TRACTAMENT DE DADES EXPERIMENTALS

Daniel Crespo

1. CALCUL D'ERRORS.

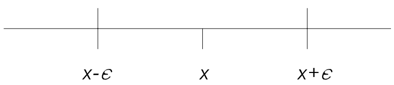
1.1. Introducció.

Les ciències experimentals, sobre tot la Física i la Química, es fonamenten en lleis matemàtiques que relacionen entre si les magnituds obtingudes en el laboratori. Aquestes lleis constitueixen abstraccions de la realitat, perquè la precisió infinita de les fórmules matemàtiques no existeix en la pràctica. La noció de l'error és, per tant, fonamental per a qui treballa en un laboratori.

1.2. Definició d'error.

El primer descobriment que hom fa en un laboratori és que els resultats de les mesures no són matemàticament exactes. Per exemple, si pesem un cos i la balança assenyala 15.3 Kg no podem deduir que aquest nombre sigui matemàticament exacte, és a dir, no es pot assegurar que el cos pesi exactament 15.3 Kg (15.30000 ...). Per afinar el tercer, quart, etc. decimals es necessitarien mètodes més precisos.

Així doncs, el resultat d'una mesura no pot reduir-se mai a un punt sobre una recta sino que serà un interval sobre aquesta recta.



La notació usual és: $x \pm \epsilon$

x indica quin és el valor que es considera bo com a resultat de la mesura, i ϵ representa la incertesa per excés o per defecte. ϵ és un nombre positiu, s'anomena error absolut de la mesura, i té les mateixes unitats que x. Qualsevol nombre compres entre $x + \epsilon$ i $x - \epsilon$ pot ésser el valor real de la mesura efectuada.

Suposem que, en l'exemple anterior, donéssim com a resultat de la pesada 15.3 ± 0.5 Kg; això significa que el pes real de l'animal és algun valor comprès entre 14.8 i 15.8 Kg, no essent possible precisar més amb el mètode de pesada utilitzat.

Es clar que una mesura és millor quan més petit sigui l'error del que ve afectada. Però, com que l'error mai pot reduir-se a zero, qualsevol resultat experimental ha de portar especificat el seu error corresponent.

Altres vegades, però, podem parlar d'error relatiu, quantitat que es defineix com

$$\varepsilon_{rel} = 100\frac{\varepsilon}{x} \qquad \textbf{(1)}$$

i es mesura en tant per cent degut a que és un nombre adimensional. Aquesta mesura de l'error és un mètode per valorar la qualitat de la mesura realitzada.

Un mateix error absolut pot correspondre a una mesura molt bona o molt dolenta. Per exemple, si algú mesura l'àrea d'una gran extensió agrícola amb un error de 1 m^2, hom reconeixerà que s'ha fet una bona mesura; ara bé, si mesurem l'àrea d'una habitació amb el mateix error hom convindrà que el resultat és pèssim.

1.3. Classificació dels errors.

Les causes dels errors en les mesures experimentals són molt variades, i atenent a elles es poden classificar en dos grups:

a) Errors de resolució. Són els deguts al fet que la precisió dels aparells és limitada. Per exemple, si la divisió més petita del dial d'un voltímetre correspon a una diferència de potencial d'un volt, la precisió de les mesures realitzades no serà suficient per apreciar dècimes, centèsimes, etc. de volt. Aquests errors són inherents a qualsevol mesura i, per tant, inevitables.

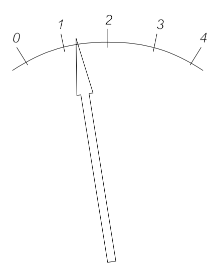
b) Errors accidentals: Quan es repeteix un experiment varies vegades en -aparentment- idèntiques condicions s'observa que els resultats no coincideixen. Si hom pogués controlar tots els factors que incideixen sobre un experiment, no trobaria cap dispersió en els resultats. Però, en la pràctica, això és impossible. Existeixen una sèrie de factors aleatoris que unes vegades provoquen desviacions en una direcció, i altres, en la contrària. Aquestes desviacions en les mesures d'una mateixa magnitud introdueixen una incertesa en el resultat final que s'anomena error accidental. La seva estimació es basa en mètodes estadístics.

L'error total d'una mesura serà sempre la suma d'aquests dos tipus d'error:

$$\varepsilon = \varepsilon_{res} + \varepsilon_{ac} \qquad \textbf{(2)}$$

1.4. Càlcul de l'error de resolució.

No existeix una regla fixa per estimar l'error de resolució. En els aparells de mesura amb escala visible o amb dial pot prendre's com error de resolució la meitat de la divisió més petita. Això és degut a que hom és capaç de discernir si la lectura de l'aparell queda més pròxima a una divisió o a la següent.



En la figura adjunta la lectura queda més propera a una divisió de l'aparell que a la següent. Podem imaginar sense dificultat una línia que passés per la divisió 1.5 i utilitzar-la per determinar el valor de la mesura.

Hi ha aparells on les divisions són massa petites per distingir bé el seu punt mig; en aquestes circumstàncies, caldrà prendre com a error de resolució la mida de la divisió més petita. De la mateixa manera, en els aparells digitals l'error de resolució és també la xifra de màxima precisió.

1.5. Càlcul de l'error accidental.

Si hom efectua varies mesures (anomenem N el nombre de mesures realitzades) d'una magnitud x, podem construir amb aquestes un histograma. En l'eix de les x dibuixarem els valors obtinguts en la mesura en intervals, i sobre l'eix de les y hi farem correspondre la freqüència relativa corresponent a cada interval. Es a dir, si en el primer interval caben n_1 valors, la freqüència relativa -alçada de l'histograma- és $f_1 = n_1/N$, i així successivament per tots els altres.

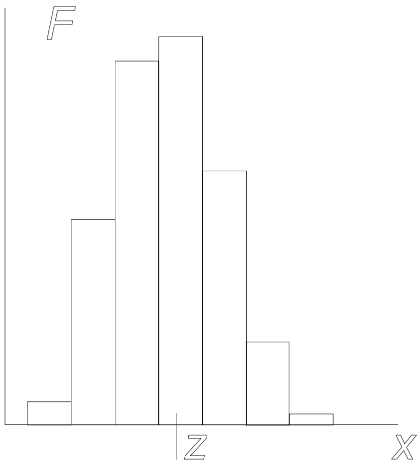


Fig. A

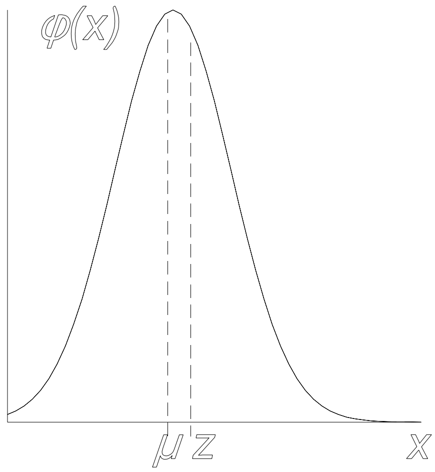


Fig. B

S'observa que la forma de l'histograma és sempre semblant a la de la figura A : existeix una zona de l'eix d'abscisses on les freqüències són màximes, decreixent a ambdós costats d'aquestes. El "centre" ve donat per la mitja aritmètica de totes les mesures (i = 1,...,N):

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3}$$

Aquest "centre" serà el que donarem com a resultat de la mesura. Però, donar únicament el valor de la mitja és insuficient: dues sèries de dades poden tenir el mateix valor mig i, en canvi, tenir més o menys dispersió al seu voltant. Cal doncs definir una nova magnitud que ens digui quant disperses són les dades obtingudes. Usualment, amb aquest objecte, s'utilitza l'anomenada desviació típica s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{4}$$

que és la mitja dels quadrats de les desviacions de les dades respecte de la mitja. Es clar que com més "esvelt" sigui l'histograma més petit serà el valor de s. La raó de la presència de N-1 al denominador en lloc de N és deguda al fet que les N desviacions $x_i - \bar{x}$ no són independents (de fet la seva suma dóna zero); sols en hi ha N-1 de independents. Aquest nombre N-1 s'anomena nombre de graus de llibertat.

La pregunta, però, és: quin error li assignem a la mitja? La resposta és tècnicament complicada i en donarem només una visió qualitativa.

Augmentant el nombre de mesures de x indefinidament, l'histograma A seria cada vegada més semblant a una corba acampanada ("campana de Gauss") de la figura B, coincidint amb aquesta quan $N \to \infty$. Es defineix el valor real de la magnitud com el valor mig μ de la distribució de Gauss.

En la pràctica és impossible realitzar un nombre infinit de mesures. No és possible, per tant, conèixer experimentalment el valor de μ. La mitja $\bar{x}$ de (3) és una estimació del valor desconegut μ; normalment aquests dos valors no coincideixen com es veu a la figura.

L'error que hem d'assignar a x ha de ser tal que defineixi un interval a l'entorn de x que contingui μ. El càlcul d'aquest interval té un contingut probabilístic, donada la nostra ignorància sobre μ. Com més segurs vulguem estar de localitzar μ en un entorn de x, més gran serà la longitud d'aquest interval. A Estadística es demostra que μ es troba en l'interval

$$\bar{x} \pm \varepsilon_{ac} \tag{5}$$

amb una probabilitat p si

$$\varepsilon_{ac} = t_p(N-1)\frac{s}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

A ϵ_{ac} se l'anomena error accidental. s ve donada per (4) i $t_p(N-1)$ és un nombre que es dedueix de l'anomenada distribució d'Student. Depèn de la probabilitat p i de N i té dues característiques molt importants:

- Disminueix en augmentar N (p fix)
- Augmenta en augmentar p (N fix).

Aquestes propietats es poden comprovar a la taula de valors de $t_p(N)$ adjunta, i es corresponen amb els raonaments de tipus qualitatiu anteriors.

NOTA: Com hem observat, les mesures $\bar{x}$ i s són aproximacions als valors reals μ i σ (desconeguts) de la magnitud mesurada. Això no obstant, per abús del llenguatge, és comú confondre $\bar{x}$ amb μ i s amb σ. Per aquesta raó s'acostuma a donar $\bar{x}$ i σ, i aquesta és la nomenclatura habitual a les calculadores.

1.6. Mesures indirectes.

Sovint interessa conèixer magnituds que no es poden mesurar directament, sinó que s'han d'obtenir a partir d'altres que sí que es poden mesurar. Per exemple, per conèixer el volum i la densitat d'un sòlid esfèric utilitzarem: un palmer per mesurar el seu diàmetre (D), i una balança per esbrinar la seva massa (M). Amb l'ajut de les fórmules

$$V = \frac{1}{6}\,\pi\,D^3 \qquad\qquad d = \frac{M}{V} \tag{7}$$

podrem calcular les magnituds que desitgem. A aquestes mesures que no s'obtenen directament de l'experiència se les anomena mesures indirectes. El pas següent serà trobar l'error amb que s'obtenen aquest tipus de mesures.

1.7. Càlcul d'errors en les mesures indirectes.

Distingirem entre errors de resolució i errors accidentals.

a) Errors de resolució: Suposem que la nostra mesura és indirecta y només depèn de la mesura directa x: y = y(x). En aquest cas, l'error de resolució ve donat per:

$$\varepsilon_{res}(y) = |y'(x)|\ \varepsilon_{res}(x) \tag{8}$$

on y'(x) és la derivada de la funció y(x). S'agafa en valor absolut per a garantir que l'error sigui positiu. La deducció d'aquesta fórmula es fa a partir del desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció y(x) al voltant del valor mig, menyspreant tots els termes d'ordre superior al primer.

Si y depèn d'un conjunt de mesures directes $(x^1,...,x^n)$, llavors la fórmula a emprar és:

$$\varepsilon_{res}(y) = \left|\frac{\partial y}{\partial x^1}\right| \varepsilon_{res}(x^1) + \ ...\ + \left|\frac{\partial y}{\partial x^n}\right| \varepsilon_{res}(x^n) \tag{9}$$

essent $\epsilon_{res}(x^1)$,..., $\epsilon_{res}(x^n)$ els errors de resolució associats a les mesures x^1,..., x^n respectivament. Les derivades es calcularan en el punt $(x^1,...,x^n)$.

b) Errors accidentals: Suposem que volem determinar el valor d'una magnitud indirecta y que depèn de varies mesures directes: x^1, x^2,..., x^n. En fer l'experiment determinem N valors per cadascuna d'elles i determinem els valors mitjans $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$,..., $\bar{x}^n$, i les desviacions típiques $s(x^1)$, $s(x^2)$,..., $s(x^n)$. La determinació de l'error en aquest cas és complicada degut a que quan N augmenta l'histograma no esdevé una campana de Gauss. Afortunadament, si les desviacions típiques s_i són petites comparades amb les mitjes respectives, l'histograma s'aproxima a la distribució de Gauss. Normalment aquest serà el cas en que ens trobarem a la pràctica. Pel càlcul de y utilitzarem:

$$y = y(\bar{x}^1,...,\bar{x}^n) \tag{10}$$

i per la desviació típica de y:

$$s^2(y) = \left|\frac{\partial y}{\partial x^1}\right|^2 s^2(x^1) + \ ...\ + \left|\frac{\partial y}{\partial x^n}\right|^2 s^2(x^n) \tag{11}$$

on els valors de les derivades parcials s'han de calcular en el punt $(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^n)$.

Per calcular finalment l'error accidental, corresponent a una probabilitat p de que el valor exacte estigui en l'interval donat, farem servir com abans la distribució d'Student. Per això ens cal saber el nombre de graus de llibertat. Si per a cada x^i hem fet el mateix nombre de mesures N, llavors podem aplicar (6) directament. Si el nombre de mesures per a cada x^i és diferent, l'estimació rigorosa de l'error accidental és força complexa; ens conformarem amb la següent recepta aproximada (que estima l'error per excés):

$$\varepsilon_{ac}(y) = t_p(\infty)s(y) \tag{12}$$

De fet, com que $t_{0.95}(\infty) = 1.96 \simeq 2$, és pràctica habitual prendre com error accidental 2s(y).

L'error total serà finalment la suma dels errors accidental i de resolució:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{res}(y) + \varepsilon_{ac}(y) \tag{13}$$

Cal fer notar que els dos tipus d'errors s'han de propagar independentment fins al final, i després sumar-los.

Existeix un altre mètode per a propagar els errors accidentals, que aquí discutirem únicament per a una sola magnitud x, de la qual disposem de n mesures $\{x_1,...,x_n\}$. Per a obtenir $y = f(x)$ calcularem en primer lloc $y_i = f(x_i)$ i aplicarem llavors (3), (4):

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ s^2(y) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - \bar{y}\right)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Podem comparar amb el que dóna (10) i (11):

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y(\bar{x}) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ s^2(y) &= \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Què és millor, (14) o (15)?. (14) és més correcte, però en canvi costa més de calcular; a (14) tenim n avaluacions de f(x) i a (15) només dues. Si f és una funció suau i les dades (les x_i) no estan molt disperses, (15) resulta una bona aproximació a (14), i la utilitzarem habitualment.

1.8.- Arrodoniment i nombre de xifres significatives.

Comencem amb un exemple. Què voldria dir donar el resultat d'una mesura de volum com 1589.93 ± 91.47 cm^3?. No té sentit precisar dues xifres decimals en el valor que hom dona per bo quan l'error d'aquest nombre és de l'ordre d'una centena!

L'arrodoniment és per tant una pràctica necessària. Els errors s'acostumen a donar amb una xifra significativa o com a molt dues; més precisió normalment no té cap valor. En l'exemple esmentat fora correcte donar $(15.9 \pm 0.9)\cdot 10^2$ cm^3. Observem que la notació exponencial (anomenada també científica) ens permet evitar escriure xifres que no té sentit precisar.

ATENCIÓ: només hem d'arrodonir els resultats finals, qualsevol operació d'arrodoniment en punts intermedis dels càlculs introdueix errors en els resultats deguts a la mala manipulació dels nombres i no deguts a les mesures experimentals. Es per tant necessari mantenir el màxim de xifres decimals en tot el procés de càlcul, i arrodonir tan sols els resultats finals.

Per acabar, és necessari comentar que existeixen uns altres errors: els errors sistemàtics. Fins ara hem considerat que els aparells de mesura estaven ben calibrats. Les mesures efectuades amb aparells mal calibrats introdueixen errors en elles, aquests errors s'anomenen errors sistemàtics. Els errors sistemàtics són direccionals, no donen un marge entorn d'un valor mig en el qual es troba el valor real, sinó que aquest sempre queda a un costat del marge. Hi ha un tipus d'error sistemàtic, l'error de zero, que és fàcil de mesurar i que per tant cal corregir sempre. Pel que fa a la calibració, els aparells correctament fabricats han de presentar un error de calibració menor que la precisió de l'aparell.

2.- REPRESENTACIÓ GRÀFICA I INTERPRETACIÓ DE DADES EXPERIMENTALS.

En un experiment normalment es consideren diverses variables i un dels objectius de l'experiment consisteix en trobar quines relacions existeixen entre les variables examinades, o comprovar si les dades obtingudes s'ajusten a algun model teòric o al resultat d'altres experiències. Parlarem per concretar de dues variables x, y. La representació gràfica dels valors mesurats sovint presenta moltes utilitats. Si la representació es realitza acuradament, la gràfica ens dona la relació entre les variables x i y. Per a realitzar una representació gràfica poden ser útils les següents idees:

a). Si la representació es realitza manualment és convenient utilitzar paper mil·límetrat. Si els valors estan continguts en un interval amb més de dos ordres de magnitud és convenient realitzar representacions logarítmiques essent útil l'us de paper semilogarítmic.

b). Cal triar les escales dels eixos, considerant els valors extrems de x i y, de forma que la gràfica ocupi gran part del paper.

c). Les divisions i subdivisions dels eixos s'han de triar de forma que sigui fàcil treballar amb elles (per exemple assignem a un nombre sencer de divisions un nombre sencer d'unitats).

d). El punt d'intersecció dels eixos no té perquè ser el (0,0), pot ser qualsevol altre que faci més fàcil la representació.

e). Si s'espera que la gràfica sigui una recta, pot ser útil triar els eixos de forma que el pendent de la recta sigui d'uns 45°, així podem facilitar càlculs posteriors sobre la gràfica (derivada, interpolació de punts, ...)

f). Es necessari col·locar les dimensions i unitats que corresponen a cada eix.

g). Els intervals en els histogrames cal triar-los de manera que dintre de cada interval hi hagi un nombre raonable de mesures. Si tenim N mesures en total es recomana agafar un nombre d'intervals $\simeq \sqrt{N}$. Així, si tenim 20 mesures es poden prendre de 4 a 6 intervals; prendre'n 1 o 2 no ens informaria de res, i si en prenem 40 la majoria estaran buits o contindran un sol valor, donant un histograma ininteligible.

h). El paper semilogarítmic facilita representacions de magnituds que tenen un marge molt ampli entre els valors numèrics dels seus extrems. En aquest paper les divisions en un dels eixos no són equidistants sinó logarítmiques (per ex. hi ha la mateixa distància entre 0.1 i 1 que entre 1 i 10 ja que log(0.1) = -1, log(1) = 0 i log(10) = 1). També és útil el paper logarítmic quan les dues magnituds x, y varien en un marge molt ampli.

3. AJUST D'UNA RECTA A LES DADES EXPERIMENTALS.

3.1.- Introducció.

La corba més senzilla, i la més fàcil d'ajustar a un conjunt de dades (x, y) és una recta. Sovint la dependència y = f(x) no serà lineal, però fent canvis senzills tant de x com de y és possible reduir tots els casos a l'estudi de la dependència lineal y = a + bx. Vegem dos exemples.

1) La llei que dóna el període d'un pèndol en funció de la seva llargada és $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Per tant la relació entre T i l és parabòlica: $T^2 = 4\pi^2 l/g$. Però si representem $y = T^2$ en funció de x = l, obtenim la llei lineal $y = (4\pi^2/g)x$.

2) La llei que dóna l'amplada d'un oscil·lador esmorteït en funció del temps és exponencial: $A = A_0 e^{-\lambda t}$. Però si posem y = lnA, x = t obtenim de nou una llei lineal: $y = -\lambda x + \ln A_0$.

La magnitud més important en l'ajust d'una recta és el seu pendent, que normalment conté la magnitud que volem mesurar. En els exemples anteriors, el pendent de la recta ens permetria determinar l'acceleració de la gravetat g i el coeficient d'esmorteïment λ.

3.2. Regressió per mínims quadrats.

Existeix un mètode objectiu per la determinació de l'equació de la recta que millor s'ajusta a un conjunt de punts: és el mètode de la regressió per mínims quadrats.

Suposarem que tenim k parelles de valors (x_i, y_i), on i va de 1 a k. La hipòtesi fonamental de l'anàlisis que desenvoluparem és que els errors corresponents a x són molt més petits que els corresponents errors per les y, i per tant els menysprearem; i a l'hora d'ajustar la recta demanarem que la suma de les desviacions al quadrat de les y_i respecte de la recta buscada siguin mínims.

Ajustarem una recta de la forma y = a + bx als k punts (x_i, y_i) que tenim, demanant que

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - a - bx_i)^2 \tag{18}$$

sigui mínim. Es a dir,

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a,b) = -2 \sum_{i=1}^{k} (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} f(a,b) = -2 \sum_{i=1}^{k} (y_i - a - bx_i) = 0 \tag{20}$$

d'on es dedueixen sense dificultats els valors de a i b:

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \qquad a = \bar{y} - b\,\bar{x} \tag{21}$$

on hem posat

$$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \,, \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \,, \qquad \overline{xy} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\, y_i \,,\ etc. \tag{22}$$

De l'expressió de b es dedueix immediatament que la recta de regressió passa pel punt $(\bar{x}, \bar{y}) : y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$. Cal fer notar també que el denominador de a és sempre positiu:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 > 0 \tag{21}$$

i el mateix succeeix amb $\overline{y^2} - \bar{y}^2$.

3.3.- Coeficient de correlació.

Matemàticament podem ajustar qualsevol conjunt de punts a una recta. El coeficient de correlació r és un índex que ens indica la bondat del nostre ajust. El coeficient de correlació es pot calcular utilitzant la següent expressió:

$$r^2 = \frac{\left(\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}\right)^2}{\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)\left(\overline{y^2} - \bar{y}^2\right)} \tag{22}$$

En lloc d'ajustar una recta y = a + bx podríem haver ajustat x = μy + λ; μ vindria donat per (19) substituint x per y. Per tant r^2 no és més que el producte bμ. Si les dues rectes fossin idèntiques, μ = 1/b, i per tant r = 1. De fet, es pot demostrar que r ∈ [0,1] i que r = 1 si i només si els k punts (x_i, y_i) estan alineats. Quant més proper a 1 sigui el valor de r millor és el nostre ajust. En la pràctica es considera un bon ajust quan $r \geq 0.95$, i es considera que no es pot ajustar una recta quan $r \leq 0.8$.

3.4.- Errors dels coeficients a i b.

A la recta li assignem una dispersió donada per les desviacions de les y_i respecte dels valors corresponents a la recta ajustada, $a+bx_i$:

$$s^2 = \frac{1}{k-2} \sum_{i=1}^{k} (y_i - a - bx_i)^2 = \frac{k}{k-2} \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right) b^2 \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \tag{23}$$

on la segona igualtat es pot obtenir substituint els valors de a i b i efectuant uns càlculs farragosos. El denominador $f = k - 2$ s'anomena nombre de graus de llibertat. La raó de la presència de $k - 2$ al denominador en lloc de k és deguda al fet de que les k desviacions $y_i - a - bx_i$ no són independents, ja que verifiquen les dues equacions (17), (18), i per tant en hi ha tan sols $k - 2$ d'independents.

Finalment les dispersions que cal assignar als coeficients a i b es demostra en estadística que venen donades per:

$$s^2(b) = \frac{s^2}{k \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right)} , \qquad s^2(a) = \overline{x^2}\, s^2(b) \tag{24}$$

Per a l'estimació de l'error accidental només cal aplicar les fórmules

$$\varepsilon_{ac}(b) = t_p(f) \frac{s(b)}{\sqrt{f}} , \qquad \varepsilon_{ac}(a) = t_p(f) \frac{s(a)}{\sqrt{f}} \tag{25}$$

on $f = k - 2$. Substituint a $s^2(b)$ el valor de s^2 obtenim fàcilment

$$\frac{s(b)}{b} = \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)} \tag{26}$$

és a dir, l'error relatiu del pendent de la recta depèn tan sols del nombre de punts i del coeficient de correlació.

Cal fer notar que si el pendent b és molt pròxim a zero, el mateix li passarà al coeficient de correlació r (ja que els dos tenen el mateix numerador, $\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$). En aquest cas els valors de y són independents de x i per tant no té sentit buscar una llei que els relacioni.

Valors de la distribució $t_p(n)$ d'Student										
n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63,66	31,82	12,71	6,314	3,078	1,376	1	0,727	0,325	0,158
2	9,925	6,964	4,303	2,92	1,886	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,841	4,541	3,182	2,353	1,638	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,604	3,747	2,776	2,132	1,533	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,032	3,365	2,57	2,015	1,476	0,92	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,707	3,143	2,447	1,943	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,499	2,998	2,365	1,894	1,415	0,896	0,711	0,549	0,263	0,13
8	3,355	2,896	2,306	1,859	1,397	0,889	0,706	0,546	0,262	0,13
9	3,25	2,821	2,262	1,833	1,383	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,169	2,764	2,228	1,812	1,372	0,879	0,7	0,542	0,26	0,129
11	3,106	2,718	2,201	1,796	1,363	0,876	0,697	0,54	0,26	0,129
12	3,054	2,681	2,178	1,782	1,356	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,012	2,65	2,16	1,771	1,35	0,87	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,977	2,624	2,145	1,761	1,345	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,947	2,602	2,131	1,753	1,347	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,921	2,583	2,12	1,746	1,337	0,865	0,69	0,535	0,258	0,128
17	2,899	2,567	2,11	1,74	1,333	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,878	2,552	2,101	1,734	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,861	2,539	2,093	1,729	1,328	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,845	2,528	2,086	1,725	1,325	0,86	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,831	2,518	2,08	1,721	1,323	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,819	2,508	2,074	1,717	1,321	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,807	2,5	2,069	1,714	1,319	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,797	2,492	2,064	1,711	1,318	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,787	2,485	2,059	1,708	1,316	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,779	2,479	2,055	1,706	1,315	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,771	2,473	2,052	1,703	1,314	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,763	2,467	2,048	1,701	1,312	0,855	0,683	0,53	0,256	0,127
29	2,756	2,462	2,045	1,699	1,311	0,854	0,683	0,53	0,256	0,127
30	2,75	2,457	2,042	1,697	1,31	0,854	0,683	0,53	0,256	0,127
40	2,704	2,423	2,021	1,684	1,303	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2	1,671	1,296	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,617	2,358	1,98	1,658	1,289	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
∞	2,577	2,327	1,96	1,645	1,282	0,842	0,675	0,524	0,253	0,126

Grup de pràctiques: Data: / /
Alumnes:

. . . .

. . . .

PRÀCTICA 1 CÀLCUL D'ERRORS I REPRESENTACIÓ GRÀFICA

1. El moment d'inèrcia d'una esfera respecte un eix que passa pel seu centre és 2/5 MR^2. El volem determinar per una bola d'acer (densitat 7.82 ± 0.01 g/cm^3) que te un diàmetre de 100.26 mm mesurat amb un micròmetre que aprecia fins 1/100 mm. Calculeu quant val el moment d'inèrcia d'aquesta bola i l'error absolut i relatiu amb el que l'obtenim.

Càlcul de M:

Càlcul de I:

Càlcul d'Errors:

$$\varepsilon(M) = \left|\frac{\partial M}{\partial \rho}\right| \varepsilon(\rho) + \left|\frac{\partial M}{\partial R}\right| \varepsilon(R)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} =$$

$$\frac{\partial M}{\partial R} =$$

$$\varepsilon(I) = \left|\frac{\partial I}{\partial M}\right| \varepsilon(M) + \left|\frac{\partial I}{\partial R}\right| \varepsilon(R)$$

$$\frac{\partial I}{\partial M} =$$

$$\frac{\partial I}{\partial R} =$$

Resultat de la mesura: I = $\varepsilon(I)$ =

Grup de pràctiques:		Data:	/ /

2. En una empresa produeixen resistències elèctriques i realitzen un control de qualitat. Extreuen 10 resistències a l'atzar de la cadena de producció i les mesuren amb un ohmimetre de 4 xifres de precisió (1/10000) obtenint els següents resultats:

R/Ω =	470.3	473.1	445.0	481.2	465.2	466.0	471.9	479.2	475.1	468.6

Determineu el valor mig de les resistències produïdes:

R =

Determineu la desviació típica de la resistència al voltant del valor mig:

σ(R) =

Determineu l'error accidental amb un interval de confiança del 95%:

$$\epsilon_{acc}(95\%) = t_p(k-1)\frac{\sigma(R)}{\sqrt{k}} =$$

Grup de pràctiques: Data: / /

3. Els bacteris en un medi de cultiu sense condicions limitants es dupliquen amb una freqüència relativament constant. Això fa que un cultiu bacterià mantingut en condicions medials constants creixi seguint una llei funció del temps facilment representable. En aquest exercici s'ha de trobar la llei del creixement bacterià a partir de dades experimentals.

Existeixen diferents tècniques per valorar la concentració de bacteris (N) que tenim en cada instant de temps (t). En una mesura s'han obtingut les següents dades:

t (hores)	$N / 10^6$ (bact/ml)
2.83	3.17
4.03	4.84
5.51	7.86
8.56	30.10
11.50	109.30
15.01	311.26
17.32	1001.40

Realitzeu una gràfica N = f(t) (N a l'eix de les y i t al eix de les x).

Grup de pràctiques: Data: / /

Realitzeu una gràfica ln(N) = f(t).

Quins inconvenients i avantatges trobeu a cada representació?

Trobeu els paràmetres de la recta ln(N) = a + bt que millor s'ajusta als punts experimentals. Quina és la expressió matemàtica de la dependència del nombre de bacteris amb el temps?

Mesura	$X \equiv t$	$Y \equiv \ln(N)$	X^2	Y^2	$X \cdot Y$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
Sumes:					
Promitjos:					

$$b=\frac{\overline{XY}-\overline{X}\cdot\overline{Y}}{\overline{X^2}-\overline{X}^2}=$$

$$a=\overline{Y}-b\cdot\overline{X}=$$

$$r^2=\frac{\left(\overline{XY}-\overline{X}\ \overline{Y}\right)^2}{\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right)\left(\overline{Y^2}-\overline{Y}^2\right)}=$$

Quina conclusió podem extreure del valor del coeficient de correlació ?.

Càlcul d'Errors amb un intèrval de confiança del 95 % (considereu despreciable l'error instrumental):

$$\sigma(b)=b\cdot\sqrt{\frac{1}{k-2}\left(\frac{1}{r^2}-1\right)}=$$

$$\varepsilon_{ac}(b)=t_p(k-2)\frac{\sigma(b)}{\sqrt{k-2}}=$$

$$\sigma(a)=\sqrt{\overline{X^2}}\ \sigma(b)=$$

$$\varepsilon_{ac}(a)=t_p(k-2)\frac{\sigma(a)}{\sqrt{k-2}}=$$

El paper semilogarítmic facilita representacions de magnituds que tenen un marge molt ampli entre els valors numèrics dels seus extrems. En aquest paper les divisions en un dels eixos no són equidistants sino logarítmiques (per ex. hi ha la mateixa distància entre 0.1 i 1 que entre 1 i 10 ja que log(0.1) = -1, log(1) = 0 i log(10) = 1). Representeu sobre paper semilogarítmic N = f(t). Discutiu quina pot ser la utilitat del paper semilogarítmic.

Grup de pràctiques: 　　　　 Data: / /

Grup de pràctiques: | | Data: / /