Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

Métodos Cuantitativos de Organización Industrial: Teoría de Colas

Joaquín Bautista Valhondo, Rocío Alfaro Pozo y Alberto Cano Pérez

D-09/2011

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Cataluña

Publica:

Universitat Politècnica de Catalunya
www.upc.edu

Edita:

Cátedra Nissan
www.nissanchair.com
director@nissanchair.com

Métodos cuantitativos. Teoría de Colas

CATEDRA NISSAN

DOE
Departament
d'Organització
d'Empreses

Contenido

- Introducción.
- Costes asociados a los sistemas con esperas.
- Clasificaciones de los sistemas con esperas.
- Gestión de colas.
- Formalización de los sistemas con esperas.
- Procesos de nacimiento y muerte.
- Introducción a la redes de colas.
- Aplicación de los modelos de colas al diseño de sistemas.
- Modelos de colas.

Introducción

Espera:

- Se da en todo sistema en el que los flujos de entrada y salida en un punto del sistema no están perfectamente sincronizados.
- Puede afectar a personas u objetos.
- Las unidades en espera producen colas.

Cola:

- Acumulación de unidades (productos, personas) que están a la espera de ser servidas.
- Aparece en diferentes tipos de sistemas (producción, servicios): *materias primas en el almacén, productos semi-elaborados esperando en diversos puntos a que la máquina esté disponible, listas de espera de hospitales, coches en el acceso de una autopista de peaje, etc.*
- ¿Cómo evitarlas?
  - Tasa media de llegadas < capacidad de servicio.
  - Tener un control suficiente sobre la dispersión de los tiempos entre llegadas y la de los tiempos de servicio.

Costes asociados a los sistemas con esperas

Las esperas suponen colas, y por tanto, la aparición de un stock.

- Costes de las unidades que prestan el servicio o canales (incluyendo el del espacio necesario para alojarlas).
- Coste del tiempo de estancia de las unidades en el sistema (incluyendo el tiempo de espera más el de servicio).
- Coste de desplazamiento de las unidades al servicio o del servicio a las unidades.
- Coste del espacio asignado para las unidades que esperan.
- Coste de las perturbaciones derivadas de la falta de espacio.

Objetivo: dimensionar los sistemas optimizando (*minimizando*) los costes globales.

¿Sobre qué características del sistema se puede actuar?:

- La ley que rige el tiempo se servicio (elección entre el tipo y número de canales).
- La ley que rige las llegadas.
- La disciplina de la cola.

Clasificaciones de los sistemas con esperas (I)

En relación con la disciplina de la cola:

- Llegadas individuales o en grupo.
- Disuasión o no de las unidades que pretenden incorporarse al sistema (cola + servicio) en función de la longitud de la cola (con una cierta probabilidad).
- Dependencia del número de unidades que pretenden incorporarse al sistema en función del número de unidades que se encuentran en el mismo.

En relación el servicio:

- Ley de servicio única (a lo largo del tiempo y para todas las unidades).
- Ley de servicio variable en función de:
  - El tipo de unidad.
  - La longitud de la cola.

Clasificaciones de los sistemas con esperas (II)

En relación con las llegadas:

- FIFO (*first in, first out*).
- LIFO (*last in, first out*).
- SIRO (*service in random order*).
- Con prioridad jerárquica:
  - Con interrupción.
  - Sin interrupción.
- En caso de diversos canales en paralelo puede haber:
  - Cola única.
  - Cola múltiple → Distribución de las unidades a cada una de las colas:
    - *Asignación previa.*
    - *Voluntad de las unidades.*
    - *Posibilidad de cambio.*

Gestión de las colas

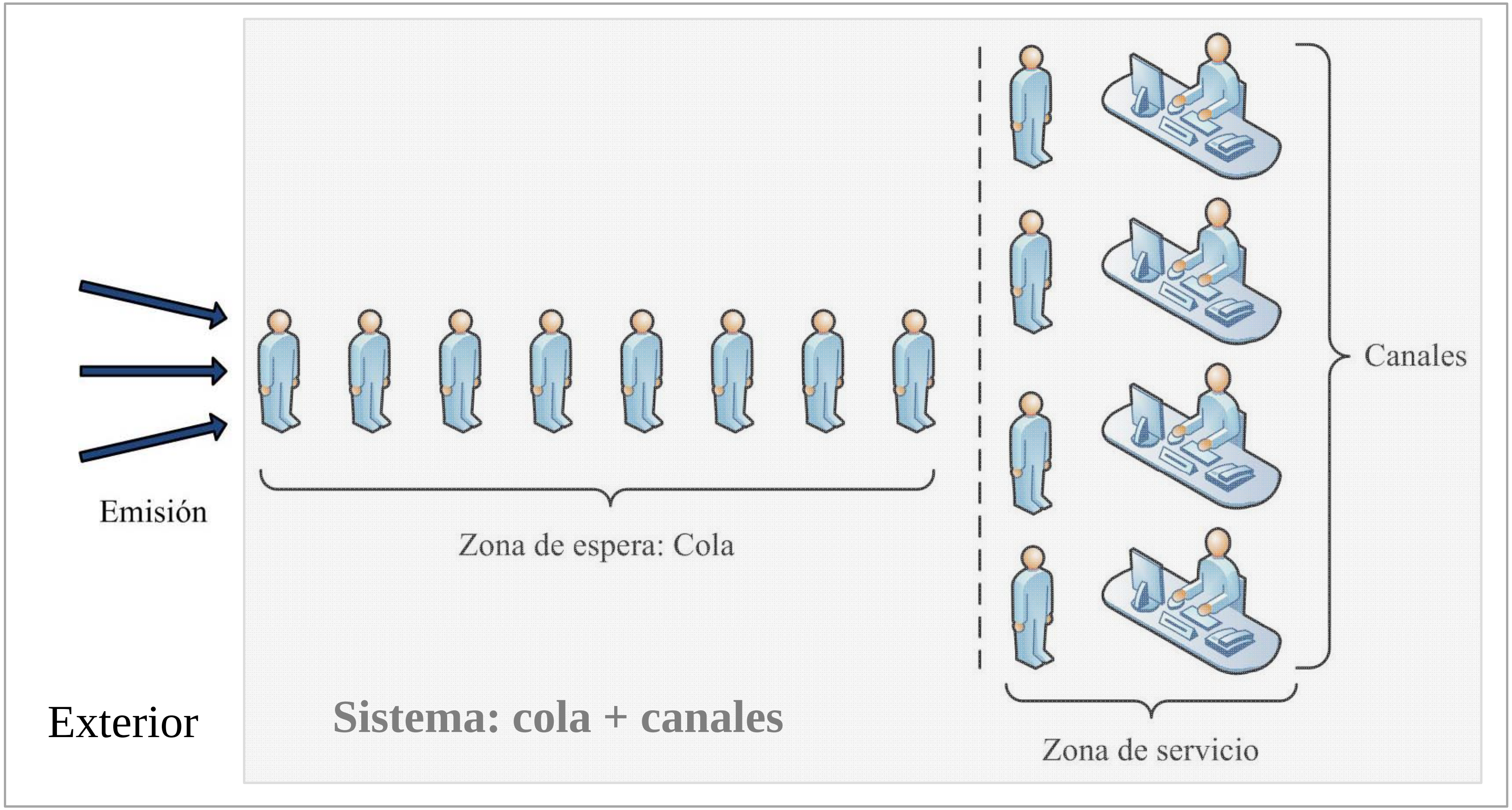
Consideraciones a tener en cuenta en la organización de las colas:

- Debe existir un espacio adecuado para almacenar las unidades que forman la cola.
- En algunos casos se deben prever dispositivos de manutención para asegurar la rotación de las unidades.
- En los sistemas con varios canales en paralelo es preferible una cola única.
- En los sistemas de servicios es importante mantener a los clientes bien informados mientras están en la cola.
- En sistema con tiempos de servicio muy dispares para las diferentes unidades es conveniente establecer canales separados.
- Si la cola aumenta hasta un cierto límite es conveniente aumentar la capacidad de los canales.

Las colas no sólo existen sino que en muchos casos son inevitables, por ello es preciso tenerlas en cuenta como un elemento más del sistema.

Formalización de los sistemas con esperas (I)

Sistema de colas



Formalización de los sistemas con esperas (II)

Esquema de sistema de colas:

$$a \,/\, b \,/\, c : d \,/\, e \,/\, f$$

a Ley de llegadas al sistema.

b Ley de tiempos de servicio.

c Número de cales en paralelo (supuestos iguales).

d Disciplina de la cola.

e Número máximo de unidades que pueden encontrarse simultáneamente en el interior del sistema.

f Tamaño del centro emisor.

Formalización de los sistemas con esperas (III)

*Valores más utilizados para los elementos **a** y **b**:*

M ≡ Tasa media de llegadas constante a lo largo del tiempo.
El tiempo entre llegadas sigue una ley exponencial.
El número de llegadas por unidad de tiempo sigue una ley de Poisson.

D ≡ Tiempo constante.

E ≡ Ley Erlang-*k* (una variable aleatoria sigue una ley Erlang-*k* cuando es la suma de *k* variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas).

GI/G ≡ Ley general.

*Valores más utilizados para **c**:*

- Valor concreto.
- Conjunto de valores definido como una propiedad ($c > 1$).

Formalización de los sistemas con esperas (IV)

*Valores más utilizados para los elementos **d**:*

GD ≡ Disciplina general (cualquiera, sin prioridades).

FIFO ≡ Primer llegado, primer atendido.

LIFO ≡ Último llegado, primer atendido.

SIRO ≡ Al azar.

*Valores más utilizados para los elementos **e** y **f**:*

∞ ≡ Capacidad del sistema infinita / Centro emisor infinito.

N ≡ Capacidad del sistema finita / Centro emisor finito.

Ejemplos:

M / M / 1: FIFO / ∞ / ∞ M / G / s : GD/ ∞ / ∞

Formalización de los sistemas con esperas (V)

Nomenclatura:

λ Tasa de llegadas (número medio de llegadas por unidad de tiempo).

μ Tasa de servicio (número medio de unidades tratadas por un canal por unidad de tiempo).

s Número de canales en paralelo (supuestos iguales).

u Intensidad de tráfico (número de canales cuya capacidad media global sería igual a las llegadas).

$$u = \frac{\lambda}{\mu}$$

ρ Factor de servicio (proporción de la demanda total media por unidad de tiempo en relación con la capacidad total media del sistema).

$$\rho = \frac{u}{s} = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Formalización de los sistemas con esperas (VI)

Valores a calcular:

- Probabilidad de que en el interior del sistema haya un cierto número de unidades, P_n.
- Probabilidad de que un canal esté libre.
- Probabilidad de que una unidad que llegue al sistema encuentre un canal disponible.
- Valor medio del número de unidades en el sistema, L.
- Valor medio del número de unidades en la cola, L_q.
- Valor medio del tiempo de estancia de una unidad en el sistema, W.
- Valor medio del tiempo de estancia de una unidad en la cola, W_q.
- Distribución del tiempo de estancia en el sistema o en la cola $\rightarrow$ probabilidad de que una unidad permanezca en el sistema o en la cola un cierto tiempo.
- Costes medios por unidad de tiempo.

Formalización de los sistemas con esperas (VII)

Relaciones entre los valores a calcular:

- El tiempo medio de estancia en el sistema es igual al tiempo medio de estancia en la cola más el tiempo medio de servicio.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

- Fórmulas de Little:
  - Con λ constante: $L = \lambda W$ y $L_q = \lambda W_q$
  - Con λ no constante: $L = \bar{\lambda} W$ y $L_q = \bar{\lambda} W_q$ donde $\bar{\lambda}$ es el valor promedio

Régimen transitorio vs régimen permanente:

- Régimen transitorio: la probabilidad de que el sistema adopte un estado u otro depende del tiempo (sistemas de ecuaciones diferenciales, simulación).
- Régimen permanente: la probabilidad de que el sistema adopte un estado u otro es constante (fórmulas, algoritmos, tablas y gráficos, teoría de colas).

Procesos de nacimiento y muerte (I)

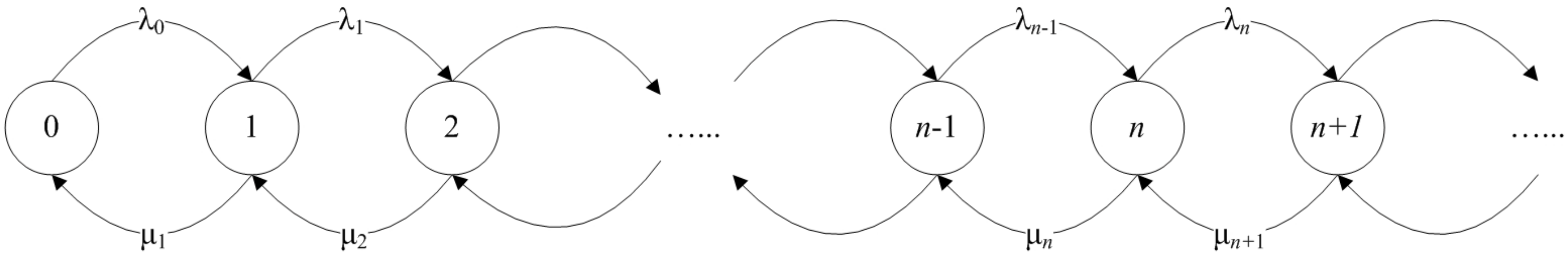
Hipótesis (en régimen permanente):

- La probabilidad de que se produzca una llegada (nacimiento) en un intervalo de tiempo, dt ,es $\lambda_n dt$ donde $\lambda_n = cte.$, dado n, y por tanto, no depende del tiempo transcurrido desde la última llegada.
- La probabilidad de que se produzca una salida (muerte) en un intervalo de tiempo, dt, *es* $\mu_n dt$ donde $\mu_n = cte.$, dado n, y por tanto, no depende del tiempo transcurrido desde el comienzo del servicio.
- La probabilidad de que en un intervalo de tiempo dt se produzca más de un acontecimiento es un infinitésimo de orden superior.

Por tanto:

- El estado del sistema queda definido por el número de unidades que contiene, n.
- Los cambios de estado se producen cuando hay un nacimiento ($n \rightarrow n+1$) o una muerte ($n+1 \rightarrow n$).

Procesos de nacimiento y muerte (II)



- Proceso sin memoria: la probabilidad de que ocurra algo sólo depende del estado actual del sistema y no de su historia.
- La probabilidad de entrar en un estado del sistema en un intervalo de tiempo, *dt*, es igual a la probabilidad de salir del mismo.

$$P_{n-1}\lambda_{n-1} + P_{n+1}\mu_{n+1} = P_n\left(\lambda_n + \mu_n\right)$$

para $n = 0: \quad P_1\mu_1 = P_0\lambda_0$

de donde:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0, \quad P_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}P_0, \quad \ldots \quad , P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}\mu_j}P_0 \rightarrow P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}\mu_j}\right]^{-1}$$

Introducción a la redes de colas

Red de colas:

- Conjunto de sistemas de colas relacionados entre sí.
- El flujo de salida de uno o más sistemas de colas puede constituir el flujo de entrada a otro sistema.
- Tratamiento complejo, excepto:
  - La mezcla de flujos exponenciales es también exponencial con un parámetro igual a la suma de los que corresponde a los flujos componentes.
  - División de flujo exponencial cuando la división es al azar. Los flujos resultantes son exponenciales con un parámetro igual al del flujo inicial multiplicado por la proporción que corresponde al flujo de salida.
  - Otra posibilidad, más compleja es la generación del modelo de proceso de nacimiento y muerte.

Aplicación de los modelos de colas al diseño de sistemas

Los modelos de colas se pueden utilizar para estimar los parámetros de un sistema de colas y diseñarlo de acuerdo a unos objetivos.

Algunos objetivos:

- Minimizar el coste global del sistema.
  - Costes de funcionamiento
  - Costes de desplazamiento
  - Costes de espera
- Alcanzar un determinado nivel de servicio con coste mínimo (determinación del número mínimo de canales).

Aplicación de modelos de colas:

- Es necesario tener información sobre las leyes de llegadas y de servicio, al menos λ y μ.
- Es necesario calcular los intervalos de confianza, pues los datos se estiman a partir de una muestra del sistema real.

Modelos de colas (I)

M / M / 1 : GD / ∞ / ∞

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad ; \quad P_0 = 1 - \rho \quad ; \quad P_n = \rho^n (1 - \rho) \quad ; \quad \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \rho^n$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad ; \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad ; \quad W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad ; \quad W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

M / M / 1 : FIFO / ∞ / ∞

$$\text{Prob}(T_q > t) = \rho e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$\text{Prob}(T > t) = e^{-(\mu-\lambda)t}$$

Modelos de colas (II)

M / M / s : GD / ∞ / ∞

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu s} \; ; \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{s^n \rho^n}{n!} + \frac{\rho^s s^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} ;$$

$$P_n = \frac{s^n \rho^n}{n!} P_0, \quad \text{si } n \le s \quad ; \quad P_n = \frac{s^s \rho^n}{s!} P_0, \quad \text{si } n \ge s$$

$$L_q = \frac{s^s \rho^{s+1}}{(1-\rho)^2 s!} P_0 \quad ; \quad L = L_q + \rho s \quad ; \quad W = \frac{L}{\lambda} \quad ; \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Otros modelos:

Bautista, J.; Corominas, A.; Companys, R., 2011, Apuntes, Métodos Cuantitativos de Organización Industrial: Sistemas con esperas: Teoría de Colas y Simulación, D-08/2011. Cátedra Nissan - PROTHIUS, 52 pags. (www.nissanchair.com)

Modelos de colas (III)

M / M / s : GD / ∞ / ∞ (Valores de P_0)