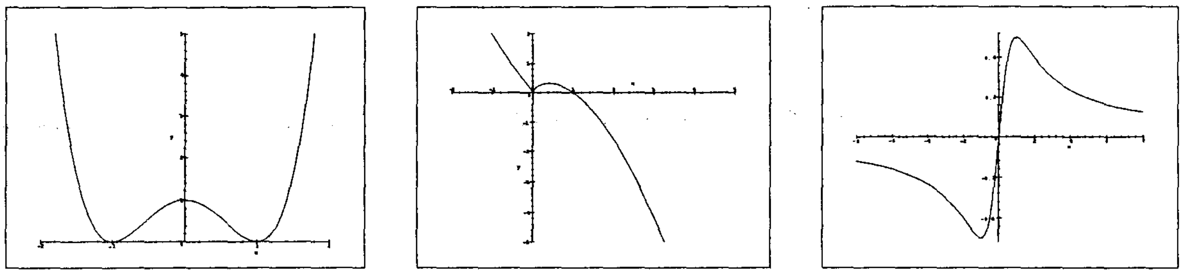


Figura 7.15: Gràfiques dels exercicis 1), 2) i 3)

4. $x+1+\sqrt{|x^2-1|}$.

Dom: $\mathbb{R}$
PT: $(-1,0),\ (0,2)$
Sim: No
As: $y=1,\ x\to-\infty(\mathrm{H});y=2x+1,\ x\to+\infty(\mathrm{O})$
Mm: $x=\sqrt{2}/2$ (M), $x=-1\wedge,\ 1\wedge$ (m)
PI: No
C/D: $(-\infty,-1)\downarrow,\ (-1,\sqrt{2}/2)\uparrow,\ (\sqrt{2}/2,1)\downarrow,\ (1,+\infty)\uparrow$
Conc.: Sempre $\cap$.

5. $|2-x^2|$.

Dom: $\mathbb{R}$
PT: $(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0),(0,2)$
Sim: Parell
As: No
Mm: $x=-\sqrt{2}\wedge,\ x=\sqrt{2}\wedge$ (m), $x=0$ (M)
PI: *No*
C/D: $(-\infty,-\sqrt{2})\downarrow,\ (-\sqrt{2},0)\uparrow,\ (0,\sqrt{2})\downarrow,\ (\sqrt{2},+\infty)\uparrow$
Conc.: $(-\infty,-\sqrt{2})\cup,\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap,\ (\sqrt{2},+\infty)\cup$

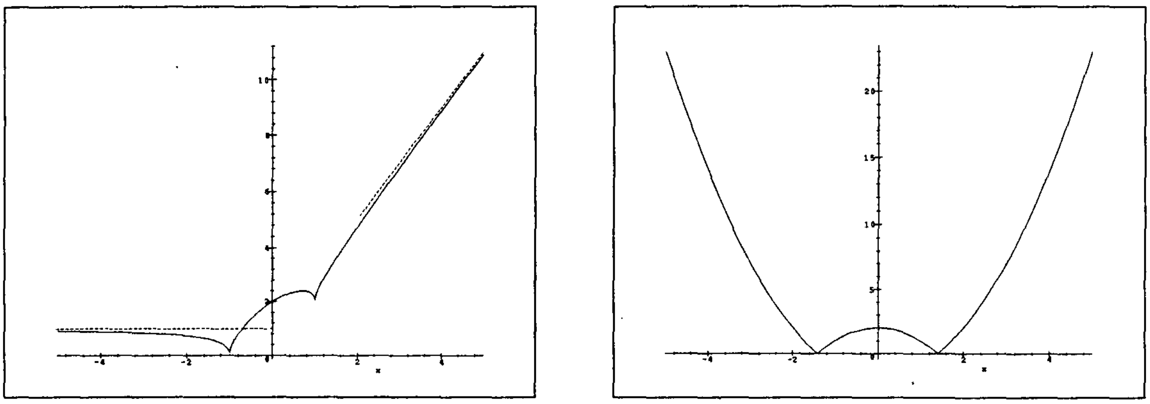


Figura 7.16: Gràfiques dels exercicis 4) i 5).

6. $e^x \cos x$.

Dom: $\mathbb{R}$
PT: $y = 0,\ x \to -\infty$(H)
Sim: No
As: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (M), $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ (m)
Mm: $(x^*, 0)$t.q.$x^* \in \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}, (0, 1)$
PI: $x = k\pi$
C/D: $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi) \downarrow,\ (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2(k+1)\pi) \uparrow$
Conc.: $(2k\pi, 2(k+1)\pi)\cap,\ (2(k-1)\pi, 2k\pi)\cup$

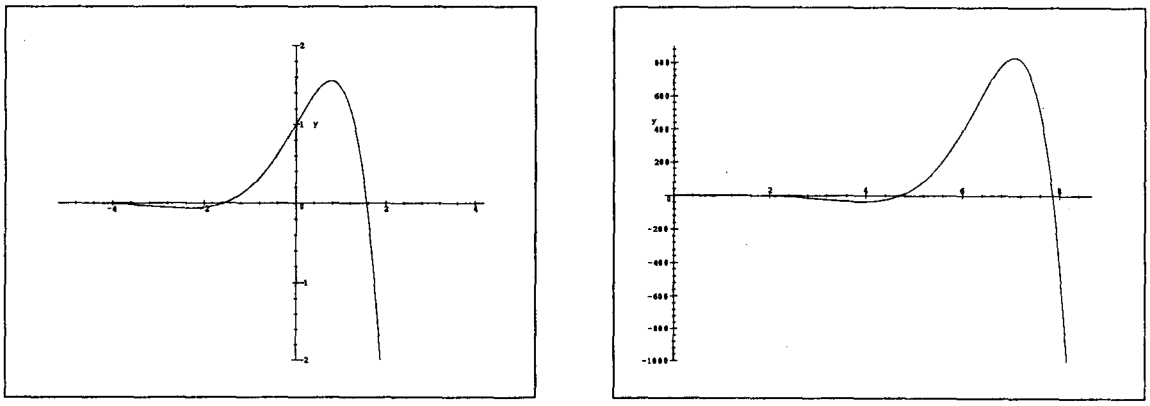


Figura 7.17: Gràfica de l'exercici 6).

7. $x(x^2 + 4)^2$.

Dom: $\mathbb{R}$ PT: $(0,0)$

Sim: Senar As: No

Mm: No C/D: Sempre creixent

PI: $x = 0$ Conc.: $(-\infty, 0)\cap$, $(0, +\infty)\cup$

8. $\sqrt{x - x^2}$.

Dom: $[0, 1]$ PT: $(0,0), (1,0)$

Sim: No As: No

Mm: $x = 0\wedge$, $1 \wedge$ (m), $x = 1/2$ (M) C/D: $(0, 1/2) \uparrow$, $(1/2, 1) \downarrow$

PI: *No* Conc.: Sempre $\cap$

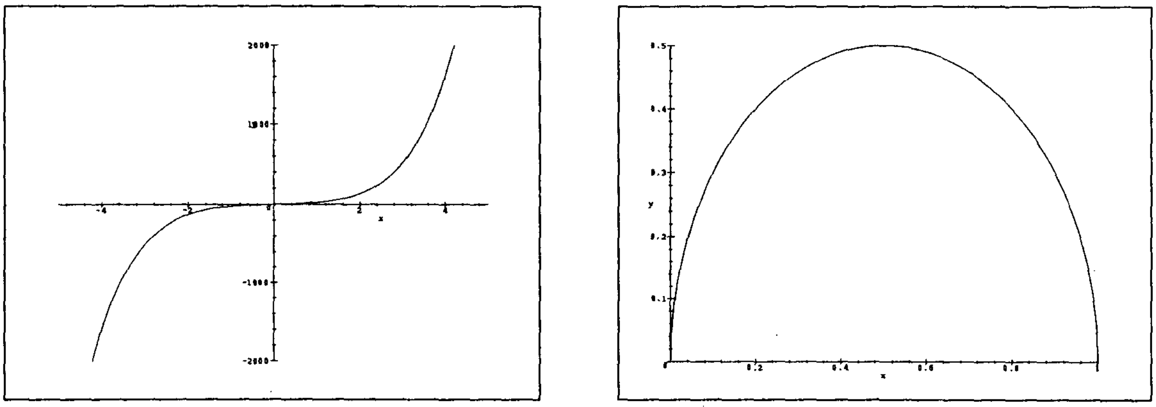


Figura 7.18: Gràfiques dels exercicis 7) i 8).

9. $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$.

Dom: $[0, +\infty)$ PT: $(0,1), (1,0)$

Sim: No As: $y = -1$, $x \to +\infty$(H)

Mm: No C/D: Sempre decreixent

PI: No Conc.: Sempre $\cup$

10. $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-3}}$.

Dom: $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$ PT: $(0,0)$

Sim: No As: $x = 3^+$(per la dreta) (V)

Mm: $x = 0 \ \wedge$ (m), $x = 9/2$ (m) C/D: $(-\infty, 0) \downarrow$, $(3, 9/2) \downarrow$, $(9/2, +\infty) \uparrow$

PI: No Conc.: Sempre $\cup$

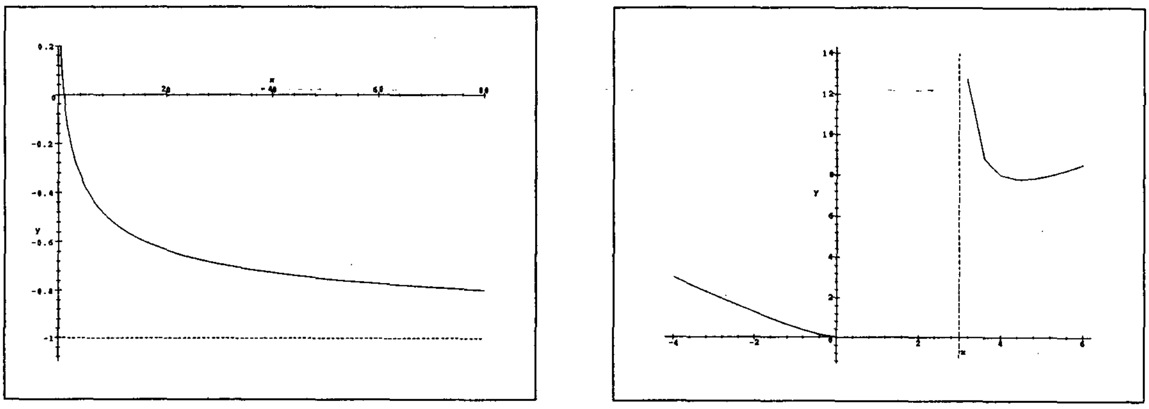


Figura 7.19: Gràfiques dels exercicis 9) i 10).

11. $\dfrac{3x-2}{x+1} e^{(3x-2)/(x+1)}$.

Dom: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
PT: $(0, -2e^{-2}), (2/3, 0)$
Sim: No
As: $x = -1^-$(per l'esquerra) (V); $y = 3e^3$, $x \to \pm\infty$
Mm: $x = 1/4$ (m)
PI: $x_1 = \frac{19-5\sqrt{17}}{16}, x_2 = \frac{19+5\sqrt{17}}{16}$
C/D: $(-\infty, -1) \uparrow$, $(-1, 1/4) \downarrow$, $(1/4, +\infty) \uparrow$
Conc.: $(-\infty, -1) \cup$, $(-1, x_1) \cap$. $(x_1, x_2) \cup$, $(x_2, +\infty) \cap$

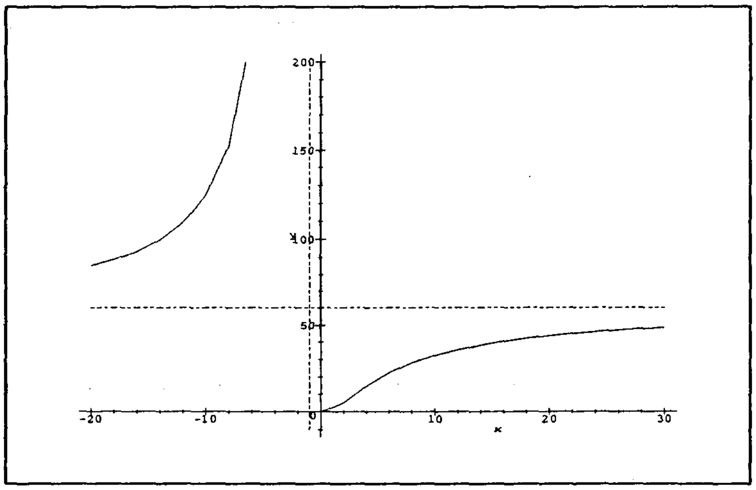


Figura 7.20: Gràfica de l'exercici 11).

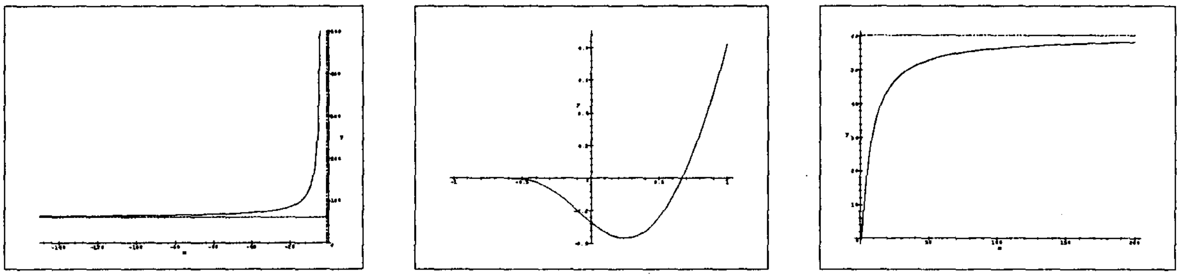


Figura 7.21: Detalls de la gràfica de l'exercici 11).

12. $\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

Dom: $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$	PT: No
Sim: Parell	As: $x=2,\ x=-2$(V); $y=1,\ x\to\pm\infty$(H)
Mm: $x=0$ (M)	C/D: $(-\infty,-2)\uparrow,\ (-2,0)\uparrow,\ (0,2)\downarrow,\ (2,+\infty)\downarrow$
PI: No	Conc.: $(-\infty,-2)\cup,\ (-2,2)\cap,\ (2,+\infty)\cup$

13. $\dfrac{x^3}{1-x^3}$.
Dom: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
PT: $(0,0)$

Sim: No
As: $y = -1$, $x \to \pm\infty$(H)
Mm: No
PI: $x = 0$, $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$
C/D: Sempre creixent
Conc.: $(-\infty, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}})\cup$, $(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}, 0)\cap$, $(0,1)\cup$, $(1,+\infty)\cap$

14. $x\sqrt{9-x^2}$.

Dom: $[-3,3]$
PT: $(-3,0),(0,0),(3,0)$
Sim: Senar
As: No
Mm: $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (M), $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (m)
PI: $x = 0$
C/D: $[-3, -\frac{3\sqrt{2}}{2}) \downarrow$, $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}) \uparrow$, $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3] \downarrow$
Conc.: $[-3,0)\cup$, $(0,3]\cap$

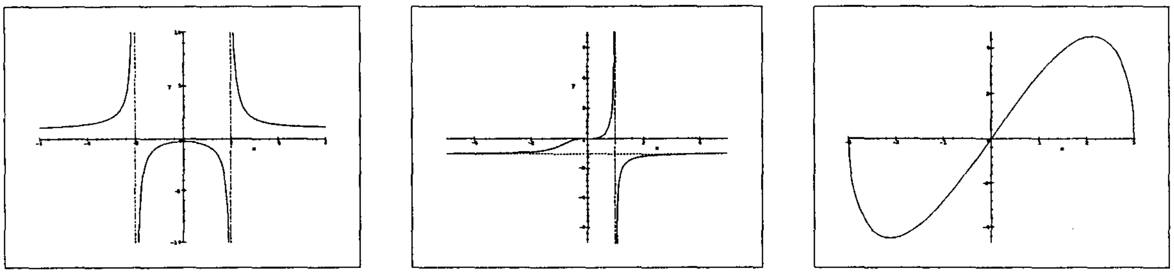


Figura 7.22: Gràfiques dels exercicis 12), 13) i 14).

15. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

Dom: $(-\infty, 1)$ PT: $(0,0)$

Sim: No As: $x = 1^-$(V)

Mm: No C/D: Sempre creixent

PI: No Conc.: Sempre $\cup$

16. $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-3x+2}}$.

Dom: $[0,1)\cup(2,+\infty)$
PT: $(0,0)$
Sim: No
As: $x=1^-$, $x=2^+$(V); $y=0$, $x\to+\infty$(H)
Mm: No
PI: $x\approx 0.199701 =: \overline{x}$(Vegeu nota)
C/D: $[0,1)\uparrow$, $(2,+\infty)\downarrow$
Conc.: $[0,\overline{x})\cap$, $(\overline{x},1)\cup$, $(2,+\infty)\cup$ *Nota: No és fàcil trobar $\overline{x}$. Cal resoldre una equació de 4rt grau, utilitzant algun mètode numèric.*

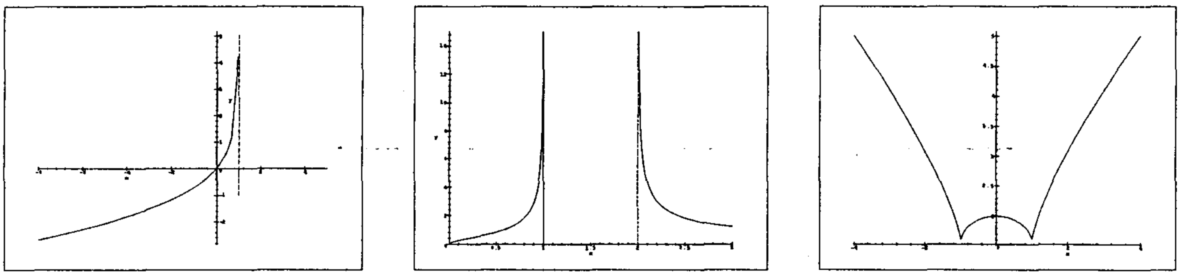


Figura 7.23: Gràfiques dels exercicis 15), 16) i 17).

17. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
Dom: $\mathbb{R}$
PT: $(0,2)$
Sim: Parell
As: No
Mm: $x=-1\wedge$, $x=1\wedge$ (m), $x=0$ (M)
PI: No
C/D: $(-\infty,-1)\downarrow$, $(-1,0)\uparrow$, $(0,1)\downarrow$, $(1,+\infty)\uparrow$
Conc.: Sempre $\cap$

18. $200x(1-x)$.

Dom: $\mathbb{R}$	PT: $(0,0)$, $(1,0)$
Sim: No	As: No
Mm: $x=\frac{1}{2}$ (M)	C/D: $(-\infty,\frac{1}{2})\uparrow$, $(\frac{1}{2},+\infty)\downarrow$
PI: No	Conc.: Sempre $\cap$

19. $x^3 - 3x^2 + \dfrac{299}{100}x - \dfrac{99}{100}$.

Dom: $\mathbb{R}$

As: No

Sim: No

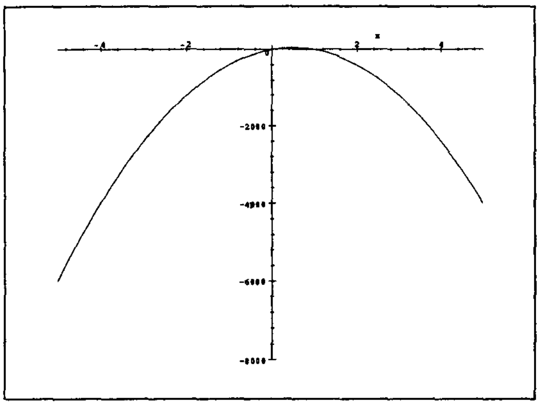
PI: $x = 1$

PT: $(0, -\frac{99}{100})$, $(\frac{9}{10}, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{11}{10}, 0)$

Mm: $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{30}(M), x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{30}(m)$

C/D: $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{30}) \uparrow$, $(1 - \frac{\sqrt{3}}{30}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{30}) \downarrow, (1 + \frac{\sqrt{3}}{30}, +\infty) \uparrow$

Conc: $(-\infty, 1)\cap$, $(1, +\infty)\cup$



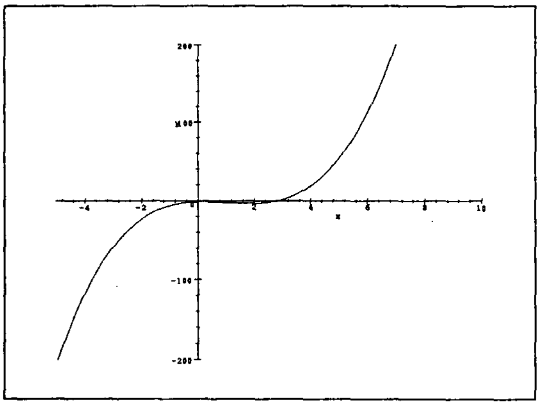


Figura 7.24: Gràfiques dels exercicis 18) i 19).

20. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{200}$.

Dom: $\mathbb{R}$

PT: $(0, 0), (\frac{3}{200}, 0)$

Sim: No

As: No

Mm: $x = 0(M), x = \frac{1}{100}$ (m)

C/D: $(-\infty, 0) \uparrow$, $(0, \frac{1}{100}) \downarrow$, $(\frac{1}{100}, +\infty) \uparrow$

PI: $x = \frac{1}{200}$

Conc.: $(-\infty, \frac{1}{200})\cap$, $(\frac{1}{200}, +\infty)\cup$

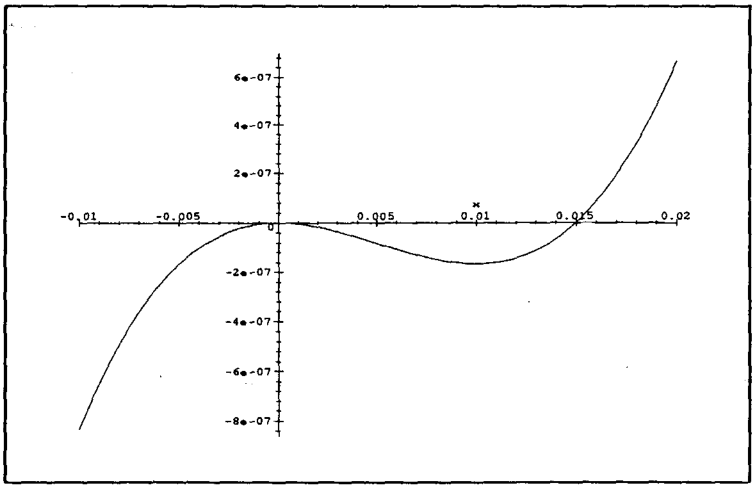


Figura 7.25: Gràfica de l'exercici 20).

7.4 Preguntes de test

1. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}} =$
   a) 1. b) $\frac{3}{2}$. c) $e^{\frac{3}{2}}$.

2. Els punts de discontinuïtat **NO** evitable de $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ són
   a) No en té. b) $x = 2$ i $x = -2$. c) $x = -2$.

3. La funció $f(x) = |x+1|$

   a) és contínua només per a $x > -1$.

   b) és derivable a tot $\mathbb{R}$.

   c) és derivable a $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

4. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$, llavors la corba $y = f(x)$

   a) té una asímptota vertical en $x = 3$.

   b) té una asímptota horitzontal $y = 3$.

   c) té una asímptota obliqua de pendent $m = 3$.

5. Si $y = f(x)$ té una asímptota vertical en $x = a$, llavors
   a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. b) $\lim_{x\to 0} f(x) = a$. c) f no és contínua en $x = a$.

6. La funció $f(x) = \dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}$ satisfà que
   a) és contínua en $x = 0$. b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$. c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$.

7. La funció definida per $f(x) = e^{-1/x^2}$, si $x \neq 0$, i per $f(0) = 0$

   a) és contínua i derivable.

   b) és contínua però no derivable.

   c) té una discontinuïtat evitable en $x = 0$.

8. La funció $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   a) És contínua en $x = 0$, però no és derivable en $x = 0$.

b) És contínua i derivable en $x = 0$.

c) No és contínua en $x = 0$.

9. L'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x) = \text{tg}x$ en $x = \pi/4$, és:
a) $y = 1$ b) $y - 1 = 2(x - \pi/4)$ c) No existeix

10. La funció $f(x) = \ln(1 - x)$

a) té una asímptota horitzontal

b) és decreixent per a $x < 1$

c) és decreixent per a $x > 1$

11. La funció $f(x) = |x^2 - 9|$

a) no és contínua en $x = -3$ i en $x = 3$.

b) és derivable però no contínua en $x = -3$ i en $x = 3$.

c) és contínua però no derivable en $x = -3$ i en $x = 3$.

12. La funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

a) és sempre creixent

b) té un mínim en $x = 0$ i un màxim en $x = 4$

c) té un màxim en $x = 0$ i un mínim en $x = 4$

13. El límit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h}$ és
a) 0. b) $\cos x$. c) indeterminat.

14. La funció $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

a) és creixent entre $(-\infty, -1)$ i $(3, +\infty)$, i decreixent a $(-1, 3)$.

b) és creixent entre $(-\infty, -1)$ i decreixent a $(-1, +\infty)$.

c) té un punt d'inflexió en $x = \frac{1}{2}$.

15. Els valors d'a i b per tal que $f(x) = a \ln x + b$ passi pel punt $(1, 2)$, i el pendent de la recta tangent en aquest punt sigui 4, són
a) $a = 2$, $b = 4$. b) $a = 4$, $b = 2$. c) $a = 2$, $b = 2$.

16. La funció $y = x^4 - x^3$

a) té punts d'inflexió en $x = 0$ i $x = 1/2$.

b) només té un punt d'inflexió en $x = 0$.

c) no té punts d'inflexió.

17. Si el producte de dos nombres reals és $xz = 1$, llavors la seva suma $S = x + z$

   a) té un màxim relatiu quan $x = z = 1$.

   b) té un mínim relatiu quan $x = z = -1$.

   c) té un mínim relatiu quan $x = z = 1$.

18. La suma dels quadrats de dos nombres reals, x i y, és 1. Aleshores, el producte dels quadrats

   a) pren el seu valor màxim quan $x = y = 0.5$

   b) està comprès entre 0 i 1/4

   c) pot prendre qualsevol valor real menor o igual que 1/4

7.5 Solució del test

1. c
2. c
3. c
4. b
5. c
6. c
7. a
8. a
9. b
10. b
11. c
12. c

13. b
14. a
15. b
16. a
17. c
18. b

Lliçó 8

Integració

Objectius

- Introduir el concepte d'integral com a límit d'una suma, així com les seves propietats i possibles aplicacions.

- Introduir el concepte de funció primitiva i veure la seva relació amb la integral.

- Practicar els mètodes bàsics de càlcul de primitives i les aplicacions més immediates de la integral.

Resum teòric

Introduirem el concepte d'integral en un sentit restringit però suficient per a les aplicacions més freqüents.

Sigui $f(x)$ una funció contínua en un interval $[a, b]$. Dividim l'interval $[a, b]$ en n subintervals amb extrems $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ i d'amplitud Δx_i respectivament (figura 8.1). Considerem un punt z_i interior a cada subinterval ($x_{i-1} < z_i < x_i$) i el valor $f(z_i)$ que pren la funció en aquest punt.

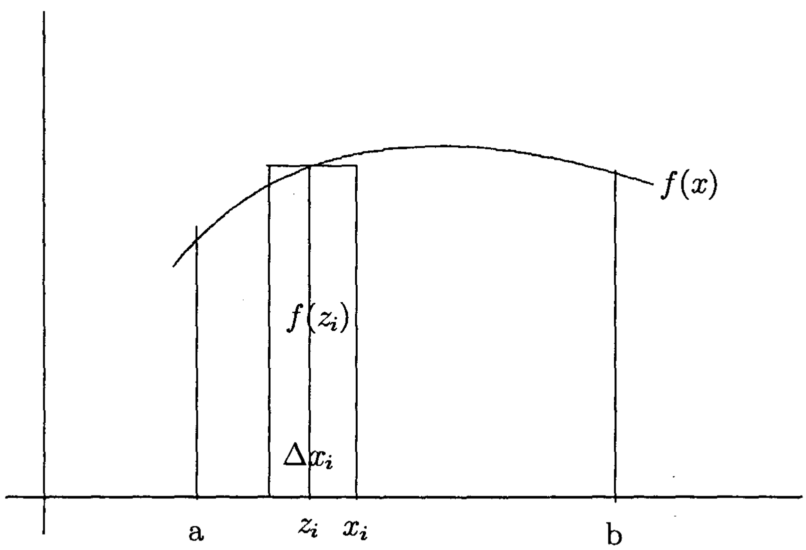


Figura 8.1: Elements de la suma integral

Anomenarem ***suma integral*** al sumatori

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

i anomenarem ***integral de la funció*** $f(x)$ ***entre*** a ***i*** b al límit d'aquesta suma quan el nombre n de subintervals tendeix a infinit i la màxima amplitud de qualsevol d'ells tendeix a zero:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

Es demostra que, si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$, tal com hem suposat inicialment, aquest límit sempre existeix i és independent de la forma d'escollir la partició de l'interval i el punt interior a cada subinterval.

Dimensions de la integral.

Si la variable x i la funció $y = f(x)$ tenen, ambdues, dimensions de longitud, aleshores els sumands $f(z_i)\Delta x_i$ i, per tant, la suma integral i la pròpia integral, tenen dimensions de superfície. De fet, en aquest cas, la suma integral és suma d'àrees de rectangles i la integral és l'àrea entre $f(x)$, l'eix x i les verticals $x = a$ i $x = b$ (figura 8.2).

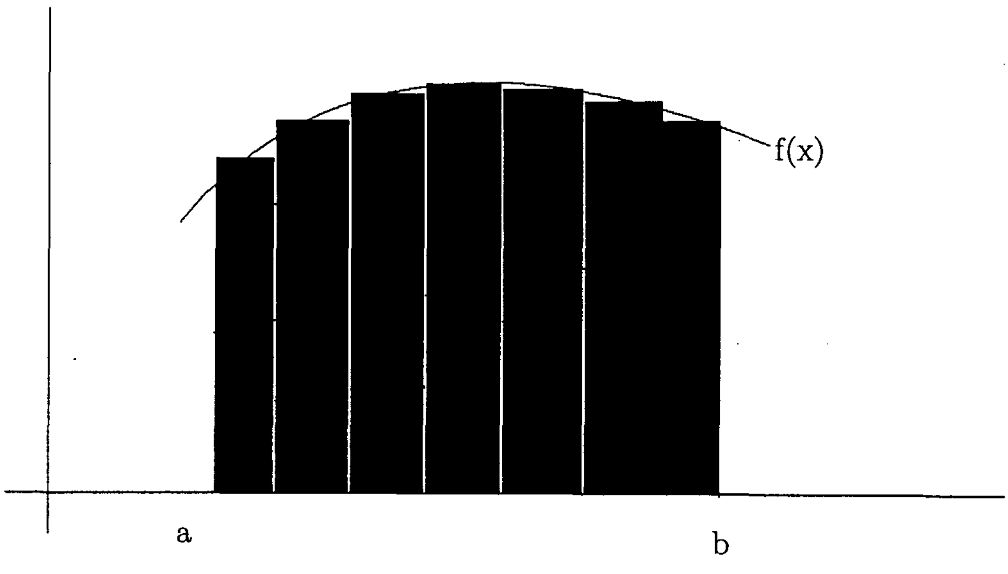


Figura 8.2: Suma d'àrees de rectangles

Tanmateix, la idea principal d'aquest resum és que **la integral és una suma**. Una suma infinita però una suma a la fí i, com a tal, té les dimensions dels sumands, que són les de la variable x per les de la funció $y = f(x)$. Per exemple, si la variable x i la funció $y = f(x)$ tenen dimensions repectivament de

longitud i	superfície	aleshores la integral té dimensions de	volum
longitud	adimensional		longitud
longitud	força		treball
temps	velocitat		longitud
temps	acceleració		velocitat
temps	intensitat elèctrica		càrrega elèctrica

Vegem dos exemples

- **Volum d'un cos de revolució.**

  Considerem el cos de revolució generat per la funció $y = f(x)$, entre $x = a$ i $x = b$, al girar al voltant de l'eix X (figura 8.3).

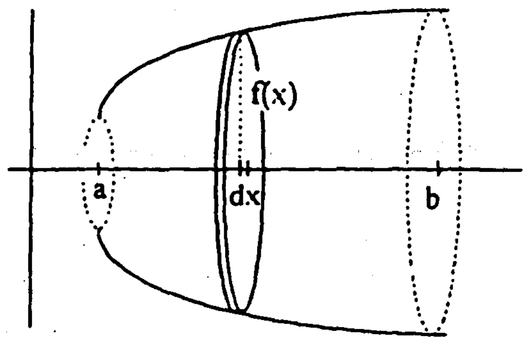


Figura 8.3: Volum d'un cos de revolució

El volum elemental corresponent a un fragment dx de l'interval $[a, b]$ és el d'un cilindre amb base d'àrea $\pi f^2(x)$ i altura dx: $dV = \pi f^2(x)dx$. Observem que, si $y = f(x)$ i x tenen dimensions de longitud, $f^2(x)$ té dimensions de superfície, dx té dimensions de longitud i, per tant, dV té dimensions de volum.

El volum total entre a i b serà el límit de la suma de volums elementals, és a dir, la integral

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

- **Longitud d'un arc de corba.**

Considerem l'arc de la corba donada per la funció $y = f(x)$, entre $x = a$ i $x = b$ (figura 8.4). La longitud del segment elemental corresponent a un fragment dx de

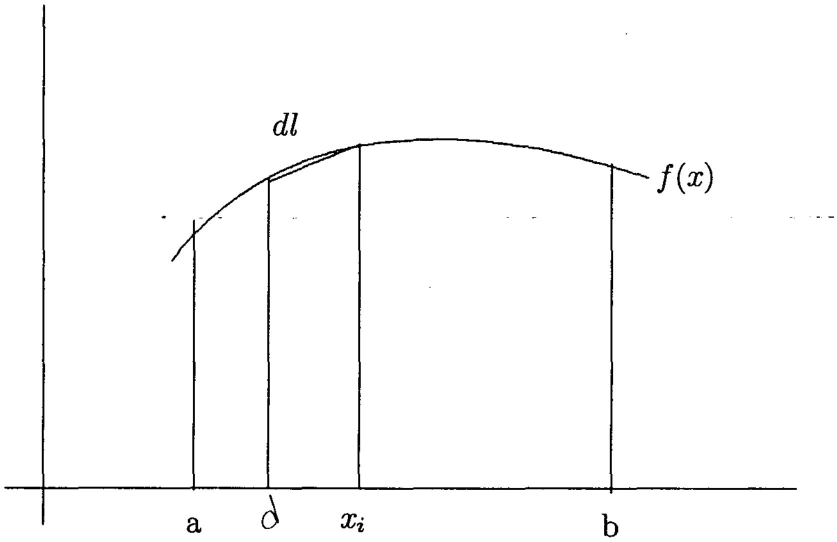


Figura 8.4: Longitud d'un arc de corba

l'interval $[a, b]$ és $dL = \sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx$. Observem que, si $y = f(x)$ i x tenen dimensions de longitud, $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ és adimensional, dx té dimensions de longitud i, per tant, dL té dimensions de longitud.

La longitud total entre a i b serà la suma de longituds elementals, és a dir, la integral

$$L = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx.$$

Propietats

Propietats de la integral que es dedueixen directament de la definició

- La integral és un operador lineal respecte la suma:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- La integral és un operador lineal respecte el producte per escalars: si λ és un nombre real,

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

- Partici de l'interval d'integració: si $a < c < b$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Fins ara hem vist la definició d'integral i algunes propietats immediates. Però com es calcula una integral? En principi, i segons la definiciò, una suma integral

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$$

amb la partició en n subintervals suficientment fina, hauria de donar una bona aproximació, doncs la integral és el límit d'aquesta suma per particions infinitament fines. Tanmateix, hi ha tècniques de càlcul, basades en la relació entre derivada i integral, que permeten calcular aquest límit de forma exacta.

Integrals i funcions primitives

- Definició de funció primitiva i integral indefinida.

  Es diu que $F(x)$ és una ***funció primitiva*** de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

  S'anomena ***integral indefinida*** de la funció $f(x)$ al conjunt de totes les seves funcions primitives, i s'indica per

$$\int f(x)dx.$$

El Teorema Fonamental del Càlcul diu que, si $F(x)$ i $G(x)$ són dues funcions primitives de $f(x)$, és a dir, si $F'(x) = G'(x) = f(x)$, aleshores només difereixen en una constant arbitrària: $F(x) = G(x) + C$.

D'aquest resultat es dedueix que, si $F(x)$ és una funció primitiva de $f(x)$, aleshores afegint una constant arbitrària tenim el conjunt de totes les primitives de $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Relació entre la integral i les funcions primitives

  La relació entre el càlcul d'integrals (límits de sumatoris) i el càlcul de funcions primitives ve donada pel següent resultat, conegut com la "Regla de Barrow":

  Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, aleshores

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Càlcul de les funcions primitives

- **Integrals immediates**

  De la taula de derivades de les funcions elementals es dedueix directament la següent taula d'integrals anomenades immediates:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

Moltes vegades és necessari fer alguna manipulació del integrand abans de poder aplicar la taula d'integrals immediates. Les tècniques de manipulació més usuals són el canvi de variable i la integració per parts.

- **Canvi de variable**

Si dues variables x i t estan relacionades mitjançant la funció $x = g(t)$, aleshores

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

I, si la integral és definida,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t))g'(t)dt$$

on t_a i t_b són els valors de la variable t tals que $g(t_a) = a$ i $g(t_b) = b$.

El canvi de variables també es pot fer en forma de sustitució d'una part $h(x)$ de l'integrand per la nova variable t. Això es sol fer quan la derivada $h'(x)$ es troba explícitament en l'integrand, és a dir, quan es pot fer la descomposició

$$\int f(x)dx = \int F(h(x))h'(x)dx.$$

Fent la sustitució $h(x) = t$, $h'(x)dx = dt$ queda

$$\int f(x)dx = \int F(h(x))h'(x)dx = \int F(t)dt.$$

I si la integral és definida,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} F(t)dt.$$

Vegeu, com exemple, l'exercici resolt 1.

- **Integració per parts.**

Si hi ha dues funcions $u(x)$ i $v(x)$ tals que l'integrand $f(x)dx$ es pot descompondre de la forma $f(x)dx = u(x)v'(x)dx$ o, escrit d'una altra manera $f(x)dx = udv$, aleshores

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

I si la integral és definida,

$$\int_a^b udv = uv \,|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Vegeu, com exemple, l'exercici resolt 2.

8.1 Exercicis resolts

1. Integració per canvi de variable i per parts. Trobeu la pimitiva de $f(x) = 3^{\sqrt{2x+1}}$.

Sigui $\sqrt{2x+1} = t$, aleshores $t^2 = 2x+1$ i com que $dx = t\,dt$, l'integral passa a ser $\int 3^t\, t\, dt$. Integrant per parts, sent $u = t$ i $dv = 3^t dt$, tenim que $du = dt$ i que $v = \dfrac{3^t}{\ln 3}$ Per tant,

$$\int 3^t t\, dt = \int u dv = uv - \int v du = \frac{t\,3^t}{\ln 3} - \int \frac{3^t}{\ln 3} dt = \frac{t\,3^t}{\ln 3} - \frac{3^t}{(\ln 3)^2} + C$$

2. Integració per descomposició. Trobeu la pimitiva de $g(x) = \dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)}$.

Primer de tot trobem la descomposició de la fracció en fraccions simples:

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Per tal de determinar les constants A i B, es multipliquen a ambdós costats per $(x-3)(2x+5)$ per obtenir

$$6 - x = A(2x+5) + B(x-3) = 5A - 3B + (2A+B)x$$

Per tant

$$6 = 5A - 3B \quad \text{i} \quad -1 = 2A + B$$

d'on

$$A = \frac{3}{11} \quad \text{i} \quad B = \frac{-17}{11}$$

Per tant

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\, dx = \int \frac{\frac{3}{11}}{x-3}\, dx + \int \frac{\frac{-17}{11}}{2x+5}\, dx = \frac{3}{11} \ln|x-3| - \frac{17}{22} \ln|2x+5| + C$$

3. Trobeu la pimitiva de $g(x) = \dfrac{4^x + 5\cdot 16^x}{1+16^x}$ mitjançant el canvi $t = 4^x$.

Utilitzant el canvi proposat, $t = 4^x$ i $dt = 4^x \ln 4 dx$ tenim

$$\int \frac{4^x + 5\cdot 16^x}{1+16^x}\, dx = \frac{1}{\ln 4} \int \frac{1 + 5\cdot 4^x}{1+16^x} \cdot 4^x \cdot \ln 4\; dx =$$

$$= \int \frac{1+5t}{1+t^2}\,dt = \arctan t + \frac{5}{2}\ln(1+t^2) + c = \arctan(4^x) + \frac{5}{2}\ln(1+16^x)$$

Si $x = \sin t$, aleshores $dx = \cos t\ dt$ i $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin t^2} = \cos t$, per tant

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos t \cdot \cos t\ dt = \int \cos t^2 dt$$

Aleshores, aplicant la fórmula del cosinus de l'angle meitat ($\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$, amb $\frac{u}{2} = t$) obtenim que

$$\int \cos t^2 dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\ dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c =$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + c$$

Per últim, com que $x = \sin t$, aleshores $t = \arcsin x$ i $\cos t = \sqrt{1-\sin t^2} = \sqrt{1-x^2}$ resulta que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

---

4. Integració per canvi de variable. Trobeu la primitiva de $f(x) = \dfrac{dx}{3x^2+5x+6}$.

Per a poder utilitzar la integral immediata $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$, cal que primerament transformem l'integrand de la següent manera

$$\frac{1}{3x^2+5x+6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x^2+\frac{5}{3}x+\frac{6}{3})} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{((x+\frac{5}{6})^2+2-\frac{5^2}{6^2})} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+\frac{5}{6})^2+\frac{47}{36}} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{36}{47}\cdot\frac{1}{(\frac{36}{47}(x+\frac{5}{6})^2+1)}$$

Amb la qual cosa queda la integral

$$\int \frac{dx}{3x^2+5x+6} = \frac{36}{141}\int \frac{dx}{[\frac{6}{\sqrt{47}}(x+\frac{5}{6})]^2+1}$$

Si fem la substitució $\dfrac{6}{\sqrt{47}}(x+\dfrac{5}{6}) = t$, aleshores $\dfrac{6}{\sqrt{47}}dx = dt$,i $dx = \dfrac{\sqrt{47}}{6}dt$.
Substituint tenim

$$\frac{36}{141}\int \frac{dx}{[\frac{6}{\sqrt{47}}(x+\frac{5}{6})]^2+1} = \frac{36}{141}\cdot\frac{\sqrt{47}}{6}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{6\sqrt{47}}{141}\arctan t + C$$

Si desfem el canvi (substituïm t per $\frac{6}{\sqrt{47}}\left(x+\frac{5}{6}\right)$) obtindrem la primitiva de la funció original.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2+5x+6} &= \frac{6\sqrt{47}}{141}\arctan\frac{6}{\sqrt{47}}\left(x+\frac{5}{6}\right)+C= \\ &= \frac{2\sqrt{47}}{47}\arctan\frac{\sqrt{47}}{47}(6x+5)+C.\end{aligned}$$

---

5. Calculeu I$=\displaystyle\int \frac{2x^5-11x^3+17x^2-10x+3}{2x^4-6x^3+7x^2-4x+1}\,dx.$

Com que el numerador és de grau més gran que el denominador, els dividim tal i com vam veure a la lliçó 1, d'on obtenim

$$\frac{2x^5-11x^3+17x^2-10x+3}{2x^4-6x^3+7x^2-4x+1}=x+3+\frac{x}{2x^4-6x^3+7x^2-4x+1}$$

Per tant, I $=\displaystyle\int(x+3)\ dx+\int\frac{x}{2x^4-6x^3+7x^2-4x+1}\ dx$

Per tal de trobar el valor de la última integral operem tal i com hem vist a la lliçó 1, d'on resulta que

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x^4-6x^3+7x^2-4x+1} &= \frac{x}{(x-1)^2(2x^2-2x+1)} = \\ \frac{A}{x-1}&+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{2x^2-2x+1}\end{aligned}$$

Aleshores $x=A(x-1)(2x^2-2x+1)+B(2x^2-2x+1)+(Mx+N)(x-1)^2$. La constant B pot trobar-se més fàcilment fent $x=1$ d'on resulta $B=1$. Les altres, poden trobar-se per igualació:

$$x=(2A+M)\cdot x^3+(-4A+2B+N-2M)\cdot x^2+(3A-2B+M-2N)\cdot x+(-A+B+N)$$

Amb $B=1$ això condueix al sistema

$$\left\{\begin{array}{c}2A+M=0\\ -4A+2-2M+N=0\\ 3A-2+M-2N=1\\ -A+1+N=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}M=-2A\\ N=A-1\\ -4A+2+4A+A-1=0\\ 3A-2-2A-2A+2=1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}A=-1\\ M=2\\ N=-2\end{array}\right.$$

Aleshores obtenim

$$\mathrm{I} = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{2x-2}{2x^2-2x+1}\,dx$$

Per tal de resoldre la última integral, sabent que la derivada del seu denominador és $4x-2$ farem

$$2x-2 = \frac{2}{2}(2x-2) = \frac{1}{2}(4x-4) = \frac{1}{2}(4x-2-2) = \frac{1}{2}(4x-2) - 1$$

Per tant

$$\int \frac{2x-2}{2x^2-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+1}\,dx + \int \frac{-1}{2x^2-2x+1}\,dx =$$

La derrera integral es resol com el problema anterior

$$= \frac{1}{2}\ln|2x^2-2x+1| - \arctan(2x-1)$$

Finalment resulta

$$\mathrm{I} = \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|2x^2-2x+1| - \arctan(2x-1) + C$$

---

6. Integració per parts.

Trobeu la primitiva de $\int \sin^2 x\,dx$.

Si fem $\sin x = u$, aleshores $du = \cos x\,dx$, i si $\sin x\,dx = dv$, aleshores $v = -\cos x$. Aplicant el mètode d'integració per parts,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = \\ &= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)dx = \\ &= -\sin x\cos x + \int dx - \int \sin^2 x\,dx\end{aligned}$$

Aquest resultat ens permet aïllar la integral

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x\cos x + C,$$

per tant,

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

De la mateixa manera podríem calcular $\int \cos^2 x dx$ i dóna

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C.$$

---

7. Càlcul d'una integral definida.

Calculeu la següent integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Per a calcular el valor de la integral que ens proposa l'exercici, fem el canvi $x = 3t$; aleshores, $dx = 3dt$. Atenent al canvi que hem fet, els nous límits d'integració seran, si $x = 0$, ara $t = 0$;i si $x = 3$ ara $t = 1$. Per tant la nova integral que hem de calcular serà

$$3\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{9 - 9t^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = [\arcsin t]_0^1 = (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

---

8. Càlcul d'una àrea.

Calculeu l'àrea sota la corba $f(x) = xe^{x^2}$ entre $x = 2$ i $x = 3$.

Per a calcular aquesta àrea només cal que calculem l'integral definida entre aquests dos punts, és a dir, hem de fer

$$\int_2^3 xe^{x^2} dx.$$

Per tal de resoldre-la, farem el canvi de variable $x^2 = t$. Aleshores tenim que $2xdx = dt$ i que, per tant, $xdx = \frac{1}{2}dt$.

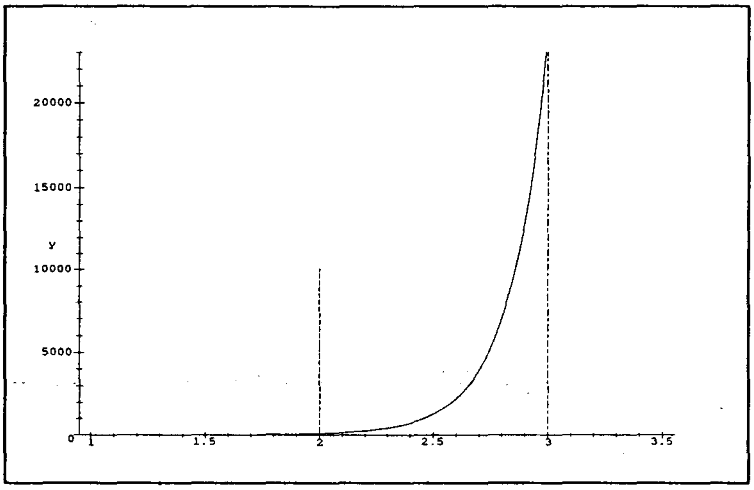


Figura 8.5: Gràfica de la funció $f(x) = xe^{x^2}$ entre $x = 2$ i $x = 3$

D'altra banda, també cal modificar els límits d'integració d'acord al canvi que hem fet. Si el límit inferior era $x = 2$ ara serà $t = 4$, ja que $t = x^2$. De la mateixa manera podem trobar el límit superior; si $x = 3$ ara el nou límit superior serà $t = 9$. Amb les transformacions que hem realitzat la integral que hem de calcular és

$$\frac{1}{2}\int_4^9 e^t dt = \left[\frac{1}{2}e^t\right]_4^9 = \frac{1}{2}(e^9 - e^4).$$

---

9. Càlcul d'una àrea.

Calculeu l'àrea sota la corba $f(x) = \dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$ entre $x = 1$ i $x = e$.

En aquest cas farem $\ln x = t$, $\dfrac{1}{x}dx = dt$. Pel que fa als límits, tenim el següent. Si $x = 1$, aleshores $t = \ln 1 = 0$, mentre que si $x = e$, tenim $t = \ln e = 1$.

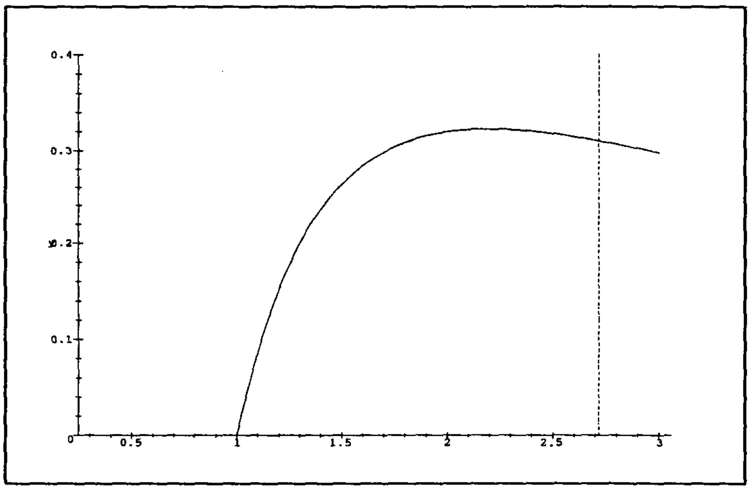


Figura 8.6: Gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$ entre $x = 1$ i $x = e$

Per tant, la integral que hem de calcular és

$$\int_0^1 \sin t dt = [-\cos t]_0^1 = -(\cos 1 - \cos 0) = 1 - \cos 1.$$

---

10. Integral definida i àrea.

a) Calculeu la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin x - \cos x) dx$,

b) Calculeu l'àrea interceptada per la corba $y = \sin x$ i $y = \cos x$ i les rectes $x = 0$ i $x = 2\pi$.

---

a) Per a resoldre el primer apartat només cal aplicar les regles d'integració.

$$\int_0^{2\pi} (\sin x - \cos x) dx = [(-\cos x - \sin x)]_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) - (\sin 2\pi - \sin 0) = 0.$$

b) La situació descrita en el segon apartat és la que es veu a la figura següent

En l'apartat anterior els intervals on la integral dóna un resultat positiu es compensen amb aquells on dóna negatiu i es cancel.len mútuament. Ara ens demanen l'àrea interceptada per les dues corbes i, per tant, hem de sumar àrees independentment si estan per sobre o per sota de l'eix de les x. Resumidament es pot expressar

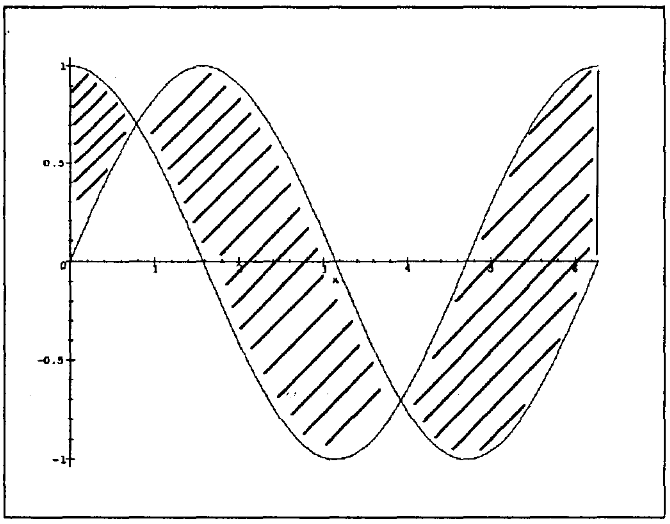


Figura 8.7: Corbes $y = \sin x$ i $y = \cos x$

com la integral del valor absolut:

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx$$

Aleshores l'àrea interceptada és

$$A = [(\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [(-\cos x - \sin x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [(\sin x + \cos x)]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}$$

$$= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1)\right) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) +$$

$$+ \left((0+1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ unitats de superfície}$$

---

11. Càlcul d'una àrea.

Calculeu l'àrea tancada per les corbes $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \dfrac{x+3}{4}$.

Per tal de calcular aquesta àrea caldrà calcular la integral definida entre els dos punts on es tallin les funcions. Per tant:

$$\sqrt{x} = \frac{x+3}{4} \quad \text{d'on} \quad 16x = x^2 + 6x + 9$$

Aleshores els dos punts de tall seran en $x = 1$ i $x = 9$, tal i com s'aprecia a la Fig.8.8

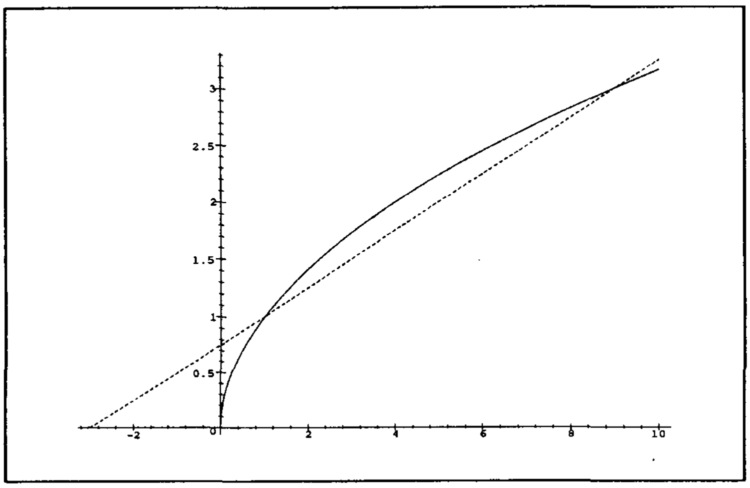


Figura 8.8: Gràfica de les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \dfrac{x+3}{4}$

Aleshores, veient a la Fig.8.8 que la funció $f(x) = \sqrt{x}$ pren uns valors més elevats que la $g(x) = \dfrac{x+3}{4}$ en l'interval, hem de fer

$$A = \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{x+3}{4}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4}\right]_1^9 = \frac{2}{3}(9^{\frac{2}{3}}-1)-\frac{1}{8}(81-1)+\frac{3}{4}(9-1) =$$

$$= \frac{2}{3}26 - \frac{1}{8}80 + \frac{3}{4}8 = \frac{52-30+18}{3} = \frac{40}{3}$$

---

12. Càlcul d'una àrea.

Calculeu l'àrea tancada per les corbes $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3 - 2x$.

Per tal de calcular aquesta àrea primer trobarem els punts on les dues corbes es tallen:

$$x^3 - 2x = x^2 \text{ d'on } x(x^2 - x - 2) = 0$$

Per tant les corbes $f(x)$ i $g(x)$, tal i com es veu a la Fig. 8.9 es tallaran en tres punts: $x = -1$, $x = 0$ i $x = 2$.

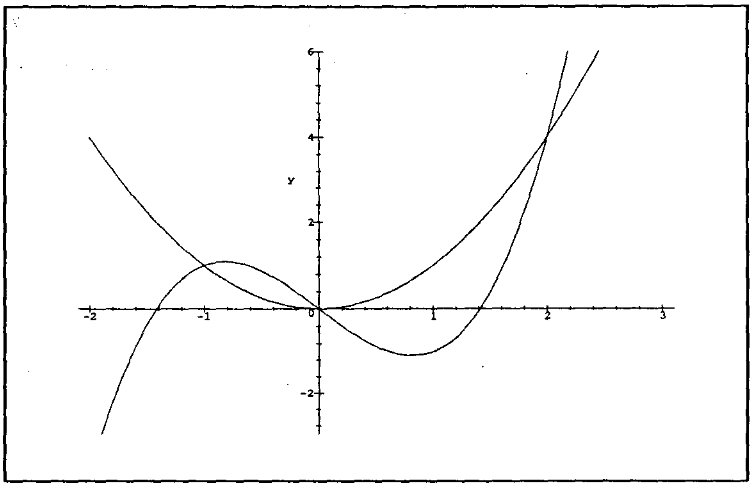


Figura 8.9: Gràfica de les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3 - 2x$

Un cop definits els nostres límits d'integració, haurem de parar atenció a l'hora de calcular la nostra integral, ja que en l'interval (−1,0) la funció $g(x)$ pren uns valors més elevats que la $f(x)$, mentre que a l'interval (0,2) succeeix a l'inrevés. Així doncs, tenim:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^3-2x-x^2)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x^3+2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) - (0) = \frac{-3+12-4}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12}$$

13. Càlcul d'una àrea.

Calculeu l'àrea d'un semicercle de radi 3.

L'equació de la circumferència de radi 3 centrada a l'origen de coordenades és $x^2 + y^2 = 9$. El semicercle corresponent a $y > 0$ està limitat per la semicircumferència $y = \sqrt{9 - x^2}$ tal i com es veu a la figura 8.10

Est tracta doncs, de calcular la integral:

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}dx.$$

Per resoldre aquesta integral farem el canvi de variable $x = 3\sin t$ i aleshores $dx = 3\cos t dt$. De la mateixa manera que ja hem fet en exercicis precedents, recalculem,

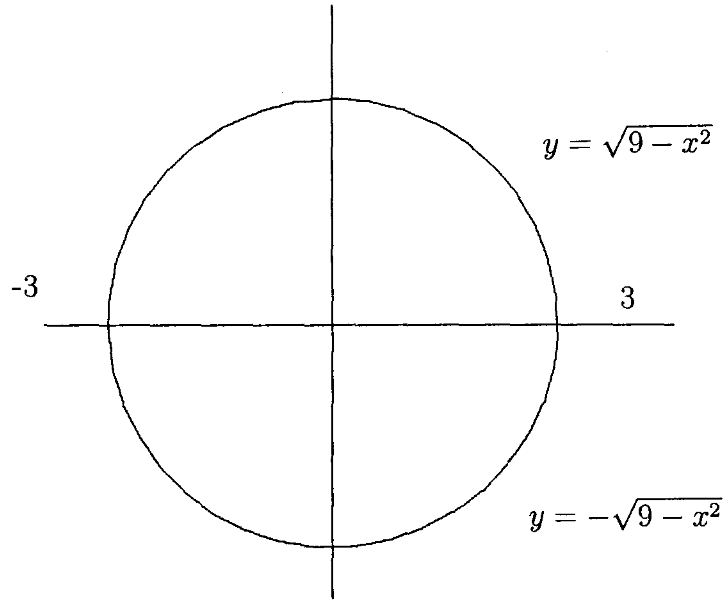


Figura 8.10: Cercle de radi 3

tenint en compte el canvi que hem fet, els nous límits d'integració.
Si $x=-3$, el nou límit inferior serà $\sin t=-1$ d'on deduïm que la $t=-\frac{\pi}{2}$. De la mateixa forma calculem el límit superior, i obtenim $t=\frac{\pi}{2}$.
L'àrea que hem de calcular és

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{9-9\sin^2 t}\cos t dt \\ &= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \left[\frac{9}{2}(t+\sin t\cos t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

---

14. Càlcul d'un volum de revolució.

Calculeu el volum d'un con de radi r i altura h.

Per tal d'obtenir un con de radi r i altura h mitjançant una revolució al voltant de l'eix x utilitzarem l'equació de la recta que passa pels punts $(r, 0)$ i $(0, h)$:

$$y = \frac{-h}{r}x + h$$

Per tant,

$$V = 2\pi \int_0^r x\left(h - \frac{h}{r}x\right)dx = 2\pi \int_0^r (hx - \frac{h}{r}x^2)dx = 2\pi \left[h\frac{x^2}{2} - \frac{h}{r}\frac{x^3}{3}\right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left[\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^2}{3}\right] = 2\pi \frac{3hr^2 - 2hr^2}{6} = \frac{\pi}{3}hr^2$$

---

15. Càlcul de la longitud d'un arc de corba.

Calculeu la longitud de la corba $y = \ln x$ en l'interval $[1, 4]$.

Mitjançant l'expressió

$$L = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx.$$

on $a = 1$ i $b = 4$, amb $f(x) = \ln x$ aleshores:

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx =$$

Si fem el canvi de variable $t = \sqrt{x^2+1}$, amb $dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ i $x = \sqrt{t^2-1}$ aleshores tenim que:

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{t^2}{t^2-1}dt =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \left(1 + \frac{\frac{-1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\right)dt =$$

$$= \left[t - \frac{1}{2}\ln(1+t) + \frac{1}{2}\ln -1 + t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} = \left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} = 3,34$$

---

16. Càlcul d'un treball.

Un mòdul espacial pesa 20 Tm a la superfície terrestre. Quin treball s'ha de fer per a elevar-lo a una alçada de $2000km$ sobre la superfície terrestre?
Dades:

Radi de la Terra R=6370 km.

Acceleració de la gravetat a la superfície de la Terra g=9.81 m/s^2.

En un moviment rectilini, el treball efectuat per una força $F(x)$ des de $x = a$ fins a $x = b$ és la integral

$$T = \int_a^b F(x)dx.$$

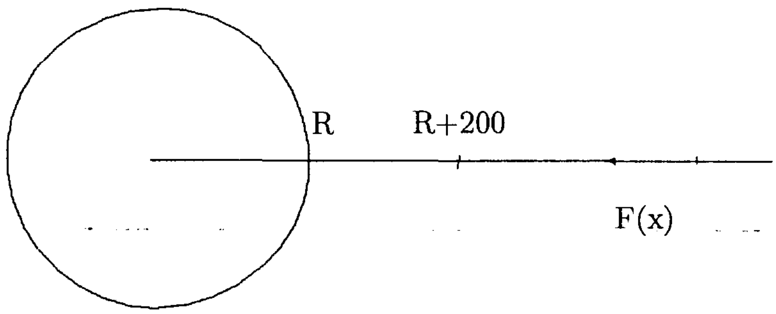


Figura 8.11: Força gravitatòria

Sabem que la força a què està sotmès el mòdul espacial (figura 8.11) és gravitatòria i, per tant, inversament proporcional al quadrat de la distància x al centre de la terra

$$F = -\frac{K}{x^2}$$

Per trobar la constant K, utilitzarem que, quan $x = R$, $F = -20$ Tm. Per tant, $K = 20(6370)^2$ Tm km^2 $= 811\ 538 \cdot 10^3$ Tm km^2.
El treball serà, doncs,

$$T = \int_{6370}^{8370} -\frac{K}{x^2}dx = K\left[\frac{1}{x}\right]_{6370}^{8370} = K\left(\frac{1}{8370} - \frac{1}{6370}\right) = -30442.0549582 \text{ Tm km} .$$

Donant els resultats amb quatre xifres significatives, $T = -30.44 \cdot 10^9$ Kg m

Multiplicant per $g = 9.81$, passem a N m = Jul: $T = -298.6 \cdot 10^9$ Jul.
Observació: El treball surt negatiu perquè és un treball fet contra el camp gravitatori. El treball fet pel camp gravitatori per a fer caure el mòdul des de 2000 km de distància seria el mateix en valor absolut però amb signe positiu.

17. Càlcul de l'espai recorregut per un mòbil en moviment accelerat.

Un mòbil surt del repós amb moviment rectilini (figura 8.12) amb acceleració constant a=1 m/s^2. Quant espai recorre en 1 minut?

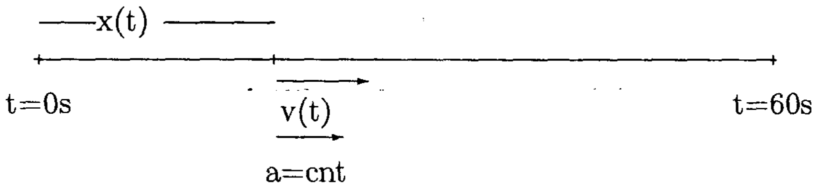


Figura 8.12: Moviment rectilini amb acceleració constant

Primer calcularem l'expressió de la velocitat en cada instant t integrant l'acceleració

$$v(t) = \int_0^t a dt = at \;\; \text{m/s}.$$

Ara podem calcular l'espai recorregut en cada instant t integrant la velocitat

$$x(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t a t dt = \frac{1}{2} a t^2 \;\; \text{m}.$$

Prenent a=1 m/s^2 i $t = 60$ s, tenim que $x = 1800$ m.

18. Càlcul de la quantitat de càrrega elèctrica que circula per un circuit.

Considerem un circuit elèctric amb una resistència de R ohms i un condensador de capacitat C faradis (figura 8.13).

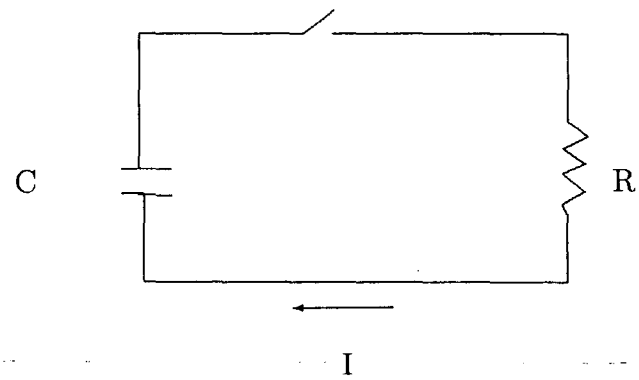


Figura 8.13: Circuit elèctric amb resistència i condensador

Si en l'instant inicial ($t = 0$) tenim una intensitat I_0 ampers, aleshores l'expressió de la intensitat $I(t)$ en funció del temps és (figura 8.14)

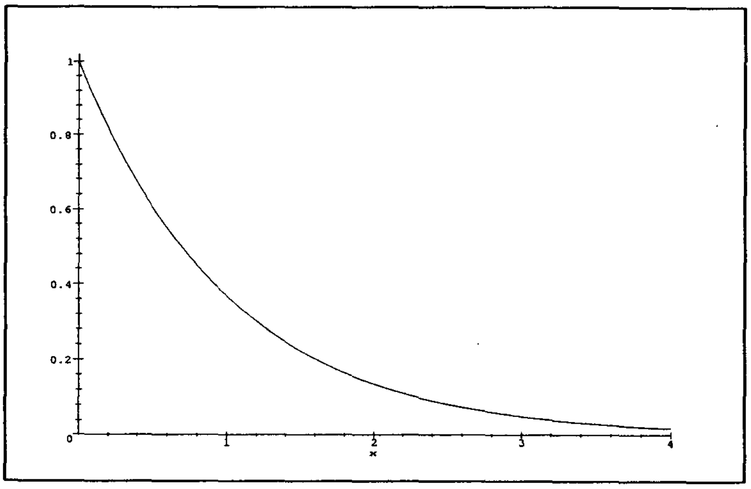


Figura 8.14: Intensitat elèctrica en un circuit amb resistència i condensador

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Sabent, a més, que la intensitat és la derivada de la càrrega elèctrica respecte el temps, resulta que la càrrega que circula en t segons és

$$Q(t) = \int_0^t I(t)dt$$

a) Quina és la quantitat de càrrega que circula pel circuit en un minut?

b) Quina és la quantitat total que circula en un temps indefinit?

---

a) Calculem la càrrega com la integral que hem definit anteriorment i tenim

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t I_0 e^{-\frac{t}{RC}} dt = \\ &= \left[-I_0 RC e^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^t = \\ &= I_0 RC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \\ &= I_0 RC \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}}}\right) \end{aligned}$$

La quantitat de càrrega que circula en un minut és de

$$Q(60) = I_0 RC \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{60}{RC}}}\right) \text{ Coulombs.}$$

b) Quan $t \to \infty$, $Q(t) \to I_0 RC$.

La representació gràfica de la quantitat de càrrega respecte al temps es pot veure a la figura 8.15

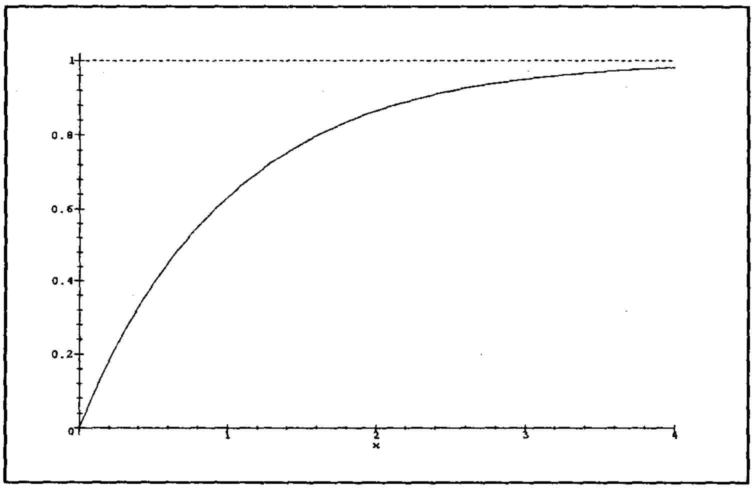


Figura 8.15: Evolució de la càrrega que circula per un circuit elèctric amb resistència i condensador

8.2 Exercicis Proposats

Calculeu les integrals següents fent, si s'escau, les substitucions que s'indiquen en cada cas

1. a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$ fent $1+x^2=t$,

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{2x^3+3x}dx.$

2. a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}dx$ fent $x^2=t$,

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}dx.$

3. a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ fent $e^x=t$,

b) $\displaystyle\int \frac{a^x}{1+a^{2x}}.$

4. a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x+1}}{\cos^2 x}dx$ fent $\tan x+1=t$,

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx.$

5. a) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ fent $\sin x=t$,

b) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^3 x\,dx.$

6. a) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$

b) $\displaystyle\int (e^x+\sin x)^2dx$

7. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}},$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4}$

8. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5},$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

Calculeu les integrals següents fent integració per parts

9 a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx$,

b) $\displaystyle\int x \arctan x dx$.

10. a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ fent $e^x dx = dv$, reiteradament,

b) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x} dx$.

11. a) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$ fent $x dx = dv$,

b) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$.

12. a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx$ fent $\sin x \, dx = dv$,

b) $\displaystyle\int x \cos 3x \, dx$.

13. a) $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ fent $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = dv$,

b) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$.

14. a) $\displaystyle\int_1^2 \ln x \, dx$ fent $dx = dv$,

b) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$.

Dibuixeu els recintes limitats per les corbes que s'indiquen i calculeu les àrees corresponents

15. La paràbola $y = 4x - x^2$ i l'eix x.

16. Les paràboles $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ i la recta $y = 4$

17. La corba $y = \ln x$, l'eix x i la recta $x = e$.

18. Les corbes e^x i e^{-x} i la recta $x = 1$.

19. La corba d'Agnesi, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ i la paràbola $y = \dfrac{x^2}{2}$.

20. Les paràboles $y = x^2$ i $y = \frac{1}{2}x^2$ i la recta $y = 2x$.

Calculeu els volums generats, en girar al voltant de l'eix x, els recintes limitats per

21. La paràbola $y^2 = 4x$ i la recta $x = 1$.

22. L'arc de sinusoide $y = \sin x$ entre $x = 0$ i $x = \pi$.

23. L'el.lipse de semieixos a i b : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Calculeu la longitud dels arcs següents

24. La circumferència de radi R.

25. L'astroide d'equació $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

8.3 Solució als exercicis proposats

1. a) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ b) $\frac{1}{3}\ln(|2x^3+3x|)+C$

2. a) $\frac{1}{2}\arctan x^2+C$ b) $\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

3. a) $\arcsin e^x+C$ b) $\frac{1}{\ln a}\arctan a^x+C$

4. a) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ b) $\frac{1}{2}\ln 2$

5. a) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\sin x+C$ b) $\cos^3 x(\frac{\cos^2 x}{5}-\frac{1}{3})+C$

6. a) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$ b) $\frac{1}{2}e^{2x}+e^x(\sin x-\cos x)+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

7. a) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$ b) $\frac{1}{6}\arctan\frac{3x}{2}+C$

8. a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$ b) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$

9. a) $\sin x+x\cos x+C$ b) $\frac{1}{2}[(x^2+1)\arctan x-x]+C$

10. a) $e^x(x^2-2x+2)+C$ b) $-\frac{x+1}{e^x}+C$

11. a) $\frac{1}{2}x^2(\ln x-\frac{1}{2})+C$ b) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$

12. a) $\sin x-x\cos x+C$ b) $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+C$

13. a) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$ b) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

14 a) $2\ln 2-1$ b) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

15. $\frac{32}{3}$ **16.** 8

17. 1 **18.** $e+\frac{1}{e}-2$

19. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ **20.** 4

21. 2π **22.** $\frac{\pi^2}{2}$

23. $\frac{4}{3}\pi ab^2$ **24** $2\pi R$

25. $6a$

8.4 Preguntes de test

1. Sigui $f(x)$ una funció contínua definida sobre $\mathbb{R}$. Sigui $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Aleshores:

   a) $F'(x) = f(x)$

   b) $F'(x) = \int_0^1 f'(t)dt$

   c) $F'(x) = f'(x)$

2. Quina de les següents afirmacions és FALSA?
   Quan escrivim $\displaystyle\int f(x)dx = g(x) + c$ volem dir que

   a) $g'(x) = f(x)$

   b) la funció g(x) és una primitiva de la funció $f(x)$.

   c) $f'(x) = g(x)$.

3. La primitiva $\int \ln x dx$ val:

   a) $e^x + c$

   b) $x(\ln x - 1) + c$

   c) $\frac{(\ln x)^2}{2}$

4. Si fem la integral $\int x\sqrt{x-1}dx$ emprant el canvi de variables $x = t^2 + 1$, obtenim
   a) $2\left(\dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^3}{3}\right) + C$. b) $\dfrac{t^5}{5} + \dfrac{t^3}{3} + C$. c) $2\left(\dfrac{t^5}{5} + \dfrac{t^3}{3}\right) + C$.

5. Si fem la integral $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$ emprant el canvi de variable $x = \sin t$, obtenim
   a) $\displaystyle\int \sin^3 t \cos^2 t \, dt$ b) $\displaystyle\int \sin^2 t \cos^3 t \, dt$ c) $\displaystyle\int \sin^3 t \cos t \, dt$

6. La primitiva $\int \sin x \cos x \, dx$ val:
   a) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ b) $\cos x \cos x + c$ c) $\sin^2 x + \cos^2 x + c$

7. La primitiva $\displaystyle\int f(x) \cdot g'(x)dx$ es pot calcular fent

   a) $\displaystyle\int f(x)dx \cdot \int g'(x)dx$

b) $f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$

c) $f'(x) \cdot g(x)$.

8. Quina de les següents afirmacions és FALSA?

   Sigui f una funció positiva en $[a, b]$ i g una primitiva de f, llavors $\int_a^b f(x)dx$ és

   a) $g(b) - g(a)$

   b) l'àrea entre la funció $f(x)$, l'eix x i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$.

   c) $f(b) - f(a)$.

8.5 Solució del test

1. a
2. c
3. b
4. c
5. a
6. a
7. b
8. c

Índex temàtic

Bibliografia

[1] F. Aguiló, J. Boadas, E. Garriga, R. Villalbí. *Temes clau de Càlcul.* Edicions de la UPC 1991.

[2] I. García, C. Puig. *Temes clau d' Àlgebra.* Edicions de la UPC 1991.

[3] R.E. Larson, R.P. Hostetler. *Cálculo y Geometría Analítica.* Editorial McGraw-Hill 1988.

[4] S. Lipschutz. *Algebra Lineal. Teoría y 600 problemas resueltos.* Editorial McGraw-Hill 1978.

[5] M.R. Spiegel. *Algebra Superior. Teoría y 1940 problemas resueltos.* Editorial McGraw-Hill 1978.

[6] M.R. Spiegel. *Cálculo Superior. 925 problemas resueltos.* Editorial McGraw-Hill 1969.