Apunts de Càlcul
Tema 2. Derivació de funcions d'una variable

Lali Barrière, Josep M. Olm
Departament de Matemàtica Aplicada 4 - UPC

Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació
Enginyeria Telemàtica
EETAC

Continguts

2.1 Concepte de derivada

2.2 Càlcul de derivades

2.3 Rectes tangent i normal

2.4 El criteri de l'Hôpital

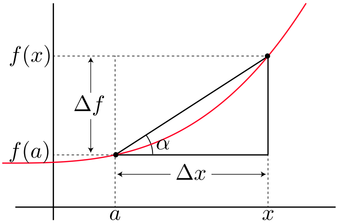
2.5 Extrems d'una funció

2.6 Problemes d'optimització

Raó de canvi d'una funció

- Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real, que solem notar com $y = f(x)$, definida en un interval. Siguin $x, a \in I$.
- L'increment experimentat per f entre a i x és: $\Delta f = f(x) - f(a)$
- La raó de canvi (o taxa de variació) de f entre a i x es defineix com:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



- **Observació.** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan \alpha$. Això vol dir que $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ coincideix amb el pendent de la recta que uneix $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$.

Definició de derivada

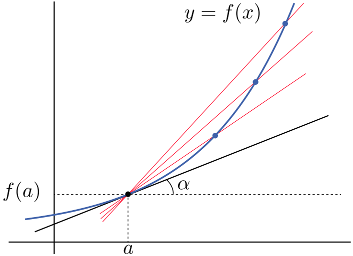
Definició. Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un interval obert.

- La funció f és derivable en a si existeix el límit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si f és derivable en a, la derivada de f en a, es defineix com:

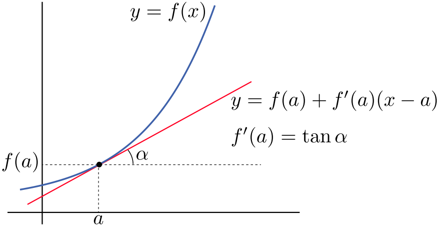
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



La derivada d'una funció en un punt és un nombre real.

Derivada i recta tangent a la corba

- Si f és derivable en a, $f'(a) = \tan\alpha$, on α és l'angle que forma la recta tangent a la gràfica de la funció en a amb el semieix horitzontal positiu.
- Per tant, $f'(a)$ coincideix amb el pendent de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$.
- L'equació de la recta tangent a f en el punt d'abscissa $x = a$ és, per tant, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.



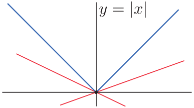
Definició de derivada: exemples (I)

- Donada $f(x) = x^2$, calcular $f'(1)$:

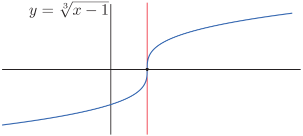
$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

- La funció $y = |x|$ no és derivable en 0 perquè

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$



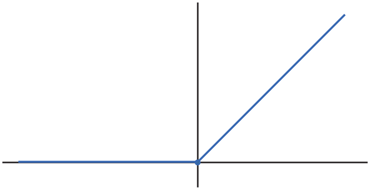
- La funció $y = \sqrt[3]{x-1}$ no és derivable en 1 perquè $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty$



Definició de derivada: exemples (II)

- La funció $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ és contínua però no derivable en 0.

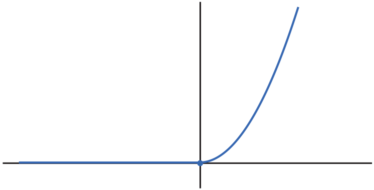
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$



Definició de derivada: exemples (III)

- La funció $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ x^2, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ és contínua i derivable en 0.

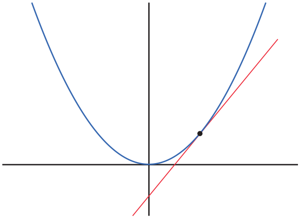
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

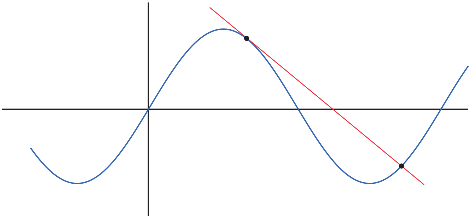


De fet, és derivable a tot $\mathbb{R}$.

El concepte de tangència és local (I)

La recta tangent a la gràfica d'una funció en un punt és la recta que millor aproxima la funció en aquest punt.





El concepte de tangència és local, i ens diu que, en un entorn del punt, la recta i la funció són molt properes.

El concepte de tangència és local (II)

Què vol dir que una recta aproxima la funció en el punt a?

La diferència entre la recta i la funció, en un entorn del punt a, és petita.

1. La recta passa pel punt $(a, f(a))$. Per tant, l'equació de la recta és $r(x) = f(a) + m(x - a)$, on m és el pendent, i es compleix:

$$f(a) = r(a)$$

   Això implica $\lim_{x\to a} f(x) - r(x) = 0$ (si f és contínua en a).

2. La recta i la funció són tangents si, a més, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - r(x)}{x - a} = 0$.

   Amb $r(x)$ de pendent m es té:
   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) + m(x - a)}{x - a} =$$
   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{m(x - a)}{x - a} = f'(a) - m$$
   I el límit val 0 quan $m = f'(a)$ (si f és derivable en a).

Funció derivada

Definició. Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un interval obert.

- Diem que f és derivable en I si $\exists f'(a)$, $\forall a \in I$.
- La funció derivada de f és la funció

$$\begin{array}{cccc} f': & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ la derivada de f en x, $f'(x)$, si existeix.

La funció $f'(x)$ es pot calcular a partir de la definició de derivada.

Exemple. Calcular la funció derivada de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Funció derivada: exemples

- Calcular la derivada de la funció $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

  Ja hem vist que f no és derivable en 0. La derivada de f és la funció $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ que no està definida en $x = 0$.

- Calcular al derivada de la funció $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

  Ja hem vist que f és derivable en 0 i $f'(0) = 0$.

  La derivada de f és la funció $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Propietats de la derivada

- Les derivades de funcions elementals es calculen a partir de la definició de derivada.
  A la pràctica, utilitzarem una TAULA DE DERIVADES.
- Per a la resta de funcions, s'apliquen les propietats que donem a continuació.

Propietats. Siguin f i g funcions derivables. Aleshores:

P1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

P2. $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

P3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

P4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

En alguns casos s'haurà d'estudiar l'existència de la derivada en alguns punts.

Propietats de la derivada

Exemple. Calcular la derivada de $f(x) = x \cdot |x|$.
La funció és derivable en $x \neq 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x > 0 \\ -2x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, hem d'aplicar la definició de derivada per veure si f és derivable i, en cas que sí, trobar $f'(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -h = 0 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(0) \text{ i } f'(0) = 0$$

Per tant, $f'(x) = |2x|$, i està definida a tot $\mathbb{R}$.

Derivades d'ordre superior

- Es tracta d'anar derivant successivament. Així obtenim les derivades primera, segona, tercera...
- **Exemple.** Trobar $f'''(x)$ per a $f(x) = x^5$.

$$f'(x) = \left(x^5\right)' = 5x^4$$
$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = \left(5x^4\right)' = 20x^3$$
$$f'''(x) = \left[f''(x)\right]' = \left(20x^3\right)' = 60x^2$$

- **Definició.** Diem que una funció és de classe $\mathcal{C}^n$ si és derivable n vegades i la seva derivada n-èsima és contínua.
- **Notació.** Denotem per $f^{n)}(x)$ o bé $f^{(n)}(x)$ a derivada n-èsima de f.

Derivades d'ordre superior

- $f(x) = |x|$ és de classe $\mathcal{C}^0$ (que també notem $\mathcal{C}$).
- $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right\}$ és de classe $\mathcal{C}^1$.
- $f(x) = e^x$ és de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Un polinomi $p(x)$ de grau n és de classe $\mathcal{C}^\infty$ i compleix $p^{(n+1)} = p^{(n+2)} = \cdots = 0$.

Exemple

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1 \Rightarrow \begin{cases} p'(x) = 3x^2 - 8x + 1 \\ p''(x) = 6x - 8 \\ p'''(x) = 6 \\ p^{(4)}(x) = p^{(5)}(x) = p^{(6)}(x) = \cdots = 0 \end{cases}$$

Derivades d'ordre superior

- **Exemple.** Calcular la derivada n-èsima de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^{-1} \\ f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\ f'''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{3 \cdot 2}{x^4} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

Regla de la cadena (I)

- **Definició.** Donades les funcions f i g, la funció tal que

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

rep el nom de funció composta de f i de g, i es representa:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- **Exemple.** Siguin $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$. Aleshores:

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(x) & = & g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x \\ (f \circ g)(x) & = & f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2) \end{array}$$

- Notem que, en general, $g \circ f \neq f \circ g$.

La regla de la cadena ens proporciona una expressió per calcular les derivades de funcions compostes.

Regla de la cadena (II)

- **Propietat.** Donades les funcions f i g, la derivada de la funció $g \circ f$ es calcula com:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- **Exemple.** Calcular $[\sin^2 x]'$.

Observem que: $\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ g(x) = x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (g \circ f)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x.$

Derivant g i f:

$$\begin{array}{l} g'(x) = (x^2)' = 2x \Longrightarrow g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2\sin x \\ f'(x) = (\sin x)' = \cos x \end{array}$$

Per tant: $[\sin^2 x]' = g'(f(x))\, f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$

A la pràctica ho fem directament:

$$[\sin^2 x]' = 2\sin x \cdot [\sin x]' = 2\sin x \cos x$$

La funció inversa (I)

- **Definició.** Donada una funció f, la funció inversa de f, que notem f^{-1}, és la que compleix

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

és a dir:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

- Per tant:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

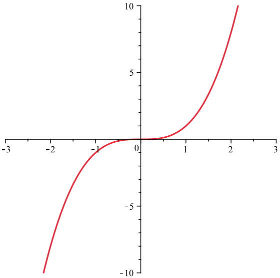
$$\mathbb{R} \xleftarrow[f^{-1}]{} \mathbb{R}$$

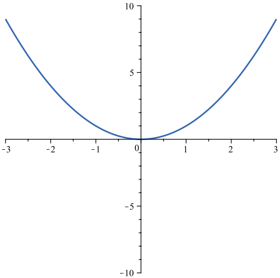
- **Exemple.**

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & \ln x \\ f^{-1}(x) & = & e^x \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f\left(f^{-1}(x)\right) = f(e^x) = \ln\left(e^x\right) = x \\ f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\ln x\right) = e^{\ln x} = x \end{array}\right.$$

La funció inversa (II)

- Una funció només té inversa si és bijectiva, és a dir, si la correspondència entre domini i imatge és un a un.





- **Exemple.** $f(x) = x^3$: bijectiva a $\mathbb{R} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ a $\mathbb{R}$.
- **Exemple.** Sigui $f(x) = x^2$:
  (i) no bijectiva a $\mathbb{R} \Longrightarrow \nexists\ f^{-1}(x)$ a $\mathbb{R}$
  (ii) bijectiva a $[0, +\infty) \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ a $[0, +\infty)$
  (iii) bijectiva a $(-\infty, 0] \Longrightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ a $(-\infty, 0]$

Obtenció de la funció inversa

Exemple. Trobar la inversa de $f(x) = 2x + 1$

1. Escrivim $y = f(x)$:
$$y = 2x + 1$$
2. Intercanviem x i y:
$$x = 2y + 1$$
3. Aïllem y:
$$y = \frac{x-1}{2}$$
4. Escrivim $f^{-1}(x) = y$:
$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Comprovem:
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\frac{x-1}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$$

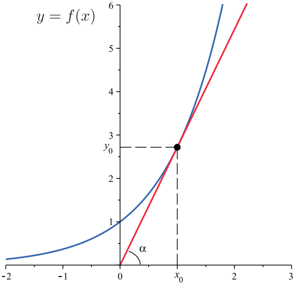
Recordem que les gràfiques de dues funcions inverses una de l'altra són simètriques respecte de la bisectriu del primer quadrant.

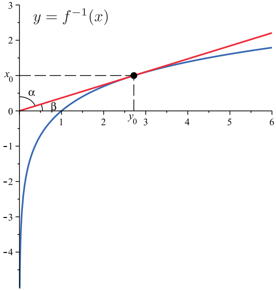
Derivada de la funció inversa (I)

- **Teorema.** Sigui $y = f(x)$ derivable en x_0, amb $f'(x_0) \neq 0$. Aleshores $f^{-1}(x)$ existeix i és derivable en $y_0 = f(x_0)$, i

$$\left[f^{-1}\right]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Gràficament:





Aquest resultat és conseqüència de $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ i la regla de la cadena.

Derivada de la funció inversa (II)

- De fet,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \tan\alpha \\ \left[f^{-1}\right]'(y_0) &= \tan\beta \end{aligned} \qquad \text{i} \quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

  i, per tant,

$$f'(x_0)\left[f^{-1}\right]'(y_0) = \tan\alpha\cdot\tan\beta = 1$$

- **Exemple.** Calcular $[\ln x]'$.

  Sabem que si $f(x)=e^x$, aleshores $f^{-1}(x)=\ln x$. Es tracta, doncs, de calcular $\left[f^{-1}\right]'(x)$.

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ y_0 = f(x_0) &= e^{x_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\ln y_0]' = [\ln e^{x_0}]' = \tfrac{1}{e^{x_0}},\ \forall x_0\in\mathbb{R}$$

  Fent el canvi $x=e^{x_0}$ tenim: $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$.

Derivada de la funció inversa (III)

Exemple. Calcular la derivada de la funció $y = \arctan x$.

Sabem que si $f(x) = \tan x$, aleshores f és bijectiva en l'interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, i $f^{-1}(x) = \arctan x$. Es tracta, doncs, de calcular $\left[f^{-1}\right]'(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ y_0 = f(x_0) = \tan x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$[\arctan y_0]' = [\arctan(\tan x_0)]' = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0}, \ \forall x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Fent el canvi $x = y_0 = \tan x_0$ tenim: $[\arctan x]' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Derivació implícita

- Una funció implícita és una funció definida per una equació en la qual la variable dependent, y, no està aïllada respecte de x. Se sol escriure:

$$F(x, y) = 0$$

- Per derivar implícitament procedim normalment, derivant els termes a dreta i esquerra de la igualtat, però usant la regla de la cadena per als termes dependents de y.
- Per conèixer un punt d'una funció donada implícitament calen les dues coordenades (a, b), que han de complir l'equació. (Ha de ser un punt de la corba.)
  Recordem que en les funcions explícites, per a un valor $x = a \in Dom\ (f)$ tenim el punt $(a, f(a))$.
- La derivada d'una funció donada implícitament depèn de les dues variables, $y'(x, y)$.

Derivació implícita: observacions

- La derivada implícita ens permet calcular la derivada de funcions donades implícitament quan:
  - En aïllar y en funció de x, $y(x)$, trobem expressions més complicades que la forma implícita.
    Exemple. $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
  - O bé, no es pot aïllar y en funció de x.
    Exemple $e^{x+y^2} = 2x - y$
- Sempre s'ha de comprovar que el punt en el qual es vol calcular la derivada és de la corba.
- Derivades d'algunes expressions:

$$\begin{array}{lccccc}
\textbf{Funció} & x & y & x^2 & y^2 & x \cdot y \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\textbf{Derivada} & 1 & y' & 2x & 2y \cdot y' & 1 \cdot y + x \cdot y'
\end{array}$$

Derivació implícita: exemples

- Calcular $y'(2,1)$ per a la funció definida implícitament per
$$x^2 + y^2 - 2x = 1$$

  1. Comprovem que el punt és de la corba:
     SÍ, perquè satisfà l'equació, $2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 = 1$.
  2. Derivem implícitament: $2x + 2y \cdot y' - 2 = 0$.
  3. Substituïm (x, y) per $(2, 1)$: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot y' - 2 = 0$.
  4. Aïllem y': $4 + 2y' - 2 = 0 \Rightarrow y'(2,1) = -1$.

  La derivada en un punt és un nombre real.

- Calcular y' per a la funció definida implícitament per
$$x^2 + y^2 - 2x = 1$$

  1. Derivem implícitament: $2x + 2y \cdot y' - 2 = 0$.
  2. Aïllem y': $y'(x, y) = \dfrac{1 - x}{y}$.

  La derivada és una funció de x i y. El punt (x, y) ha de ser de la corba.

Derivació logarítmica

Objectiu. Calcular la derivada de $y = (f(x))^{g(x)}$.

1. Apliquem logaritmes:

$$\ln y = \ln (f(x))^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

2. Derivem implícitament:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

3. Aïllem y':

$$y' = y \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

4. Substituïm y:

$$y' = (f(x))^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

Derivació logarítmica: exemple

Calcular, usant derivació logarítmica, la derivada de

$$y = e^{e^x}$$

1. Apliquem logaritmes:

$$\ln y = \ln e^{e^x} = e^x \ln e = e^x$$

2. Derivem implícitament:

$$\frac{y'}{y} = e^x$$

3. Aïllem y':

$$y' = ye^x$$

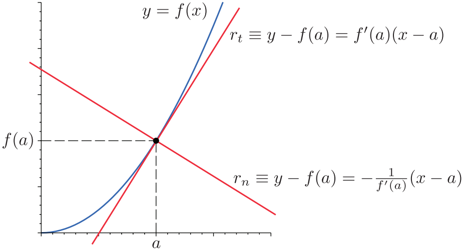
4. Substituïm y:

$$y' = e^{e^x} e^x = e^{x+e^x}$$

Rectes tangent i normal (I)

Forma explícita. Sigui $y = f(x)$ derivable en a:

1. Recta tangent en el punt a: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
2. Recta normal en el punt a: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$.



Nota. Recordem que la recta tangent és la recta que millor aproxima $f(x)$ en un entorn del punt $(a, f(a))$.

Rectes tangent i normal (II)

Forma implícita. Una equació $F(x, y) = 0$ defineix implícitament una corba del pla. Un punt (a, b) que satisfà $F(a, b) = 0$ és un punt de la corba. Si la corba és derivable en (a, b):

1. Recta tangent a la corba en el punt (a, b): $y - b = y'(a, b)(x - a)$.
2. Recta normal a la corba en el punt (a, b): $y - b = -\frac{1}{y'(a,b)}(x - a)$.

Exemple. Calcular les equacions de les rectes tangent i normal a la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 2x = 1$ en el punt $(2, 1)$.

- Derivant i substituint:
  $2x + 2y \cdot y' - 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot y'(2, 1) - 2 = 0 \Rightarrow y'(2, 1) = -1$
- R_T: $y - 1 = -1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 3$
- R_N: $y - 1 = -\dfrac{1}{-1}(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1$

Rectes tangent i normal (III)

Exemple. Trobar les rectes tangent i normal a $x^2 - y^2 = 7$ en el punt $(4, -3)$.

1. Comprovem que el punt és de la corba: $4^2 - (-3^2) = 16 - 9 = 7$. SÍ!
2. Calculem $y'(4, -3)$

$$x^2 - y^2 = 7 \Longrightarrow 2x - 2yy' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{x}{y} \Longrightarrow y'(4, -3) = -\frac{4}{3}$$

3. Recta tangent:

$$y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

4. Recta normal:

$$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 4) \Longleftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 6$$

Indeterminacions de la forma $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$

El criteri de l'Hôpital permet calcular límits que per substitució donen lloc a indeterminacions de la forma $\frac{0}{0}$ o bé $\frac{\infty}{\infty}$.

- **Teorema.** Siguin $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb I interval obert que conté a. Aleshores:

$$\text{Si existeix } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ i } \left\{ \begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 & \text{i} & \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ \text{o bé} & & \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty & \text{i} & \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \end{array} \right\}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- El resultat val per $a = \pm\infty$, i també per al càlcul de límits laterals.
- Abans d'aplicar el criteri de l'Hôpital per resoldre una indeterminació d'aquest tipus, provarem de fer-ho simplificant. En particular, no cal aplicar el criteri per calcular límits de funcions racionals quan $x \to \infty$.

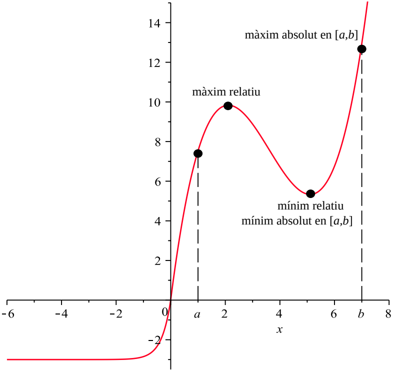
Les indeterminacions de la forma $0 \cdot \infty$ es transformen en $\dfrac{0}{0}$ o bé $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Criteri de l'Hôpital: exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \Rightarrow$ Apliquem el criteri de l'Hôpital:
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[x]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) \Rightarrow$ Transformem la funció en un quocient:
  $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \Rightarrow \text{Apliquem el criteri de l'Hôpital:}$$
  $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ Apliquem el criteri de l'Hôpital:
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Extrems absoluts i relatius (I)

- **Objectiu.** Estudiar com determinar els punts en els quals una funció assoleix valors extrems, és a dir, valors màxims o valors mínims.
- Extrems absoluts (EA): valors màxims i/o mínims assolits en un interval determinat.
- Extrems relatius (ER): valors màxims i/o mínims assolits localment, això és, en relació amb els valors del voltant.

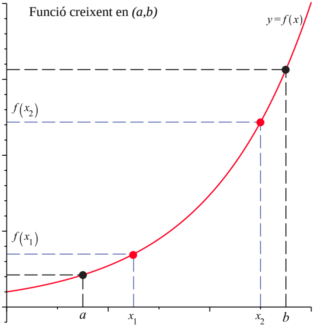


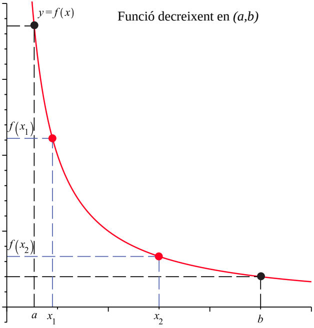
Extrems absoluts i relatius (II)

- **Definició.** Sigui f una funció i sigui I un subconjunt del seu domini, i.e. $I \subseteq Dom\ (f)$. Diem que f té un:
  (i) Màxim absolut en $x_0 \in I$ si i només si
  $$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I$$
  (ii) Mínim absolut en $x_0 \in I$ si i només si
  $$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in I$$
- **Definició.** Diem que una funció f té un:
  (i) Màxim relatiu en $x_0 \in Dom\ (f)$ si i només si $\exists\ \epsilon > 0$ tal que
  $$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$
  (ii) Mínim relatiu en $x_0 \in Dom\ (f)$ si i només si $\exists\ \epsilon > 0$ tal que
  $$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$
- **Observació.** Notem que f té un ER en x_0 si i només si existeix un interval obert que conté x_0 en el qual f té un EA en x_0.

Creixement i decreixement (I)

- **Definició.** Sigui f una funció i sigui $(a, b) \subseteq Dom\ (f)$:
  (i) f és creixent en (a, b) si i només si
  $$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$
  (ii) f és decreixent en (a, b) si i només si
  $$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$
- Gràficament:

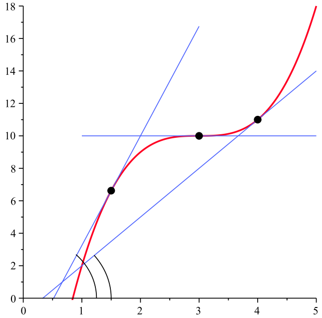




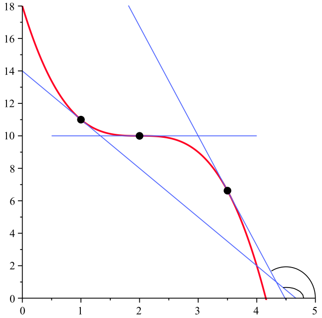
Creixement, decreixement i derivada primera

- **Propietat.** Sigui f derivable en $(a, b) \subseteq Dom\ (f)$. Aleshores:
  1. f és creixent en (a, b) si i només si $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$.
  2. f és decreixent en (a, b) si i només si $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

- Gràficament:



Creixement $\Longleftrightarrow$ pendents ≥ 0



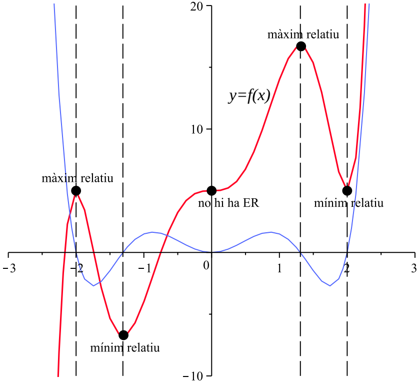
Decreixement $\Longleftrightarrow$ pendents ≤ 0

Intervals de creixement i decreixement: punts crítics

- La propietat anterior ens permet estudiar el Creixement (C) i Decreixement (D) d'una funció derivable, f, a partir de l'estudi del signe de la seva derivada, f'.
- Així, els intervals de C i D d'una funció f són aquells en els quals f és derivable i f' no canvia de signe.
- Obtenció dels extrems dels intervals de C i D de f. Vénen donats pels punts on f' pot canviar de signe:
  1. Punts de discontinuïtat de f que no són del domini.
  2. Punts del domini on no existeix f' (f no és derivable).
  3. Punts (del domini) on s'anul·la f'.
- **Definició.** Diem que $x_0 \in Dom\ (f)$ és un punt crític de f si i només si $f'(x_0) = 0$ o bé f no és derivable en x_0.

Condició necessària d'extrem relatiu

- **Propietat.** Si f té un extrem relatiu en x_0 i existeix $f'(x_0)$, aleshores $f'(x_0) = 0$.
- **Observació.** Això ens diu que, per a funcions derivables, els candidats a presentar ER són els que anul·len la derivada.
- La propietat no funciona en sentit invers.



Determinació d'extrem relatius a partir de la derivada primera

Propietat. Sigui f contínua en x_0, amb $x_0 \in (a,b)$ PC de f i (a, x_0), (x_0, b) intervals de C o D de f. Aleshores:

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ creix } (f' \geq 0) \text{ en } (a, x_0) \\ \text{i} \\ f \text{ decreix } (f' \leq 0) \text{ en } (x_0, b) \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ té un màxim relatiu en } x_0.$$

$$\text{(ii)} \quad \left\{ \begin{array}{c} f \text{ decreix } (f' \leq 0) \text{ en } (a, x_0) \\ \text{i} \\ f \text{ creix } (f' \geq 0) \text{ en } (x_0, b) \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ té un mínim relatiu en } x_0.$$

Criteri de la primera derivada: exemples

Passos a seguir per estudiar els extrems relatius d'una funció f:

1. Determinar $Dom\,(f)$ i punts de discontinuïtat.
2. Trobar els intervals de C/D de la funció: determinats, dins del domini de f, pels punts crítics:
   - Punts on la derivada s'anul·la.
   - Punts on la derivada no existeix.
3. Estudiar el signe de la derivada en els intervals per determinar el caràcter de la funció.
4. Determinar, a partir del C/D de la funció, en quins dels punts crítics hi ha un extrems relatius, i de quin tipus (màxim o mínim).

Exemple $f(x) = x^2$

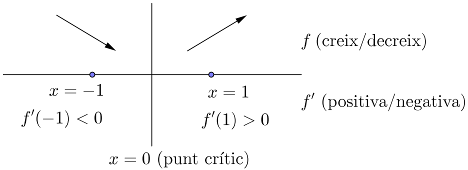
1. El domini de f és $\mathbb{R}$.
2. Punts crítics (PC): $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$f'(x) = 2x = 0 \iff x = 0 \Longrightarrow \text{PC: } \; x = 0$$

   L'únic PC és $x = 0$, que determina dos intervals: $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$.
3. Prenem un punt qualsevol de cada interval, avaluem el signe de f' i escrivim la solució:

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 < 0 \Longrightarrow D$$
$$f'(1) = 2 \cdot (1) = 2 > 0 \Longrightarrow C$$

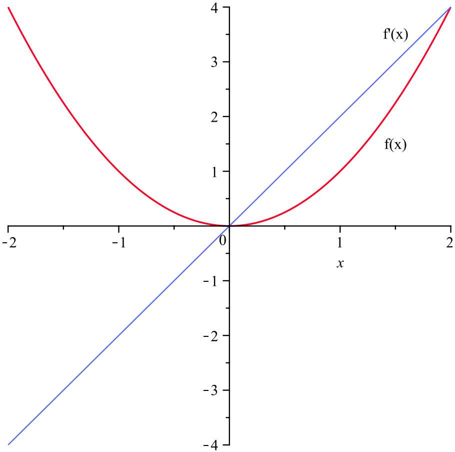
   Ens solem ajudar de la representació següent:



   Per tant: f decreix a $(-\infty, 0)$ i creix a $(0, +\infty)$

Exemple $f(x) = x^2$ (cont.)

4. De l'estudi dels intervals de C/D de f es dedueix que $f(x) = x^2$ presenta un mínim relatiu en $x = 0$.
   Gràficament:



Exemple $f(x) = x^2 - 2|x|$

1. El domini de f és $\mathbb{R}$.
2. Punts crítics (PC): $f(x) = x^2 - 2|x|$

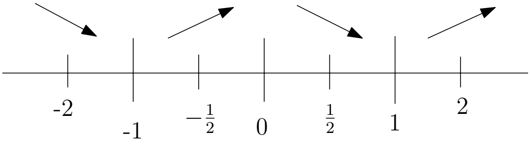
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 0 \\ 2x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 > 0 \\ 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 < 0 \\ \text{no existeix } f'(0) \Leftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{PC: } x = \pm 1,\ x = 0$$

Exemple $f(x) = x^2 - 2|x|$ (cont.)

3. $f(x) = x^2 - 2|x|$ no té punts de discontinuïtat. Per tant, els intervals de C i D estan determinats pels PC: $x = \pm 1$ i $x = 0$.
   - Avaluem el signe de f' en cada interval:

     $f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2 < 0 \Longrightarrow D$
     $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 1 > 0 \Longrightarrow C$
     $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -1 < 0 \Longrightarrow D$
     $f'(2) = 2 \cdot (2) - 2 = 2 > 0 \Longrightarrow C$
   - Representació gràfica:

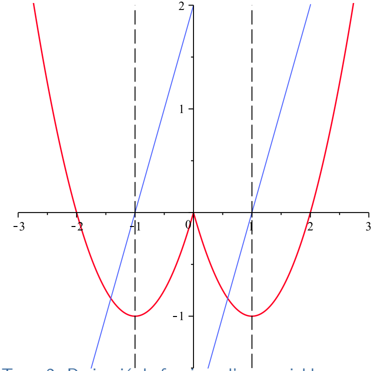


   - Solució:
     f decreix a $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
     f creix a $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Exemple $f(x) = x^2 - 2|x|$ (cont.)

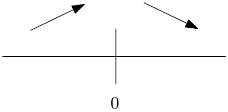
4. De l'estudi dels intervals de C/D de f es dedueix que $f(x) = x^2 - 2|x|$ presenta mínims relatius en $x = -1$ i $x = 1$, i un màxim relatiu en $x = 0$.
   Calculant les imatges: $f(-1) = -1$, $f(1) = -1$, $f(0) = 0$. Per tant,
   - Mínims relatius: $(1, -1)$, $(-1, -1)$.
   - Màxim relatiu: $(0, 0)$.

   Gràficament:



Exemple $f(x) = \frac{1}{x^2}$

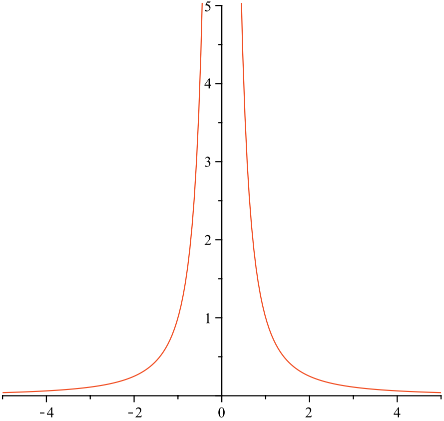
1. Notem que: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ és un punt de discontinuïtat de f.
2. $f'(x) = \frac{-2}{x^3} \Rightarrow \frac{-2}{x^3} = 0$ no té solució $\Rightarrow f$ no té punts crítics.
3. Els intervals de C i D estan determinats pel punt $x = 0$ (discontinuïtat):
   $f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^3} = 2 > 0 \Longrightarrow C$ $f'(1) = \frac{-2}{(1)^3} = -2 < 0 \Longrightarrow D$

   Per tant, f creix a $(-\infty, 0)$ i decreix a $(0, +\infty)$.
4. Solució: f no té extrems relatius.
   No hi ha extrem relatiu en $x = 0$ perquè no és punt crític de f.

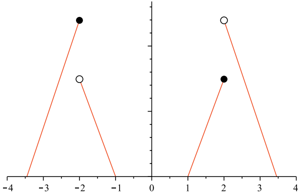
Exemple $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (cont.)

Gràficament:

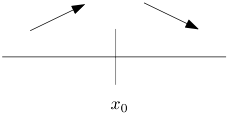


Determinació d'extrem relatius a partir de la derivada primera: consideracions finals

- La continuïtat de f en el PC és essencial per poder aplicar el resultat.
- Veiem, per exemple, els dos casos següents:



- Tots dos condueixen a la mateixa situació:

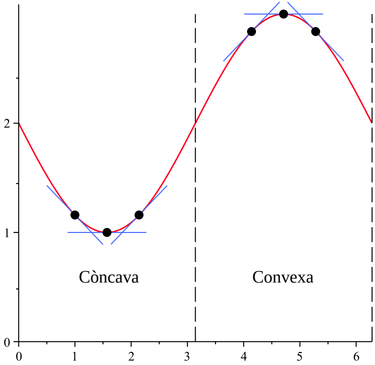


- Ara bé, només a l'esquerra tenim ER.

Concavitat i convexitat

Definició. Sigui f derivable en $(a,b) \subseteq Dom\ (f)$. Diem que:

- f és còncava en (a,b) si i només si la recta tangent a f queda per sota de f, $\forall x \in (a,b)$.
- f és convexa en (a,b) si i només si la recta tangent a f queda per sobre de f, $\forall x \in (a,b)$.



Concavitat, convexitat i derivada segona

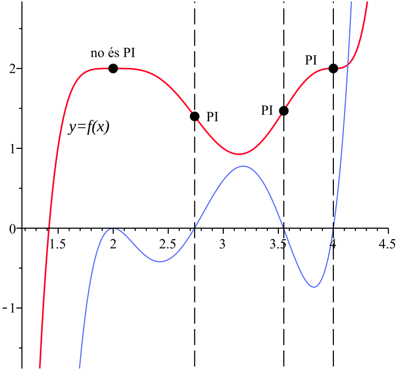
- Notem que $f' \begin{cases} \text{creix allà on } f \text{ és còncava,} \\ \text{decreix allà on } f \text{ és convexa.} \end{cases}$
- **Propietat.** Sigui f una funció dues vegades derivable en $(a, b) \subseteq Dom\ (f)$. Aleshores:
  1. f és còncava en (a, b) si i només si
  $$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b)$$
  2. f és convexa en (a, b) si i només si
  $$f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b)$$
- La propietat anterior ens permet estudiar la Concavitat (CC) i Convexitat (CV) d'una funció, f, dues vegades derivable, a partir de l'estudi del signe de la seva derivada segona, f''.
- La situació és anàloga a l'estudi del C i D de f a partir de f'.

Intervals de concavitat i convexitat: punts d'inflexió (I)

- Els intervals de CC i CV d'una funció f són aquells en els quals f és derivable dues vegades i f'' no canvia de signe.
- Obtenció dels extrems dels intervals de CC i CV de f. Determinats pels punts on f'' pot canviar de signe:
    1. Punts de discontinuïtat de f que no són del domini.
    2. Punts del domini on no existeix f'' (f'' no derivable).
    3. Punts del domini on s'anul·la f''.
- **Definició.** Diem que f té un Punt d'Inflexió (PI) en $x_0 \in Dom\ (f)$ si i només si f canvia la seva concavitat en x_0, això és, si és CC a la dreta de x_0 i CV a l'esquerra, o a l'inrevés.

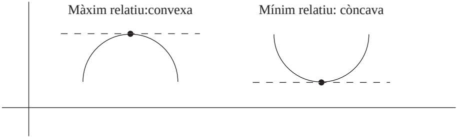
Condició necessària de punt d'inflexió

- **Propietat.** Si f té un PI en x_0 i és dues vegades derivable en x_0, aleshores $f''(x_0) = 0$.
- **Observació.** Això ens diu que, per a funcions dues vegades derivables, els candidats a presentar PI són els que anul·len la derivada segona.
- La propietat no funciona en sentit invers.



Condició suficient d'extrem relatiu

- Observem que:



- **Propietat [Criteri de la segona derivada].** Sigui x_0 un PC de f i suposem que f és dues vegades derivable en x_0. Aleshores:
  1. Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ té un màxim relatiu en x_0.
  2. Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ té un mínim relatiu en x_0.
- Per als casos no contemplats en aquest resultat (per exemple $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$), usarem el criteri de la primera derivada.

Si $f \in \mathcal{C}^n$, podrem també aplicar el criteri de la derivada n-èsima.

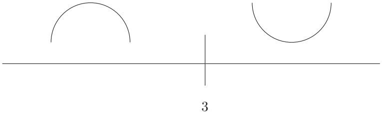
Exemple $f(x) = x^3 - 9x^2$

Estudiar els extrems relatius i punts d'inflexió de $f(x) = x^3 - 9x^2$.

1. $f(x)$ és un polinomi $\Longrightarrow Dom\ (f) = \mathbb{R}$.
2. Punts crítics: $f'(x) = 3x^2 - 18x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, o bé $x = 6$
3. Punts d'inflexió:
   $f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$
   Els intervals de CC/CV són: $(-\infty, 3)$ i $(3, +\infty)$.
4. Avaluant f'' en un punt de cada interval s'obté:

$$f''(0) = 6 \cdot (0) - 18 = -18 < 0 \Longrightarrow CV$$
$$f''(5) = 6 \cdot (5) - 18 = 12 > 0 \Longrightarrow CC$$

Ens solem ajudar de la representació següent:

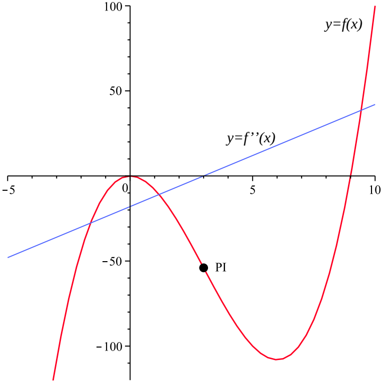


f és convexa a$(-\infty, 3)$ i còncava a $(3, +\infty)$.

Exemple $f(x) = x^3 - 9x^2$ (cont.)

4. De l'estudi dels intervals de CC/CV de f es dedueix:
   - f té un punt d'inflexió a $(3, f(3)) = (3, -54)$.
   - f té un màxim relatiu en $(0, f(0)) = (0, 0)$ i un mínim relatiu en $(6, f(6) = (6, -108)$.

Gràficament:



Exemple $f(x) = x^2 - 2|x|$

Determinar el caràcter dels punts crítics de $f(x) = x^2 - 2|x|$ a partir de la derivada segona.

Recordem que:

1. La derivada primera de $f(x) = x^2 - 2|x|$ és:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 0 \\ 2x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

2. Els PC de f són $x = \pm 1$ i $x = 0$, perquè $\nexists f'(0)$.

D'altra banda:

3. La derivada segona de f és:

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow f''(\pm 1) = 2 > 0$$

4. Per tant, f té mínims relatius en $(\pm 1, f(\pm 1)) = (\pm 1, -1)$.

5. El criteri no es pot utilitzar en $x = 0$, perquè $\nexists f''(0)$.

Criteri de la derivada n-èsima

Propietat. Sigui $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n$, $x_0 \in I$ que compleix:

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

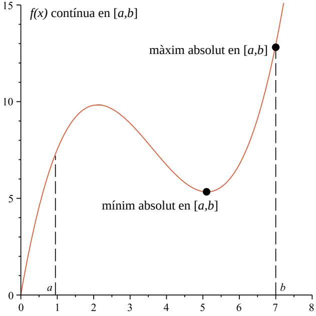
Aleshores:

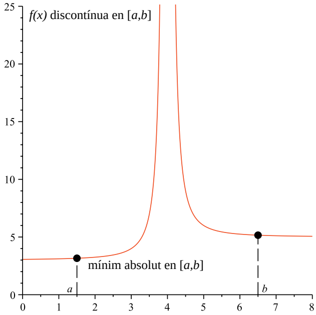
1. Si n és parell f presenta un extrem relatiu en x_0.
   - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ té un màxim relatiu en x_0.
   - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ té un mínim relatiu en x_0.
2. Si n és senar, x_0 no és extrem relatiu de f.

Amb l'estudi dels intervals de creixement i decreixement NO ens caldrà utilitzar aquest criteri.

Extrems absoluts

- Sigui f contínua en un interval $I \subseteq Dom\ (f)$. El procediment de càlcul d'EA de f en I depèn de si I és o no és tancat.
- **Teorema (Weierstrass).** Si f és contínua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, aleshores f té EA en $[a, b]$.
- Exemple:





- **Observació.** Si I no és tancat, no necessàriament hi ha EA.

Extrems absoluts en un interval tancat

- **Propietat.** Donada f contínua en $[a,b]$, els punts candidats a presentar EA en $[a,b]$ són:
  - Els punts crítics de f en $[a,b]$.
  - Els extrems de l'interval, $x = a$ i $x = b$.
- **Observació.** La decisió final es pren a partir de l'avaluació de f en els punts candidats.

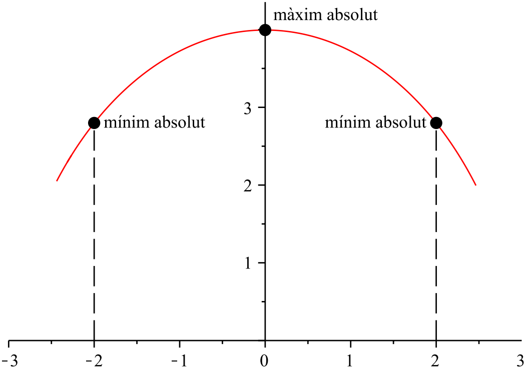
Exemple $f(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$, en $[-2, 2]$

Trobar els EA de $f(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$ en $[-2, 2]$.

1. $Dom\ (f) = [-\sqrt{8}, \sqrt{8}] \supset [-2, 2]$, i f és contínua en $[-2, 2]$.
2. $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{16-2x^2}} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
3. Candidats a presentar EA: $x = 0$, $x = -2$ i $x = 2$.
4. Calculem el valor de la funció en els punts candidats a EA.
$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \sqrt{16 - 2 \cdot (-2)^2} = \sqrt{8} \\ f(2) = \sqrt{16 - 2 \cdot 2^2} = \sqrt{8} \\ f(0) = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
5. f té $\begin{cases} \text{mínim absolut en } (-2, \sqrt{8}) \text{ i } (2, \sqrt{8}) \\ \text{màxim absolut en} (0, 4) \end{cases}$

Exemple $f(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$, en $[-2, 2]$ (cont.)

Gràficament:



Extrems absoluts en un interval no tancat

- **Propietat.** Donada f contínua en un interval no tancat I, els punts candidats a presentar EA en I són:
  - Els punts crítics de f en I.
  - Si és el cas, l'extrem de l'interval on hi ha tancament.
- **Observació.** La decisió final es pren a partir de:
  - L'avaluació de f en els punts candidats.
  - L'avaluació de $\lim_{x \to x_i} f(x)$, on $x_i \equiv$ extrem(s) de I on és obert.

    Si f és contínua en x_i podem avaluar $f(x_i)$.

Exemple $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, en $\mathbb{R}$

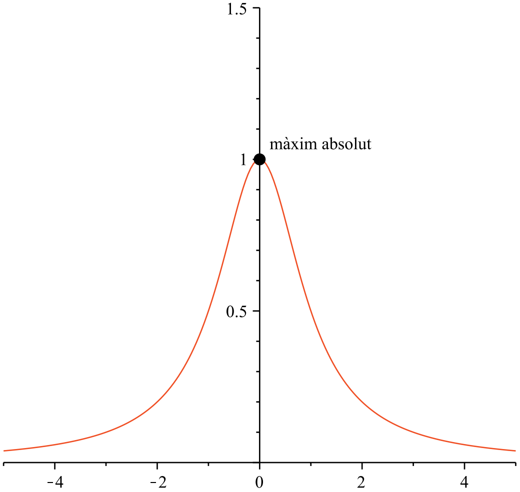
Trobar els EA de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$.

1. f és contínua en $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
2. $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \longrightarrow$ candidat a presentar EA.
3.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{1+0} = 1 \\ f(x) > 0, \, \forall x \\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{1+(\pm\infty)^2} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ té màxim absolut en } (0,1) \\ f \text{ no té mínim absolut} \end{array}\right.$$

Exemple $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, en $\mathbb{R}$ (cont.)

Gràficament:



Problemes d'optimització

- Són problemes en els quals es planteja trobar la millor solució possible respecte d'un determinat criteri.
- La idea és reduir-los a problemes de càlcul d'EA en un determinat interval.
- Procediment:
    1. Definir les variables del problema. Si n'hi ha més d'una, cal determinar una relació entre elles.
    2. Construir la "funció cost" a optimitzar, com a funció d'una sola variable.
    3. Determinar l'interval de la variable on cal resoldre el problema.
    4. Trobar l'EA (màxim i/o mínim) requerit de la funció de cost en l'interval corresponent.
    5. Determinar la solució del problema.

Exemple

Determinar quins són els dos nombres positius que sumen 20 tals que el seu producte és màxim.

1. Variables. x, y denoten els dos nombres buscats. Relació: $x + y = 20$.
2. Funció a optimitzar. Hem de maximitzar la funció $P = x \cdot y$.
   En funció d'una sola variable: $P(x) = x \cdot (20 - x)$
3. Interval de treball. x i y han de ser positius $\Rightarrow x \in (0, 20)$.
4. Càlcul de l'extrem absolut. Busquem el màxim absolut de $P(x) = x \cdot (20 - x)$ en l'interval obert $(0, 20)$.
   - P és contínua i derivable a tot arreu. Els punts crítics són els punts que anul·len la derivada:
     $P'(x) = 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$
   - La derivada segona de P és $P''(x) = -2 < 0$, per tant la funció és convexa a tot arreu i el punt $x = 10$ és un màxim relatiu.
   - Com que no hi ha cap més extrem relatiu en l'interval, també és absolut.
5. Els dos nombres buscats són $x = 10$ i $y = 10$.