Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

Métodos Cuantitativos de Organización Industrial: Programación Lineal.

Joaquín Bautista Valhondo

D-05/2011
(Rec. IO-JBV)

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Cataluña

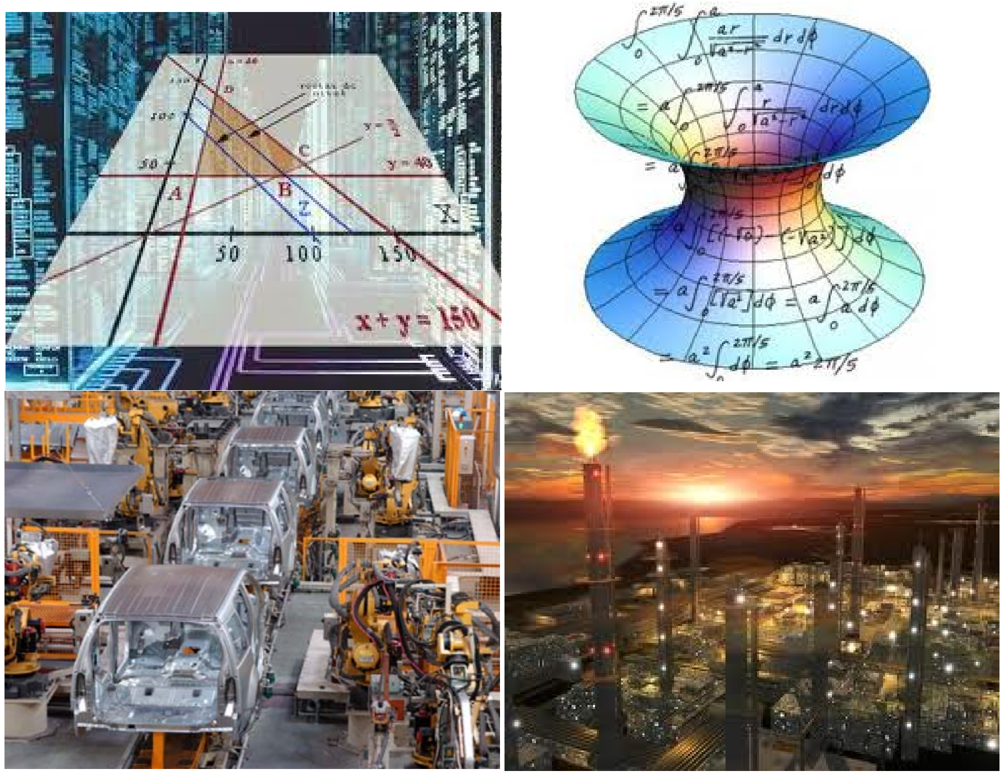
Publica:

Universitat Politècnica de Catalunya
www.upc.edu

Edita:

Cátedra Nissan
www.nissanchair.com
director@nissanchair.com

Programación Lineal



CATEDRA NISSAN

DOE

Departament
d’Organització
d’Empreses

Contenido

- *Programas matemáticos y programas lineales*
- *Ejemplos de programas lineales*
- *Terminología, supuestos y formatos*
- *Soluciones: tipología, clasificación y propiedades*
- *Resolución intuitiva*
- *Resolución analítica I: algoritmo simplex*
- *Dualidad en programación lineal*
- *Programas duales: ejemplos y propiedades*
- *Variables duales: disposición e interpretación*
- *Resolución analítica II: algoritmo simplex dual*
- *Análisis de sensibilidad en programación lineal*

Preliminares

- El proceso de decisión pretende hallar un conjunto de valores que deben adoptar ciertas magnitudes con el propósito de que otra magnitud, que es función de las anteriores, sea óptima (máximo o mínimo).
- Las magnitudes sólo pueden adoptar ciertos valores pues deben satisfacer una serie de condiciones, es decir, las magnitudes están sujetas a un conjunto de restricciones. Una limitación típica para la mayoría de las magnitudes del sistema es que no tiene sentido que éstas adopten valores negativos.

Programas matemáticos

- Existen n magnitudes a las que se quiere asignar un valor, sean éstas x_1, x_2, ..., x_n.
- Sea z la magnitud a optimizar la cual es función de las magnitudes anteriores $z=f(x_1,..,x_n)$.
- Sean g_1, g_2, ..., g_m, las expresiones asociadas a las condiciones que deben cumplir las magnitudes.

PROGRAMAS MATEMÁTICOS. ESCRITURA SIMBÓLICA

En tales condiciones, nuestro problema se puede escribir simbólicamente así:

$$
\begin{aligned}
&Opt \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\\
&s.a.: \\
&g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \\
&g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \\
&.. \\
&g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0
\end{aligned}
$$

Un *programa matemático* se lee así: se desea optimizar la *función objetivo f* de las variables *X* sujetas a las restricciones *G*.

A veces, a la función objetivo se le da el nombre de *función económica*.

El propósito de optimizar *z* se indica mediante el símbolo *Opt*; la optimización se concreta en la práctica en minimizar (*Min*) o en maximizar (*Max*).

PROGRAMAS MATEMÁTICOS. CLASIFICACIÓN

Los programas matemáticos se pueden clasificar en relación a sus tres elementos básicos: variables, restricciones y función objetivo. De esta forma

- Las variables pueden ser, binarias, enteras, continuas o mixtas (unas continuas y otras enteras).
- Las restricciones pueden o no existir; si existen, pueden ser lineales o no, continuas o no, convexas o no, diferenciables o no.
- La función objetivo puede ser lineal o no, diferenciable o no, unimodal o no.

Programas Lineales.

Se dice que un programa matemático es un *programa lineal* cuando:

- Las variables son continuas y no negativas.
- Las restricciones son funciones lineales de las variables.
- La función objetivo es función lineal de la variables.

Cuando las variables sean enteras se hablará de programa lineal de variables enteras y cuando haya mezcla de variables enteras y contínuas se hablará de programa lineal mixto.

EJEMPLOS DE PROGRAMAS LINEALES (I)

Problema del transporte (I):

Ejemplo-01: Tres fábricas: F1, F2 y F3; producen cada día, respectivamente, 60, 70 y 80 unidades de cierto producto. A partir de éstas, se ha de servir a cuatro clientes: A1, A2, A3 y A4, cuyas demandas respectivas son: 75, 45, 40 y 50. Los costes de transportar una unidad desde una fábrica hasta el almacén de un cliente se recogen en la tabla adjunta.

Costes	A1	A2	A3	A4	Oferta
F1	8	13	9	8	60
F2	9	11	12	10	70
F3	7	8	10	9	80
Demanda	75	45	40	50	210

En tales condiciones, se desea determinar un plan de transporte de coste mínimo.

EJEMPLOS DE PROGRAMAS LINEALES (II)

Problema del transporte (II). Planteo Ejemplo-01:

las variables $x_{i,j}$ representan las cantidades que se transportan de i a j.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z = 8x_{1,1} + 13x_{1,2} + 9x_{1,3} + 8x_{1,4} + 9x_{2,1} + 11x_{2,2} + \\
&\qquad\qquad + 12x_{2,3} + 10x_{2,4} + 7x_{3,1} + 8x_{3,2} + 10x_{3,3} + 9x_{3,4} \\
&Ofertas: \\
&x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \le 60 \\
&x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \le 70 \\
&x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \le 80 \\
&Demandas: \\
&x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 75 \\
&x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 45 \\
&x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 40 \\
&x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 50 \\
\\
&x_{i,j} \ge 0 \quad para \ 1 \le i \le 3 \quad y \quad para \ 1 \le j \le 4
\end{aligned}
$$

Problema de la dieta:

Ejemplo-02: Se dispone de cinco tipos de alimento, de los que se conoce sus contenidos en proteínas, en kilocalorías, y su precio. Se trata de determinar una dieta de coste mínimo que contenga al menos 70 g de proteínas y 3000 kcal. Los datos de la tabla adjunta están referidos a 100 g de alimento.

Alimento	Proteínas	kcal	Precio
Pan	8.3	246	35
Queso	24.9	423	130
Mantequilla	0.4	793	100
Guisantes	6.0	93	75
Espinacas	5.1	26	30

Planteo: la variable x_i representa la cantidad (en kg) del alimento i que ha de formar parte de la dieta.

$$\begin{aligned}
&Min\ \ z = 350x_1 + 1300x_2 + 1000x_3 + 750x_4 + 300x_5 \\
&s.a: \\
&83x_1 + 249x_2 + 4x_3 + 60x_4 + 51x_5 \geq 70 \\
&2460x_1 + 4230x_2 + 7930x_3 + 930x_4 + 260x_5 \geq 3000 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

EJEMPLOS DE PROGRAMAS LINEALES (IV)

Problema optimización de procesos:

Ejemplo-03: Una empresa posee dos tipos de procesos (A y B) que se emplean para fabricar tres tipos de productos (p1, p2 y p3). Durante un mes se dispone de 120 h de A y 260 h de B. Se conocen también los tiempos de proceso y los ingresos obtenidos por cada unidad según tipo de producto. Interesa determinar un programa de producción que maximice el ingreso global.

Proc/prod.	**p1**	**p2**	**p3**	Dispon.
A	0.10	0.25	--	120 h
B	0.20	0.30	0.40	260 h
Ingreso	3	5	4	

Planteo: la variable x_j representa las unidades del producto j en el plan.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&s.a: \\
&0.10x_1 + 0.25x_2 \leq 120 \\
&0.20x_1 + 0.30x_2 + 0.40x_3 \leq 260 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

TERMINOLOGÍA EN PROGRAMACIÓN LINEAL

Modelo común PL:

$$
\begin{aligned}
&Opt \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
&s.a: \\
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\
&.. \\
&a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \\
\\
&x_1, x_2, ..., x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

c_j Coeficiente que multiplica a la variable x_j en la función objetivo. En ocasiones, representa el coste unitario asociado a la magnitud x_j .

b_i Término independiente asociado a la *i*-ésima restricción.

$a_{i,j}$ Coeficiente que multiplica a la variable x_j en la i-ésima restricción. A veces coeficiente tecnológico.

Una solución es una asignación de valores a las magnitudes x_j. Toda solución que satisface las restricciones impuestas es una *solución factible o realizable*. Se dice que una solución es *óptima*, si y sólo si es factible y presenta un valor de la función objetivo no peor que el de cualquier otra solución factible.

SUPUESTOS IMPLÍCITOS EN PL

- *Determinismo*: Todos los parámetros que intervienen en un programa lineal (costes, tasas, capacidades, etc.) se suponen conocidos y deterministas, así como las variables.

- *Continuidad*: Las variables pueden adoptar cualquier valor real, en general no negativo. En ocasiones, las variables representan magnitudes que adoptan valores enteros (número de operarios, unidades, etc.), en tal caso se deberá recurrir a la programación lineal entera o a la progración lineal mixta.

- *Proporcionalidad*: En programación lineal, cuando se incrementa o decrementa el valor de una variable, manteniendo el resto de valores constante, la función objetivo y las restricciones sufrirán variaciones proporcionales al incremento o decremento de la variable alterada.

- *Aditividad*: En programación lineal se satisface el principio de superposición: cuando se desarrollan dos o más actividades, los beneficios, los costes, el consumo de recursos, etc., son la suma de los que se producirían si se desarrollaran las actividades de manera independiente y en cualquier orden.

TRANSFORMACIONES FORMALES DE LOS PROGRAMAS LINEALES

Objetivo: Pasar de programa lineal heterogéneo a uno homogéneo

Regla 1: Cambio de sentido en la optimización. $Min\ \ z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv Max\ \ z' = -f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Regla 2: Cambio de sentido de una restricción. $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i \equiv -g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq -b_i$

Regla 3: Conversión de una ecuación en inecuaciones. $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \equiv \left\{ \begin{matrix} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_i \end{matrix} \right\}$

Regla 4: Conversión de una inecuación en ecuación. (variables de *holgura*)

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i \equiv g_i(x_1, x_2, ..., x_n) + m_i = b_i \ \ con \ \ m_i \geq 0$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_i \equiv g_i(x_1, x_2, ..., x_n) - m_i = b_i \ \ con \ \ m_i \geq 0$$

Regla 5: Variables acotadas inferiormente. $x_i \geq L_i \ \Rightarrow \ x_i' = x_i - L_i \quad con \quad x_i' \geq 0$

Regla 6: Variables no restringidas en signo. $Si\ \ x_i\ \ n.r.s. \ \Rightarrow \ x_i = x_i' - x_i'' \quad con \quad x_i', x_i'' \geq 0$

FORMATO ESTÁNDAR DE UN PROGRAMA LINEAL

Por tanto, aplicando las reglas anteriores todos los programas lineales pueden adoptar las forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z = cX \\
&s.a: \\
&AX = b \\
&X \geq 0
\end{aligned}
$$

donde:

X	es el vector de variables (n filas, 1 columna).
c	es el vector de costes (1 fila, n columnas).
A	es la matriz de coeficientes (m filas, n columnas; con m menor o igual que n).
b	es el vector de términos independientes (m filas, 1 columna).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA. RESOLUCIÓN INTUITIVA

Las restricciones que intervienen en un programa lineal, así como la función objetivo (cuando adopta un valor concreto), admiten una representación en el espacio en el que cada variable se corresponde con un eje cartesiano.

$$Max \quad z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$s.a:$$

$$0.10x_1 + 0.25x_2 \leq 120$$

$$0.20x_1 + 0.30x_2 + 0.40x_3 \leq 260$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

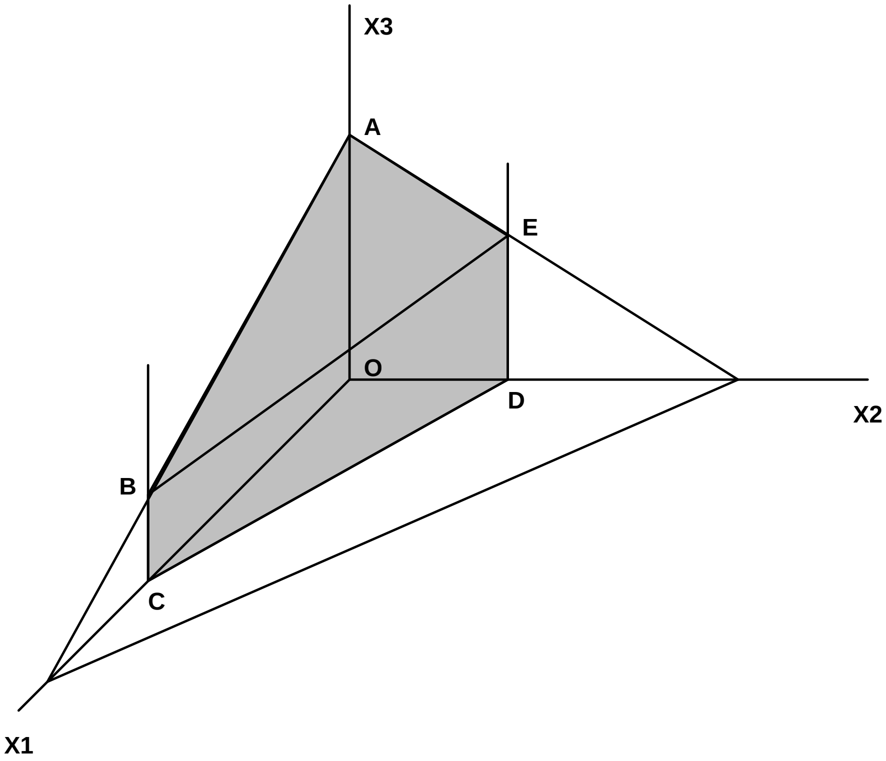
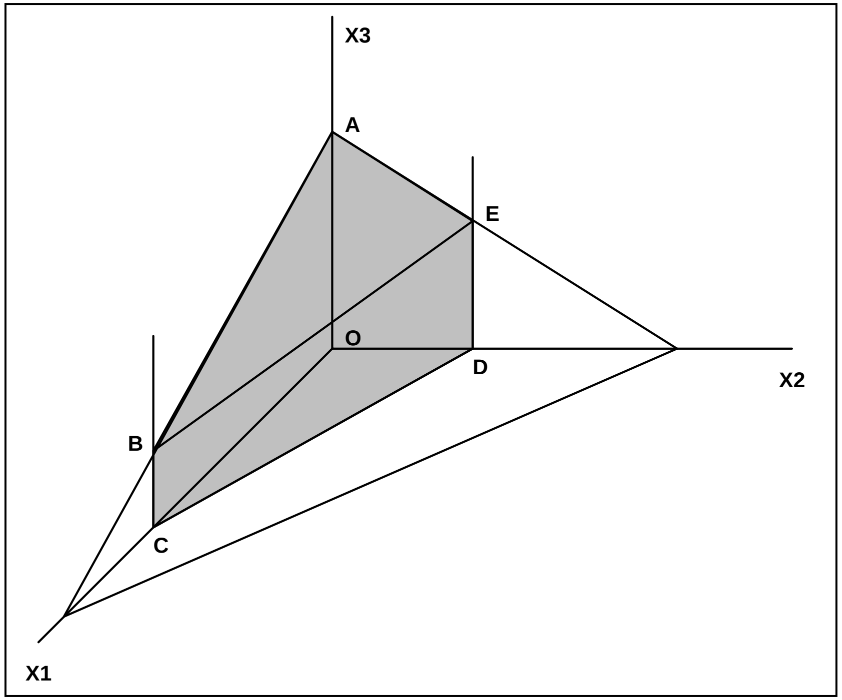


Figura-1: Conjunto de soluciones factibles del ejemplo-03.

RESOLUCIÓN INTUITIVA. EXPLORACIÓN DE SOLUCIONES

Por tanto, una alternativa (poco eficaz) para hallar el óptimo consiste en evaluar la función objetivo en todos los puntos asociados a los vértices de dicho poliedro.

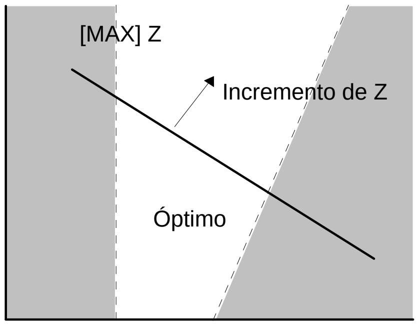
Puntos	x1	x2	x3	Z
O	0	0	0	0
A	0	0	650	2600
B	1200	0	50	3800
C	1200	0	0	3600
D	0	480	0	2400
E	0	480	290	3560
Ingreso	3	5	4	



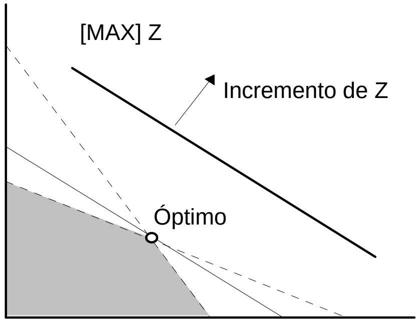
Podemos concluir que la solución óptima es la correspondiente al vértice B: x1=1200, x2=0 y x3=50, con un valor de la función objetivo igual a 3800 um. *Solución con óptimo único.*

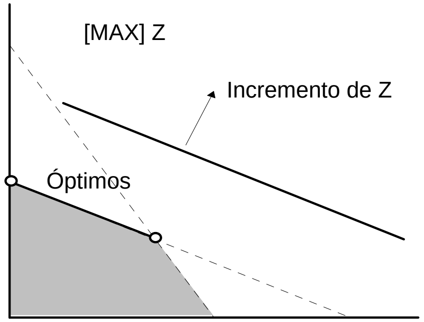
TIPOLOGÍA DE SOLUCIONES (I)

Caso 1: Conjunto de soluciones vacío.



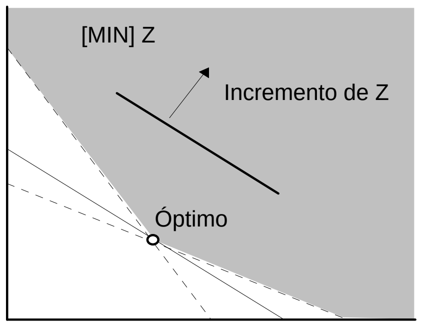
Caso 2: Conjunto de soluciones acotado y óptimos propios único y múltiple.

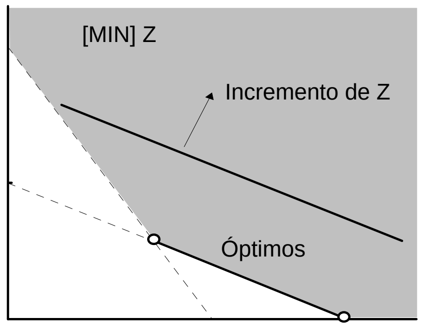




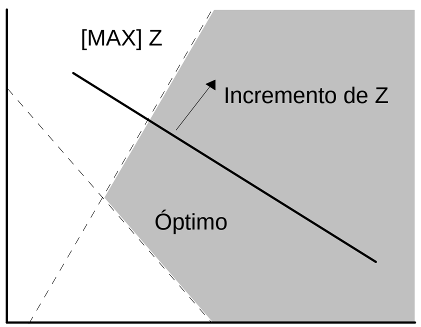
TIPOLOGÍA DE SOLUCIONES (II)

Caso 3: Conjunto de soluciones no acotado y óptimos propios único y múltiple.



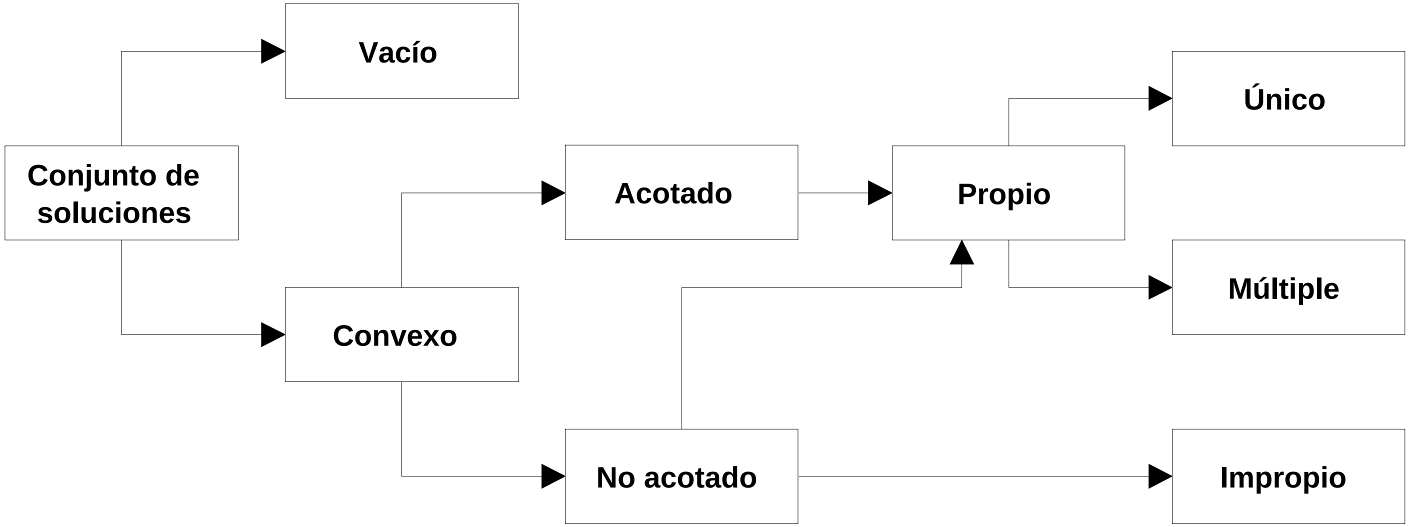


Caso 4: Conjunto de soluciones no acotado y óptimo impropio.



CLASIFICACIÓN Y PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

Clasificación Conjunto de Soluciones:



Propiedades generales de las soluciones de los programas lineales:

- El óptimo nunca se halla en un punto interior del conjunto de soluciones.
- Pueden existir soluciones óptimas que no se correspondan con algún vértice del conjunto de soluciones, concretamente cuando el óptimo es múltiple.
- Si el óptimo es propio, existe al menos una solución óptima que se corresponde con algún vértice del conjunto de soluciones.

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (I)

Aplicación ejemplo-03

Ejemplo-03: Una empresa posee dos tipos de procesos (A y B) que se emplean para fabricar tres tipos de productos (p1, p2 y p3). Durante un mes se dispone de 120 h de A y 260 h de B. Se conocen también los tiempos de proceso y los ingresos obtenidos por cada unidad según tipo de producto. Interesa determinar un programa de producción que maximice el ingreso global.

Proc/prod.	**p1**	**p2**	**p3**	Dispon.
A	0.10	0.25	--	120 h
B	0.20	0.30	0.40	260 h
Ingreso	3	5	4	

Transformar inecuaciones en igualdades añadiendo una variable de holgura a cada restricción:

$$[0.1]\quad 0.10\ x1 + 0.25\ x2 + s1 = 120$$
$$[0.2]\quad 0.20\ x1 + 0.30\ x2 + 0.40\ x3 + s2 = 260$$

La función a optimizar es:

$$[0.3]\quad z = 3\ x1 + 5\ x2 + 4\ x3$$

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (II)

Primera solución:

La solución más simple es no fabricar:

$x1 = 0$, $x2 = 0$, $x3 = 0$, $s1 = 120$ y $s2 = 260$. La función objetivo tiene valor nulo: $z=0$.

Se determinan s1, s2 y z en función de x1, x2 y x3. El resultado es:

[1.1] $s1 = 120 - 0.10\ x1 - 0.25\ x2$
[1.2] $s2 = 260 - 0.20\ x1 - 0.30\ x2 - 0.40\ x3$
[1.3] $z \quad = \quad 0 + 3\ x1 + 5\ x2 + 4\ x3$

Para mejorar (aumentar) el valor de z, basta incrementar cualquiera de las variables con coeficiente positivo en [1.3]. Se adopta el criterio de aumentar x2, que es la que presenta un coeficiente mayor.

¿En cuánto se puede aumentar x2? el aumento de x2 estará limitado por la no negatividad de las variables.

- De [1.1] se deduce: $x2 \leq 120 / 0.25 = 480$
- De [1.2] se deduce: $x2 \leq 260 / 0.30 = 866.66$

Para que se cumplan ambas condiciones a la vez, basta hacer **$x2 = 480$**.

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (III)

Segunda solución:

El incremento de x2 conduce a la solución siguiente:

x1 = 0, x2 = 480, x3 = 0, s1 = 0 y s2 = 260 - 0.30·480 =116.

La función objetivo tiene ahora el valor: z = 5·480 = 2400.

Determinamos x2, s2 y z en función de x1, x3 y s1.

[2.1] x2 = (120 - 0.10 x1 - s1) / 0.25 = 480 - 0.4 x1 - 4 s1
[2.2] s2 = 260 - 0.20 x1 - 0.30 (480 - 0.4 x1 - 4 s1) - 0.40 x3 =
= 116 - 0.08 x1 - 0.40 x3 + 1.20 s1
[2.3] z = 3 x1 + 5 (480 - 0.4 x1 - 4 s1) + 4 x3 = 2400 + x1 + 4 x3 - 20 s1

Para aumentar el valor de z, incrementamos el valor de x3, el cual está limitado por:

- De [2.1] se deduce: x3 no está acotada superiormente.
- De [2.2] se deduce: x3 ≤ 116 / 0.40 = 290.

Por consiguiente, basta hacer **x3 = 290**.

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (IV)

Tercera solución:

El incremento de x3 conduce a la solución siguiente:

x1 = 0, x2 = 480, x3 = 290, s1 = 0 y s2 = 0.

La función objetivo tiene ahora el valor: z = 5·480 + 4·290 = 3560.

Determinamos x2, x3 y z en función de x1, s1 y s2.

$$
\begin{aligned}
&[3.1]\ x2 = 480 - 0.40\ x1 - 4\ s1\\
&[3.2]\ x3 = (116 - 0.08\ x1 + 1.20\ s1 - s2) / 0.40 =\\
&\qquad\quad = 290 - 0.20\ x1 + 3\ s1 - 2.50\ s2\\
&[3.3]\ z \quad = 2400 + x1 + 4\ (290 - 0.20\ x1 + 3\ s1 - 2.50\ s2) - 20\ s1 =\\
&\qquad\quad = 3560 + 0.20\ x1 - 8\ s1 - 10\ s2
\end{aligned}
$$

Para aumentar el valor de z, sólo podemos incrementar x1, su limitación es:

- De [3.1] se deduce: x1 ≤ 480 / 0.40 = 1200.
- De [3.2] se deduce: x1 ≤ 290 / 0.20 = 1450.

Para que se cumplan ambas condiciones a la vez, basta hacer **x1 = 1200.**

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (V)

Cuarta solución:

El incremento de x1 conduce a la solución siguiente:

$x1 = 1200$, $x2 = 0$, $x3 = 290 - 0.20 \cdot 1200 = 50$, $s1 = 0$ y $s2 = 0$.
La función objetivo tiene ahora el valor: $z = 3 \cdot 1200 + 4 \cdot 50 = 3800$.

Determinamos x1, x3 y z en función de x2, s1 y s2.

$$
\begin{aligned}
&[4.1]\ x1 = (480 - x2 - 4\ s1) / 0.40 = 1200 - 2.50\ x2 - 10\ s1 \\
&[4.2]\ x3 = 290 - 0.20\ (1200 - 2.50\ x2 - 10\ s1) + 3\ s1 - 2.50\ s2 = \\
&\qquad\quad = 50 + 0.50\ x2 + 5\ s1 - 2.50\ s2 \\
&[4.3]\ z \quad = 3560 + 0.20\ (1200 - 2.50\ x2 - 10\ s1) - 8\ s1 - 10\ s2 = \\
&\qquad\quad = 3800 - 0.50\ x2 - 10\ s1 - 10\ s2
\end{aligned}
$$

No es posible mejorar z; la solución es óptima puesto que a cualquier solución factible en que alguna de las variables x2, s1, s2 tenga un valor mayor que cero le corresponde un valor de la función objetivo menor que 3800.

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (VI)

Tabla resumen de soluciones:

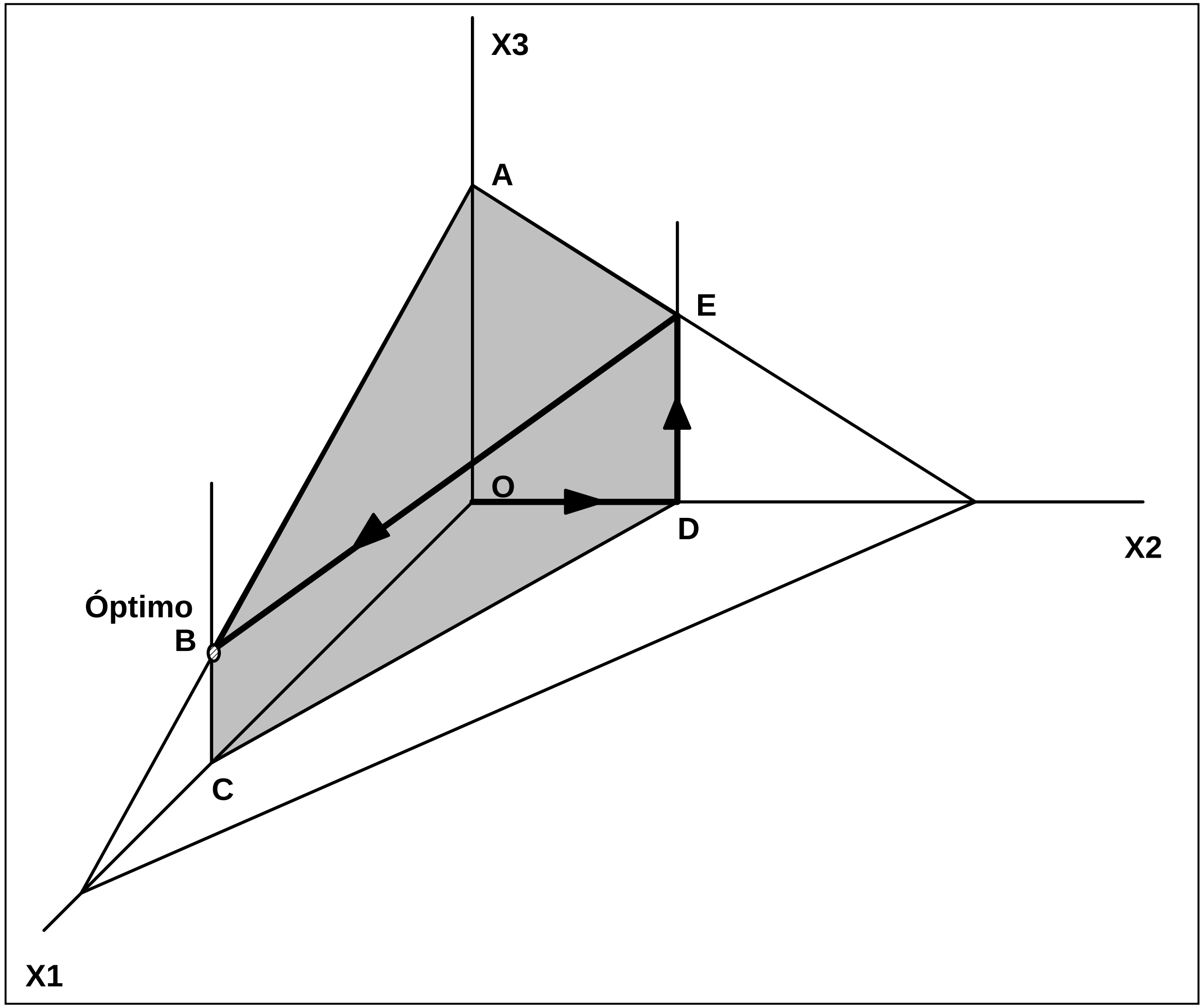
(1) O		+ 0,10 x1	+ 0,25 x2		+ s1		= 120	s1 = 120
		+ 0.20 x1	+ 0.30 x2	+ 0.40 x3		+ s2	= 260	s2 = 260
	z	- 3 x1	- 5 x2	- 4 x3			= 0	z = 0
(2) D		+ 0.40 x1	+ x2		+ 4 s1		= 480	x2 = 480
		+ 0.08 x1		+ 0.40 x3	- 1.20 s1	+ s2	= 116	s2 = 116
	z	- 1 x1		- 4 x3	+ 20 s1		= 2400	z = 2400
(3) E		+ 0.40 x1	+ x2		+ 4 s1		= 480	x2 = 480
		+ 0.20 x1		+ x3	- 3 s1	+ 2.5 s2	= 290	x3 = 290
	z	- 0.20 x1			+ 8 s1	+ 10 s2	= 3560	z = 3560
(4) B		+ x1	+ 2.50 x2		+ 10 s1		= 1200	x1=1200
			- 0.50 x2	+ x3	- 5 s1	+ 2.50 s2	= 50	x3 = 50
	z		+ 0.50 x2		+ 10 s1	+ 10 s2	= 3800	Z = 3800

UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA. APROXIMACIÓN AL SÍMPLEX (VII)

Trayectoria de soluciones:

O-D-E-B

$x_1 = 1200$
$x_3 = 50$
$Z = 3800$



ALGORITMO SÍMPLEX. PRELIMINARES

Objetivos:

- Forma de obtener una solución inicial.
- Conseguir la máxima reducción en cálculos y anotaciones.
- Formalizar un procedimiento general que permita resolver un programa lineal: el algoritmo símplex.

Formato estándar para desarrollos teóricos en PL:

$$\begin{aligned} &Min \;\; z = cX \\ &s.a: \\ &AX = b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

La matriz A tiene rango m. El algoritmo símplex trata de transformar el sistema $AX=b$ en otros que representen el mismo conjunto de soluciones factibles y se busque la optimización de la función z.

Para transformar un sistema en otro pueden emplearse los siguientes mecanismos:

(a) multiplicar una ecuación por un coeficiente distinto de 0
(b) sumar a una ecuación una combinación lineal del resto.

Lo anterior se reduce a multiplicar el sistema por una matriz no singular.

ALGORITMO SÍMPLEX. CONCEPTOS (I)

Base:

Dado el sistema $AX=b$, se llama matriz de base o simplemente base, y la notaremos B, a toda submatriz cuadrada (mxm) no singular (con determinante distinto de 0) de la matriz A. La matriz A se puede descomponer en dos matrices:

- la matriz de base B.
- el resto de columnas que llamaremos matriz no-básica N.

Sin pérdida de generalidad, se puede escribir: $A=(B,N)$.

Solución básica:

La descomposición de la matriz A permite escribir:

$$AX=b;\ (B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b;\ BX_B+NX_N=b;\ X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

Si hacemos $X_N=0$ (vector nulo), se obtiene una solución para el sistema $AX=b$:

$$X_B=B^{-1}b;\ X_N=0$$

A una solución de este tipo se le llama *solución básica* y es única para cada base B.

ALGORITMO SÍMPLEX. CONCEPTOS (II)

Base factible, Solución no-degenerada y Solución degenerada:

- Dada una base B y su solución básica ($X_B=B^{-1}b$, $X_N=0$), se dice que B es una *base factible* si todos los componentes de X_B son mayores o iguales que 0.
- Si todos los componentes de X_B son mayores que cero, se dice que la solución es *no-degenerada*.
- Si algún componente de X_B es igual a cero, se dice entonces que la solución es *degenerada*.

Costes reducidos:

Dada una solución básica factible (degenerada o no) podemos escribir:

$$z = cX = c_B X_B + c_N X_N = c_B\left(B^{-1}b - B^{-1}NX_N\right) + c_N X_N = c_B B^{-1}b + \left(c_N - c_B B^{-1}N\right)X_N = z_0 + \overline{c_N}X_N$$

donde:

$z_0 = c_B B^{-1}b$ es el valor que adopta la función objetivo.

$\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1}N$ se llaman costes reducidos de las variables no básicas.

Si $\overline{c_B} = c_B - c_B B^{-1}B$ entonces $z = z_0 + \overline{c_B}X_B + \overline{c_N}X_N = z_0 + \bar{c}X$ con $\bar{c} = c - c_B B^{-1}A$

Cada Base da lugar a un conjunto de costes reducidos únicos asociados a las variables.

ALGORITMO SÍMPLEX. CONCEPTOS (III)

Precios sombra:

Los componentes del vector $U = c_B B^{-1}$

se denominan *variables duales* o *precios sombra*.

Los precios sombra son también únicos para cada base, hay tantos como restricciones tiene el programa, y se puede escribir para los costes reducidos:

$$\bar{c} = c - UA,$$

y para una solución básica:

$$cX = (c_B, c_N)\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c_B B^{-1} b = Ub$$

ALGORITMO SÍMPLEX. MECANISMOS (I)

Mejora del valor de la función objetivo:

Teniendo en cuenta:

$$z = z_0 + \overline{c_B} X_B + \overline{c_N} X_N = z_0 + \bar{c} X$$

Caso maximizar z:

Sólo es posible aumentar (no empeorar) el valor de ***z*** si existe algún coste reducido de las variables no básicas mayor o igual que cero.

Cuando todos los costes reducidos de las variables no básicas sean menores o iguales que cero, se puede asegurar que la solución básica factible es óptima.

Caso minimizar z:

Sólo es posible reducir (no empeorar) el valor de ***z*** si existe algún coste reducido de las variables no básicas menor o igual que cero.

Cuando todos los costes reducidos de las variables no básicas sean mayores o iguales que cero, se puede asegurar que la solución básica factible es óptima.

ALGORITMO SÍMPLEX. MECANISMOS (II)

Cambio de Base:

Objeto:

Pasar de una solución asociada a la base B a la correspondiente a una base distinta B' con el propósito de mejorar z.

Una posible acción:

Una variable no básica (x_s) pasará a formar parte de la nueva base y una variable básica (x_r) saldrá de la base. Diremos: x_r sale de la base y x_s entra en la base. El procedimiento se llama *pivotar*. Se dice que *se pivota* con el elemento a_{rs} que recibe el nombre de *pivote*, y que debe ser distinto de cero.

Pivotar con a_{rs} distinto de cero:

- Se substituye la ecuación [r], la correspondiente a la fila del pivote, por otra [r]' que se obtiene dividiendo la primera por el pivote a_{rs} ; es decir [r]' = [r] / a_{rs}.
- Toda ecuación [i] distinta de [r] se substituye por otra que llamaremos [i]' de la forma: [i]' = [i] – a_{is} ·[r]'.

ALGORITMO SÍMPLEX. MECANISMOS (III)

Ejemplo de Pivotar:

Partimos del sistema de ecuaciones siguiente:

[1]	**0.40** x1	+ x2		+ 4 x4		= 480
[2]	0.20 x1		+ x3	- 3 x4	+ 2.5 x5	= 290

cuya solución básica es: x2=480 y x3=290.

Queremos que **x2** salga de la base y que **x1** entre en la base, *pivotamos* con el coeficiente que multiplica a la variable x1 en la restricción [1]: el pivote es 0.40.

La ecuación [1]' se obtiene dividiendo [1] por el pivote 0.40:

[1]'	x1	+ 2.50 x2		+ 10 x4		= 1200

La ecuación [2]' se obtiene haciendo: [2]' = [2] - 0.20·[1]':

[2]'		- 0.50 x2	+ x3	- 5 x4	+ 2.50 x5	= 50

ALGORITMO SÍMPLEX. MECANISMOS (IV)

Elección del pivote:

Dada una solución básica factible mejorable, *elegir el pivote* significa:

- Seleccionar variable que entra en la base x_s: cualquier variable no básica cuyo coste reducido permita mejorar el valor de la función objetivo (*Maximización C.R.>0; Minimización C.R.<0*) Una alternativa es tomar la variable con mayor coste reducido (maximización), o con menor coste reducido (minimización).
- Seleccionar variable que sale de la base x_r: se divide el término independiente de cada ecuación entre el coeficiente que en dicha ecuación multiplica a la variable que entra en la base (cuando dicho coeficiente sea mayor que cero). Una alternativa es elegir, para dejar la base, una variable cuyo cociente sea mínimo.

Codiciones para pivotar:

Sea $\bar{a}_{rs}$ el pivote. Los términos independientes, tras pivotar, deben cumplir:

- Para la restricción [r] asociada a la variable que sale de la base : $\bar{b}_r^{'} = \bar{b}_r / \bar{a}_{rs} \geq 0$

- Para las restricciones [i] (distintas de [r]): $\bar{b}_i^{'} = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} (\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}) \geq 0$

Por tanto, tras seleccionar x_s, para seleccionar x_r, basta buscar r tal que: $\bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = \theta_s = \min_{\forall i \ \bar{a}_{is} > 0} \{ \bar{b}_i / \bar{a}_{is} \}$

ALGORITMO SÍMPLEX. MECANISMOS (V)

Test de óptimo:

Caso óptimo propio.

maximizar z: todos los costes reducidos de las variables no básicas son menores o iguales que cero.
minimizar z: todos los costes reducidos de las variables no básicas son mayores o iguales que cero.

Lema 1: Condición suficiente para que una solución básica posible sea óptima (caso *Opt* = *Max*).

$$Si\ \overline{c_N} \leq 0\ y\ X_B = B^{-1}b, X_N = 0\ es\ solución\ básica\ posible,\ entonces\ X_B = B^{-1}b, X_N = 0\ es\ óptima.$$

Dem. Como $z = z_0 + \overline{c_N} X_N$, no es posible aumentar el valor de ***z*** respetando la no-negatividad de X_N.

Caso óptimo impropio.

maximizar z: (+∞) Si existe una variable x_S con $\bar{c}_s > 0$ y se cumple $\bar{a}_{is} \leq 0$ para toda *i*, se puede hacer entrar x_s en la base con un valor tan grande como queramos, respetando la no negatividad de las variables.

minimizar z: (-∞) Si existe una variable x_S con $\bar{c}_s < 0$ y se cumple $\bar{a}_{is} \leq 0$ para toda *i*, se puede hacer entrar x_s en la base con un valor tan grande como queramos, respetando la no negatividad de las variables.

ALGORITMO SÍMPLEX. MECANISMOS (VI)

Construcción de una solución factible inicial:

Pasos:

- Transformar todas las restricciones de forma que sus términos independientes sean mayores o iguales que cero.
- A cada restricción con signo “≤”, añadir una variable de holgura con coeficiente +1.
- A cada igualdad, añadir una variable (artificial) con coeficiente +1, con objeto de que formen parte de la base canónica inicial. En la función objetivo, estas variables deberán penalizarse con coeficientes (-∞) o (+∞) según se trate de maximizar o de minimizar z, respectivamente.
- A cada restricción con signo “≥”, añadir una variable de holgura, con coeficiente -1, y una variable artificial con coeficiente +1. Las variables artificiales se penalizarán en la función objetivo de la misma forma que en el punto anterior.

Una posible Base inicial:

- Variables de holgura de las restricciones con signo “≤”.
- Variables artificiales de las igualdades y de las restricciones con signo “≥”.

En la solución incial cada una de estas variables adoptará un valor igual al del término independiente de la restricción en la que aparece de forma exclusiva.

ALGORITMO SÍMPLEX. UNA DISPOSICIÓN DE DATOS

Una tabla para el símplex:

La resolución del ejemplo-03 se puede presentar de la forma siguiente:

			3	5	4	0	0		
base	C	b	x1	x2	x3	s1	s2		
s1	0	120	0.10	**0.25**	0	1	0	480	→
s2	0	260	0.20	0.30	0.40	0	1	866.6	
		0	-3	-5 ↑	-4	0	0		
x2	5	480	0.40	1	0	4	0		
s2	0	116	0.08	0	**0.40**	-1.2	1	290	→
		2400	-1	0	-4 ↑	20	0		
x2	5	480	**0.40**	1	0	4	0	1200	→
x3	4	290	0.20	0	1	-3	2.5	1450	
		3560	-0.20↑	0	0	8	10		
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0		
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5		
		3800	0	0.5	0	10	10		óptimo

ALGORITMO SÍMPLEX. UNA FORMALIZACIÓN (I)

Algoritmo básico:

Paso 0 *Iniciación:*

- Transformar todas las restricciones de manera que: $b_i \geq 0$.
- Introducir variables de holgura y artificiales para obtener una base incicial, según la tabla:

Signo de la restricción	*Var. holgura*	*Var. artificial*
$\leq$	Si (coeficiente +1)	No
$=$	No	Si (coeficiente +1)
$\geq$	Si (coeficiente -1)	Si (coeficiente +1)
Función objetivo	No	[*MAX*] (-M), [*MIN*] (+M)

- Calcular los costes reducidos (cambiar sus signos en la última fila de la tabla del símplex).

Paso 1 *Test de óptimo:*

- Si todos los costes reducidos cambiados de signo son menores o iguales que cero si se minimiza z, o mayores o iguales que cero si se maximiza z, y hay alguna variable artificial en la base con valor mayor que cero, entonces el problema no tiene soluciones factibles. *Finalizar*.
- Si todos los costes reducidos cambiados de signo son menores o iguales que cero si se minimiza z, o mayores o iguales que cero si se maximiza z, y no hay ninguna variable artificial en la base con valor mayor que cero, entonces la solución básica es óptima. *Finalizar*.

(continúa)

ALGORITMO SÍMPLEX. UNA FORMALIZACIÓN (II)

Paso 2 *Elección de la variable que entra en la base:*

- minimizar z, elegir la variable con mayor coste reducido cambiado de signo.
- maximizar z, elegir la variable con menor coste reducido cambiado de signo.

Sea x_s dicha variable; se dice que x_s entra en la base. *Continuar*.

Paso 3 *Test de óptimo impropio*:

Si en la columna de x_s todos los valores, $\overline{a_{is}}$, son menores o iguales que cero, entonces el óptimo es impropio. *Finalizar*.

Paso 4 *Elección de la variable que sale de la base:*

- Determinar la restricción [r] tal que: $\bar{b}_r \big/ \bar{a}_{rs} = \theta_s = \min\limits_{\forall i \;\; \bar{a}_{is} > 0} \left\{ \bar{b}_i \big/ \bar{a}_{is} \right\},$
- Se dice que x_r sale de la base. *Continuar*.

Paso 5 *Pivotar:*

Con el coeficiente $\bar{a}_{rs}$ que multiplica a x_S en la restricción [r]. Ir a *Paso* 1.

ALGORITMO SÍMPLEX. EJEMPLO APLICACIÓN (I)

Ejemplo-04: Maximizar el rendimiento global que se puede obtener al invertir 100 um. en tres tipos de recurso (x1, x2 y x3) teniendo en cuenta que: (1) las ganancias unitarias por invertir en cada recurso son 10, 15 y 12, respectivamente; (2) la inversión conjunta en los recursos 1 y 2 debe ser al menos el 60% del total, y (3) la inversión en el recurso 2 no debe superar el 40%.

Modelo:

$$Max\ z = 10\,x_1 + 15\,x_2 + 12\,x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ x_1 + x_2 \quad &\geq 60 \\ x_2 \quad &\leq 40 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Max\ z = 10\,x_1 + 15\,x_2 + 12\,x_3 \mathbf{\ -\ M\ \boldsymbol{x_4}\ -\ M\ \boldsymbol{x_6}}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \boldsymbol{x_4} \qquad\qquad &= 100 \\ x_1 + x_2 \qquad - \boldsymbol{x_5} + \boldsymbol{x_6} \qquad &= 60 \\ x_2 \qquad\qquad + \boldsymbol{x_7} &= 40 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

ALGORITMO SÍMPLEX. EJEMPLO APLICACIÓN (II)

Ejemplo-04

			10	15	12	-M	0	-M	0	
base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	
X3	12	100	1	1	1	1	0	0	0	100
X6	-M	60	1	1	0	0	-1	1	0	60
X7	0	40	0	**1**	0	0	0	0	1	40
		1200-60M	-M+2	-M-3	0	12+M	M	0	0	
X3	12	60	1	0	1	1	0	0	-1	60
X6	-M	20	**1**	0	0	0	-1	1	-1	20
X2	15	40	0	1	0	0	0	0	1	-
		1320-20M	-M+2	0	0	12+M	M	0	3+M	
X3	12	40	0	0	1	1	1	-1	0	
X1	10	20	1	0	0	0	-1	1	-1	
X2	15	40	0	1	0	0	0	0	1	
		1280	0	0	0	12+M	2	-2+M	5	

Solución óptima: z*=1280: x1=20, x2=40, x3=40, x4=x5=x6=x7=0.

DUALIDAD EN PL. PRELIMINARES

Definiciones:

Duales asimétricos

$$\begin{array}{ll} Min \;\; z = cX & Max \;\; w = b'U' \\ s.a: & s.a: \\ AX = b & A'U' \leq c' \\ X \geq 0 & U \text{ no restringidas en signo} \end{array}$$

Duales simétricos

$$\begin{array}{ll} Min \;\; z = cX & Max \;\; w = b'U' \\ s.a: & s.a: \\ AX \geq b & A'U' \leq c' \\ X \geq 0 & U \geq 0 \end{array}$$

A uno de estos programas se le llama *primal* y al otro *dual*.

U vector de las variables del dual (nro componentes = restricciones primal)
w es la función objetivo del dual.

DUALIDAD EN PL. EJEMPLOS (I)

Ejemplo-01: Distribución de mercancías.

$$\begin{aligned} Min \quad z = {} & 8x_{1,1} + 13x_{1,2} + 9x_{1,3} + 8x_{1,4} + \\ & +9x_{2,1} + 11x_{2,2} + 12x_{2,3} + 10x_{2,4} + \\ & + 7x_{3,1} + 8x_{3,2} + 10x_{3,3} + 9x_{3,4} \end{aligned}$$

$s.a:$

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 60$$
$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 70$$
$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 80$$

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 75$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 45$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 40$$
$$x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 50$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1..3, \quad j = 1..4$$

$$\begin{aligned} Max \quad w = {} & 60u_1 + 70u_2 + 80u_3 + \\ & +75v_1 + 45v_2 + 40v_3 + 50v_4 \end{aligned}$$

$s.a:$

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_1 \leq 8 & u_2 + v_1 \leq 9 & u_3 + v_1 \leq 7 \\ u_1 + v_2 \leq 13 & u_2 + v_2 \leq 11 & u_3 + v_2 \leq 8 \\ u_1 + v_3 \leq 9 & u_2 + v_3 \leq 12 & u_3 + v_3 \leq 10 \\ u_1 + v_4 \leq 8 & u_2 + v_4 \leq 10 & u_3 + v_4 \leq 9 \end{array}$$

$$u_i \quad n.r.s., \quad i = 1..3$$
$$v_j \quad n.r.s., \quad j = 1..4$$

DUALIDAD EN PL. EJEMPLOS (II)

Ejemplo-02: Problema de la dieta óptima.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z = 350x_1 + 1300x_2 + 1000x_3 + 750x_4 + 300x_5 \\
&s.a: \\
&83x_1 + 249x_2 + 4x_3 + 60x_4 + 51x_5 \geq 70 \\
&2460x_1 + 4230x_2 + 7930x_3 + 930x_4 + 260x_5 \geq 3000 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max \quad w = 70u_1 + 3000u_2 \\
&s.a: \\
&83u_1 + 2460u_2 \leq 350 \\
&249u_1 + 4230u_2 \leq 1300 \\
&4u_1 + 7930u_2 \leq 1000 \\
&60u_1 + 930u_2 \leq 750 \\
&51u_1 + 260u_2 \leq 300 \\
&u_1, u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo-03: Taller de fabricación.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&s.a: \\
&0.10x_1 + 0.25x_2 \leq 120 \\
&0.20x_1 + 0.30x_2 + 0.40x_3 \leq 260 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad w = 120u_1 + 260u_2 \\
&s.a: \\
&0.10u_1 + 0.20u_2 \geq 3 \\
&0.25u_1 + 0.30u_2 \geq 5 \\
&0.40u_2 \geq 4 \\
&u_1, u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

DUALIDAD EN PL. REGLAS DE TRANSFORMACIÓN

Reglas generales para obtener el dual de un programa lineal.

Primal/Dual		*Dual/Primal*
Maximizar la función objetivo	$\leftrightarrow$	Minimizar la función objetivo
Una variable no negativa	$\leftrightarrow$	Una restricción mayor o igual
Una variable no positiva	$\leftrightarrow$	Una restricción menor o igual
Una variable no restringida en signo	$\leftrightarrow$	Una igualdad
Una restricción menor o igual	$\leftrightarrow$	Una variable no negativa
Una restricción mayor o igual	$\leftrightarrow$	Una variable no positiva
Una igualdad	$\leftrightarrow$	Una variable no restringida en signo

Ejemplo-04: Inversión de un capital en tres tipos de recurso.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3\\
&s.a:\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 100\\
&x_1 + x_2 \geq 60\\
&x_2 \leq 40\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad w = 100u_1 + 60u_2 + 40u_3\\
&s.a:\\
&u_1 + u_2 \geq 10\\
&u_1 + u_2 + u_3 \geq 15\\
&u_1 \geq 12\\
&u_1 \quad n.r.s; \quad u_2 \leq 0; \quad u_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

PROPIEDADES DE LOS PROGRAMAS DUALES (I)

Teorema débil de la dualidad

Dada una solución factible del programa primal y otra solución factible de su dual se cumple siempre que el valor de la función objetivo a maximizar es menor o igual que el de la función objetivo a minimizar.

Corolario-1: Dada una solución factible del primal y una solución factible del dual, si los valores de sus funciones objetivo coinciden, ambas soluciones son óptimas en sus respectivos programas.

Teorema fuerte de la dualidad:

Si ambos problemas tienen soluciones factibles, ambos tienen óptimo propio y el valor de sus funciones objetivo coincide en el óptimo.

Corolario-2: Si uno de los problemas tiene óptimo propio, su dual también tiene óptimo propio, y los valores de las funciones objetivos para dichos óptimos coinciden.

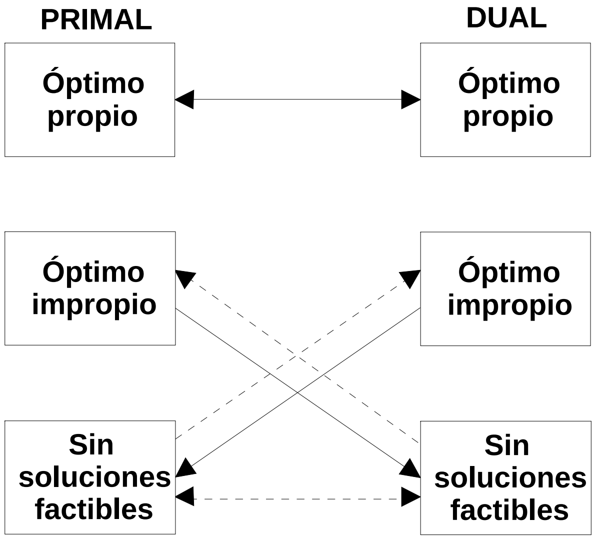
Corolario-3: Si uno de los problemas tiene óptimo impropio, su dual no tiene soluciones factibles.

Corolario-4: Si uno de los problemas tiene alguna solución factible y su dual no, el primero tiene óptimo impropio.

Corolario-5: Si uno de los problemas no tiene soluciones factibles, su dual o no tiene soluciones factibles o tiene óptimo impropio.

PROPIEDADES DE LOS PROGRAMAS DUALES (II)

Resumen teoremas débil y fuerte:



Teorema de la holgura complementaria:

Dada una solución factible del primal y otra solución factible de su dual, una condición necesaria y suficiente para que sean óptimas es que el producto del valor de cualquier variable de uno de los programas por el de la variable de holgura de la restricción asociada al otro programa sea igual a cero.

Corolario-6: Si una variable está en la base óptima de uno de los programas y su valor es mayor que cero, la variable de holgura de la restricción asociada en el otro programa es igual a cero (restricción saturada).

DISPOSICIÓN DE LAS VARIABLES DUALES EN TABLA (I)

Toda solución básica del primal tiene asociada una solución básica en el programa dual. Dada la base *B* (para el primal), los valores que adoptan las variables *X* y *U* son:

$$X_B = B^{-1}b \qquad U = c_B B^{-1} \qquad \bar{c} = c - UA$$

Por tanto, los valores de las variables del dual se pueden hallar en la última fila de la tabla propuesta:

- En las columnas de las variables de holgura de las restricciones con signo (<=)
- En las columnas de las variables de holgura de las restricciones con signo (>=) cambiadas de signo.
- En las columnas de las variables artificiales acompañadas de sus coeficientes de penalización en la FO cambiados de signo.

DISPOSICIÓN DE LAS VARIABLES DUALES EN TABLA (II)

Ejemplo-03: Taller de fabricación.

Las variables del dual se hallan en la última fila y las columnas de las variables de holgura, x4 y x5.

			3	5	4	0	0
base	C	B	x1	x2	x3	x4	x5
x4	0	120	0.10	0.25	0	1	0
x5	0	260	0.20	0.30	0.40	0	1
		0	-3	-5	-4	0	0
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5
		3800	0	0.5	0	**10**	**10**

La matriz de base óptima y su inversa se hallan también en las tablas inicial y final:

$$B = \begin{pmatrix} 0.10 & 0 \\ 0.20 & 0.40 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

DISPOSICIÓN DE LAS VARIABLES DUALES EN TABLA (III)

Ejemplo-04: Inversión de un capital en tres tipos de recurso.

Los valores óptimos de las variables duales se hallan en las columnas x4, x6 y x7.

			10	15	12	-M	0	-M	0
base	C	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x3	12	100	1	1	1	1	0	0	0
x6	-M	60	1	1	0	0	-1	1	0
x7	0	40	0	1	0	0	0	0	1
		1200-60M	-M+2	-M-3	0	12+M	M	0	0
x3	12	40	0	0	1	1	1	-1	0
x1	10	20	1	0	0	0	-1	1	-1
x2	15	40	0	1	0	0	0	0	1
		1280	0	0	0	**12**+M	2	**-2**+M	**5**

Matriz de base óptima y su inversa:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

UNA INTERPRETACIÓN DE LAS VARIABLES DUALES

El valor de una variable dual representa el incremento (o decremento) de la función objetivo del primal por cada unidad que aumente el término independiente de la restricción asociada a la variable (si no hay cambio de base).

Ejemplo-03: Taller de fabricación.

Una solución factible del dual es u_1=10 y u_2=10. El valor de la FO es 3800 (120·10+260·10):

- Si se dispone de 121 h en A en lugar de 120, el beneficio se incrementa en 10 um (u_1). Z= 3810 um. Si se dispone de 119 h en A en lugar de 120, el beneficio se reduce en 10 um.
- Si se dispone de 261 h en B en lugar de 260, el beneficio se incrementa en 10 um (u_2). Si se dispone de 259 h en B en lugar de 260, el beneficio se reduce en 10 um.

Ejemplo-04: Inversión de un capital en tres tipos de recurso.

Una solución factible del dual es u_1=12, u_2=-2 y u_3=5. FO: 1280 (100·12+60·(-2)+40·5).

- Si la inversión total pasa de 100 a 101 um, la ganancia adicional es 12 um (u_1). Z=1292 um.
- Si el porcentaje mínimo de inversión en los recursos x_1 y x_2 pasa del 60% al 61%, la ganancia total se reduce en 2 um: valor de u_2 .
- Si el porcentaje máximo de inversión en el recurso x_2 pasa del 40% al 41%, la ganancia total se incrementa en 5 um: valor de u_3.

UN ALGORITMO SÍMPLEX-DUAL (I)

Algoritmo básico:

Paso 0 *Iniciación:*

- En caso de maximizar z, buscar una solución de manera que todos los costes reducidos cambiados de signo sean mayores o iguales que cero.
- En caso de minimizar z, buscar una solución de manera que todos los costes reducidos cambiados de signo sean menores o iguales que cero.

Paso 1 *Test de óptimo:*

Si todos los términos independientes son mayores o iguales que cero ($b \geq 0$), la solución básica es óptima. *Finalizar*.

Paso 2 *Elección de la variable que sale de la base:*

Entre todas las restricciones que tengan término independiente negativo ($b<0$), seleccionar aquella que tenga menor valor (el término más negativo). Sea [*r*] dicha restricción. Se dice que x_r sale de la base.

(continúa)

UN ALGORITMO SÍMPLEX-DUAL (II)

Paso 3 *Test de óptimo impropio:*

Si todos los coeficientes que multiplican a las variables en la restricción [*r*] son mayores o iguales que cero, el problema dual tiene óptimo impropio: el problema primal no tiene solución factible. *Finalizar*.

Paso 4 *Elección de la variable que entra en la base:*

Determinar la variable x_s tal que el valor absoluto del cociente de su coste reducido cambiado de signo (valor en la última fila de la tabla del símplex) por el coeficiente que multiplica a x_s en la restricción [*r*], $\overline{a}_{rs}$, con valor menor que cero, sea mínimo. Esto es:

$$\text{Buscar } s \text{ tal que: } \left|\frac{-\overline{c}_s}{\overline{a}_{rs}}\right| = \min_{\overline{a}_{rj}<0} \left|\frac{-\overline{c}_j}{\overline{a}_{rj}}\right|$$

Se dice entonces que x_s entra en la base. *Continuar*.

Paso 5 *Pivotar:*

Con el coeficiente que multiplica a x_s en la restricción [*r*]. *Ir* a *Paso* 1.

ALGORITMO SÍMPLEX-DUAL. EJEMPLO APLICACIÓN (I)

Ejemplo-05: Dos productos orgánicos x1 y x2 contienen, respectivamente, 2 y 5 kg de tolueno, y 7 y 3 kg de benceno por cada tonelada. Se trata de encontrar la mezcla de tonelaje mínimo que contenga al menos 10 kg de tolueno y 20 kg de benceno.

El modelo:

$Min\ z = x_1 + x_2$

s.a:

$2\,x_1 + 5\,x_2 \geq 10$
$7\,x_1 + 3\,x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

$Min\ z = x_1 + x_2$

s.a:

$-2\,x_1 - 5\,x_2 + s_1 = -10$
$-7\,x_1 - 3\,x_2 + s_2 = -20$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

ALGORITMO SÍMPLEX-DUAL. EJEMPLO APLICACIÓN (II)

Solución:

			1	1	0	0	
base	C	b	x1	x2	s1	s2	
S1	0	-10	-2	-5	1	0	
S2	0	-20	**-7**	-3	0	1	
		0	-1	-1	0	0	
			1/7	1/3	-	-	
S1	0	-30/7	0	**-29/7**	1	-2/7	
X1	1	20/7	1	3/7	0	-1/7	
		20/7	0	-4/7	0	-1/7	
			-	4/29	-	1/2	
X2	1	30/29	0	1	-7/29	2/29	
X1	1	70/29	1	0	3/29	-5/29	
		100/29	0	0	-4/29	-3/29	Óptimo

Solución óptima: $z^*=100/29$: $x_1=70/29$, $x_2=30/29$, $s_1=0$, $s_2=0$.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PL. PRELIMINARES

Objeto:

- Determinar los límites de un parámetro entre los que se mantiene la base óptima.
- Determinar una nueva solución óptima tras efectuar modificaciones.

Fundamentos:

Condiciones de óptimo en el programa primal:

- Si se maximiza z, las variables de la base >= 0, y los costes reducidos cambiados de signo >=0.
- Si se minimiza z, las variables de la base >=0, y los costes reducidos cambiados de signo <=0.

Casuística:

Caso 1: variables de la base >=0, algún coste reducido cambia de signo (solución no óptima). Solución factible en el primal, no-factible en el dual, se aplica algoritmo símplex a partir de la última tabla corregida.

Caso 2: los costes reducidos no cambian de signo, alguna variable de la base <0. Solución factible en el dual, no-factible en el primal; se aplica el algoritmo símplex-dual a partir de la última tabla modificada.

Caso 3: alguna variable de la base <0 y algún coste reducido cambia de signo. Solución no-factible ni en el primal ni en el dual. Resolución desde inicio.

Herramientas:

(1) matriz de base e inversa, (2) algoritmo símplex (3) algoritmo símplex-dual.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PL. EJEMPLO-PROTOTIPO (I)

Ejemplo-03: Una empresa posee dos tipos de procesos (A y B) que se emplean para fabricar tres tipos de productos (p1, p2 y p3). Durante un mes se dispone de 120 h de A y 260 h de B. Se conoce también los tiempos de proceso y los ingresos obtenidos por cada unidad según tipo de producto. Interesa determinar un programa de producción que maximice el ingreso global.

Proc/prod.	**p1**	**P2**	**p3**	Dispon.
A	0.10	0.25	--	120 h
B	0.20	0.30	0.40	260 h
Ingreso	3	5	4	

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&s.a: \\
&0.10x_1 + 0.25x_2 \qquad\qquad\quad \leq 120 \\
&0.20x_1 + 0.30x_2 + 0.40x_3 \leq 260 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PL. EJEMPLO-PROTOTIPO (II)

Tablas inicial y final de símplex:

			3	5	4	0	0
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5
x4	0	120	0.10	0.25	0	1	0
x5	0	260	0.20	0.30	0.40	0	1
		0	-3	-5	-4	0	0
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5
		3800	0	0.5	0	10	10

Matriz de base óptima e inversa:

$$B = \begin{pmatrix} 0.10 & 0 \\ 0.20 & 0.40 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Aspectos a estudiar:

- Análisis de sensibilidad en relación al vector de costes.
- Análisis de sensibilidad en relación al vector de términos independientes.
- Análisis de sensibilidad en relación a coeficientes no básicos y básicos de la matriz *A*.
- Incorporación de una nueva variable al modelo o de una nueva restricción al modelo.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD VECTOR COSTES (I)

Rango de validez de un coste para mantener la base óptima:

- La matriz de base no varía y, por tanto, tampoco varía su inversa.
- Los valores de los términos independientes no varían.
- La variación de un coste puede alterar el valor de los costes reducidos.

Ejemplo-03.1: ¿Entre qué valores debe estar la ganancia unitaria del producto p1 para que lo más rentable sea seguir fabricando unidades de p1 y de p3?

			c_1	5	4	0	0
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5
x1	c_1	1200	1	2.5	0	10	0
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5
			0	$2.5\ c_1-7$	0	$10\ c_1-20$	10

Para que la solución sea óptima se debe cumplir:

(1) $2.5\ c_1-7 \geq 0 \rightarrow c_1 \geq 2.8$ (2) $10\ c_1-20 \geq 0 \rightarrow c_1 \geq 2$ Por tanto: $c_1 \geq 2.8$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD VECTOR COSTES (II)

Nuevo óptimo ante la variación de un coste:

- Se calculan los nuevos valores de los costes reducidos.
- Si los costes reducidos satisfacen la condición de óptimo, la base es óptima.
- Si los costes reducidos no cumplen la condición de óptimo, hacer: (1) Calcular la última fila de la tabla del símplex en la última iteración con el nuevo valor del coste y (2) Aplicar el algoritmo símplex.

Ejemplo-03.2: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si el ingreso unitario de p1 es 5 um? Como $c_1 = 5 > 2.8$ se sigue conservando la base óptima (fabricar p1 y p3): Z= 6200 u.m. (5·1200+4·50).

Ejemplo-03.3: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si el ingreso unitario de p1 es 2 um? Como $c_1 = 2 < 2.8$ no se conserva la base óptima: Calcular la última fila y aplicar el algoritmo símplex.

			2	5	4	0	0	
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5	
x1	2	1200	1	**2.5**	0	10	0	480 →
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5	
		2600	0	-2 ↑	0	0	10	
x2	5	480	0.4	1	0	4	0	
x3	4	290	0.2	0	1	-3	2.5	
		3560	0.8	0	0	8	10	

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD VECTOR TÉRMINOS INDEPENDIENTES (I)

Rango de validez del término independiente de una restricción:

- La matriz de base no varía y, por tanto, tampoco varía su inversa.
- Los valores de los términos independientes pueden variar.
- Los costes reducidos no varían.

Emplearemos la matriz B^{-1}: $X_B = B^{-1}b$. Se determina X_B en función del término independiente para el que se estudia el rango de validez y se impone la condición de no-negatividad a las variables.

Ejemplo-03.4: ¿Entre qué valores debe estar la disponibilidad en horas del proceso A para que lo más rentable sea seguir fabricando unidades de p1 y p3?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10b_1 \\ -5b_1 + 650 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De lo anterior se deduce: $0 \leq b_1 \leq 130$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD VECTOR TÉRMINOS INDEPENDIENTES (II)

Nuevo óptimo ante la variación de un término independiente:

- Se calculan los nuevos valores de las variables multiplicando la matriz B^{-1} por el nuevo vector de términos independientes.
- Si todos los valores de las variables son no-negativos, la base es óptima.
- Si alguna variable tiene valor negativo, *Hacer*:
  - *Reponer* la columna de términos independientes en la última tabla del símplex.
  - *Aplicar* el algoritmo símplex-dual.

Ejemplo-03.5: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si se dispone de 125 horas en el proceso A y de 260 horas en el B?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 \\ 260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250 \\ 25 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como los valores de las variables son positivos, se cumple la condición de óptimo y el ingreso global es 3850 (3·1250+4·25).

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD VECTOR TÉRMINOS INDEPENDIENTES (III)

Nuevo óptimo ante la variación de un término independiente (continuación):

Ejemplo-03.6: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si se dispone de 120 horas en el proceso A y de 200 horas en el B?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Como no se cumple la condición de óptimo, reponemos la última tabla del símplex y aplicamos el símplex-dual.

			3	5	4	0	0	
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5	
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0	
x3	4	-100	0	**-0.5**	1	-5	2.5	→
		3200	0	0.5 ↑	0	10	10	
x1	3	700	1	0	5	-15	12.5	
x2	5	200	0	1	-2	10	-5	
		3100	0	0	1	5	12.5	

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (I)

Rango de validez de un coeficiente no básico de A para mantener la base óptima:

- La matriz de base no varía y, por tanto, tampoco varía su inversa.
- Los valores de los términos independientes no varían.
- Los costes reducidos de las variables no básicas pueden variar.

Se tiene: $\bar{c} = c - UA$ o, por columnas, $\overline{c_j} = c_j - Ua_j$ para todo *j*.

Objeto: Analizar el rango de algún coeficiente asociado a la variable x_j (no básica).

Ejemplo-03.7: ¿Entre qué valores debe estar el tiempo de elaboración de una unidad de p2 en el proceso A para que lo más rentable sea seguir fabricando unidades de p1 y p3?

Imponemos condición de óptimo:

$$\overline{c_2} = 5 - (10,10)\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ 0.30 \end{pmatrix} \leq 0$$

Y deducimos: $a_{1,2} \geq 0.2$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (II)

Nuevo óptimo ante la variación de un coeficiente no básico de A:

- Se calcula el nuevo valor del coste reducido de la variable x_j no básica para la que ha cambiado el coeficiente.
- Si dicho valor cumple la condición de óptimo, la base es óptima.
- Si dicho valor no cumple la condición de óptimo, *Hacer*:
  - *Reponer* la columna de la variable x_j en la última tabla del símplex.
  - *Aplicar* el algoritmo símplex.

Ejemplo-03.8: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si el tiempo de elaboración de una unidad de p2 en el proceso A es 0.15 h?

Determinamos:

$$\overline{c_2} = 5 - (10,10)\begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.30 \end{pmatrix} = 0.5 > 0$$

Y deducimos que el nuevo valor del coste reducido del producto p2 no cumple con la condición de óptimo (continuar).

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (III)

Nuevo óptimo ante la variación de un coeficiente no básico de A (continuación):

Determinamos la nueva columna de la variable x_2 en la última tabla del símplex:

$$B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0{,}30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reponemos la última tabla del símplex y *Aplicamos* el símplex:

			3	5	4	0	0	
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5	
x1 x3	3 4	1200 50	1 0	**1.5** 0	0 1	10 -5	0 2.5	→
		3800	0	-0.5↑	0	10	10	
x2 x3	5 4	800 50	2/3 0	1 0	0 1	20/3 -5	0 2.5	
		4200	1/3	0	0	40/3	10	

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (IV)

Nuevo óptimo ante la variación de un coeficiente básico de A:

- La matriz de base varía y, por tanto, también varía su inversa.
- Los valores de los términos independientes varían.
- Los costes reducidos de las variables no básicas pueden variar.

Procedimiento:

- Se determina el vector columna $\overline{a}_j$ de la forma: $\overline{a}_j = B^{-1} a_j$
- Se sustituye la columna de la variable x_j básica en la última tabla del símplex por dicho vector.
- Se restaura la base de la última tabla del símplex pivotando con el elemento a_{jj} de dicha tabla
- Se determina la última fila de la tabla del símplex.
- Se procede según el caso:
  - Si la nueva solución es factible en el primal y en el dual, se ha hallado un óptimo.
  - Si la nueva solución es factible en el primal y no-factible en el dual, se aplicará el algoritmo símplex a partir de la última tabla modificada.
  - Si la nueva solución es factible en el dual y no-factible en el primal, se aplicará el algoritmo símplex-dual a partir de la última tabla modificada.
  - Si la nueva solución no es factible ni en el primal ni en el dual, se resuelve el nuevo programa.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (V)

Nuevo óptimo ante la variación de un coeficiente básico de A (continuación):

Ejemplo-03.9: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si el tiempo de elaboración de una unidad de p1 en el proceso B es 0.30 h?

Determinamos:

$$\overline{a}_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la última tabla del símplex, *Reponemos* la base y *Determinamos* la última fila:

			3	5	4	0	0
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5
x1	3	1200	**1**	2.5	0	10	0
x3	4	50	0.25	-0.5	1	-5	2.5
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0
x3	4	-250	0	-9/8	1	-7.5	2.5
		2600	0	-2	0	0	10

La solución no es factible ni en el primal ni en el dual (continuar).

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (VI)

Nuevo óptimo ante la variación de un coeficiente básico de A (continuación):

Se resuelve el programa asociado a la tabla inicial del símplex:

			3	5	4	0	0
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5
x4	0	120	0.1	0.25	0	1	0
x5	0	260	0.3	0.3	0.4	0	1

Cuya solución óptima es: z=3560, x_2=480, x_3=290, u_1=8, u_2=10.

Ejemplo-03.10: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si el tiempo de elaboración de una unidad de p1 en el proceso A es 0.05 h?

Determinamos:

$$\bar{a}_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MATRIZ -A- (VII)

Nuevo óptimo ante la variación de un coeficiente básico de A (continuación):

Sustituimos en la última tabla del símplex, *Reponemos* la base y *Determinamos* la última fila de la tabla.

Como la solución es factible en el dual y no es factible en el primal, *Aplicamos* el algoritmo símplex-dual.

			3	5	4	0	0	
Base	C	b	x1	x2	x3	x4	x5	
x1	3	1200	**0.50**	2.5	0	10	0	
x3	4	50	0.25	-0.5	1	-5	2.5	
x1	3	2400	1	5	0	20	0	
x3	4	-550	0	**-7/4**	1	-10	2.5	→
		5000	0	3↑	0	20	10	
x1	3	5800/7	1	0	20/7	-60/7	50/7	
x2	5	2200/7	0	1	-4/7	40/7	-10/7	
		28400/7	0	0	12/7	20/7	100/7	

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD. ADICIÓN DE UNA VARIABLE (I)

Nuevo óptimo al añadir una nueva variable al programa:

Sea *y* la nueva variable a añadir, y sean c_y y a_y, el coste y el vector columna de la nueva matriz *A* asociados a la variable *y*. Entonces, el coste reducido de *y* es:

$$\overline{c_y} = c_y - Ua_y$$

Procedimiento:

- Si $\overline{c_y}$ cumple la condición de óptimo, la variable *y* no formará parte de la base óptima, por tanto, la solución previa sigue siendo óptima.
-
- Si $\overline{c_y}$ no cumple la condición de óptimo, la variable *y* formará parte de la base óptima:
  - Se determina el vector columna $\overline{a}_y$ de la forma: $\overline{a}_y = B^{-1}a_y$
  - Se añade como nueva columna a la última tabla del símplex
  - Se aplica el algoritmo símplex.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD. ADICIÓN DE UNA VARIABLE (II)

Nuevo óptimo al añadir una nueva variable al programa (continuación):

Ejemplo-03.11: ¿Cuál será el programa de producción óptimo si existe la posibilidad de fabricar un nuevo producto con un ingreso unitario de 2.5 um y unos tiempos de proceso de 0.1 h idénticos en ambos procesos?

Determinamos:

$$\overline{c_y} = c_y - Ua_y = 2.5 - (10,10)\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.5 \geq 0$$

No óptimo, determinamos $\overline{a}_y$:

$$\overline{a}_y = B^{-1}a_y = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

Aplicamos símplex:

			3	5	4	0	0	2.5
Base	c	b	x1	x2	x3	x4	x5	y
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0	**1**
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5	-0.25
		3800	0	0.5	0	10	10	-0.5↑
y	2.5	1200	1	2.5	0	10	0	1
x3	4	350	1/4	1/8	1	-2.5	2.5	0
		4400	0.5	1.75	0	15	10	0

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD. ADICIÓN DE UNA RESTRICCIÓN (I)

Nuevo óptimo al añadir una nueva restricción al programa:

Procedimiento:

- Determinar si los valores adoptados por las variables en la solución óptima en curso *satisfacen* o no la nueva restricción. Si la nueva restricción a añadir se *satisface*, la solución en curso es óptima: *Finalizar*. En caso contrario, *Continuar*.
- Se añade a la última tabla del símplex la información asociada a la nueva restricción: (1) una nueva columna para la variable de holgura o artificial representativa de la restricción, según sea su signo, y (2) una nueva fila que incorpore a la tabla los coeficientes y el término independiente de la restricción.
- Se restablece la base.
- Se aplica el algoritmo símplex-dual.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD. ADICIÓN DE UNA RESTRICCIÓN (II)

Nuevo óptimo al añadir una nueva restricción al programa (continuación):

Ejemplo-03.12: ¿Cuál es el programa de producción óptimo si se limita la fabricación total de los tres productos a 1000 unidades?

Suponemos: x1 + x2 + x3 ≤ 1000;   x1 + x2 + x3 +m =1000

			3	5	4	0	0	0
Base	C	b	x1	x2	x3	x4	x5	m
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0	0
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5	0
m	0	1000	1	1	1	0	0	1
x1	3	1200	1	2.5	0	10	0	0
x3	4	50	0	-0.5	1	-5	2.5	0
m	0	-250	0	**-1**	0	-5	-2.5	1 →
		3800	0	0.5↑	0	10	10	0
x1	3	575	1	0	0	-2.5	-6.25	2.5
x3	4	175	0	0	1	-2.5	3.75	-0.5
x2	5	250	0	1	0	5	2.5	-1
		3675	0	0	0	7.5	8.75	0.5