Apunts de Càlcul
Tema 4. Funcions de dues variables

Lali Barrière, Josep M. Olm
Departament de Matemàtica Aplicada 4 - UPC

Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació
Enginyeria Telemàtica
EETAC

Continguts

4.1 Funcions de dues variables

Recordatori: funcions reals d'una variable real

- **Definició.** Una funció real d'una variable real és una funció que assigna a cada nombre real un nombre real:

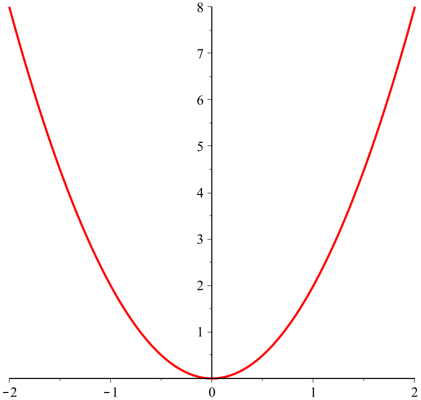
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

- L'expressió $y = f(x)$:
  1. Indica que la variable y depèn de la variable x segons la funció f.
  2. És l'equació (explícita) d'una corba del pla $\mathbb{R}^2$.
- La corba del pla associada a $f(x)$ és el conjunt de punts que satisfan $y = f(x)$, és a dir, els punts de la forma:

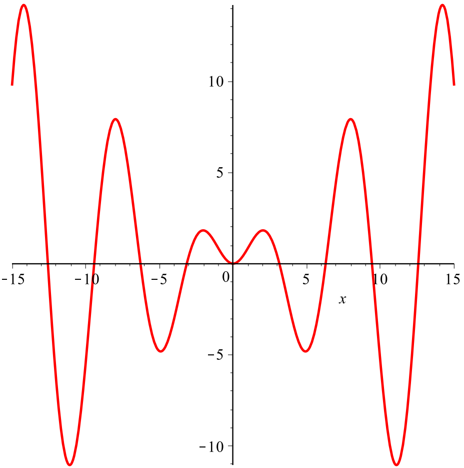
$$(x, y) = (x, f(x))$$

Observació. $f(x) = 2x^2$ i $y = 2x^2$ representen la mateixa funció.

Exemples



$$y = 2x^2$$



$$y = x \sin x$$

Funcions reals de dues variables reals

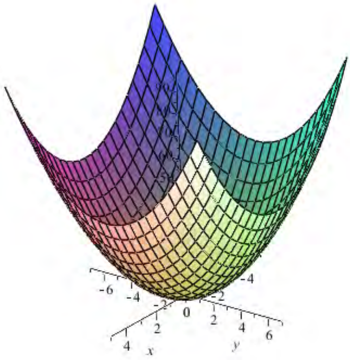
- **Definició.** Una funció real de dues variables reals és una funció que assigna a cada punt del pla un nombre real:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

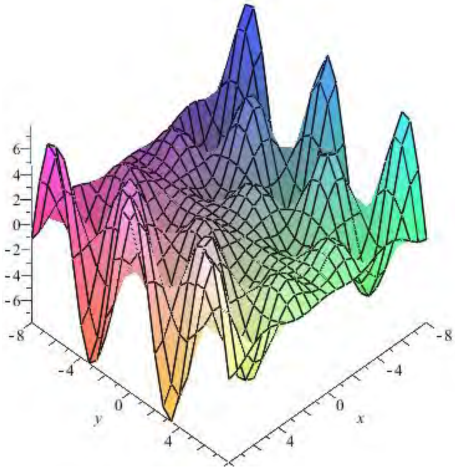
- L'expressió $z = f(x,y)$:
  1. Indica que la variable z depèn de les dues variables x i y segons la funció f.
  2. És l'equació (explícita) d'una superfície de l'espai $\mathbb{R}^3$.
- La superfície de l'espai associada a $f(x,y)$ és el conjunt de punts que satisfan $z = f(x,y)$, és a dir, els punts de la forma:
$$(x,y,z) = (x,y,f(x,y))$$

Observació. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ i $z = 2x^2 + y^2$ representen la mateixa funció.

Exemples



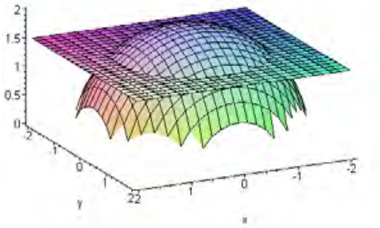
$$z = 2x^2 + y^2$$

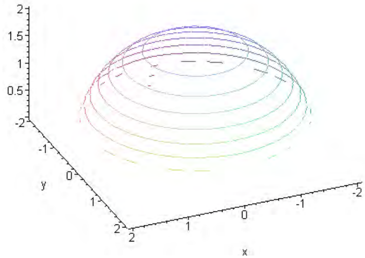


$$z = x \sin x \cos y$$

Corbes de nivell

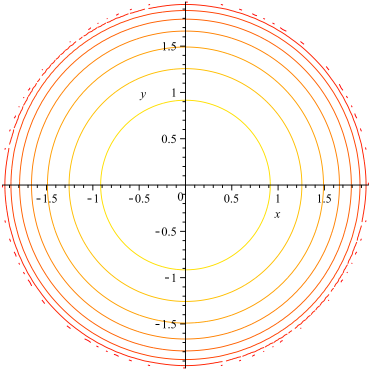
- **Definició.** La corba de nivell d'altura h de $z = f(x, y)$ és la corba intersecció de la superfície amb el pla horitzontal $z = h$, és a dir, la corba d'equació
$$f(x, y) = h$$
- **Observacions.**
  - El recorregut sobre una corba de nivell no puja ni baixa.
  - Les corbes de nivell es poden representar sobre la mateixa superfície o bé projectar-les sobre el pla XY.





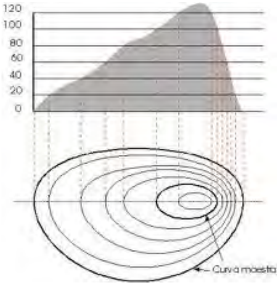
Mapa de contorn

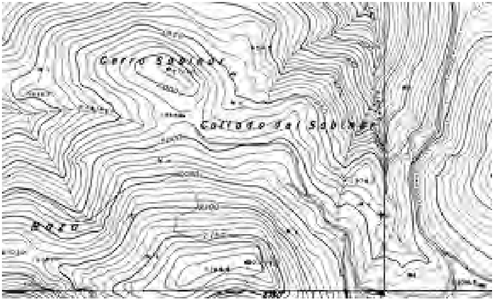
- **Definició.** El mapa de contorn de la superfície d'equació $z = f(x,y)$ és el conjunt de corbes de nivell d'altures equidistants $0, \pm h, \pm 2h, \ldots$, representades sobre el pla XY.
- La separació entre corbes dóna idea de la variació de la funció:
  - Poca separació $\longrightarrow$ variació ràpida.
  - Molta separació $\longrightarrow$ variació lenta.



Mapes de contorn: exemple 1

Mapes topogràfics

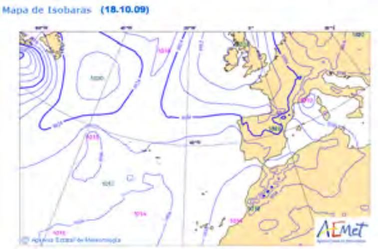




Mapes de contorn: exemple 2

Mapa d'isotermes

Mapa d'isòbares

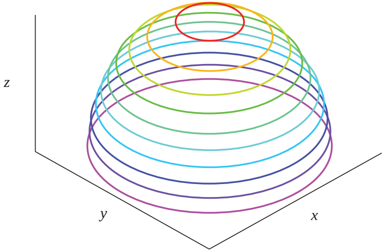


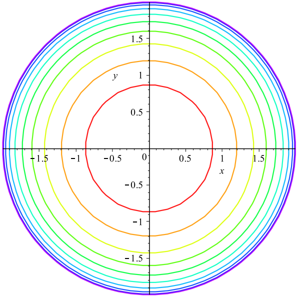
Exemple

Identificar les corbes de nivell i dibuixar el mapa de contorn de la superfície:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

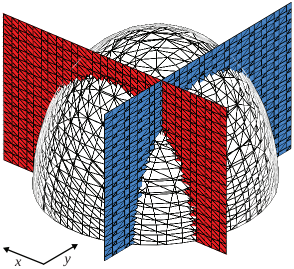
Fent z constant: $z = h \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 - h^2$
Corbes de nivell: circumferències amb centre $(0, 0)$, radi $\sqrt{4 - h^2}$, $h \in [0, 2]$.





Seccions

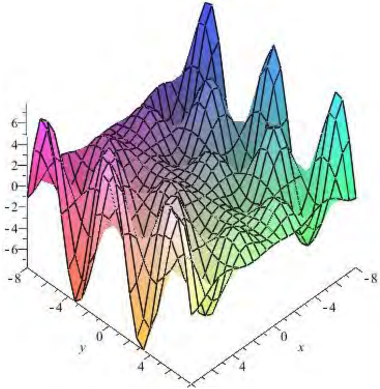
- Les seccions s'obtenen fent la intersecció de la superfície amb un pla.
- Les corbes de nivell són seccions per plans horitzontals.
- Les seccions per plans paral·lels donen información sobre la forma de la superfície.
  - Seccions paral·leles a YZ: $x = h \Longrightarrow z = f(h, y)$
  - Seccions paral·leles a XZ: $y = h \Longrightarrow z = f(x, h)$

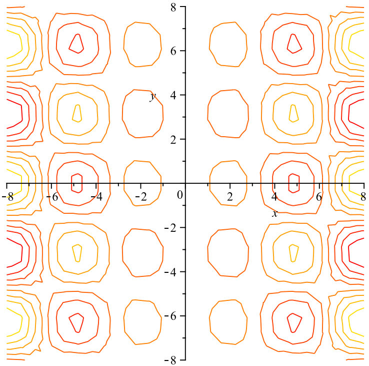


Exemple (I)

Considerem la superfície $z = x \sin x \cos y$.

- Gràfica i mapa de contorn:

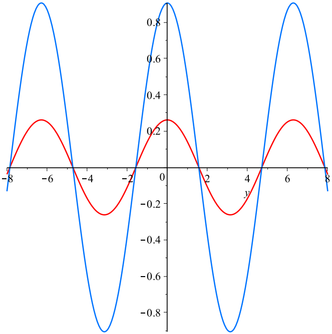




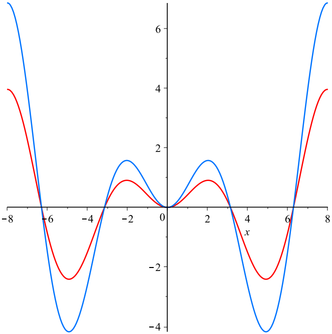
Exemple (II)

- Seccions: $z = x \sin x \cos y$

$$x = h \Rightarrow z = h \sin h \cos y = m \cos y$$
$$y = h \Rightarrow z = x \sin x \cos h = n\, x \sin x$$



$x = \frac{\pi}{6}$ $x = \frac{\pi}{3}$

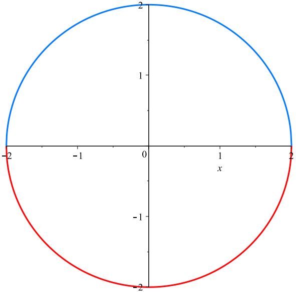


$y = \frac{\pi}{3}$ $y = \frac{\pi}{6}$

Equació implícita d'una superfície (I)

Funcions reals d'una variable real

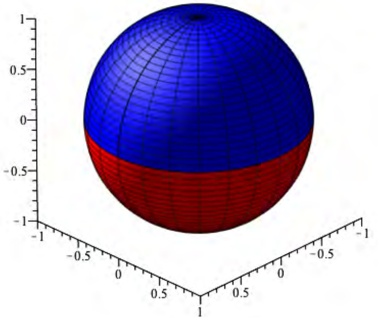
- Corba definida de manera explícita: $y = f(x)$.
- Corba definida de manera implícita: $F(x, y) = 0$.
- **Exemple:**
  - Forma implícita: $x^2 + y^2 = 4$
  - Formes explícites: $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = -\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$



Equació implícita d'una superfície (II)

Funcions reals de dues variables reals

- Superfície definida de manera explícita: $z = f(x, y)$.
- Superfície definida de manera implícita: $F(x, y, z) = 0$.
- **Exemple:**
  - Forma implícita: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
  - Formes explícites: $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$



Quàdriques

Recordatori. Còniques: corbes del pla definides implícitament per equacions polinòmiques de grau menor o igual que 2 en les variables x i y.

Quàdriques

Les quàdriques són superfícies de l'espai definides implícitament per equacions de la forma

$$F(x, y, z) = 0$$

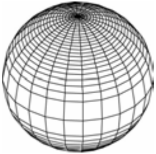
on $F(x, y, z)$ és un polinomi de grau menor o igual que 2 en les variables x, y i z.

Observació. Els plans són quàdriques, perquè la seva equació és polinòmica de grau 1 en x, y, z.

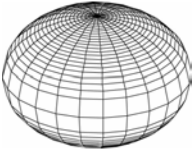
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Tipus de quàdriques (I)

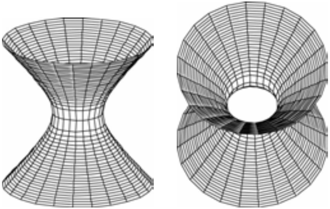
Permutacions en les variables donen lloc a canvis d'orientació!



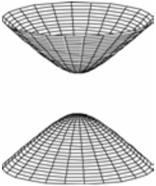
Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



El·lipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

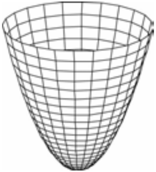


Hiperboloide d'un full: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

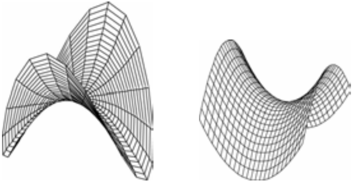


Hiperboloide de dos fulls: $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

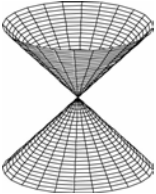
Tipus de quàdriques (II)



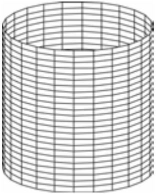
Paraboloide el·líptic: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



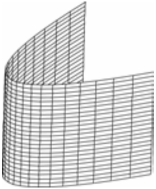
Paraboloide hiperbòlic: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Con: $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Cilindre: $x^2 + y^2 = R^2$



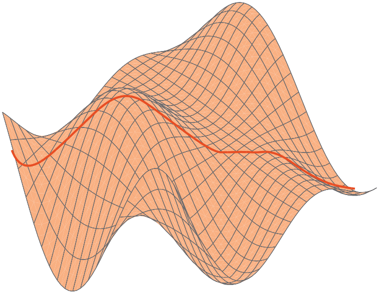
Cilindre parabòlic: $y = x^2$

En general un cilindre correspon a una equació en x, y, z, on falta una de les variables.

4.2 Derivació en dues variables

Idea: pendent d'una corba sobre la superfície

- Funcions d'una variable: la derivada d'una funció en un punt ens dóna el pendent de la corba en aquell punt.
- Un recorregut sobre la superfície ens donarà una corba (en l'espai) que, en cada punt, tindrà un cert pendent.
- En una superfície de l'espai, el pendent dependrà de la direcció.

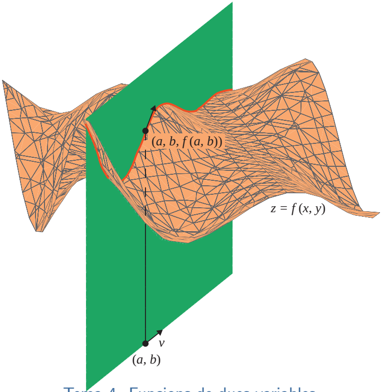


Derivades direccionals (I)

Definició La derivada direccional

- de la funció $z = f(x, y)$,
- en el punt (a, b),
- segons la direcció del vector $\vec{v}$,

és el pendent en el punt $(a, b, f(a, b))$, de la corba obtinguda al avançar sobre la superfície d'equació $z = f(x, y)$ seguint la direcció del vector $\vec{v}$.



Derivades direccionals (II)

Observacions

- El punt (a, b) és del pla XY, és a dir, el pla $z = 0$.
- El vector $\vec{v}$ ens indica una direcció sobre el pla XY.
- El punt $(a, b, f(a, b))$ és de la superfície $z = f(x, y)$.
- El recorregut obtingut és la corba donada per la intersecció de la superfície $z = f(x, y)$ amb el pla que conté:
  - la recta de vector director $\vec{v}$ que passa per (a, b), i
  - el punt $(a, b, f(a, b)$.

La superfície és el món on ens movem !!!

El pla XY és el mapa !!!

El vector $\vec{v}$ és la brúixola !!!

Càlcul de derivades direccionals (I)

- El vector $\vec{v}$ ha de ser unitari. Important!!!
  Es pot donar de dues maneres:
  - A partir d'un vector qualsevol, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, normalitzant: $\vec{v} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$.
  - A partir d'un angle θ: $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.
- L'equació de la recta del pla XY que ens indica la direcció del moviment és:

$$(x, y) = (a, b) + t(v_1, v_2), \quad t \in \mathbb{R}$$

- El recorregut corresponent sobre la superfície és:

$$z = f\left(a + tv_1, b + tv_2\right)$$

Per a $t = 0$, el punt corresponent és $(x, y, z) = (a, b, f(a, b))$.

Càlcul de derivades direccionals (II)

Definició. Donada la funció $f(x,y)$, el punt $(a,b) \in Dom\ f$ i el vector unitari $\vec{v} = (v_1, v_2)$, la derivada direccional de $f(x,y)$ en (a,b) segons la direcció donada per $\vec{v}$ és:

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(a + tv_1, b + tv_2\right) - f(a,b)}{t}$$

Exemple. Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = xy$ en $(1,2)$ segons la direcció del vector unitari $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 \cdot 2}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{2}t + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Derivada direccional: interpretació geomètrica

De manera anàloga al cas de funcions d'una variable (però no tan senzilla):

- $D_{\vec{v}}f(a,b)$ és el pendent de la recta tangent a $z = f(x,y)$ en $(a,b,f(a,b))$ segons la direcció donada per $\vec{v}$, és a dir,

$$D_{\vec{v}}f(a,b) = \tan\alpha$$

  on α és l'angle entre la recta tangent i el (vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, situat al) pla XY.

- $\vec{u} = (v_1, v_2, D_{\vec{v}}f(a,b))$ és un vector director de la RT:

$$\frac{D_{\vec{v}}f(a,b)}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{D_{\vec{v}}f(a,b)}{1} = D_{\vec{v}}f(a,b) = \tan\alpha$$

Derivades parcials

- Les derivades parcials són les derivades direccionals en les direccions dels eixos de coordenades x i y.
- **Definició.** Donada $f(x,y)$ i $(a,b) \in Dom\ f$, hi ha dues derivades parcials:
  1. Derivada parcial de f respecte de x en (a,b):
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = D_{(1,0)}f(a,b)$$
  2. Derivada parcial de f respecte de y en (a,b):
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = D_{(0,1)}f(a,b)$$

Observació

Si les derivades parcials de f existeixen i són contínues, no cal aplicar la definició de derivada direccional per a calcular-les:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es calcula derivant respecte de x i suposant y constant
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es calcula derivant respecte de y i suposant x constant

Exemple. Donada $f(x,y)=x^2y$, calcular les seves derivades parcials en el punt $(1,2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2xy\big|_{(1,2)} = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$$

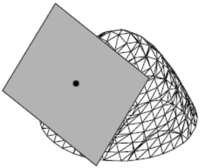
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = x^2\big|_{(1,2)} = (1)^2 = 1$$

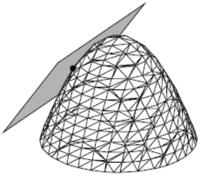
És el que es fa a la pràctica !!!

Pla tangent i recta normal

Idea: pendent de la superfície independent de la direcció

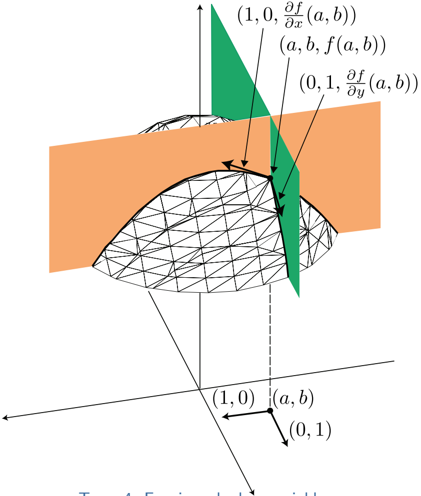
- Recordatori. La recta tangent a una corba en un punt mesura el pendent de la corba i, a la vegada, és la recta que millor aproxima la funció.
- De manera análoga, en alguns casos es pot pensar quin és el pla que millor aproxima una superfície en un punt. S'anomena pla tangent.
  - El pla tangent no sempre existeix.
  - Quan existeix, ens dóna una mesura del pendent de la superfície independent de la direcció.





Interpretació geomètrica de les derivades parcials

Els vectors $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$ i $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ són vectors directors de les rectes tangents a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(a, b, f(a,b))$ segons les direccions dels vectors $(1,0)$ i $(0,1)$, respectivament.



Equació del pla tangent a $z = f(x, y)$ en (a, b)

Si el pla tangent existeix:

- Passa pel punt $(a, b, f(a, b))$.
- Els vectors $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right)$ i $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ en són vectors directors.

Per tant, l'equació implícita del pla tangent a $z = f(x, y)$ en (a, b) és:

$$\begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-f(a,b) & \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = 0$$

És a dir:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

Exercici. Determinar l'equació del pla tangent a $z = xy + y^2$ en $(1, 2)$.

Existència del pla tangent

- En un punt d'una superfície, per tal que existeixi el pla tangent, les rectes tangents a la superfície:
  - Han d'existir totes, és a dir, en qualsevol direcció.
  - Han d'estar totes sobre un mateix pla.
- **Propietat.** Donada $f(x, y)$, és condició suficient per tal que existeixi el pla tangent a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ que les derivades parcial de f en (a, b) siguin contínues.
- **Exemple.** El pla tangent no existeix en el vèrtex d'un con.
  És a dir, no hi ha pla tangent en el punt $(0, 0, 0)$ de la superfície d'equació $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Equació de la recta normal a $z = f(x,y)$ en (a,b)

- La recta normal a $z = f(x,y)$ en (a,b) és la recta perpendicular al pla tangent a la funció en (a,b) que passa per $(a,b,f(a,b))$.
- L'equació del pla tangent ens proporciona:
  - un punt: $(a,b,f(a,b))$, i
  - un vector director: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$

  de la recta normal.
- Per tant, l'equació contínua de la recta normal a $z = f(x,y)$ en (a,b) és:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

- **Exercici.** Trobar l'equació de la recta normal a $z = xy + y^2$ en $(1,2)$.

Pla tangent i recta normal a una superfície donada implícitament (I)

Propietat. Considerem la superfície de $\mathbb{R}^3$ donada implícitament per l'equació $F(x, y, z) = 0$, i sigui (a, b, c) un punt d'aquesta superfície, això és, tal que $F(a, b, c) = 0$. Aleshores:

1. L'equació del pla tangent a $F(x, y, z) = 0$ en (a, b, c) és:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)\cdot(y-b)+\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\cdot(z-c)=0$$

2. L'equació de la recta normal a $F(x, y, z) = 0$ en (a, b, c) és:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)}=\frac{y-b}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)}=\frac{z-c}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)}$$

Pla tangent i recta normal a una superfície donada implícitament (II)

- Les expressions anteriors s'obtenen de les equacions corresponents a la forma explícita, escrivint $z = z(x, y)$, fent servir derivació implícita per a calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ a partir de $F(x, y, z) = 0$.
- **Propietat.** Sigui $y = y(x)$ definida implícitament per $F(x, y) = 0$. Aleshores,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

- **Exercici.** Donada $xy + y^2 = 0$, calcular y'.
- Donat que en el càlcul de derivades parcials es suposa una de les variables constant, podem usar la propietat anterior per a calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ a partir de $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

- **Exercici.** Justificar les expressions de les equacions del pla tangent i la recta normal a una superfíe de $\mathbb{R}^3$ definida implícitament a partir de les equacions corresponents al cas explícit.

Gradient d'una funció de dues variables

- **Definició.** Donada $f(x, y)$, el gradient de f en $(a, b) \in Dom\ f$, $\vec{\nabla} f(a, b)$, es defineix com:

$$\vec{\nabla} f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

- **Exercici.** Donada $f(x, y) = \sqrt{x^3 + 2y^2}$, calcular $\vec{\nabla} f(2, 1)$.
- **Propietat.** Sigui $f(x, y)$ amb derivades parcials contínues en (a, b), i sigui $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector unitari. Aleshores:

$$D_{\vec{v}} f(a, b) = \vec{\nabla} f(a, b) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot v_2$$

- **Exercici.** Donada $f(x, y) = 2x^2 y + xy^2$, calcular $D_{\vec{v}} f(3, 1)$, amb $\vec{v} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

El gradient permet simplificar el càlcul de les derivades direccionals.

Gradient d'una funció de dues variables (II)

Observació

- El vector $(v_1, v_2, D_{\vec{v}} f(a,b))$ pertany al pla tangent.
- Per tant, es pot escriure com a combinació lineal dels vectors $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$ i $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.
- S'obté:
  $(v_1, v_2, D_{\vec{v}} f(a,b)) = \alpha \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) + \beta \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) =$
  $= \left(\alpha, \beta, \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$
  De les dues primeres coordenades, és clar que $\alpha = v_1$, $\beta = v_2$.
- La tercera coordenada, amb $\alpha = v_1$, $\beta = v_2$, ens dóna l'expressió de les derivades direccionals en funció del gradient:
  $D_{\vec{v}} f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot v_2$

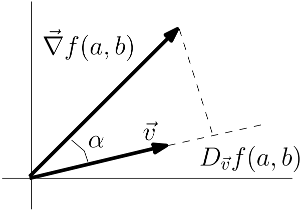
Propietats del gradient (I)

- El gradient és un vector del pla XY:
  - Ens indica, per tant, una direcció en el mapa.
  - A més, com veurem, el seu mòdul ens dóna informació sobre el pendent de la superfície en el punt.
- Per les propietats del producte escalar de vectors:

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{v} = \|\vec{\nabla} f(a,b)\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\alpha = \|\vec{\nabla} f(a,b)\| \cdot \cos\alpha$$

on $\alpha = \angle\left(\vec{\nabla} f(a,b), \vec{v}\right)$ és un angle entre 0 i π.

- $D_{\vec{v}} f(a,b)$ és la projecció ortogonal de $\vec{\nabla} f(a,b)$ sobre $\vec{v}$ (és un valor numèric!)



Propietats del gradient (II)

- Com que $\cos\alpha \in [-1,1]$

$$-\|\vec{\nabla} f(a,b)\| \leq D_{\vec{v}} f(a,b) \leq \|\vec{\nabla} f(a,b)\|$$

sigui quin sigui el vector unitari $\vec{v}$.

- Casos particulars:

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = \begin{cases} \|\vec{\nabla} f(a,b)\| & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \\ 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \\ -\|\vec{\nabla} f(a,b)\| & \Leftrightarrow \quad \alpha = \pi \end{cases}$$

- **Exercici.** Comprovar que $\|\vec{\nabla} f(a,b)\|$ és el pendent de l'angle format pel pla tangent a f en (a,b) amb el pla XY.

Propietats del gradient (III)

1. $\|\vec{\nabla} f(a,b)\|$ indica el valor màxim que pot assolir $D_{\vec{v}} f(a,b)$, és a dir, el pendent màxim. També se l'anomena raó de màxim creixement de f en (a,b).

2. $\vec{\nabla} f(a,b)$ indica la direcció (i sentit) de màxim creixement de f en (a,b), perquè en aquest cas tenim que $\alpha = 0$.

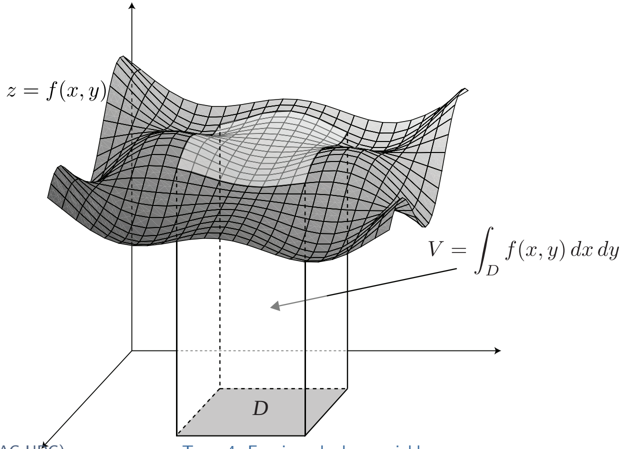
3. Equivalentment, $-\|\vec{\nabla} f(a,b)\|$ i $-\vec{\nabla} f(a,b)$ indiquen el valor mínim de $D_{\vec{v}} f(a,b)$ i la direcció (i sentit) de màxim decreixement de f en (a,b), respectivament.

4. $\vec{\nabla} f(a,b)$ és perpendicular a (la recta tangent a) les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ en (a,b). Si $\vec{v}$ és un vector unitari en la direcció tangent a la corba de nivell, llavors $D_{\vec{v}} f(a,b) = 0$ i, per tant,$\vec{\nabla} f(a,b) \perp \vec{v}$.

4.3 Integració en dues variables

Integrals definides en dues variables

Definició. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$ i un recinte $D \subseteq \mathbb{R}^2$, amb $f(x, y) \geq 0$ per a $(x, y) \in D$. La integral definida de f sobre D es defineix com el volum de la regió de l'espai entre el pla XY i la superfície $z = f(x, y)$ per sobre de D.



Observacions

- La integral definida d'una funció negativa $z = f(x,y)$ sobre un recinte $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es defineix equivalentment i té signe negatiu.
- Si f no manté el signe constant en D, aleshores el resultat de la integral sobre D ja no és un volum.
- La integral doble d'una funció sobre un recinte podria no existir. No es demana tenir en compte els problemes d'existència o no existència de les integrals, en aquest curs.
- Les integrals de funcions de dues variables es calculen fent dues integrals en una variable. És per això que també s'anomenen integrals dobles.
- Els límits d'integració d'una integral doble han de descriure el recinte d'integració on es calcula la integral. Aquesta és la principal dificultat associada al càlcul d'integrals dobles.

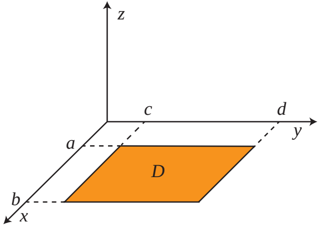
Intervals de $\mathbb{R}^2$

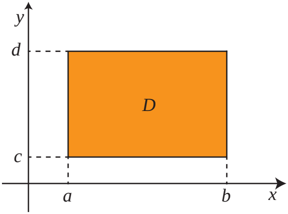
Un interval del pla és un recinte D de la forma:

$$D = [a,b] \times [c,d] \text{ és a dir } (x,y) \in D \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

En la representació gràfica del recinte:

- inclourem l'eix Z, si necessitem veure punts de l'espai,
- o representarem només el pla XY, si només volem fixar-nos en el recinte D.

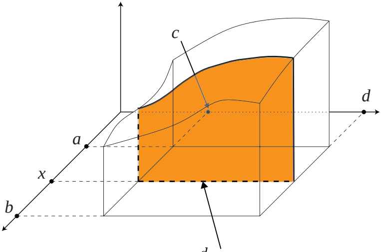




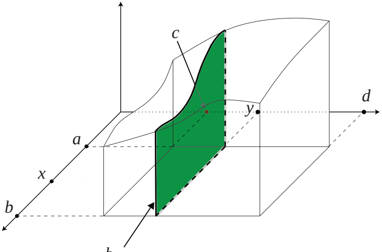
Les integrals sobre intervals són les més senzilles de calcular.

Integrals sobre intervals (I)

- El volum és la integral de l'àrea de les seccions per plans verticals paral·lels, seguint la direcció de l'eix X o la de l'eix Y.
- L'àrea és una funció d'una de les dues variables:
  - Fent secció per plans en la direcció de l'eix y, l'àrea depèn de x.
  - Fent secció per plans en la direcció de l'eix x, l'àrea depèn de y.

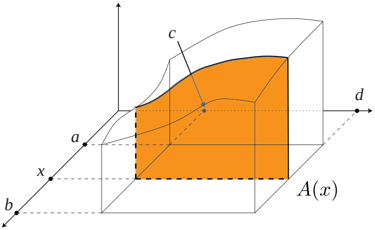


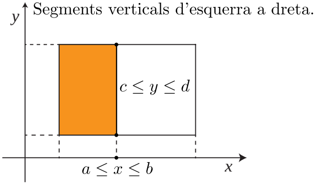
$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$



$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

1. Seccions per plans paral·lels a l'eix y

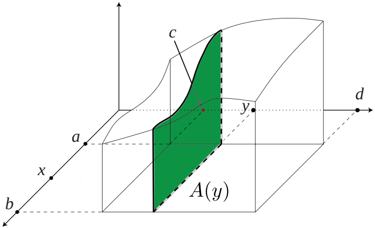


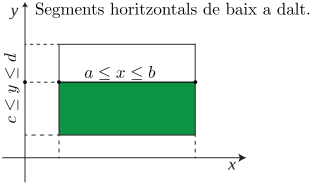


$$V = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A(x)\,dx \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

- La primera integral (la de dins) es resol suposant x constant.
- El resultat depèn de x, i no conté y.
- Els límits d'integració ens diuen: $a \leq x \leq b$ i $c \leq y \leq d$.
- L'ordre de les integrals ens indica de quina manera hem cobert tots els punts del recinte.

2. Seccions per plans paral·lels a l'eix x





$$V = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy$$

- La primera integral (la de dins) es resol suposant y constant.
- El resultat depèn de y, i no conté x.
- Els límits d'integració ens diuen: $c \leq y \leq d$ i $a \leq x \leq b$.
- L'ordre de les integrals ens indica de quina manera hem cobert tots els punts del recinte.

Integrals sobre intervals (II)

- **Propietat.** Si $D = [a,b] \times [c,d]$

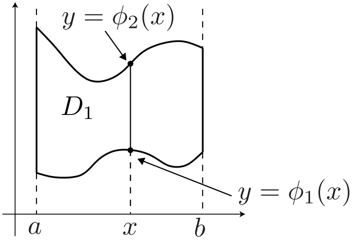
$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x=ct,y)dy\right) dx \\ &= \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y=ct)dx\right) dy\end{aligned}$$

- **Propietat.** Si $D = [a,b] \times [c,d]$ i $f(x,y) = g(x)h(y)$, aleshores

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Cal anar molt en compte en aplicar aquesta propietat!!!

Recintes elementals d'integració: tipus 1

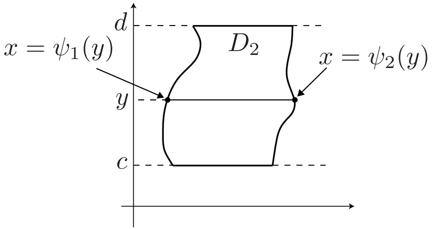


$$(x, y) \in D_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \end{array} \right.$$

Aleshores:

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Recintes elementals d'integració: tipus 2



$$(x, y) \in D_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \end{cases}$$

Aleshores:

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Observacions

- Hi ha recintes que són a la vegada de tipus 1 i de tipus 2.
- Integració en recintes no elementals: si un recinte D es pot escriure com $D = D_1 \cup D_2$, de tal manera que $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ o bé només es toquen a la frontera, aleshores

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)dx\,dy$$

- Quan s'integra sobre un interval es poden calcular les integrals en qualsevol dels dos ordres:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Quan el recinte no és un interval cal anar amb compte!!!

Aplicacions al càlcul d'àrees i volums

- Àrea d'un recinte
  Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$. Aleshores:

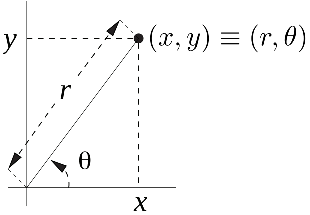
$$\text{Àrea } (D) = \iint_D 1 \cdot dx\, dy \quad u^2$$

- Volum entre dues superfícies
  Sigui $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i les superfícies $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$, amb $f(x, y) \geq g(x, y)$, $\forall\ (x, y) \in D$, o bé $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall\ (x, y) \in D$.
  Aleshores, el volum entre f i g sobre D vé donat per:

$$V = \left| \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dx\, dy \right| \quad u^3$$

Cal assegurar-se que $f(x, y) - g(x, y)$ no canvia de signe!!!

Coordenades cartesianes i coordenades polars



$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \ (+\pi \text{ si } x < 0) \end{array} \right\}$$

Podem expressar corbes del pla tant en cartesianes com en polars:

$$F(x,y) = 0 \iff F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 \iff G(r,\theta) = 0$$

$$G(r,\theta) = 0 \iff G(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = 0 \iff F(x,y) = 0$$

Funcions de dues variables en polars: coordenades cilíndriques

- Donada la funció $f(x, y)$, és clar que:

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta)$$

- D'aquesta manera: $z = f(x, y) \Longrightarrow z = g(r, \theta)$
- Les coordenades cilíndriques, (r, θ, z) són les coordenades de l'espai obtingudes afegint z a les coordenades polars:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) (+\pi \text{ si } x < 0) \\ z = z \end{array}\right\}$$

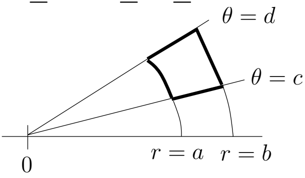
Càlcul d'integrals dobles en coordenades polars

- Si D ve donat en coordenades polars, i f és una funció de r i θ:

$$\int\int_D f(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

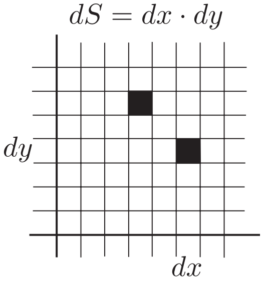
es calcula de la mateixa manera que les integrals dobles en coordenades cartesianes.

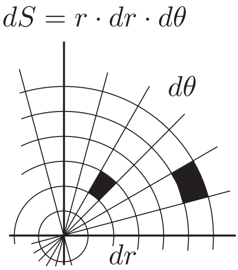
- En la integral $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(r,\theta)\,d\theta\,dr$ el recinte és el conjunt de punts que compleixen $a \le r \le b$ i $c \le \theta \le d$:



Però ...

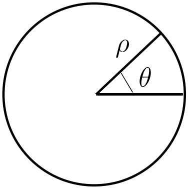
Canvi de cartesianes a polars en integrals dobles (I)

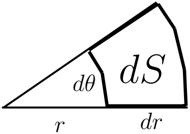




- Un canvi de coordenades en una integrals en dues variables és equivalent a un canvi de variable en una integral d'una variable.
- Igual que en una variable, el canvi de coordenades afecta també al diferencial.

El diferencial de superfície en coordenades polars





- Àrea d'un sector circular de radi ρ i angle θ:

$$A = \frac{1}{2}\rho^2\theta$$

- Per tant:

$$dS = \frac{1}{2}\left(r + dr\right)^2 d\theta - \frac{1}{2}r^2 d\theta \approx r dr d\theta$$

Canvi de cartesianes a polars en integrals dobles (II)

- Si D_C representa un recinte en coordenades cartesianes D_P el mateix recinte en coordenades polars, aleshores:

$$\iint_{D_C} f(x,y)dx\,dy = \iint_{D_P} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r \cdot dr\,d\theta$$

- Així, per al càlcul d'àrees tenim que:

$$\text{Àrea}(D) = \iint_{D_P} r \cdot dr\,d\theta \quad u^2$$

- D'altra banda, el volum entre $z=0$ i $z=g(r,\theta)\geq 0$ per sobre de D_P és:

$$V = \iint_{D_P} g(r,\theta)\cdot r \cdot dr\,d\theta \quad u^3$$