Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

Métodos Cuantitativos de Organización Industrial: Transporte y Asignación

Joaquín Bautista Valhondo, Rocío Alfaro Pozo y Alberto Cano Pérez

D-01/2011
(Rec ML-1992-JBV)

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Cataluña

Publica:

Universitat Politècnica de Catalunya
www.upc.edu

Edita:

Cátedra Nissan
www.nissanchair.com
director@nissanchair.com

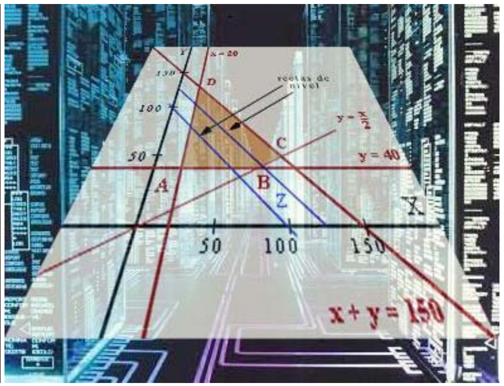
Métodos cuantitativos. Programación lineal: Transporte y Asignación


La programación lineal hace historia:

El puente aéreo de Berlín

En 1946 comienza el largo periodo de la guerra fría entre la Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más importantes de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres con la ciudad de Berlín desde las zonas alemanas en poder de los aliados, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire.

Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano. A tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4 500 toneladas diarias de víveres; en marzo de 1949, se llegó a las 8 000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo.



CATEDRA NISSAN

DOE

Departament
d'Organització
d'Empreses

Contenido

- Introducción.
- El problema del transporte.
- El algoritmo de transporte.
- El problema de asignación.
- El algoritmo Húngaro.

Introducción

Casos particulares de la programación lineal:

- El problema de transporte.
- El problema de asignación.

Para resolver estos problemas existen algoritmos específicos más eficientes que el algoritmo simplex.

El problema del transporte:

Se trata de definir un plan de transporte con mínimo coste entre un conjunto de centros emisores y un conjunto de centros receptores. Los centros emisores ofrecen ciertas cantidades en función de su capacidad productiva y los receptores demandan ciertas cantidades de productos en función de su demanda, existiendo un coste por unidad transportada entre cada centro emisor y receptor.

El problema de asignación:

Una serie de trabajos (n) deben asignarse a una serie de máquinas (n). El coste de realizar el trabajo i en la máquina j es $c_{i,j}$. El problema consiste en determinar una asignación de los trabajos a las máquinas para conseguir que el coste total sea mínimo.

El problema del transporte (I)

Ejemplo – 01:

Tres fábricas, $F1$, $F2$ y $F3$ producen cada día 60, 70 y 80 unidades de un producto, respectivamente. Éstas sirven a cuatro clientes, $A1$, $A2$, $A3$ y $A4$, cuyas demandas son 75, 45, 40 y 50, respectivamente.

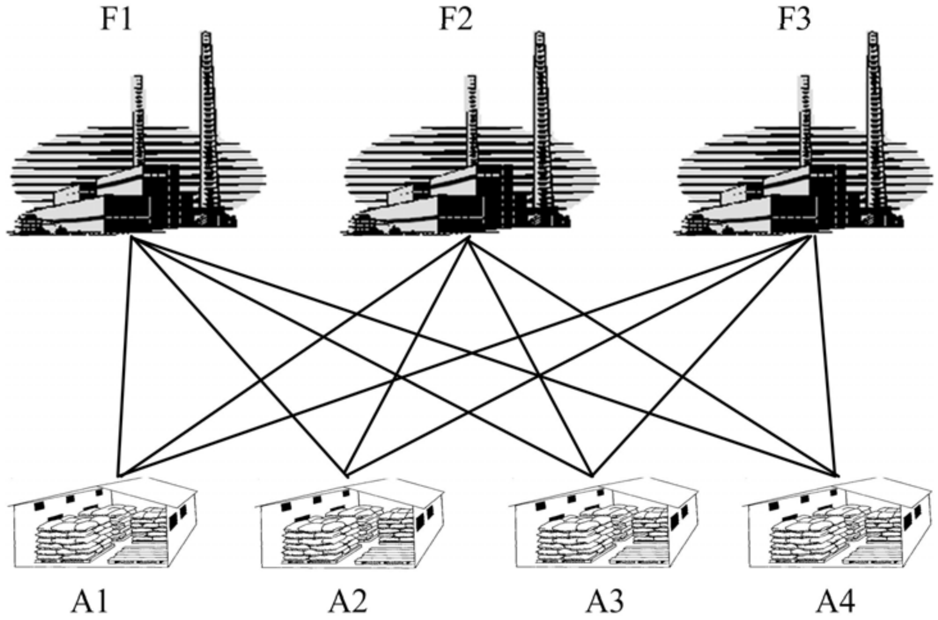
Los costes de transportar una unidad desde cada fábrica a cada cliente depende de las localizaciones de ambos y se recogen en la siguiente tabla.

Costes	*A1*	*A2*	*A3*	*A4*	*Oferta*
F1	8	13	9	8	60
F2	9	11	12	10	70
F3	7	8	10	9	80
Demanda	75	45	40	50	210

Se trata de determinar el plan de transporte con mínimo coste.

El problema del transporte (II)

Ejemplo – 01:



Variables Primal		*Variables Dual*	
$x_{i,j}$	cantidad transportada desde el centro emisor *i* hasta el centro receptor *j*	u_i	Variación del coste por cada unidad adicional ofertada en cada centro emisor *i*
		v_j	Variación del coste por cada unidad adicional solicitada por un centro receptor *j*

El problema del transporte (III)

Ejemplo – 01:

Primal

$$[MIN]Z = 8x_{1,1} + 13x_{1,2} + 9x_{1,3} + 8x_{1,4} + 9x_{2,1} + 11x_{2,2} + 12x_{2,3} + 10x_{2,4} + 7x_{3,1} + 8x_{3,2} + 10x_{3,3} + 9x_{3,4}$$

$$\begin{aligned} s.a: \quad & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 60 \\ & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 70 \\ & x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 80 \\ & x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 75 \\ & x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 45 \\ & x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 40 \\ & x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 50 \\ & x_{i,j} \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$[MAX]W = 60u_1 + 70u_2 + 80u_3 + 75v_1 + 45v_2 + 40v_3 + 50v_4$$

$$\begin{aligned} s.a: \quad & u_1 + v_1 \leq 8 \quad & u_2 + v_1 \leq 9 \quad & u_3 + v_1 \leq 7 \\ & u_1 + v_2 \leq 13 \quad & u_2 + v_2 \leq 11 \quad & u_3 + v_2 \leq 8 \\ & u_1 + v_3 \leq 9 \quad & u_2 + v_3 \leq 12 \quad & u_3 + v_3 \leq 10 \\ & u_1 + v_4 \leq 8 \quad & u_2 + v_4 \leq 10 \quad & u_3 + v_4 \leq 9 \end{aligned}$$

u_i no restringidas en signo

v_j no restringidas en signo

El problema del transporte (IV)

Modelo general (I): ***n*** centros ofertantes y ***m*** centros demandantes

- Parámetros:

$c_{i,j}$ Coste por transportar una unidad desde el centro emisor *i* hasta el centro receptor *j*.

o_i Oferta del centro emisor *i*.

d_j Demanda del centro receptor *j*.

- Modelos:

Primal: $$[MIN]Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}x_{i,j}$$

$$s.a: \quad \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = o_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = d_j \quad \forall j$$

$$x_{i,j} \geq 0$$

Dual: $$[MAX]W = \sum_{i=1}^{n} o_i u_i + \sum_{j=1}^{m} d_j v_j$$

$$s.a: \quad u_i + v_j \leq c_{i,j}$$

$u_i,\ v_j$ no restringidas en signo

El problema del transporte (V)

Modelo general (II): ***n*** centros ofertantes y ***m*** centros demandantes

- Primal:

  n·m variables, $x_{i,j}$

  n+m restricciones: n referentes a las ofertas y m a las demandas.

- Dual:

  n+m variables, (u_i, v_j)

  n·m restricciones.

- Si: $\sum_{i=1}^{n} o_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ $\rightarrow$ Problema de transporte equilibrado.
- Si: $\sum_{i=1}^{n} o_i \neq \sum_{j=1}^{m} d_j$ $\rightarrow$ Problema de transporte no-equilibrado.
  - Cuando: $\sum_{i=1}^{n} o_i > \sum_{j=1}^{m} d_j$ $\rightarrow$ Se añade un *centro receptor ficticio*.
  - Cuando: $\sum_{i=1}^{n} o_i < \sum_{j=1}^{m} d_j$ $\rightarrow$ Se añade un *centro emisor ficticio*.

El algoritmo de transporte (I)

Fases:

I. Se parte de de una solución inicial, que se puede obtener de manera muy sencilla.

II. La solución óptima se alcanza por mejoras. Esta solución tiene la particularidad de ser entera, siempre que sean enteros todos los valores de las ofertas y de las demandas.

Propiedades:

- La base del primal está compuesta por n+m-1 variables, una menos que el número de restricciones, ya que una de ellas es combinación lineal de las restantes. Por tanto, la solución es degenerada.
- Si una variable, $x_{i,j}$, está en la base del primal, su restricción asociada en el dual se cumple con el signo igual: $u_i + v_j = c_{i,j}$. Por tanto, el valor de las variables del dual para una base dada se pueden obtener resolviendo un sistema de n+m-1 ecuaciones con n+m incógnitas (igualaremos a cero una de las variables del dual, por ser un sistema indeterminado).
- Si $x_{i,j}$ es no básica, su coste reducido cambiado de signo es: $u_i + v_j - c_{i,j}$.
- Si todos los costes reducidos cambiados de signo son menores o iguales a cero se puede asegurar el hallazgo de una solución óptima.

El algoritmo de transporte (II)

Ejemplo – 02: ¿Cómo obtener una solución inicial del problema?

Los datos de ofertas, demandas y costes unitarios de transporte entre tres fábricas ($F1$, $F2$ y $F3$) y cuatro almacenes receptores ($A1$, $A2$, $A3$ y $A4$), se adjunta en la tabla siguiente.

Costes	*A1*	*A2*	*A3*	*A4*	*Oferta*
F1	5	1	2	5	20
F2	3	4	5	6	50
F3	7	6	6	8	30
Demanda	20	30	30	20	100

Una solución posible se puede representar situando en las casillas de una tabla, con tantas columnas como centros receptores y tantas filas como centros emisores, un conjunto de valores positivos que sumados por columnas y por filas den como resultado las demandas y las ofertas de los centros receptores y emisores, respectivamente.

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1					20
F2					50
F3					30
	20	30	30	20	

El algoritmo de transporte (III)

Método rincón noroeste

Sin tener en cuenta los costes de transporte, saturar la oferta o la demanda de un centro, siguiendo los siguientes pasos:

1. Empezar por el rincón noroeste (libre) de la tabla (primera fila y columna sin saturar),
2. Asignar una cantidad positiva que sature la oferta de una fila o la demanda de una columna.
3. Repetir 1 y 2 hasta que todas las filas y columnas sumen los valores deseados.

- ***Resultado ejemplo – 02:***

	A1	*A2*	*A3*	*A4*
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1	20				20
F2		30	20		50
F3			10	20	30
	20	30	30	20	

- Solución:

$$Z = 5\times 20 + 4\times 30 + 5\times 20 + 6\times 10 + 8\times 20 = 540$$

El algoritmo de transporte (IV)

Método de mínimos costes.

Asignación de las cantidades a transportar en orden no decreciente a los costes de transporte, saturando una fila o una columna en cada asignación.

- ***Resultado ejemplo – 02:***

	A1	*A2*	*A3*	*A4*
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1		20			20
F2	20	10	20		50
F3			10	20	30
	20	30	30	20	

  - Solución:

$$Z = 1\times 20 + 3\times 20 + 4\times 10 + 5\times 20 + 6\times 10 + 8\times 20 = 440$$

  - Nota: *este método proporciona una solución mejor que el primero en 100 unidades monetarias.*

El algoritmo de transporte (V)

Método de Vogel o de máxima ganancia (I)

- Ganancia: diferencia entre dos costes (el que sigue al coste mínimo menos el coste mínimo).
- Si la *ganancia es muy grande* y perdemos la oportunidad de asignar transporte de unidades a mínimo coste, más tarde deberemos asumir un coste importante por cada unidad transportada;
- Si la *ganancia es muy pequeña*, perder la oportunidad de transportar a mínimo coste no será tan importante.
- Es un método iterativo, consistente en los siguientes pasos:
  1. Determinar la ganancia de cada fila y columna, teniendo en cuenta sólo aquellas casillas que no tengan asignada ninguna cantidad a transportar.
  2. Determinar la fila o columna con mayor ganancia y, en dicha fila o columna, detectar la casilla con menor coste.
  3. Asignar una cantidad a transportar a dicha casilla saturando la oferta o demanda de una fila o una columna.

El algoritmo de transporte (VI)

Método de Vogel o de máxima ganancia (III)

- ***Resultado ejemplo – 02:***

Iteración I:

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1	5	1	2	5	1
F2	3	4	5	6	1
F3	7	6	6	8	0
	2	**3**	3	1	

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1		20			20
F2					50
F3					30
	20	30	30	20	

Iteración II:

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1	5	1	2	5	
F2	3	4	5	6	1
F3	7	6	6	8	0
	4	2	1	2	

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1		20			20
F2	20				50
F3					30
	20	30	30	20	

Iteración III:

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1	5	1	2	5	
F2	3	4	5	6	1
F3	7	6	6	8	0
		2	1	2	

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1		20			20
F2	20	10			50
F3					30
	20	30	30	20	

El algoritmo de transporte (VII)

Método de Vogel o de máxima ganancia (II)

- ***Resultado ejemplo – 02:***

Iteración IV:

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1	5	1	2	5	
F2	3	4	5	6	1
F3	7	6	6	8	2
			1	**2**	

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1		20			20
F2	20	10		20	50
F3					30
	20	30	30	20	

Iteración V:

	A1	*A2*	*A3*	*A4*
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	
F1		20			20
F2	20	10		20	50
F3			30		30
	20	30	30	20	

- Solución:

$$Z = 1\times 20 + 3\times 20 + 4\times 10 + 6\times 20 + 6\times 30 = 420$$

- Nota: *este método proporciona una solución mejor que el segundo en 20 unidades monetarias.*

El algoritmo de transporte (VIII)

¿Cómo pasar de una solución posible a otra solución posible? (I)

Incrementar los valores de algunas casillas, reduciendo los de otras, para respetar los valores globales de ofertas y demandas. Para ello, se procede de la siguiente forma:

- Dada una solución de partida, seleccionar una casilla que no tenga asignado flujo de transporte (dicha casilla debe corresponder a una variable no básica).
- Partiendo de la casilla seleccionada, construir un circuito cerrado sobre la tabla (que llamaremos *ciclo de desplazamiento*). Las casillas que definen el ciclo, excepto la de partida, deben corresponder a variables básicas. Para indicar en qué casillas se incrementa o reduce la cantidad a transportar se emplean los signos + y -, respectivamente; esto se hará durante la construcción del ciclo, alternado dichos signos, y teniendo en cuenta que en la casilla de partida se pretende incrementar la cantidad a transportar.
- Construido el ciclo de desplazamiento (hay siempre una solución única), determinar la cantidad a desplazar, tomando el valor mínimo entre los correspondientes a las casillas con signo (-).
- La nueva solución se obtiene incrementando o reduciendo dicha cantidad en las casillas que definen el ciclo, en función de sus signos. Se dice entonces que la variable correspondiente a la casilla de partida entra en la nueva base y que sale de la base la que limita la cantidad a desplazar en el ciclo.

El algoritmo de transporte (IX)

¿Cómo pasar de una solución a otra solución? (II)

- ***Ejemplo – 02:*** Solución de partida: *la obtenida por el método del rincón noroeste.*

	A1	A2	A3	A4	
F1	20				20
F2		30	20^-	$+$	50
F3			10^+	20^-	30
	20	30	30	20	

	A1	A2	A3	A4	
F1	20				20
F2		30	0	20	50
F3			30		30
	20	30	30	20	

Partimos de la casilla (F2,A4) y construimos el siguiente ciclo de desplazamiento: (F2,A4) - (F2,A3) - (F3,A3) - (F3,A4) - (F2,A4)

Construido el ciclo, calculamos la cantidad a desplazar, tomando el valor mínimo de las casillas con signo (-): 20u (al haber empate cualquiera de las dos variables saldrá de la base).

Aumentamos o disminuimos en 20 unidades las casillas que intervienen en el ciclo construido.

La variable $x_{2,4}$ entra en la base y la variable $x_{3,4}$, por ejemplo, sale de la base.

¿Cómo seleccionar la variable que entra en la base para mejorar la solución?

Normalmente, entra a la base aquella variable cuyo coste reducido, cambiado de signo, sea el mayor.

¿Cuándo asegurar el óptimo?

Cuando todos los costes reducidos, cambiados de signo, sean menores o iguales que cero.

El algoritmo de transporte (X)

Formalización del algoritmo de transporte

Paso 0: *Iniciación*

- Obtener una solución inicial por el método del rincón noroeste, de mínimos costes o de Vogel.

Paso 1: *Determinar los costes reducidos de las variables del primal*

- Detectar las variables de la base en el problema primal.
- Determinar el valor de las variables del dual, u_i y v_j, teniendo en cuenta que los costes reducidos de las variables de la base del primal son iguales a cero; es decir: $u_i + v_j = c_{i,j}$, si $x_{i,j}$ está en la base.
- Determinar los costes reducidos cambiados de signo de las variables no básicas del primal.

Paso 2: *Test de óptimo*

- Si todos los costes reducidos cambiados de signo de las variables del primal son menores o iguales a cero, entonces la solución básica es óptima y finalizar. Si no, continuar.

Paso 3: *Obtención de una nueva solución*

- Buscar la variable del primal que posea el mayor coste reducido cambiado de signo, entra en la base.
- Determinar un *ciclo de desplazamiento* en el que intervenga la variable que entra a la base.
- Hallar la cantidad máxima a desplazar en el ciclo respetando la no negatividad de las variables del primal.
- Hallar la nueva solución. Ir a Paso 1.

El algoritmo de transporte (XI)

Ejemplo – 02: (I)

Paso 0: *partimos de la solución obtenida por el método del rincón noroeste.*

	A1	A2	A3	A4
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

	A1	A2	A3	A4	
F1	20				20
F2		30	20		50
F3			10	20	30
	20	30	30	20	

Paso 1: (I)

- *Obtenemos las variables duales resolviendo el sistema:*

$$u_1 + v_1 = 5 \qquad u_2 + v_2 = 4 \qquad u_3 + v_3 = 6$$

$$u_1 + v_2 = 1 \qquad u_2 + v_3 = 5 \qquad u_3 + v_4 = 8$$

que , de forma más simple, se puede representar con el siguiente esquema:

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1	5	1			
F2		4	5		
F3			6	8	
v_j					

Asignando $v_1 = 0$ →

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1	5	1			5
F2		4	5		8
F3			6	8	9
v_j	0	-4	-3	-1	

El algoritmo de transporte (XII)

Ejemplo – 02: (II)

Paso 1: (II)

- *Calculamos los costes reducidos, cambiados de signo, de las variables del primal, $u_i + v_j = c_{i,j}$*

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1	5	1			5
F2		4	5		8
F3			6	8	9
v_j	0	-4	-3	-1	

;

	A1	A2	A3	A4
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

→

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1			0	-1	5
F2	5			1	8
F3	2	-1			9
v_j	0	-4	-3	-1	

Paso 2: *La solución no es óptima ya que hay costes reducidos, cambiados de signo, que son mayor que cero.*

Paso 3:

- *Seleccionamos la variable $x_{2,1}$ (la de mayor coste reducido, cambiado de signo) para entrar en la base.*
- *Determinamos el ciclo de desplazamiento en el que interviene $x_{2,1}$ y obtenemos una nueva solución:*

	A1	A2	A3	A4	
F1	20^-	0^+			20
F2	+	30^-	20		50
F3			10	20	30
	20	30	30	20	

$\xrightarrow{\Delta = 20}$

	A1	A2	A3	A4	
F1		20			20
F2	20	10	20		50
F3			10	20	30
	20	30	30	20	

Segunda solución:

$\boxed{Z = 440}$

El algoritmo de transporte (XIII)

Ejemplo – 02: (III)

Paso 1: (III)

- *Volvemos a calcular los costes reducidos, cambiados de signo, para la segunda solución*

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1		1			0
F2	3	4	5		3
F3			6	8	4
v_j	0	1	2	4	

;

	A1	A2	A3	A4
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

$\rightarrow$

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1	-5		0	-1	0
F2				1	3
F3	-3	-1			4
v_j	0	1	2	4	

Paso 2: (II) *La solución no es óptima ya que hay costes reducidos, cambiados de signo, que son mayor que cero.*

Paso 3: (II)

- *Seleccionamos la variable $x_{2,4}$ (la de mayor coste reducido, cambiado de signo) para entrar en la base.*
- *Determinamos el ciclo de desplazamiento en el que interviene $x_{2,1}$ y obtenemos una nueva solución:*

	A1	A2	A3	A4	
F1		20			20
F2	20	10	20^-	+	50
F3			10^+	20^-	30
	20	30	30	20	

$\xrightarrow{\Delta = 20}$

	A1	A2	A3	A4	
F1		20			20
F2	20	10	0	20	50
F3			30		30
	20	30	30	20	

Tercera solución:

$\boxed{Z = 420}$

El algoritmo de transporte (XIV)

Ejemplo – 02: (IV)

Paso 1: (IV)

- *Volvemos a calcular los costes reducidos, cambiados de signo, para la tercera solución:*

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1		1			0
F2	3	4	5	6	3
F3			6		4
v_j	0	1	2	3	

;

	A1	A2	A3	A4
F1	5	1	2	5
F2	3	4	5	6
F3	7	6	6	8

$\longrightarrow$

	A1	A2	A3	A4	u_i
F1	-5		0	-2	0
F2					3
F3	-3	-1		-1	4
v_j	0	1	2	3	

Paso 2: (III) *La solución es óptima ya que no hay costes reducidos, cambiados de signo, mayores que cero. Por tanto, finalizamos.*

- *Solución óptima:*

	A1	A2	A3	A4	
F1		20			20
F2	20	10	0	20	50
F3			30		30
	20	30	30	20	

$$\boxed{Z = 20\times 1 + 20\times 3 + 10\times 4 + 20\times 6 + 30\times 6 = 420}$$

El problema de asignación (I)

Una serie de trabajos (n) deben asignarse a una serie de máquinas (n). El coste de realizar el trabajo i en la máquina j es $c_{i,j}$. El problema consiste en determinar una asignación de los trabajos a las máquinas para conseguir que el coste total sea mínimo.

- Caso particular del problema de transporte, donde:
  - el número de centros emisores es igual número de centros receptores.
  - todas las ofertas y demandas iguales a 1.

Modelo general:

n^2 variables

$2n$ restricciones (un trabajo sólo puede realizarse en una máquina y una máquina sólo puede realizar un trabajo).

$x_{i,j}$ variable genérica que vale 1 en caso de que el trabajo i se realice en la máquina j y 0 en caso contrario.

$$[MIN]Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j}$$

$$s.a: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\}$$

El problema de asignación (II)

Ejemplo – 03: Ejemplo prototipo (I)

Se dispone de cinco órdenes de fabricación (A, B, C, D y E), cada una de las cuales puede ser ejecutada por una de las cinco máquinas de un taller (a, b, c, d y e). Los tiempos de proceso de las órdenes, medidos en horas, dependen de la máquina empleada, tal como se indica en la tabla adjunta. Se desea realizar una asignación entre órdenes y máquinas de manera que el tiempo total de proceso sea mínimo.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
A	2	1	6	5	10
B	7	8	4	10	6
C	7	6	10	9	10
D	6	10	9	8	8
E	10	9	7	7	10

El problema de asignación (III)

Ejemplo – 03: Ejemplo prototipo (II)

Una posible asignación es:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
A		1			
B			4		
C	7				
D				8	
E					10

$$Z = 7 + 1 + 4 + 8 + 10 = 30 \text{ horas}$$

- En cada columna y fila sólo una variable es diferente a 0 $\rightarrow$ Solución degenerada (n-1 grados de degeneración).
  - Aplicación del algoritmo simplex o del algoritmo de transporte no es eficiente.
- Existen $n!$ asignaciones posibles $\rightarrow$ si n es grande la enumeración de soluciones debe descartarse.

El algoritmo Húngaro (I)

Fundamentos

Es un método para resolver el problema. Consiste en buscar una asignación nula mediante la creación de ceros en la matriz de costes sumando y restando cantidades adecuadas. Se basa en las siguientes observaciones:

- Si sumamos o restamos la misma cantidad a todos los elementos de una fila o columna de la matriz de costes, la asignación óptima no varía y su valor (suma de costes de las variables distintas de cero) queda incrementado o reducido en dicha cantidad.
- Si todos los elementos de la matriz de costes son no negativos, entonces una asignación cuyo valor sea cero es óptima.

Formalización del algoritmo Húngaro(I)

Fase 1: *Obtención de ceros*

- Restar, a todos los elementos de una misma columna, el menor elemento de dicha columna.
- Restar, a todos los elementos de una misma fila, el menor elemento de dicha fila.

Formalización del algoritmo Húngaro(II)

Fase 2: *Búsqueda de una asignación*

- Con los ceros de la matriz resultante se busca una asignación:
  - Ir a la fila o columna que posea el menor número de ceros, se marca uno de ellos y se eliminan todos los demás de su misma fila o columna.
  - Se prosigue de esta manera hasta que todos los ceros están marcados o eliminados.

0	--
cero marcado	*cero eliminado*

0	--	2	--	4
5	7	**0**	5	--
1	1	2	--	**0**
2	7	3	1	--
6	6	1	**0**	2

Fase 3: *Test de óptimo*

- Si hay *n* ceros marcados, la asignación es **óptima**. Finalizar.
- Si no, continuar.

El algoritmo Húngaro (III)

Formalización del algoritmo Húngaro (III)

Fase 4: *Determinación del mínimo cubrimiento de ceros*

▪Procedimiento:

1. Se seleccionan las filas que no tienen ceros marcados.
2. En las filas seleccionadas (1), se buscan ceros eliminados y se seleccionan las columnas que los contienen.
3. En las columnas seleccionadas (2), se buscan ceros marcados, y se seleccionan las filas que los contienen.
4. Se repiten los puntos (2) y (3) hasta que no se pueda seleccionar más.

0	--	2	--	4
5	7	**0**	5	--
1	1	2	--	**0**
2	7	3	1	--
6	6	1	**0**	2

Fila seleccionada (1) → (cuarta fila)

Columna seleccionada (2) → (quinta columna)

Fase 5: *Cubrimiento de ceros*

▪Se traza una raya sobre toda fila no seleccionada y sobre toda columna seleccionada.

Fase 6: *Desplazamiento de ceros*

▪Restar, el menor valor de los elementos no rayados, a las columnas no rayadas y sumarlo a las filas rayadas (se crea al menos un 0 más). Ir a la Fase 2.

El algoritmo Húngaro (IV)

Ejemplo – 03: (I)

Fase 1: *Obtención de ceros (I)*

Datos de partida

2	1	6	5	10
7	8	4	10	6
7	6	10	9	10
6	10	9	8	8
10	9	7	7	10

Restamos a todos los elementos de cada fila su menor valor

0	0	2	0	4
5	7	0	5	0
5	5	6	4	4
4	9	5	3	2
8	8	3	2	4

Restamos a todos los elementos de cada columna su menor valor

0	0	2	0	4
5	7	0	5	0
1	1	2	0	0
2	7	3	1	0
6	6	1	0	2

Fase 2: *Búsqueda de una asignación (I)*

0	--	2	--	4
5	7	**0**	5	--
1	1	2	--	**0**
2	7	3	1	--
6	6	1	**0**	2

Fase 3: *Test de óptimo (I)*

Número de ceros marcados = 4

Número de trabajos/máquinas = 5

Como el número de ceros marcados $\neq n \rightarrow$ *la solución no es óptima*

El algoritmo Húngaro (V)

Ejemplo – 03: (II)

Fase 4: *Determinación del mínimo cubrimiento de ceros (I)*

0	--	2	--	4	
5	7	**0**	5	--	
1	1	2	--	**0**	← (3)
2	7	3	1	--	← (1)
6	6	1	**0**	2	← (5)
			↑	↑	
			(4)	(2)	

Fase 5: *Cubrimiento de ceros (I)*

0	--	2	--	4
5	7	**0**	5	--
1	1	2	--	**0**
2	7	3	1	--
6	6	1	**0**	2

Filas no seleccionadas

Columnas seleccionadas

Fase 6: *Desplazamiento de ceros (I)*

0	--	2	--	4
5	7	**0**	5	--
1	1	2	--	**0**
2	7	3	1	--
6	6	1	**0**	2

Filas rayadas

Menor valor →

Columnas no rayadas

0	0	2	1	5
5	7	0	6	1
0	0	1	0	0
1	6	2	1	0
5	5	0	0	2

El algoritmo Húngaro (VI)

Ejemplo – 03: (III)

Fase 2: *Búsqueda de una asignación (II)*

0	0	2	1	5
5	7	0	6	1
0	0	1	0	0
1	6	2	1	0
5	5	0	0	2

0	--	2	1	5
5	7	**0**	6	1
--	**0**	1	--	--
1	6	2	1	**0**
5	5	--	**0**	2

Fase 3: *Test de óptimo (II)*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Número de ceros marcados} = 5 \\ \textit{Número de trabajos/máquinas} = 5\end{array}\right\}$$

número de ceros marcados = n $\rightarrow$ *la solución es óptima*

La solución:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
A	2				
B			4		
C		6			
D					8
E				7	

$$\boxed{Z = 2 + 6 + 4 + 7 + 8 = 27 \text{ horas}}$$