Escola Politècnica Superior de Castelldefels
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Colección de problemas de la Asignatura

Introducción a la Ingeniería
Tema 2

Curso 2005 - 2006

Índice

Tema 2. Herramientas de análisis. Transformación de señales

Objetivos

Al término de este tema, el estudiante deberá ser capaz de:

- o definir los conceptos básicos de señal y sistema para las telecomunicaciones, e identificar algunos de sus tipos y características;
- o distinguir el dominio temporal y frecuencial, y conocer la interpretación física de la frecuencia;
- o relacionar las matemáticas de las series y transformadas de Fourier con la física del dominio frecuencial, y ser capaz de representar una señal sencilla en tal dominio;
- o entender el funcionamiento de los filtros como sistema diseñado por su comportamiento frecuencial;

2.2 Descomposición espectral de una señal

2.2.1 Señales periódicas. Serie de Fourier

Problema 2.1 Representación frecuencial de una señal en tiempo

Dadas las siguientes señales:

$$x_1(t) = 20 \cdot \mathrm{sen}(200\pi t)$$

$$x_2(t) = x_1(t - 0.005)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Se toma el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,* $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{sen}(2\pi \cdot n f_0 t + \phi_n)$

Se pide obtener la representación frecuencial (o *espectro)* en módulo y fase de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ (es decir, los valores A_n y ϕ_n, respectivamente, representados sobre el eje <u>positivo</u> de frecuencias).

Nota: para señales <u>con la misma frecuencia</u>, se puede emplear la fórmula $\mathrm{sen}(A) + \mathrm{sen}(B) = 2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Problema 2.2 Representación frecuencial de una señal en tiempo

Dada la siguiente señal:

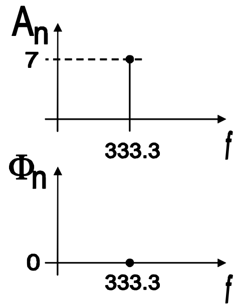
$$x(t) = \mathrm{sen}(2\pi t + \pi/2) + 3\,\mathrm{sen}(6\pi t) - 2\,\mathrm{sen}(10\pi t - \pi/4)$$

Se toma el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,* $x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \mathrm{sen}(2\pi\cdot nf_0 t+\phi_n)$

a) Dibujad su representación espectral

b) Determinad su período (justificad la respuesta)

Problema 2.3 Representación temporal de un espectro frecuencial



Sea la señal $X_1(f)$ dada por su espectro frecuencial representado en la figura adjunta.

Interprétese el espectro siguiendo el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,*

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \mathrm{sen}(2\pi\cdot nf_0 t+\phi_n)$$

es decir, para el que $X_1(f)$ viene definido por los valores $A_1 = 7$, $\Phi_1 = 0$ y $f_0 = 333.3$ Hz

Sean $X_2(f) = -0.5\cdot X_1(f)$ y $X_3(f) = X_1(f) + X_2(f)$

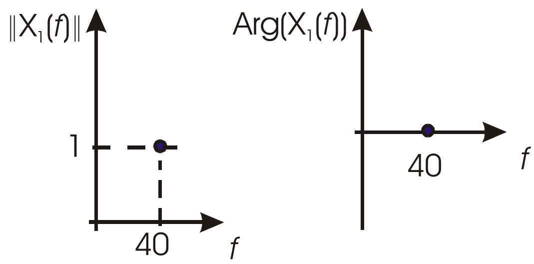
Para cada una de las señales $X_1(f)$, $X_2(f)$ y $X_3(f)$ definidas por su espectro frecuencial, se pide

a) Escribir sus expresiones temporales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$

b) Dibujar sus correspondientes representaciones en el dominio temporal para un intervalo de 0 a 12 ms

c) Indicar sus valores máximos y mínimos en el eje de ordenadas, así como su periodo T.

Problema 2.4 Representación temporal de un espectro frecuencial



Sea la señal $X_1(f)$ dada por su espectro frecuencial representado en la figura adjunta.

Interprétese el espectro siguiendo el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,*

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \mathrm{sen}(2\pi\cdot nf_0 t+\phi_n)$$

es decir, para el que $X_1(f)$ viene definido por los valores $A_1 = 1$, $\Phi_1 = 0$ y $f_0 = 40$ Hz

Sean $X_2(f) = X_1(f - 10)$ y $X_3(f) = X_2(2\cdot f)$

Para cada una de las señales $X_1(f)$, $X_2(f)$ y $X_3(f)$ definidas por su espectro frecuencial, se pide

d) Escribir las expresiones temporales para $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$

e) Dibujar sus correspondientes representaciones en el dominio temporal para un intervalo de 0 a 50 ms

f) Indicar sus valores máximos y mínimos en el eje de ordenadas, así como su periodo T.

Problema 2.5 Número de componentes de una señal periódica

¿Todas las señales periódicas tienen un desarrollo de Fourier con infinitas componentes?

Problema 2.6 Transformada de Fourier

Considere las siguientes señales periódicas:

$$x_1(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$$
$$x_2(t) = -2\operatorname{sen}(600\pi t)$$
$$x_3(t) = 4\cos(1200\pi t)$$
$$x_4(t) = 4\operatorname{sen}\left(800\pi t + \tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$x_5(t) = -x_4(t)$$
$$x_6(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_4(t)$$

Se toma el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,*

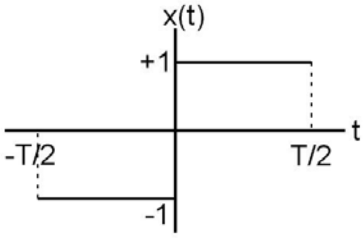
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \phi_n) \qquad \text{Ec.(1)}$$

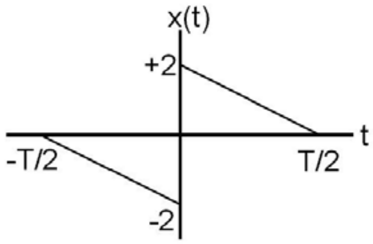
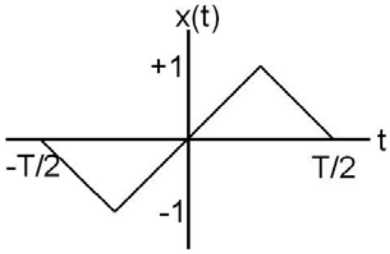
y se pide:

a) Representación frecuencial (o *espectro)* en módulo y fase de la señal (A_n y ϕ_n, respectivamente, sobre el eje positivo de frecuencias).

b) (Revisión de teoría. Cfr. Tema 2, Sec. 2.1, pp.2-6). Idem representación frecuencial en módulo y fase para las siguientes señales periódicas, de las que se da su <u>función base</u> (esto es una representación de un período de la señal centrado en el origen) y <u>serie de Fourier</u> asociada.

Ayuda: Dado que la serie de Fourier asociada se ha obtenido de tablas matemáticas y no coincide con la formulación de Ec.(1) será preciso que transforme adecuadamente las funciones senoidales de la serie, a fin de evidenciar A_n y ϕ_n, (módulo y fase).

FUNCION	SERIE DE FOURIER ASOCIADA
	$x_A(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n\,\text{impar})}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$
	Señal cuadrada. Corresponde al ejemplo de Tema.2, p.3, Fig.2.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
</td>
<td>$$x_B(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Señal diente de sierra (sawtooth). Corresponde al ejemplo de Tema.2, p.4, Fig.3.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">
</td>
<td>$$x_C(t)=\sum_{\substack{n=1\\(n\ impar)}}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Señal triangular.</td>
</tr>
</table>

Problema 2.7 Representación temporal desde espectro frecuencial

Para cada una de las señales $X_1(f)$, $X_2(f)$, $X_3(f)$, $X_4(f)$ y $X_5(f)$ definidas por su espectro frecuencial, se pide:

a) Escribir y dibujar su correspondiente representación $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$ en el dominio temporal, indicando variables y algunos de sus valores en el eje de abscisas y de ordenadas;

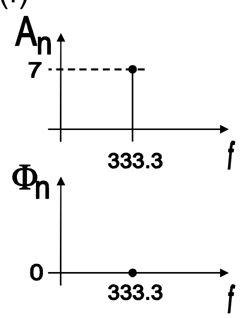
b) Indicar el periodo T y el ancho de banda BW de la señal;

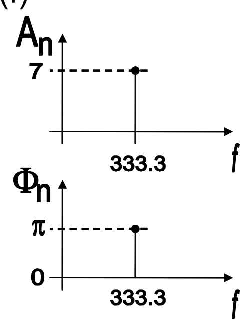
Notas:

i) se recomienda elaborar una tabla de valores en el intervalo 0 a 12 ms, seleccionando algunos valores críticos para dibujar el seno, hasta identificar la periodicidad de la señal, y dibujar las señales en ese rango.

ii) interprétese el espectro siguiendo el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,*

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{sen}(2\pi\cdot nf_0t+\phi_n)$$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">$X_1(f)$


$A_1 = 7$ $\Phi_1 = 0$
$f_0 = 333.3$ Hz</td>
<td rowspan="3">$X_2(f)$


$A_1 = 7$ $\Phi_1 = \pi$
$f_0 = 333.3$ Hz</td>
<td>$X_3(f) = X_1(2f/3)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$X_4(f) = X_1(f) + X_2(f)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$X_5(f) = X_1(f) + X_3(f)$</td>
</tr>
</table>

t	x1	x2	x3	x4	x5

t	x1	x2	x3	x4	x5

0,00 0,25 0,50 0,75 … 5,75 6,00	

6,25 6,50 6,75 … 11,75 12,00	

Problema 2.8 Señales periódicas con discontinuidades

¿Las señales periódicas con alguna discontinuidad tienen un desarrollo de Fourier con infinitas componentes? ¿Conocéis algún ejemplo de una señal sin discontinuidades pero con infinitas componentes en su serie de Fourier?

Problema 2.9 Limitación en banda y componente continua de señales periódicas

Las señales periódicas ¿están limitadas en banda o tienen un ancho de banda infinito? ¿tienen componente continua (de frecuencia cero)? Justifíquese la respuesta e inclúyanse ejemplos ilustrativos.

Problema 2.10 Señales de banda limitada

Las señales de banda limitada, es decir, con un ancho de banda finito, ¿son necesariamente aperiódicas o podrían ser periódicas? ¿son siempre de duración finita en el tiempo o pueden ser también ilimitadas en tiempo? Justifíquese la respuesta e inclúyanse ejemplos ilustrativos.

Problema 2.11 Serie de Fourier sobre señales no periódicas

¿Podemos aplicar la serie de Fourier a señales no periódicas? ¿Podemos obtener la serie de Fourier de una señal periódica a partir de su transformada? ¿Cómo?

2.3 Ejemplo de aplicación. Análisis cualitativo del filtrado de señales

Problema 2.12 Amplificación de una señal sinusoidal. Distorsión.

Sea una señal sinusoidal de 3 voltios de amplitud, frecuencia 1 Hz. Representar la señal en el dominio del tiempo (cinco ciclos). Representar la señal en el dominio frecuencial. Dicho tono se aplica sobre un sistema amplificador de ganancia 10, pero limitado por su tensión de alimentación de 12 voltios, es decir, la señal amplificada no puede superar el valor de los 12 voltios. Representar cualitativamente la señal amplificada en el dominio del tiempo y de la frecuencia, indicando qué efecto tiene sobre el espectro de la señal la limitación en tensión.

Problema 2.13 Sistemas lineales

Se dispone de un sistema caracterizado por su función de transferencia H(f) de fase lineal. Se dispone de la siguiente relación entre las señales de entrada y de salida:

Entrada	9	6 sen (6 πt)	3 sen (12 πt)	3 sen (24 πt)
Salida	15	10 sen (6·πt +π/4)	5 cos (12·πt)	- 5 sen (24·πt)

a. Hallar el valor del módulo y la fase de la función de transferencia a 6 Hz.
b. Representar gráficamente argumento de H(f) sabiendo que el ancho de banda del sistema es de 12 Hz.
c. ¿Cuál es el valor de arg{H(12)}?

Problema 2.14 Expansión y compresión de señales

Un sintetizador musical dispone de un conformador que puede expandir o comprimir **temporalmente** las señales periodicas en un factor de 10.

Si el conformador procesa las señales entrantes entre 500 y 2000 Hz:

a) ¿Cuál es posible margen de frecuencias de la señal de salida?
b) ¿Cuál es la salida y(t) del conformador si se excita con una señal sinusoidal cuya frecuencia es de 1000 Hz y actúa como expansor con un factor 5? ¿ y si actuase como compresor con un factor 10?
c) Hallar el periodo máximo y mínimo de la salida y(t) para la señal de entrada del apartado b).

Problema 2.15 Señal cuadrada aplicada a un filtro pasabajos

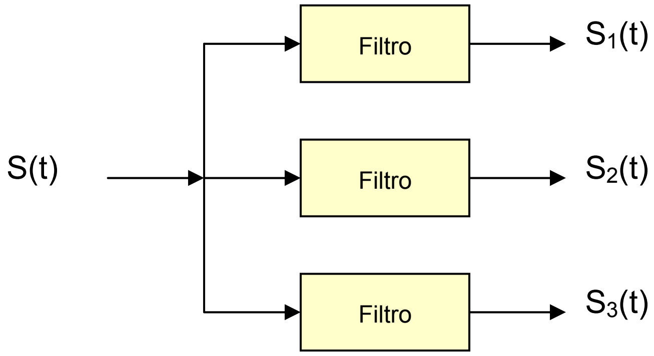
Si tenemos una señal cuadrada que evoluciona entre 1 V y -1 V con un periodo de 25 ms y la pasamos por un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte 100 Hz, dibujar aproximadamente la señal que saldrá del filtro.

Problema 2.16 Señal en diente de sierra filtrada

Si tenemos una señal en diente de sierra, ¿qué tipo de filtro ideal tendríamos que usar para quedarnos sólo con una sinusoide de su frecuencia fundamental? ¿y para obtener además un armónico?

Problema 2.17 Señales filtradas

Se tiene un banco de tres filtros, de ganancia unidad, compuesto por un filtro paso bajos con una frecuencia de corte de 800 Hz., un paso banda con una frecuencia inferior de corte de 1 KHz y un frecuencia superior de corte de 13 KHz, y un paso altos con una frecuencia de corte de 14 Khz. Si se excita el banco de filtros con una señal $s(t) = 4 \cos (2\pi \cdot 20000t) + 1 \cos \cos (2\pi \cdot 10t) + 2 \cos (2\pi \cdot 900t) + 3 \cos (2\pi \cdot 13200t) + 5 \cos (2\pi \cdot 1200t)$.



a) Determinar la salida del filtro paso bajo $S_1(t)$.
b) Determinar la salida del filtro paso alto $S_3(t)$ y paso banda $S_2(t)$.
c) Dibujar el espectro de la señal s(t).
d) Para dibujar el espectro, ¿Qué tipo de transformada has utilizado?.

Problema 2.18 Representación espectral y filtrado

Dada la siguiente señal: $x(t) = sen(2\pi t+\pi/2) + 3sen6\pi t – 2sen(10\pi t-\pi/4)$

a) Dibujad su representación espectral
b) Determinad su período (justificad la respuesta)

Decid en qué se convierte x(t) cuando pasa a través de:

c) un filtro paso bajo de fc = 0.5 Hz
d) un filtro paso bajo de fc = 2 Hz
e) un filtro paso bajo de fc = 4 Hz
f) un filtro paso bajo de fc = 10 Hz
g) un filtro paso alto de fc = 2 Hz
h) un filtro paso alto de fc = 4 Hz

Problema 2.19 Filtrado de señales periódicas

Considérese una señal de periodo 5 ms. Respóndase y justifíquese la respuesta a las siguientes cuestiones:

2.1) la señal puede anularse con un filtro paso alto con frecuencia de corte de 150 Hz;

2.2) la señal puede anularse con un filtro paso bajo con fecuencia de corte de 150 Hz;

2.3) puede tener una componente a la frecuencia de 50 Hz;

2.4) puede tener una componente a la frecuencia de 600 Hz;

Problema 2.20 Representación espectral y filtrado

Considere las siguientes señales periódicas:

$$x_1(t) = 20 \cdot sen(200\pi t)$$

$$x_2(t) = x_1(t - 0.0025)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_4(t) = x_1(2 \cdot t)$$

$$x_5(t) = x_1(t/2)$$

$$x_6(t) = x_1(t) + x_4(t) + x_5(t)$$

Se toma el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos*:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(2\pi \cdot nf_0 t + \phi_n)$$

a) Obtener la representación frecuencial (o *espectro)* en módulo y fase de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ y $x_6(t)$, (es decir, los valores A_n y ϕ_n, respectivamente, representados sobre el eje <u>positivo</u> de frecuencias).

b) Si se compara la señal $x_1(t)$ con las señales $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$, ¿qué efecto sonoro se produce en cada caso? (indíquese con una cruz en la siguiente tabla)

señal	eco o reverberación	sonido más agudo	retraso	sonido más grave
$x_2(t)$				
$x_3(t)$				
$x_4(t)$				
$x_5(t)$				

c) Describir los posibles filtros necesarios (tipo de filtro y frecuencias de corte) para recuperar las señales $x_1(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$ a partir de la señal $x_6(t)$.

Problema 2.21 Representación espectral y filtrado

Considere las siguientes señales periódicas:

$$x_1(t) = 20 \cdot \text{sen}(100\pi t) \qquad x_2(t) = \frac{1}{4} x_1(t - 0.0075)$$

$$x_3(t) = x_1(5 \cdot t) + 10 \qquad x_4(t) = 3 \cdot x_1(t/4)$$

$$x_5(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad x_6(t) = x_1(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

Se toma el criterio de descomposición en serie de Fourier *de senos,*

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(2\pi \cdot nf_0 t + \phi_n)$$

a) Obtener y dibujar el módulo |X(f)| del espectro (o representación espectral) de las señales $x_1(t)$, $x_4(t)$ y $x_6(t)$, (es decir, los valores de A_n, representados sobre el eje <u>positivo</u> de frecuencias).

b) Obtener y dibujar la fase arg{X(f)} del espectro (o representación espectral) de las señales $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_6(t)$, (es decir, los valores ϕ_n, respectivamente, representados sobre el eje <u>positivo</u> de frecuencias).

c) Describir cómo se relacionan las señales $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ y $x_5(t)$ con la señal $x_1(t)$, en términos de efectos sonoros, como amplificación y/o atenuación, retraso o adelanto en el tiempo, más agudas o graves.

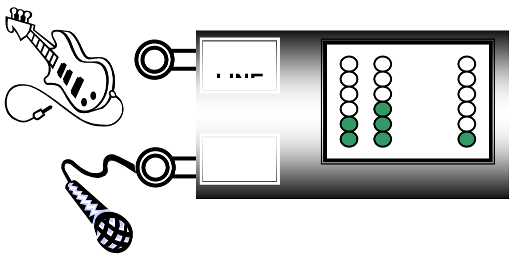
d) Describir los posibles filtros necesarios (tipo de filtro y frecuencias de corte) para recuperar las señales $x_1(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$ a partir de la señal $x_6(t)$.

e) Enumerar un ejemplo del uso de filtros en dispositivos reales, indicando su utilidad y las ventajas de la descripción en el dominio frecuencial, en lugar del dominio temporal.

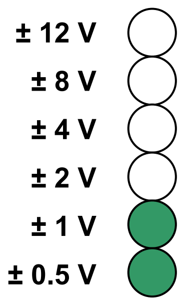
Problema 2.22 Diseño básico de un sistema de visualización de bandas frecuenciales

Se desea implementar un sistema visualizador básico del espectro de una señal de audio, proveniente de dos fuentes, un micrófono (MIC) y una entrada de línea (LINE) para diferentes tipos de señal (sintetizadores, instrumentos como guitarras eléctricas, etc), tal y como se representa en la figura adjunta.

El margen dinámico para la entrada de micrófono (**$v_{MIC}(t)$**) es de ±1 mV, mientras que para la toma de línea (**$v_{LINE}(t)$**) es de ±15 mV.



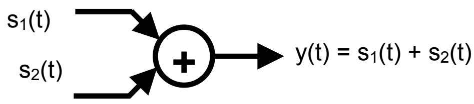
La pantalla de representación consiste en un conjunto de N columnas a modo de vúmetros (o indicadores de niveles de señal, como el volumen en determinados aparatos de audio), cada una de las cuales tiene un margen dinamico de -15 a 15 V y consta de 6 leds, que se iluminan gradualmente en función del valor absoluto de la tensión de entrada $x_V(t)$ al circuito del led, es decir:



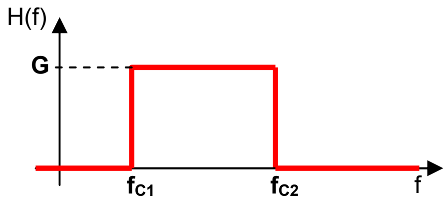
- el primer elemento se iluminará cuando la señal supere los 0,5 voltios de amplitud ($|x_V(t)| \geq 0.5$ V $\Rightarrow x_V(t) \geq 0.5$ V ó $x_V(t) \leq -0.5$ V);
- el segundo elemento se iluminará para tensiones que superen el voltio, tanto valor positivo como negativo ($|x_V(t)| \geq 1$ V);
- y así sucesivamente hasta el caso en que la amplitud de la señal supere los 12 voltios, en que la columna entera de leds se iluminará;

Se dispone de los siguientes elementos para desarrollar el sistema visualizador:

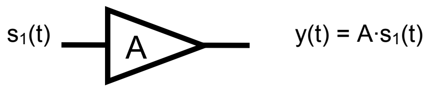
1. Circuitos sumadores de señales de audio:



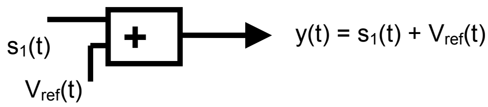
2. Filtros Activos, es decir, que incorporan un control de ganancia (un amplificador o atenuador) que puede ser definido por el usuario. Considérese un filtro ideal con una respuesta en frecuencia como la representada en la figura y definida por el factor de ganancia **G**, y las frecuencias de corte $\mathbf{f_{C1}}$ y $\mathbf{f_{C2}}$.



3. Amplificadores, definidos por el valor de su amplificación **A**.



4. Circuitos de *offset* o sumadores de niveles de continua, definidos por la tensión de referencia añadida $\mathbf{V_{ref}}$.



Se propone un primer diseño básico de sistema de visualización capaz de distinguir tres bandas frecuenciales, centradas en 100 Hz (Bajas o *Low*) , 2,5 kHz (Medias o *Mid*) y 10 kHz (Altas o *High*).

Se pide:

a) propuesta de un diagrama básico de bloques incluyendo una breve descripción sobre la función para cada bloque **sin cálculos**; se valorará considerar diversas soluciones y la selección de aquella más simple (que incorpore menos componentes);

b) diseño del circuito de acondicionamiento para poder visualizar el conjunto de las señales de entrada (cuyo margen dinámico es de ±1 mV para el micrófono y de ±15 mV para la entrada de línea) en la pantalla de representación;

c) determinar las especificaciones de los filtros empleados, es decir, los valores para sus frecuencias de corte $\mathbf{f_{C1}}$ y $\mathbf{f_{C2}}$, así como su factor de ganancia **G**;

d) Dibujar un esquema de la pantalla de representación con los leds encendidos (●) o apagados (○) para las siguientes señales de calibración:
   - $\mathbf{v_{MIC}(t)} = \mathbf{0{,}5 \cdot sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)\ mV}$ y no hay nada conectado a $\mathbf{v_{LINE}(t)}$;
   - $\mathbf{v_{MIC}(t)}$ no tiene nada conectado y $\mathbf{v_{LINE}(t)} = \mathbf{12 \cdot cos(2\pi \cdot 9500 \cdot t)\ mV}$;
   - $\mathbf{v_{MIC}(t)} = \mathbf{1 \cdot sin(2\pi \cdot 3000 \cdot t)\ mV}$ y $\mathbf{v_{LINE}(t)} = \mathbf{15 \cdot sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)\ mV}$;

e) si se desea ampliar el número de bandas frecuenciales de tres a seis, ¿qué modificaciones habría que hacer? ¿es posible un diseño escalable o habría que volver a rehacer todos los cálculos?

Bibliografia bàsica:

John Robinson Pierce, A. Michael Noll, “Señales. La ciencia de las telecomunicaciones”, Ed. Reverté, S.A., Barcelona, 1995

Wright, P.H. Introducción a la Ingeniería. Addison Wesley, 1993.

Bibliografia complementària:

Ángel Cardama, “Las Telecomunicaciones en la Sociedad de la Información”, CIMNE, Reial Acadèmia de Doctors, Barcelona, 2002

Nicholas Negroponte, “El mundo digital”