

Treball de Fi de Grau

**Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials**

**Disseny de sistemes de control emprant  
modelat de la resposta freqüencial**

**Memòria**

**Autor:** Bernat Nicolau Jordà  
**Director:** Ramon Costa-Castelló  
**Convocatòria:** Setembre 2019



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



## Resum

Molta informació dels sistemes dinàmics es troba representada de manera gràfica. Aprofitant això, aconseguir un programa que permeti manipular els gràfics interactuant-hi de manera directa és ideal pel disseny de controladors.

Per satisfer aquesta necessitat en aquest projecte s'ha creat un programa que permet obtenir controladors de sistemes dinàmics de manera interactiva. El programa interactiu té diverses finestres que permeten definir les especificacions del sistema i, automàticament es calcula el controlador capaç d'assolir-les. S'ha codificat des de zero utilitzant el programa Sysquake aprofitant les facilitats que proporciona aquest programa.

Quan es tracta de dissenyar controladors, és important que aquests siguin el més robusts possible, ja que poden aparèixer incerteses i pertorbacions en el sistema. Per tal d'aconseguir-ho s'ha utilitzat el mètode de Control Robust anomenat mètode  $H_\infty$ . En aquest projecte s'explicarà en què consisteix el mètode i els aspectes bàsics del Control Robust.



# Sumari

<b>Resum .....</b>	<b>2</b>
<b>1 Prefaci.....</b>	<b>9</b>
1.1 Origen i motivació del projecte .....	9
1.2 Requeriments previs.....	9
<b>2 Introducció.....</b>	<b>10</b>
2.1 Objectius del projecte .....	10
2.2 Abast del projecte.....	10
<b>3 Base teòrica .....</b>	<b>11</b>
3.1 Funció de transferència .....	12
3.2 Tipus de sistemes.....	15
3.2.1 Sistema en llaç obert.....	15
3.2.2 Sistema en llaç tancat .....	15
3.3 Sensibilitat .....	16
3.3.1 Definició de sensibilitat .....	17
3.3.2 Funcions de sensibilitat.....	18
3.3.3 Robustesa .....	24
3.4 Espai d'estats.....	29
<b>4 Disseny del controlador, <math>H_\infty</math>.....</b>	<b>32</b>
4.1 Mètode $H_\infty$ .....	32
4.1.1 Loop shaping .....	32
4.1.2 Norma $H_\infty$ .....	33
4.1.3 Formulació del problema.....	36

---

4.2	Planta augmentada.....	38
4.2.1	Modelatge de la funció de sensibilitat $S(s)$ .....	38
4.2.2	Modelatge de la funció de sensibilitat de control $S_u(s)$ .....	45
4.2.3	Planta augmentada amb les dues funcions de ponderació.....	50
4.3	Controlador.....	53
4.3.1	Elecció del mètode utilitzat.....	53
4.3.2	Mètode ARE (Equacions algebraïques de Riccati) .....	54
<b>5</b>	<b>Programa interactiu .....</b>	<b>65</b>
5.1	Sysquake.....	66
5.1.1	Llibreries.....	66
5.1.2	Interfície del programa.....	69
5.1.3	Exemples .....	76
5.1.4	Interactivitat.....	77
5.2	MATLAB .....	79
5.3	Editor de codi .....	80
<b>6</b>	<b>Exemples de controladors.....</b>	<b>80</b>
<b>7</b>	<b>Estudi d'impacte ambiental.....</b>	<b>85</b>
<b>8</b>	<b>Cost del projecte.....</b>	<b>85</b>
8.1	Cost de les hores dedicades .....	85
8.2	Cost de les llicències.....	86
<b>9</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>87</b>
<b>10</b>	<b>Agraiments .....</b>	<b>88</b>
<b>11</b>	<b>Referències.....</b>	<b>89</b>

## Figures

Figura 1: Representació de diagrama de blocs d'un sistema realimentat .....	11
Figura 2: Relació entre domini temporal i freqüencial.....	12
Figura 3: Resposta impulsional segons l'ubicació dels pols (esq. $p < 0$ , dreta $p > 0$ ) .....	13
Figura 4: Resposta impulsional segons l'ubicació dels pols (esq. $\sigma < 0$ , dreta $\sigma > 0$ ).....	14
Figura 5: Diagrama de blocs d'un sistema de llaç obert .....	15
Figura 6: Diagrama de blocs d'un sistema de llaç tancat.....	16
Figura 7: Diagrama de blocs d'un sistema de llaç tancat amb pertorbacions i soroll ...	18
Figura 8: Diagrama de blocs amb les pertorbacions com úniques entrades .....	20
Figura 9: Forma qualitativa de la $S(s)$ .....	22
Figura 10: Distància entre el punt crític i la corba de Nyquist .....	26
Figura 11: Representació gràfica del marge de mòdul.....	27
Figura 12: Corba de Nyquist considerant incerteses del sistema.....	28
Figura 13: Diagrama de blocs del model d'espai d'estats.....	30
Figura 14: Norma $H_\infty$ d'un sistema de segon ordre.....	34
Figura 15: Procés iteratiu del càlcul de $\gamma$ .....	35
Figura 16: Sistema del problema $H_\infty$ .....	36
Figura 17: Forma desitjada de la funció de sensibilitat .....	40
Figura 18: Diagrama de Bode de la forma desitjada i la funció de sensibilitat real.....	41
Figura 19: Diagrama de blocs amb la funció d'especificacions $W_e(s)$ .....	42
Figura 20: Senyals per modelar la funció de sensibilitat .....	43
Figura 21: Planta augmentada amb la funció d'especificacions $W_e(s)$ .....	43
Figura 22: Diagrama de Bode del guany de $W_e(s)$ .....	44

---

Figura 23: Forma de $W_u^{-1}(s)$ .....	46
Figura 24: Diagrama de Bode de $W_u^{-1}(s)$ i de la funció de sensibilitat de control.....	47
Figura 25: Diagrama de blocs amb la funció d'especificacions $W_u(s)$ .....	48
Figura 26: Senyals per modelar la funció de sensibilitat de control.....	48
Figura 27: Planta augmentada amb la funció d'especificacions $W_u(s)$ .....	49
Figura 28: Diagrama de Bode del guany de $W_u(s)$ .....	50
Figura 29: Diagrama de blocs amb les funcions d'especificacions $W_e(s)$ i $W_u(s)$ .....	51
Figura 30: Senyals per modelar les dues funcions de sensibilitat.....	51
Figura 31: Planta augmentada amb les funcions d'especificacions $W_e(s)$ i $W_u(s)$ .....	52
Figura 32: Transformació de la planta augmentada .....	59
Figura 33: Connexió que realitza la transformació $F_u$ .....	60
Figura 34: Connexió que realitza la transformació $F_1$ .....	60
Figura 35: Sistema del problema $H_\infty$ .....	63
Figura 36: Intefície del programa .....	69
Figura 37: Diagrama de blocs del sistema .....	70
Figura 38: Informació del sistema.....	70
Figura 39: Mapa de pols i zeros de la planta.....	71
Figura 40: Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat.....	72
Figura 41: Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat de control .....	73
Figura 42: Diagrama de Bode del guany de la planta.....	74
Figura 43: Resposta temporal del senyal de control.....	74
Figura 44: Resposta temporal del senyal de sortida del sistema .....	75
Figura 45: Botó per exportar el controlador obtingut.....	75
Figura 46: Comparació de controladors obtinguts .....	79
Figura 47: Introducció de la planta al programa .....	81

---

Figura 48: Introducció de les especificacions al programa.....	81
Figura 49: Interfície de l'Exemple 1 .....	82
Figura 50: Diagrama de Bode del controlador obtingut.....	82
Figura 51: Interfície de l'Exemple 2 (no vàlid) .....	83
Figura 52: Interfície de l'Exemple 2 (vàlid) .....	84



# 1 Prefaci

## 1.1 Origen i motivació del projecte

Aquest projecte sorgeix de la proposta del tutor d'aquest, en Ramon Costa. De totes les opcions que em va proposar, aquest projecte va ser el que em va cridar més l'atenció, ja que es basa en dos aspectes que m'interessaven des d'un principi: la Teoria de Control i la programació. Crec que era important que el tema m'agradés d'entrada, ja que al tractar-se d'un Treball de Fi de Grau se l'hi hauria de dedicar un nombre d'hores considerable.

El disseny de controladors de manera robusta era un àmbit de la Teoria de Control desconegut per mi, ja que al Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials no s'havia impartit aquest temari. Això em va motivar encara més, ja que el fet d'aprendre-ho des de zero, sempre amb ajuda d'en Ramon, va suposar un repte afegit.

Codificar una aplicació amb tot el que comporta, com ara crear la interfície des de zero, afegir interactivitat o crear funcions necessàries pel bon funcionament, també era un món desconegut; mai n'havia tingut la necessitat. Aquest projecte ha sigut l'empenta que necessitava per investigar i aprendre sobre tots aquests aspectes.

## 1.2 Requeriments previs

Per tal d'entendre i poder seguir el projecte és recomanable haver estudiat prèviament els aspectes bàsics de la teoria de control. No obstant això, a l'apartat 3 de la memòria se'n farà un petit repàs per refrescar, o introduir, els conceptes necessaris perquè el lector o lectora no tingui la necessitat de recórrer a altres fonts per poder seguir amb la lectura.

## 2 Introducció

### 2.1 Objectius del projecte

L'objectiu d'aquest projecte és crear una aplicació interactiva que permeti dissenyar controladors de sistemes dinàmics. Aquests sistemes a vegades poden tenir incerteses i perturbacions en forma de soroll. Per això és important que els controladors siguin robustos, i s'aconsegueixen dissenyar gràcies a un mètode del Control Robust que s'anomena mètode  $H_\infty$ . Es realitzarà una introducció i explicació del mètode i, per tant, un altre objectiu és que el lector tingui una clara idea i hagi après els principals aspectes del mètode  $H_\infty$  i de la robustesa dins la Teoria de Control.

Un altre objectiu és explicar com funciona l'aplicació interactiva per tal que el lector pugui dissenyar controladors un cop llegit el projecte.

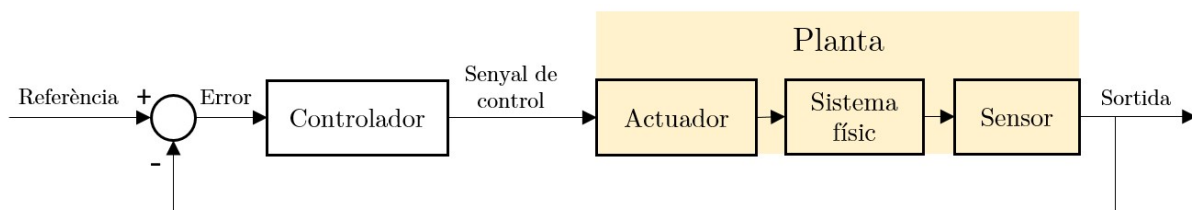
### 2.2 Abast del projecte

S'elabora una aplicació interactiva amb la finalitat d'obtenir controladors amb les especificacions desitjades, modificant-les interactuant directament amb els gràfics. L'objectiu és que aquest programa es pugui utilitzar tant com en àmbits educatius com pel mateix disseny de controladors de models físics de casos reals.

### 3 Base teòrica

El control de sistemes té com a objectiu que els dispositius físics es comportin seguint unes especificacions establertes. Per verificar que el dispositiu es comporta de la manera adequada, un sensor s'encarrega de mesurar la magnitud del senyal de sortida i es compara amb un valor de referència. La diferència d'aquests senyals, que representa l'error del sistema, es fa passar per un dispositiu, controlador, encarregat de convertir aquest senyal en una altra que modificarà físicament el sistema. [1]

El conjunt d'actuador, sistema físic i sensor s'anomena planta, i aquest conjunt és la part del sistema que es vol controlar. El sistema, doncs, normalment està format per un controlador i una planta, on la sortida de la planta realimenta l'entrada del sistema. Veure Figura 1:



**Figura 1:** Representació de diagrama de blocs d'un sistema realimentat

En aquest projecte s'ha suposat que els sistemes són lineals i invariants en el temps (LTI, linear time-invariant).

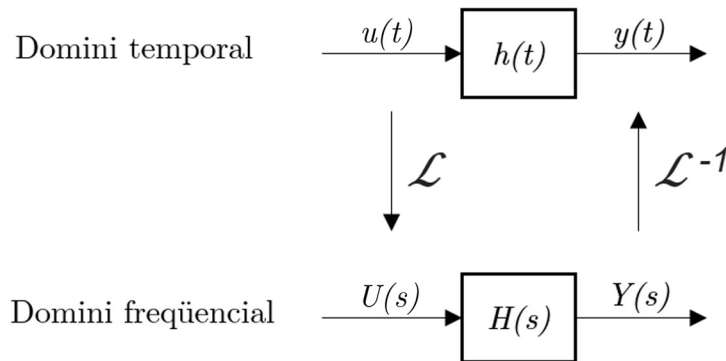
La invariància en el temps indica que tant si s'aplica una entrada en el temps  $t$  com en el temps  $t-T$ , la sortida serà exactament igual, excepte per un retard de  $T$  segons. El sistema és invariant en el temps perquè la sortida no depèn de l'instant al qual s'ha aplicat l'entrada.

Els sistemes LTI, poden ser caracteritzats en el domini freqüencial fent ús de la funció de transferència, sent aquesta la transformada de Laplace de la resposta impulsional del sistema.

Aquesta transformada permet passar del domini temporal al domini de Laplace. Sigui una funció  $f(t)$  definida per  $t \geq 0$ , la transformada de Laplace és:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.1)$$

La funció de transferència és molt útil, ja que permet relacionar l'entrada i la sortida del sistema, sent la sortida del sistema el producte de la funció de transferència i l'entrada, tot en domini freqüencial.



**Figura 2:** Relació entre domini temporal i freqüencial

Com es pot veure a la Figura 2, la transformada de Laplace del senyal  $u(t)$  en domini temporal és el senyal  $U(s)$  en el domini freqüencial. La funció de transferència  $H(s)$  relaciona el senyal de sortida  $Y(s)$  amb el senyal d'entrada  $U(s)$ , sent:

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (3.2)$$

El senyal de sortida en el domini temporal,  $y(t)$ , s'obté aplicant la transformada inversa de Laplace.

### 3.1 Funció de transferència

Aquesta funció de transferència  $H(s)$  pot expressar-se com un quocient de polinomis en el domini freqüencial, en  $s$ . El numerador de la funció de transferència l'anomenem  $N(s)$ , i el denominador l'anomenem  $D(s)$ . Així doncs, la funció de transferència queda de la següent manera:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.3)$$

Les arrels del polinomi numerador  $N(s)$  s'anomenen zeros, mentre que les arrels del denominador  $D(s)$  s'anomenen pols. Mitjançant una anàlisi dels pols de la funció de transferència es pot extreure informació sobre el comportament dinàmic del sistema. Gràcies a la importància que té el denominador per l'anàlisi de sistemes, quan s'igualava a zero, s'anomena Equació característica del sistema.

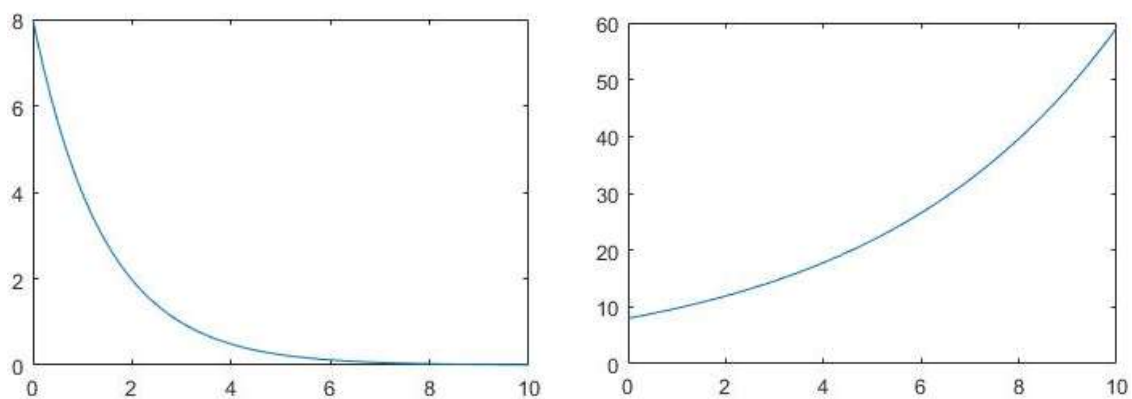
$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.4)$$

A les arrels de l'equació característica, els pols del sistema, hi ha la informació sobre el patró que seguirà la resposta temporal del sistema. Segons la ubicació dels pols, se'n poden distingir 3 grups:

1. **Pols reals i únics.** Per un pol  $p$ , la resposta impulsional tindrà la següent forma:

$$y(t) = Ce^{pt}$$

De manera que la resposta convergirà a zero si els pols tenen valor negatiu. Per pols de part real positiva, el sistema és inestable. Per pols de part real igual a zero, el sistema és marginalment estable. La Figura 3 mostra la resposta impulsional d'un sistema de primer ordre.



**Figura 3:** Resposta impulsional segons l'ubicació dels pols (esq.  $p < 0$ , dreta  $p > 0$ )

2. **Pols reals múltiples.** En aquest cas, per un pol  $p$  amb multiplicitat  $r$ , la resposta impulsional tindrà la següent forma:

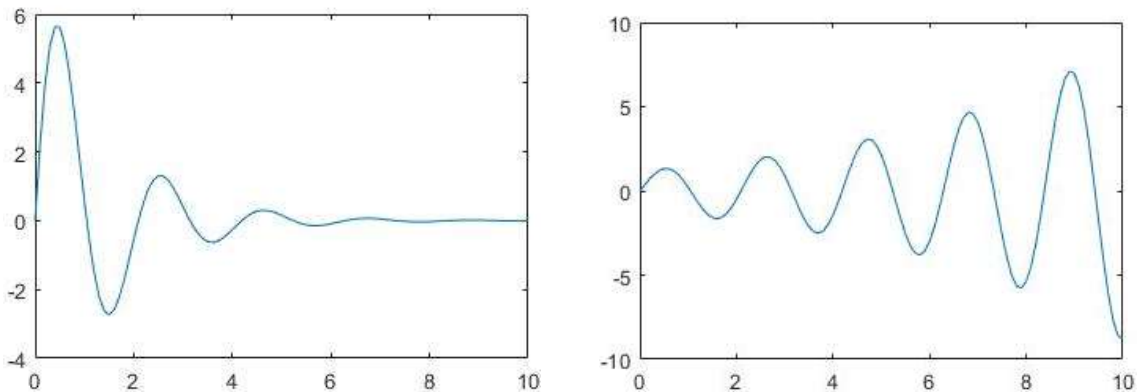
$$y(t) = \left[ C_1 + \frac{C_2}{1!}t + \frac{C_3}{2!}t^2 + \dots + \frac{C_r}{(r-1)!}t^{r-1} \right] e^{pt}$$

Per pols de part real positiva, el sistema és inestable, com en el cas dels pols reals únics. A diferència del cas anterior, per pols de part real igual a zero, el sistema serà inestable.

3. **Pols complexos conjugats.** Per pols de la forma  $p = \sigma + j\omega$ , la resposta impulsional és oscil·latòria, seguint següent forma:

$$y(t) = Ce^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$$

Com en els altres casos, per valors positius de  $\sigma$ , el sistema és inestable, ja que la sinusoide s'amplifica. Per valors d'alga negatius el sistema és estables, ja que la sinusoide convergeix. La  $\omega$  és la freqüència d'oscil·lació, que indicarà com de ràpid oscil·larà el sistema. A la Figura 4 es mostra la resposta impulsional d'un sistema de segon ordre.



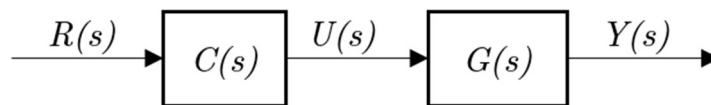
**Figura 4:** Resposta impulsional segons l'ubicació dels pols (esq.  $\sigma < 0$ , dreta  $\sigma > 0$ )

## 3.2 Tipus de sistemes

Segons la manera en com estiguin connectats els elements del sistema, se'n poden distingir dos tipus: sistemes en llaç obert i sistemes en llaç tancat.

### 3.2.1 Sistema en llaç obert

El sistema en llaç obert (o anell obert) és aquell en què l'acció de control és independent de la sortida o, el que és el mateix, la variable de sortida no té cap efecte sobre l'entrada a la planta. El principal inconvenient d'aquest sistema és la poca robustesa que presenta, ja que són molt sensibles a les pertorbacions.



**Figura 5:** Diagrama de blocs d'un sistema de llaç obert

A la Figura 5 es pot veure el diagrama de blocs d'aquest sistema, on:

- $R(s)$  és la referència d'entrada
- $C(s)$  és el controlador
- $U(s)$  és el senyal de control
- $G(s)$  és la planta
- $Y(s)$  és el senyal de sortida

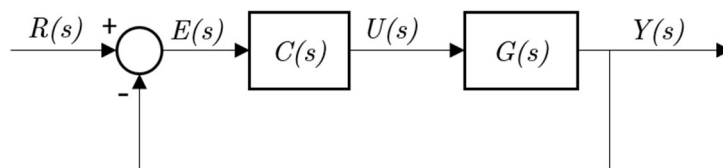
### 3.2.2 Sistema en llaç tancat

El sistema en anell tancat (o en llaç tancat), o sistema realimentat, és aquell en què l'acció de control depèn, d'alguna forma, de la sortida. Aquest sistema és molt més robust que els sistemes de llaç obert, ja que l'error que generen les pertorbacions serà rectificat pel controlador gràcies a la realimentació.

L'error del sistema, la diferència entre el senyal de referència i el senyal de sortida, actua sobre el controlador per calcular-ne el senyal de control. L'objectiu és reduir l'error i, aconseguint això, el senyal de sortida seguirà el senyal de referència.

Un dels principals usos de la realimentació és augmentar la robustesa a les pertorbacions. El senyal d'error és la variable que permetrà observar canvis en el sistema. Si hi ha pertorbacions, la diferència entre el senyal de referència i el senyal de sortida augmentarà, permetent tornar a portar el sistema a l'estat desitjat.

Un altre ús de la realimentació és canviar la dinàmica d'un sistema. Mitjançant la retroalimentació, podem modificar el comportament d'un sistema per satisfer les necessitats d'una aplicació: sistemes inestables poden estabilitzar-se, sistemes que són lents i poden modificar-se perquè siguin més ràpids i sistemes amb punts de funcionament indeterminats poden mantenir-se constants.



**Figura 6:** Diagrama de blocs d'un sistema de llac tancat

A la Figura 6 es pot veure el diagrama de blocs del sistema de llac tancat, on, a més dels elements que hi havia al sistema de llac obert,

- $E(s)$  és l'error entre el senyal de sortida i la referència d'entrada

### 3.3 Sensibilitat

Durant el procediment de disseny dels sistemes de control, hi ha factors que són crucials pel bon funcionament del sistema. Un d'aquests factors és realitzar una correcta elecció del controlador, ja que és l'encarregat del bon funcionament de la planta. L'èxit del



disseny del sistema, però, no dependrà només del disseny del controlador. Realitzar una bona anàlisi del problema físic també és un factor crucial per obtenir un comportament desitjat de la planta.

És important que a l'hora de dissenyar el sistema s'aporti la informació necessària sobre tots els objectius als quals el controlador aspira assolir, ja que si no és així, el sistema es converteix en un problema no observable, on falten dades i s'obtindrà un comportament inesperat.

Un dels aspectes a tenir present quan es dissenya el sistema és el fet que el comportament del model numèric no serà exactament el comportament del sistema físic. Això és degut al fet que quan es dissenya el model numèric partint del físic, hi ha certes incerteses que no es poden tenir en compte, ja que hi ha errors que apareixen i no es poden preveure. Aquests errors els podem representar com a la incorporació de senyals d'alta freqüència, perturbacions i soroll, a diferents parts del sistema. Un dels components més sensibles a introduir soroll és el sensor que, en general, treballa amb magnituds físiques de molt baixa potència i constants de temps ràpides. Les perturbacions i sorolls acostumen a trobar-se a valors de freqüència elevats.

Això porta a introduir el concepte de sensibilitat.

### 3.3.1 Definició de sensibilitat

Segons el Diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans [2], la definició de sensibilitat és la següent:

*Capacitat de resposta d'un dispositiu, d'un sistema, d'un aparell de mesura, davant una variació de l'estímul d'entrada.*

Aquesta definició s'ajusta correctament als sistemes de control, en els que interessa estudiar la capacitat de la resposta davant de petites variacions als components del sistema, com ara la referència, perturbacions, soroll o variacions de la planta.

Una de les maneres de quantificar aquesta sensibilitat és mitjançant la variació relativa de la funció de transferència d'un sistema,  $\Delta H(s)/H$ , davant variacions relatives d'un dels paràmetres,  $\Delta q/q$  [3]:

$$S_q^H = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta H(s)}{H(s)}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{q}{H} \quad (3.5)$$

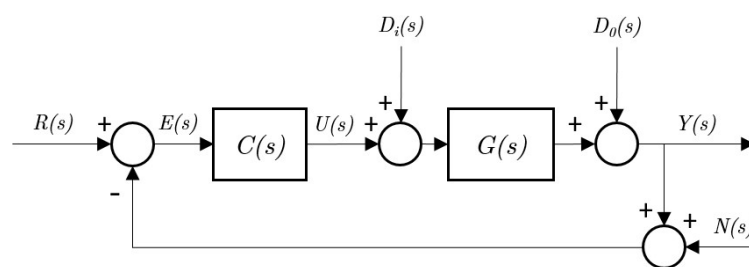
On

- $S_q^H$  és la funció de sensibilitat que indica com afecten les variacions de  $q$  a la funció de transferència  $H(s)$
- $\frac{\Delta H(s)}{H(s)}$  és la variació relativa de la funció de transferència d'un sistema
- $\frac{\Delta q}{q}$  és la variació relativa d'un paràmetre

El valor de  $S_q^H$  indica com de vulnerable és la funció de transferència  $H(s)$  davant les variacions de  $q$ , per tant, com més petit sigui el valor de  $S_q^H$ , més robust serà el sistema davant de  $q$

### 3.3.2 Funcions de sensibilitat

El sistema de laç tancat, tenint present les possibles pertorbacions i l'efecte del soroll queda de la següent manera (Figura 7):



**Figura 7:** Diagrama de blocs d'un sistema de laç tancat amb pertorbacions i soroll

On, a més dels elements del sistema de laç tancat sense pertorbacions,

- $D_i(s)$  és la pertorbació d'entrada o de càrrega
- $D_o(s)$  és la pertorbació de sortida
- $N(s)$  és l'efecte del soroll de mesura

Aplicant àlgebra de blocs, es pot arribar a la següent relació, que indica com es veu afectada la sortida  $Y(s)$  per les entrades del sistema [3]:

$$Y(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}D_i(s) + \frac{1}{1+G(s)C(s)}D_o(s) - \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}N(s) \quad (3.6)$$

Relacionant el senyal de control  $U(s)$  amb les entrades del sistema, es pot arribar a la següent relació [3]:

$$U(s) = \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}R(s) - \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}D_i(s) - \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}D_o(s) - \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}N(s) \quad (3.7)$$

Es pot veure que les funcions de transferència es repeteixen, reduint-se a quatre expressions. Aquestes funcions de transferència són el que s'anomenen funcions de sensibilitat.

- $S(s) = \frac{1}{1+G(s)C(s)}$ ; s'anomena *funció de sensibilitat*
- $T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}$ ; s'anomena *funció de sensibilitat complementària* o *funció de transferència de laç tancat*
- $S_i(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}$ ; s'anomena *funció de sensibilitat de pertorbació*
- $S_u(s) = \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}$ ; s'anomena *funció de sensibilitat de control*

Aquestes funcions condensen la informació essencial del comportament del sistema, incloent el seguiment de la referència i l'efecte de les pertorbacions, en tot l'espectre freqüencial, tant en baixes freqüències, punt de vista estàtic, com en altes freqüències, punt de vista dinàmic.

Cal veure que les funcions són dependents entre elles, provocant que no poden modificar-se de forma arbitrària. Les relacions de les funcions de sensibilitat són les següents:

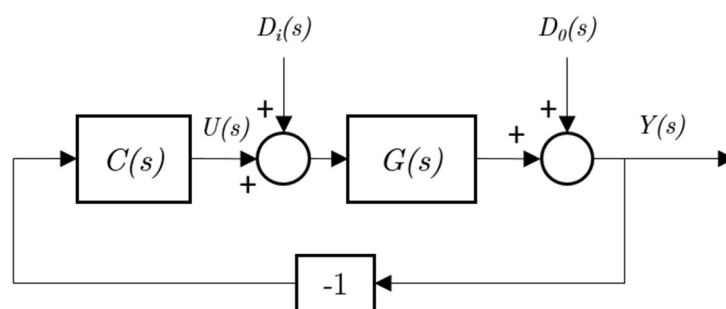
$$\begin{aligned} S(s) + T(s) &= 1 \\ S_i(s) &= G(s)S(s) \\ S_u(s) &= C(s)S(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aquest és un dels problemes que té el disseny de sistemes, ja que comporta grans limitacions. Pel disseny de controladors, es farà ús del mètode *loop-shaping* que consisteix a definir la forma de la resposta i, mitjançant funcions de pesat, es defineixen rangs de freqüència on les especificacions seran més exigents.

## Funció de sensibilitat

### Atenuació de les perturbacions

Un dels objectius a l'hora de dissenyar un controlador aplicant la teoria de Control Robust és que el sistema no sigui afectat per les perturbacions. Per tal d'analitzar quines funcions de sensibilitat tenen la capacitat d'atenuar l'efecte que tenen les perturbacions, s'analitzarà el sistema suposant un senyal de referència nul · la i suposant que l'efecte del soroll és inexistent. Aquest sistema està representat a la Figura 8.



**Figura 8:** Diagrama de blocs amb les perturbacions com úniques entrades

L'expressió que relaciona la sortida del sistema respecte a les perturbacions és la següent:

$$Y(s) = \frac{G(s)D_i(s) + D_0(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s)[G(s)D_i(s) + D_0(s)] \quad (3.9)$$

Es pot veure que la funció de sensibilitat descriu l'impacte de les pertorbacions que afecten el llaç obert del sistema. Això vol dir que un valor baix de la funció de sensibilitat provocarà una atenuació major de les pertorbacions.

La limitació vista a l'equació (3.7),  $S+T=1$ , reflecteix la impossibilitat de modelar la dinàmica del sistema i l'atenuació a les pertorbacions de manera independent.

### Error de seguiment

L'error en el seguiment de la referència també pot ser determinat i caracteritzat per les funcions de sensibilitat. Considerant l'error com la diferència entre la referència i el senyal de sortida, s'obté:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= R(s) - Y(s) = \\
 &= R(s) - \left( \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} R(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} D_i(s) + \frac{1}{1+G(s)C(s)} D_0(s) - \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} N(s) \right) \\
 &= \left( 1 - \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \right) R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} D_i(s) - \frac{1}{1+G(s)C(s)} D_0(s) + \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} N(s) \\
 &= S(s)R(s) - S_i(s)D_i(s) - S(s)D_0(s) + T(s)N(s)
 \end{aligned}$$

Quedant, doncs:

$$E(s) = S(s)[R(s) - D_0(s)] - S_i(s)D_i(s) + T(s)N(s) \quad (3.10)$$

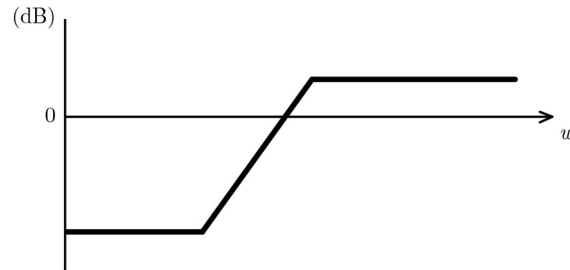
Es torna a veure que la funció de sensibilitat juga un paper essencial a l'efecte que tenen la referència i la pertorbació de sortida sobre l'error, mentre que la funció de sensibilitat de pertorbació la té sobre les pertorbacions de càrrega. Per últim, l'efecte que té el soroll del sensor sobre l'error depèn la funció de transferència de llaç tancat, la funció de sensibilitat complementària.

L'expressió de l'error, en absència de pertorbacions, es redueix a:

$$E(s) = S(s)R(s) \quad (3.11)$$

Com que interessa que l'error en estat estacionari, és a dir, a freqüències baixes sigui petit, el guany que ha de tenir la funció de sensibilitat a aquestes freqüències també ha

de ser petit. Així doncs, de manera qualitativa, la funció de sensibilitat ha de tenir una forma semblant a la de la Figura 9.



**Figura 9:** Forma qualitativa de la  $S(s)$

Seria intuïtiu pensar que si aquesta funció té un guany baix per a totes les freqüències, l'error seria petit per a totes les freqüències també. Això és impossible degut a les limitacions que hi ha a l'hora de modelar aquesta funció que s'explicaran a l'apartat 4.2.1 de la memòria. També s'explicarà quin serà el procediment per modelar la funció de sensibilitat.

### Funció de sensibilitat de control

Partint de l'expressió on es relaciona el senyal de control amb les entrades del sistema, el senyal de control es pot expressar amb la següent expressió:

$$U(s) = S_u(s)[R(s) - D_0(s) - N(s)] - T(s)D_i(s) \quad (3.12)$$

D'aquesta expressió se n'extreu que la funció de sensibilitat de control té un efecte directe en com afecten els senyals de referència, la pertorbació de sortida i el soroll provocat pel sensor al senyal de control. La pertorbació de càrrega també es veu afectada per la funció de sensibilitat de control, però de manera indirecta, ja que  $T(s) = G(s)S_u(s)$

Com s'ha vist a l'expressió (3.8), la funció de sensibilitat de control també es pot expressar en relació a la funció de sensibilitat.

Visualitzar mòdul d'aquesta funció de transferència mitjançant el diagrama de Bode pot ser molt útil, ja que permet veure com afectaran les diferents entrades del sistema al senyal de control. És important que el senyal de control no tingui valors de guany excessivament elevats, ja que els accionadors de la planta podrien veure's danyats.

Més endavant s'explicarà el procés de modelatge d'aquesta funció de transferència.

## **Funció de transferència de llaç tancat**

Una de les principals propietats de la realimentació és proporcionar robustesa al sistema davant variacions en la seva dinàmica. Si la resposta del sistema és diferent que el senyal de referència, la realimentació permet que el controlador generi un senyal de control capaç de disminuir l'error.

La funció de transferència de llaç tancat indica com serà la sortida respecte a l'entrada, permetent fer una anàlisi global del sistema. Aquesta transferència permet estudiar l'estabilitat del sistema i també permet realitzar un estudi qualitatiu d'aquest, ja que amb el diagrama de Bode permet veure com serà el comportament en tot l'espectre freqüencial.

## **Estabilitat del sistema de llaç tancat**

El concepte d'estabilitat és un dels conceptes més importants quan es parla de sistemes de control. Hi ha diverses formes de definir-la, però una de les definicions elementals és la coneguda com a estabilitat BIBO (bounded input-bounded output stability):

*Un sistema es diu que és estable si per a tota entrada fitada produeix una sortida fitada, independentment del seu estat inicial.*

Una altra manera de definir-la és mitjançant l'equació característica del sistema, que s'extreu de la funció de transferència de llaç tancat. Aquesta equació característica és el denominador de la transferència igualat a zero. La definició és la següent:

*Un sistema és estable si les arrels de l'equació característica són reals negatives o complexes conjugades amb part real negativa, on cap pol tendeix a l'infinit. O dit en forma més compacte, si totes les arrels es troben en el semiplà esquerre del pla  $s$ .*

Recordem que l'equació característica depèn de la planta i el controlador. Com que la planta del sistema és un element que ve donat pel problema, i per tant no és variable, l'equació característica depèn del controlador escollit. Així doncs, l'estabilitat del sistema dependrà d'una bona elecció del controlador. Mentre les arrels de l'equació característica segueixin les condicions exposades a la definició, el sistema serà estable.

### 3.3.3 Robustesa

Els sistemes reals, dels quals se'n crea un model matemàtic, no solen ser lineals. Quan se'n dissenya el model matemàtic es realitzen simplificacions i linealitzacions per tal que el model matemàtic no sigui extremadament complex. Això vol dir que el model matemàtic sempre diferirà del model real introduint error de manera inevitable. És important ser conscient d'aquest tipus d'incertesa que existeix entre el model real i el matemàtic, ja que si es té present a l'hora de dissenyar el controlador, i es fa de manera robusta, el sistema es comportarà de la manera esperada.

Fins ara s'ha vist que el comportament que té el sistema davant de les pertorbacions es pot descriure mitjançant les funcions de sensibilitat. A part d'això, com s'ha comentat a la definició de sensibilitat, aquestes funcions també descriuen la dinàmica i l'estabilitat del sistema davant incerteses i variacions del sistema [4].

### Incertesa del model

La planta  $G(s)$  pot patir variacions a la seva dinàmica per culpa de les pertorbacions o pels errors del modelatge. La definició de sensibilitat que s'ha introduït anteriorment permet quantificar l'efecte que tenen les variacions a la planta sobre la transferència de



llaç tancat. Prenent els valors de  $H(s)=T(s)$  i  $q=G(s)$  de l'expressió (3.5), s'obté l'expressió que indicarà l'impacte que tenen les variacions de la planta sobre la transferència de llaç tancat.:

$$S_G^T(s) = \lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta T(s)}{T(s)}}{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}} = \frac{\partial T}{\partial G} \frac{G(s)}{T(s)} \quad (3.13)$$

Resolent la derivada, és fàcil veure que l'expressió anterior (3.13) és equivalent a la funció de sensibilitat  $S(s)$ :

$$\text{Si } T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)},$$

$$S_G^T(s) = \frac{C(s)[1+G(s)C(s)] - G(s)C(s)^2}{[1+G(s)C(s)]^2} \cdot \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{1+G(s)C(s) - G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{1}{1+G(s)C(s)} = S(s)$$

La funció  $S_G^T(s)$  que indica l'impacte que tenen les variacions de la planta sobre la transferència de llaç tancat és la funció de sensibilitat  $S(s)$ . Aquest és el motiu del nom que té, ja que indica que l'impacte serà petit per petits valors de la funció de sensibilitat, i gran per valors grans de guany.

## Estabilitat

Segons el *criteri d'estabilitat de Nyquist*, l'estabilitat del sistema en llaç tancat es veu reflectida a la funció de transferència de llaç obert,  $L(s)$ , que a la vegada està formada pel controlador i la planta, ja que:

$$L(s) = C(s)G(s)$$

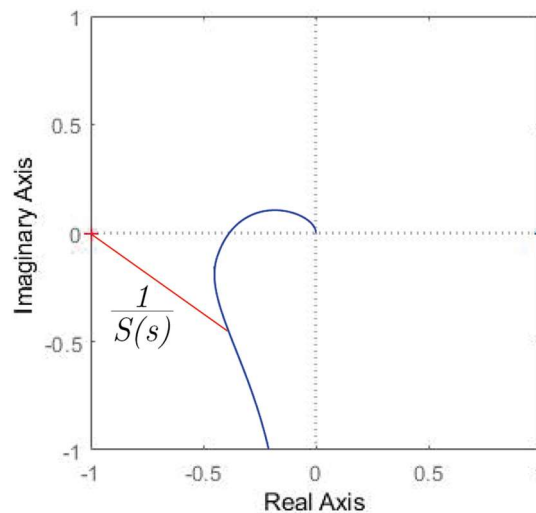
Aquest criteri permet trobar el nombre d'arrels de part positiva de  $1+C(s)G(s) = 0$ , és a dir, el nombre de pols inestables de la funció de transferència de llaç tancat. El mètode per trobar el nombre,  $Z$ , de pols inestables és el següent:

1. Dibuixar la *corba de Nyquist*, el gràfic polar de  $L(j\omega)$  des de  $\omega = 0$  fins a  $\omega = \infty$ .
2. En cas que  $L(s)$  tingui  $r$  integradors purs, es fa precedir  $r$  quarts de volta de radi infinit en sentit negatiu, de manera que acabin on comença la *corba de Nyquist*, a  $\omega = 0$ .
3. Comptar el nombre,  $N$ , de semivoltes en sentit negatiu de la *corba de Nyquist* a l'entorn del punt  $(-1,0)$ .
4. El nombre  $Z$  de pols inestables de la funció de transferència de llaç tancat serà:

$$Z = P + N$$

On  $P$  és el nombre de pols inestables de  $L(s)$ . Per tant, perquè  $Z$  sigui zero, i per tant el sistema de llaç tancat sigui estable,  $P$  i  $N$  han de ser zero. És obvi que si  $P$  és més gran que zero,  $L(s)$  serà inestable i per tant el sistema en llaç tancat també ho serà. Llavors, s'ha de dissenyar un controlador que allunyi la corba de Nyquist del punt crític  $(-1,0)$  del gràfic polar.

L'estabilitat també pot ser interpretada en termes de les funcions de sensibilitat. Ja que la distància entre el punt crític  $(-1, 0)$  i la corba de la Nyquist és la inversa de la funció de sensibilitat, tal com es veu a la Figura 10.

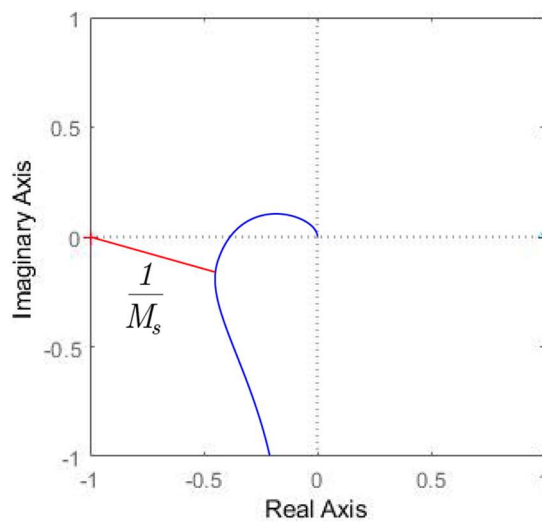


**Figura 10:** Distància entre el punt crític i la corba de Nyquist

Això indica que la distància mínima entre el punt -1 i la corba de Nyquist es produirà quan la funció de sensibilitat sigui màxima. Aquest valor s'anomena marge de mòdul,  $M_s$

$$M_s = \max_{\omega} |S(s)|$$

A la Figura 11 es mostra la distància mínima entre el punt crític i la corba de Nyquist. Interessa que el marge de mòdul sigui relativament petit, ja que això comportarà que la distància mínima entre la corba de Nyquist i el punt -1 sigui gran. Com més gran sigui aquesta distància, el sistema serà més robust en temes d'estabilitat.



**Figura 11:** Representació gràfica del marge de mòdul

El marge de mòdul serà un dels paràmetres que s'utilitzarà per modelar la funció de sensibilitat, que s'explicarà més endavant.

### Robustesa a les variacions del sistema

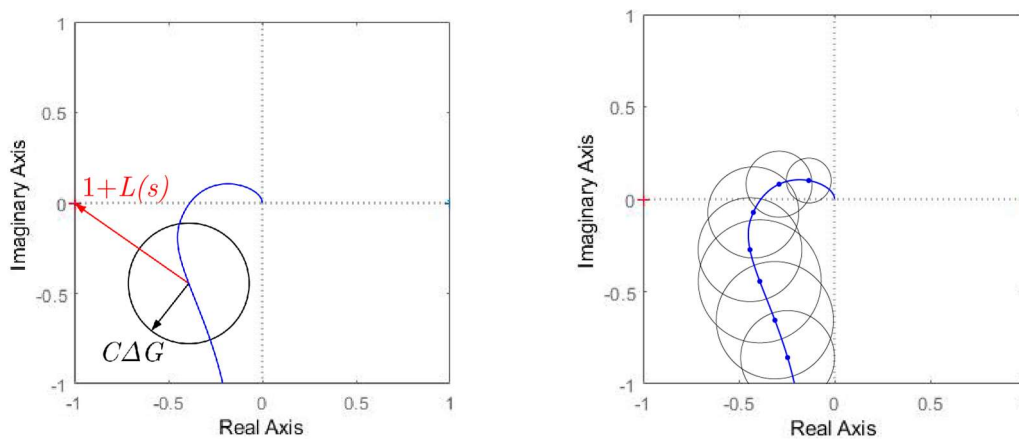
Quan les pertorbacions afecten el sistema, fan que aquest es comporti de manera inesperada. Això és equivalent a una modificació de la planta, tal que:

$$G'(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad (3.14)$$

On la magnitud  $\Delta G$  és el que es coneix com a *incertesa additiva*. Aquesta variació de la planta comporta una modificació de la transferència de llaç obert  $L(s)$ :

$$L'(s) = C(s)G'(s) = C(s)[G(s) + \Delta G(s)] = L(s) + C(s)\Delta G(s) \quad (3.15)$$

Això significa que la nova corba de Nyquist,  $L'(s)$  serà igual que la corba de Nyquist original,  $L(s)$ , més una variació igual a  $C(s)\Delta G(s)$  que es pot produir en qualsevol direcció. Aquesta incertesa es pot representar mitjançant cercles de radi  $C(s)\Delta G(s)$ , com es veu a la Figura 12.



**Figura 12:** Corba de Nyquist considerant incerteses del sistema

Així doncs, perquè el sistema sigui estable independentment de les pertorbacions que pugui patir el sistema, cap cercle pot contenir el punt -1 en el seu interior. Per un sistema estable:

$$|C(s)\Delta G(s)| < |1 + L(s)| \quad \forall \omega$$

O equivalentment:

$$|C(s)\Delta G(s)| < \left| \frac{1}{S(s)} \right| \quad \forall \omega$$

Veient aquesta relació, també es pot veure que és important que el valor de  $S(s)$  sigui petit per augmentar la robustesa del sistema.

### 3.4 Espai d'estats

Les funcions de transferència no són l'única manera de representar sistemes. Són molt eficaces si es vol representar la relació que hi ha entre l'entrada i sortida del sistema, però hi ha mètodes més convenients per representar sistemes de manera més compacta. En aquest projecte s'utilitzarà la representació en espai d'estats i les funcions de transferència.

La representació en espai d'estats és un model matemàtic del sistema físic que consisteix a definir el sistema mitjançant equacions diferencials de primer ordre. Aquest model es basa en els estats, que són grups de variables que resumeixen el passat del sistema amb l'objectiu de fer prediccions dels futurs estats del sistema. [4][5]

Les variables d'estat es representen en vectors i permeten descriure completament el sistema. Si es vol representar un sistema en espai d'estats partint de la funció de transferència, el nombre d'estats necessaris per descriure el sistema és igual a l'ordre d'aquest. És important que aquestes variables han de ser linealment independents, ja que si són combinacions lineals, el sistema no es podrà resoldre.

Si el sistema es tracta d'un sistema LTI (lineals i invariants en el temps), com és el cas dels sistemes d'aquest projecte, la representació és la següent:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.16}$$

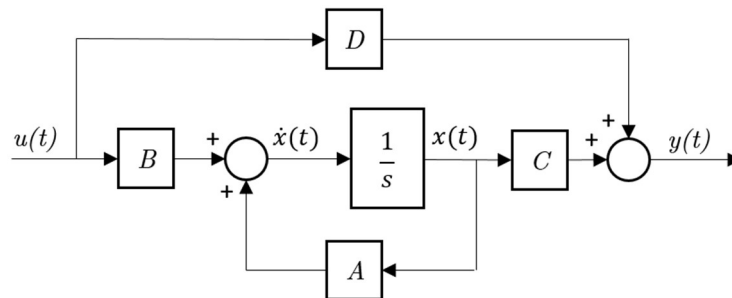
On

- $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  són matrius constants
- $x(t)$  és el vector d'estats
- $\dot{x}(t)$  és la derivada temporal del vector d'estats
- $u(t)$  és el vector de control
- $y(t)$  és el vector de sortida

Es pot veure que aquest model consisteix en dues funcions:  $\dot{x}(x, u)$  i  $y(x, u)$  que depenen del vector d'estats  $x$  i del vector de control  $u$ . La primera és l'equació d'estats que indica

la dinàmica de l'evolució de l'estat del sistema i la segona funció descriu com és la sortida del sistema.

El model d'espai d'estats es pot representar amb un diagrama de blocs, on depenent dels valors de les matrius  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  es poden representar els diferents sistemes. A la Figura 13 es mostra aquesta representació.



**Figura 13:** Diagrama de blocs del model d'espai d'estats

Si el sistema és d' $n$ -èssim ordre, amb  $p$  entrades i  $m$  sortides, les dimensions de les matrius són:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$
- $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$

La matriu  $A$  i  $B$  indiquen com variarà l'evolució de l'estat del sistema depenent de l'estat i de l'acció de control del sistema respectivament. Les matrius  $C$  i  $D$  indiquen com serà la sortida depenent també de l'estat del sistema depenent de l'estat i de l'acció de control del sistema respectivament.

Partint d'una representació en espai d'estats es pot extreure una funció de transferència que relacioni l'entrada  $U(s)$  amb la sortida  $Y(s)$  de la següent manera:

Aplicant la transformada de Laplace a (3.16)

S'obté

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

On, considerant  $x(0)=0$  i simplificant, s'obté

$$[sI - A]X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s)$$

I, substituint,

$$Y(s) = C[(sI - A)^{-1} BU(s)] + DU(s)$$

Sent  $G(s)$  la funció de transferència que relaciona  $U(s)$  i  $Y(s)$ ,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (3.17)$$

Cal dir que les representacions en espai d'estats no són úniques, existeixen infinits espais d'estats per representar un mateix sistema, i tots aquests equivalents entre ells.

## 4 Disseny del controlador, $H_\infty$

S'ha vist que les funcions de sensibilitat aporten una gran informació respecte a el comportament dinàmic del sistema. Restringint valors a certes freqüències i modificant la forma de les funcions es pot aconseguir que el sistema es comporti d'una certa manera. També s'ha vist que les funcions de sensibilitat estan relacionades entre elles, són dependents, i per això serà impossible modelar-les de manera arbitrària sense que es vegin afectades les unes amb les altres.

Les dues funcions de sensibilitat que es modelaran són les següents:

- La funció de sensibilitat,  $S(s)$ . Aquesta funció té la capacitat d'atenuar l'efecte que tenen les pertorbacions, i a més pot garantir que a l'estat estacionari l'error entre la sortida del sistema i la referència estigui limitat a un cert valor.
- La funció de sensibilitat de control,  $S_u(s)$ . Aquesta funció permet modificar el senyal de control,  $U(s)$ , que li arriba a la planta. Si el senyal de control té una freqüència elevada, la planta es pot deteriorar ja que normalment està preparada per rebre valors relativament baixos del senyal de control.

### 4.1 Mètode $H_\infty$

#### 4.1.1 Loop shaping

El mètode  $H_\infty$  és un mètode que garanteix la robustesa i el bon comportament del sistema. La tècnica que s'utilitzarà és la coneguda com *loop shaping* (modelatge de la realimentació). Aquesta tècnica, juntament amb l'optimització  $H_\infty$  permet obtenir controladors on l'estabilitat i el comportament del sistema són els desitjats independentment de les incerteses que pugui haver-hi en el model numèric de la planta o les pertorbacions que poden aparèixer. Per aconseguir aquestes propietats, prèviament



s'han de decidir les propietats de la resposta i d'atenuació de soroll i pertorbacions mitjançant funcions de transferència de ponderació (o d'especificació) en el domini freqüencial. Aquestes funcions seran les encarregades de donar forma a les dues funcions de sensibilitat esmentades anteriorment. Tot seguit, s'haurà d'ajuntar les dues funcions de ponderació al sistema inicial i, mitjançant un procés d'optimització, s'obtindrà el controlador òptim.

Les funcions d'especificació contenen tota la informació necessària de les funcions de sensibilitat que es volen modelar, com per exemple, quin serà l'error en estat estacionari del sistema, el marge de mòdul per garantir un sistema robust o la freqüència d'atenuació de les pertorbacions. Si es modifiquen les funcions de ponderació, la resposta es veu afectada segons les especificacions establertes.

Abans d'explicar en què consisteix el mètode  $H_\infty$ , cal introduir el concepte de norma  $H_\infty$  ja que és essencial per poder entendre el mètode.

#### 4.1.2 Norma $H_\infty$

La norma  $H_\infty$  d'una funció de transferència estable és el valor màxim del guany que s'assoleix a tot l'espectre freqüencial, des de  $\omega = 0$  fins a  $\omega = \infty$ , i es representa així:

$$\|G(s)\|_\infty$$

En aquest cas significa el valor de guany màxim que assoleix la funció de transferència  $G(s)$ . La definició matemàtica de la norma  $H_\infty$  és la següent:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} |G(s)| \quad (4.1)$$

On sup significa suprem i és el valor màxim de tots els valors des de  $\omega = 0$  fins a  $\omega = \infty$ .

A la Figura 14 es pot veure un exemple de la norma  $H_\infty$ , on el valor de la norma és 2.24 que és equivalent a 7dB.

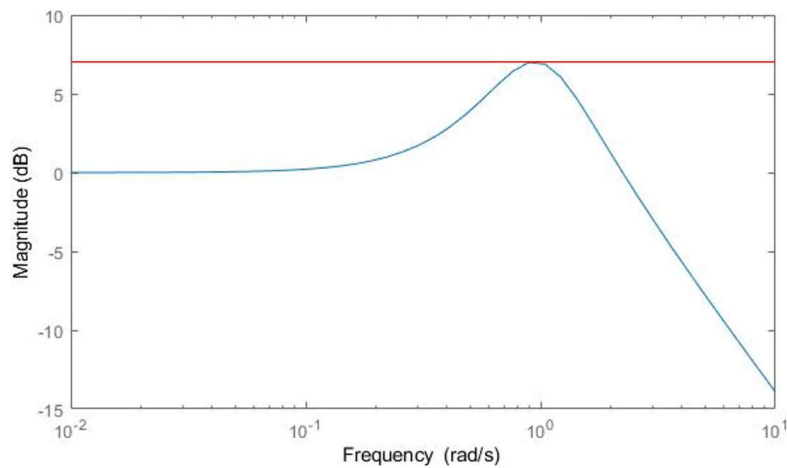


Figura 14: Norma  $H_\infty$  d'un sistema de segon ordre

### Càlcul de la norma $H_\infty$ [6]

Sigui  $\gamma$  un nombre real positiu i sigui una funció de transferència  $G(s)$  representada en espai d'estats tal que:

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

La norma  $H_\infty$  de la transferència  $G(s)$  serà menor que  $\gamma$  si i només si  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  i la matriu  $H$  no té valors propis a l'eix imaginari, on:

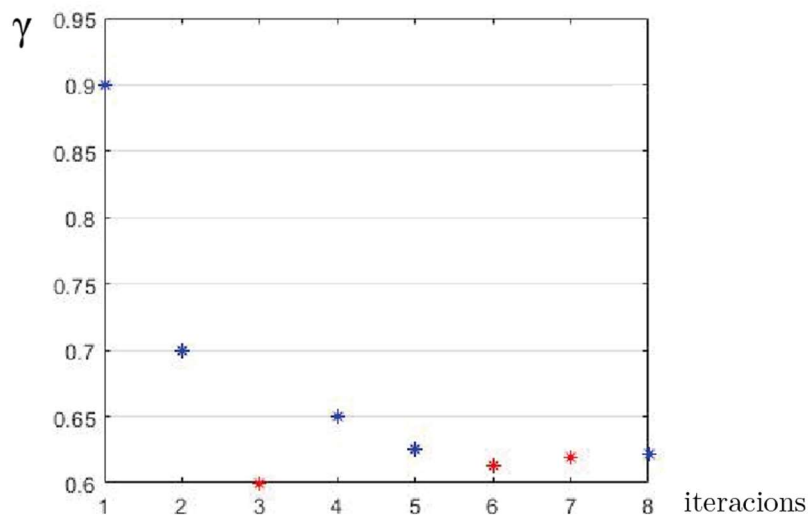
- $\bar{\sigma}(D)$  és el valor singular màxim
- $H(s) = \left[ \begin{array}{cc} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^T C)^T \end{array} \right]$  (4.2)
  - On  $R = \gamma^2 I - D^T D$

El valor de la norma  $H_\infty$  de  $G(s)$  s'obté de manera iterativa. Com tots els mètodes iteratius, s'ha de prendre un valor de tolerància,  $\varepsilon$ , per decidir quan deixar d'iterar. Això comporta que el valor de  $\gamma$  un cop acabada la iteració serà un valor suficientment proper al valor òptim, però es poden donar casos on pot no convergir al valor òptim de  $\gamma$ . Dit

això, un possible mètode iteratiu és el mètode de la bisecció, on l'algoritme de càlcul seria el següent:

1. Inicialment escollir una cota inferior  $\gamma_i$  i una cota superior  $\gamma_s$  de manera que  $\gamma_i \leq \|G(s)\|_\infty \leq \gamma_s$ .
2. Si l'error relatiu  $\frac{\gamma_s - \gamma_i}{\gamma_i} < \varepsilon$ , llavors  $\|G(s)\|_\infty = \frac{\gamma_s + \gamma_i}{2}$  i es pot parar d'iterar.
3. Prendre  $\gamma = \frac{\gamma_s + \gamma_i}{2}$ .
4. Tornar a calcular la matriu  $H$  (4.2) amb el nou valor de  $\gamma$  i calcular-ne els valors propis.
5. Si  $\bar{\sigma}(D) \geq \gamma$  o  $H$  té valors propis a l'eix imaginari, fer  $\gamma_i = \gamma$  (vermell a la Figura 15). En cas contrari fer  $\gamma_s = \gamma$  (blau a la Figura 15).
6. Anar al punt 2.

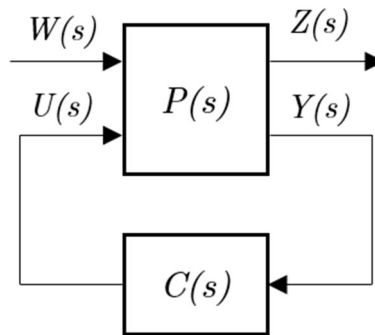
A la Figura 15, estan representats en vermell els valors de  $\gamma$  que han fet que  $\bar{\sigma}(D) \geq \gamma$  o  $H$  tingui valors propis a l'eix imaginari. Estan representats en blau els que no han suposat cap error.



**Figura 15:** Procés iteratiu del càlcul de  $\gamma$

### 4.1.3 Formulació del problema

El problema  $H_\infty$  parteix d'un diagrama de blocs diferent del que s'ha vist fins ara. A la Figura 16 es pot veure el sistema del qual parteix el problema  $H_\infty$ .



**Figura 16:** Sistema del problema  $H_\infty$

On

- $P(s)$  és la planta augmentada, que conté les funcions d'especificacions (més endavant s'explicarà amb detall)
- $C(s)$  és el controlador que s'obtindrà amb l'optimització
- $W(s)$  i  $U(s)$  són entrades de la planta generalitzada
- $Z(s)$  i  $Y(s)$  són sortides de la planta generalitzada

Relacionant les sortides amb les entrades dels elements del sistema s'arriba a les següents expressions:

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$U(s) = C(s)Y(s) \quad (4.4)$$

Es pot veure que la planta augmentada té dues entrades i dues sortides, on la sortida  $Y(s)$  va al controlador, i l'entrada  $U(s)$  és el senyal proporcionada pel controlador, el senyal de control. La planta augmentada en la representació d'espai d'estats té la següent expressió:

$$P: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4.5)$$

El controlador  $C(s)$ , representat en espai d'estats queda així:

$$C: \begin{cases} \dot{x}_C(s) = A_Cx_C(t) + B_Cy(t) \\ u(t) = C_Cx_C(t) + D_Cy(t) \end{cases} \quad C(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_C & B_C \\ \hline C_C & D_C \end{array} \right] \quad (4.6)$$

La funció de transferència de llac tancat que relaciona  $W(s)$  i  $Z(s)$  és important per realitzar l'optimització i, utilitzant les expressions trobades anteriorment:

$$T_{W \rightarrow Z}(P, C) = \frac{Z(s)}{W(s)} = P_{11} + P_{12}C(I - P_{22}C)^{-1}P_{21} \quad (4.7)$$

La formulació del problema és la següent:

Donada una planta augmentada  $P(s)$ , el mètode  $H_\infty$  consisteix en escollir el controlador òptim  $K(s)$  tal que la norma  $H_\infty$  de la funció de transferència de llac tancat que va de  $W(s)$  a  $Z(s)$ ,  $T_{W \rightarrow Z}(P, C)$ , quedi minimitzada i el sistema sigui estable:

$$\text{minimitzar } \|T_{W \rightarrow Z}(P, C)\|_\infty$$

Perquè aquesta minimització sigui útil caldrà escollir els senyals  $W(s)$  i  $Z(s)$  de tal manera que quan se'n minimitzi la norma  $H_\infty$  de  $T_{W \rightarrow Z}(P, C)$ , el sistema es comporti de la manera desitjada. En el següent apartat s'explicarà com dissenyar la planta augmentada perquè tingui aquesta propietat.

## 4.2 Planta augmentada

L'objectiu de dissenyar la planta augmentada és, partint del sistema de llaç tancat convencional, obtenir un sistema semblant al que s'ha acabat de veure, on la planta té dues entrades i dues sortides. A més, aquesta planta haurà de tenir la propietat d'obtenir un bon comportament del sistema quan se'n minimitzi la norma  $H_\infty$  de la funció de transferència  $T_{W \rightarrow Z}(P, C)$ .

Com ja s'ha dit, el bon comportament del sistema s'aconseguirà modelant les funcions de sensibilitat i sensibilitat de control, i aquestes funcions es podran modelar introduint funcions de ponderació al sistema.

### 4.2.1 Modelatge de la funció de sensibilitat $S(s)$

Ja s'ha vist que perquè el sistema sigui robust i tingui un bon comportament dinàmic, la funció de sensibilitat s'ha de minimitzar. A les freqüències on el guany de la funció de transferència, l'error serà menor, ja que en absència de perturbacions:

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

Idealment interessaria que  $S(s)$  fos petita a totes les freqüències, així s'aconseguiria un error petit per a tot l'espectre freqüencial, però això és impossible a causa de les limitacions que té aquesta funció:

- $S(s) + T(s) = 1$ . En el cas que  $S(s) \rightarrow 0$ , es tindria  $T(s) \rightarrow 1 \forall \omega$ , i afectaria la dinàmica del sistema. Com a conseqüència d'aquesta limitació, només es podrà modelar la funció de sensibilitat en un cert rang de freqüències.

- *Integral de Bode:*

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = 0$$

Aquesta integral indica que si disminuïm la sensibilitat a certes freqüències, necessàriament ha d'augmentar a altres freqüències per mantenir la igualtat a zero. Això comporta certa vulnerabilitat del sistema a ser susceptible a pertorbacions i a perdre robustesa davant les incerteses del model.

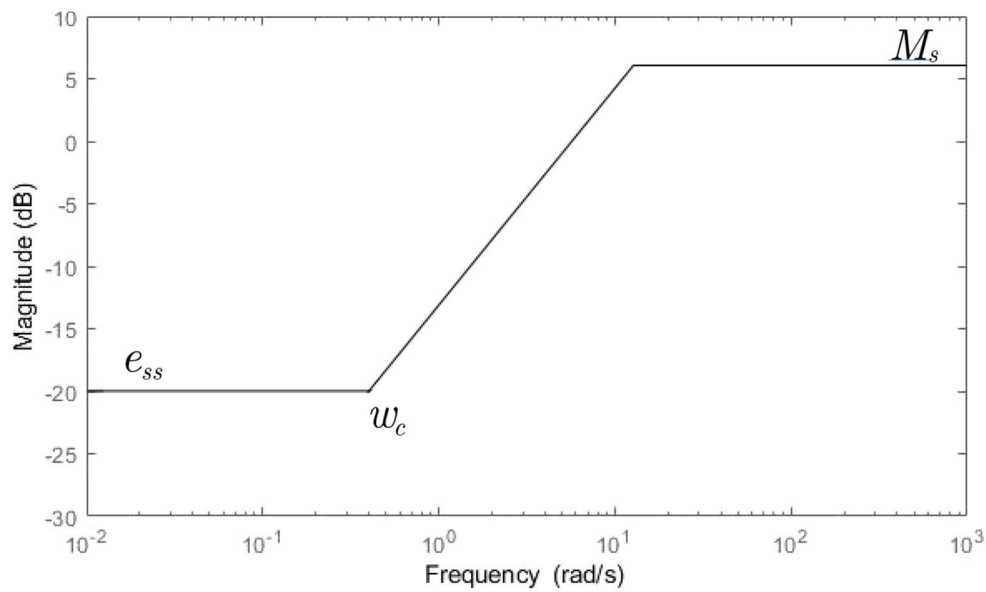
El rang de freqüències on interessa imposar el valor de sensibilitat baix és a les freqüències baixes aconseguint un error estacionari petit. Llavors, a altes freqüències s'ha de permetre que la sensibilitat augmenti. No obstant, el valor màxim de la funció de sensibilitat no pot ser elevat, ja que aquest valor és inversament proporcional al marge de mòdul i, per tant, interessa que sigui el més petit possible.

El fet d'imposar una sensibilitat petita per freqüències baixes i permetre que augmenti a freqüències elevades, on per  $\omega \rightarrow \infty$  el guany tendeix a 1 és el que es coneix com l'*efecte llit d'aigua* i és una de les limitacions fonamentals del control.

La funció de sensibilitat ha de complir les següents característiques:

- Guany reduït a baixes freqüències: s'aconseguirà un error en estat estacionari petit
- Guany entorn als 6dB per a freqüències elevades: aquest valor es correspon a un marge de mòdul de 2, que generalment és el que s'estableix.

Llavors, la funció de sensibilitat ha de tenir la forma de la Figura 17.



**Figura 17:** Forma desitjada de la funció de sensibilitat

On les especificacions són:

- $e_{ss}$  : valor de l'error que tindrà l'amplada de banda  $\omega_c$
- $\omega_c$  : l'amplada de banda on les freqüències que tindran l'error igual a  $e_{ss}$
- $M_s$  : marge de mòdul

Modificant aquests valors es podrà obtenir la funció de sensibilitat desitjada. La forma mostrada a la figura anterior, però, té canvis bruscos de pendent i al treballar en el domini freqüencial no interessa. Per això s'ha creat una funció de transferència, que s'adapta a la forma de la figura anterior però té els vèrtexs suavitzats. La funció depèn dels tres paràmetres vists anteriorment i té la següent expressió.

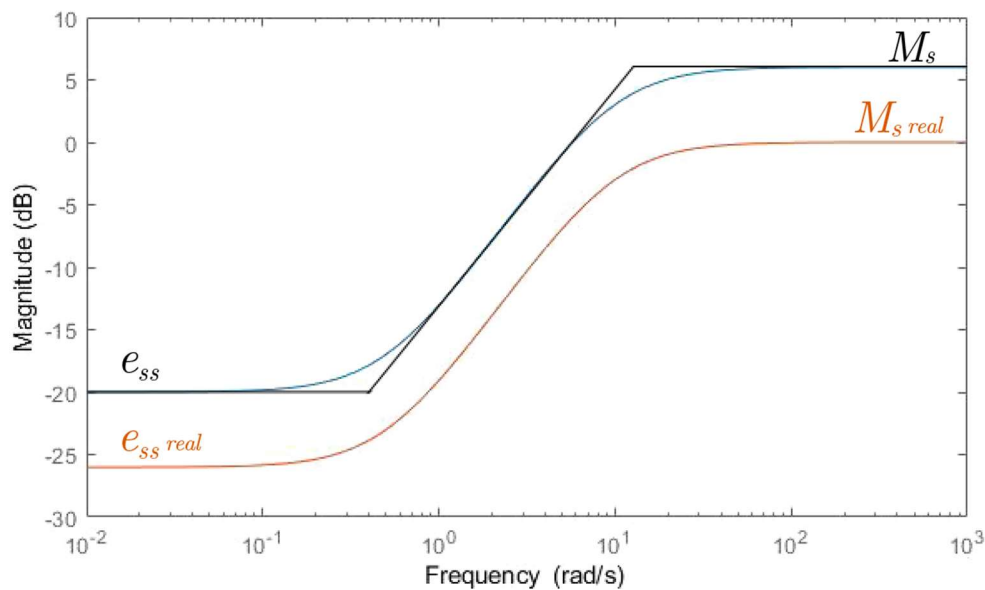
$$\mathcal{S}_e(s) = \frac{s + \omega_b \cdot e_{ss}}{\frac{s}{M_s} + \omega_b} \quad \text{On } \omega_b = \frac{\omega_c}{e_{ss}}$$

Així doncs, aquesta funció de transferència  $\mathcal{S}_e(s)$  es farà servir de model per modelar la funció de sensibilitat  $\mathcal{S}(s)$ .



## Funció d'especificació $W_e(s)$

Els valors de la transferència  $S_e(s)$  de  $e_{ss}$  i  $M_s$  són els valors màxims permesos per a la funció de sensibilitat, de tal manera que si aquesta sempre es manté per sota de  $S_e(s)$ , es compliran les especificacions per a  $S(s)$ . A la Figura 18 es pot veure el que s'acaba d'explicar representat gràficament.



**Figura 18:** Diagrama de Bode de la forma desitjada i la funció de sensibilitat real

On s'obtenen les següents especificacions per a  $S(s)$ :

- $e_{ss} \text{ real} < e_{ss}$
- $M_s \text{ real} < M_s$

Un cop vist l'objectiu al qual es vol arribar, és hora d'introduir la funció d'especificació  $W_e(s)$ .

Si 
$$|S(j\omega)| < |S_e(j\omega)| \quad \forall \omega$$

implica que 
$$\left\| S(s) \cdot \frac{1}{S_e(s)} \right\|_{\infty} < 1$$

Llavors, si es crea una funció de transferència  $W_e(s)$  tal que:

$$W_e(s) = \frac{1}{S_e(s)} = \frac{\frac{s}{M_s} + \omega_b}{s + \omega_b \cdot e_{ss}} \quad \text{On } \omega_b = \frac{\omega_c}{e_{ss}}$$

Llavors:

$$\left\| S(s) \cdot \frac{1}{S_e(s)} \right\|_{\infty} = \left\| S(s) \cdot W_e(s) \right\|_{\infty} < 1 \quad (4.8)$$

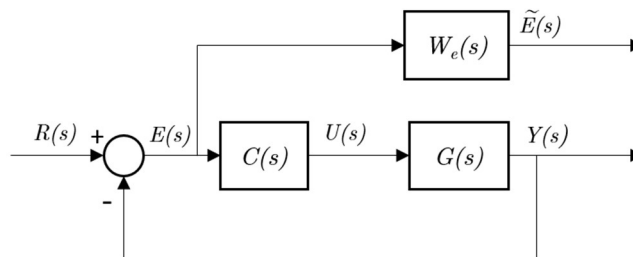
Recordem que estàvem buscant una funció de transferència entre  $W(s)$  i  $Z(s)$  de tal manera que quan se'n minimitzi  $\|T_{W \rightarrow Z}(P,C)\|_{\infty}$ , el sistema es comporti correctament.

Doncs aquesta funció de transferència  $T_{W \rightarrow Z}(P,C)$  és  $S(s) \cdot W_e(s)$ , ja que mentre  $\|S(s) \cdot W_e(s)\|_{\infty}$  sigui menor que 1, la funció de sensibilitat  $S(s)$  estarà modelada correctament i el sistema tindrà un comportament dinàmic correcte.

Si situem la funció de ponderació  $W_e(s)$  a el senyal  $E(s)$ , i n'anomenem  $\tilde{E}(s)$  a la sortida de  $W_e(s)$ , la transmitància entre aquesta sortida i la referència del sistema és  $S(s) \cdot W_e(s)$ .

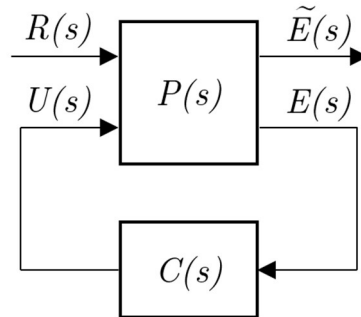
$$\frac{\tilde{E}(s)}{R(s)} = S(s) \cdot W_e(s)$$

A la Figura 19 es mostra com queda el diagrama de blocs amb la incorporació de la funció d'especificacions  $W_e(s)$ .



**Figura 19:** Diagrama de blocs amb la funció d'especificacions  $W_e(s)$

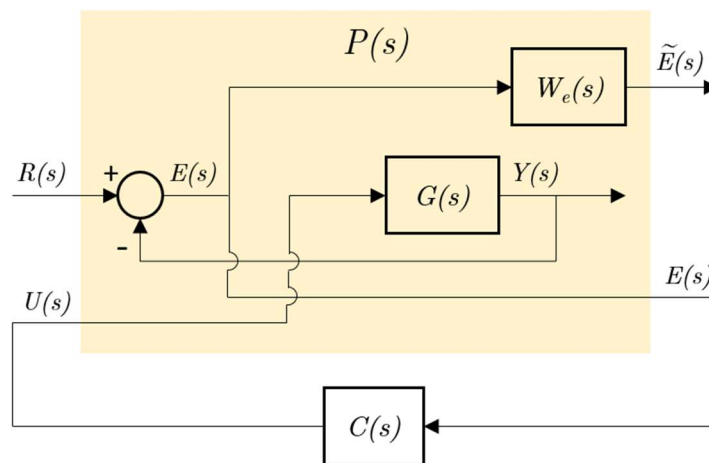
Ara doncs, cal relacionar aquest diagrama amb el diagrama introduït a la formulació del problema  $H_\infty$ , quedant de la següent manera (Figura 20):



**Figura 20:** Senyals per modelar la funció de sensibilitat

On ja s’ha explicat que la transmitància de  $R(s)$  a  $\tilde{E}(s)$  quedarà minimitzada, i és facil veure que el senyal que entra al controlador  $C(s)$  és  $E(s)$  i la que en surt és  $U(s)$ .

Si reordenem el diagrama de blocs inicial, podrem veure la planta augmentada amb dues entrades i dues sortides (Figura 21).



**Figura 21:** Planta augmentada amb la funció d’especificacions  $W_e(s)$

Relacionant les entrades i sortides de la planta augmentada, podrem trobar els valors de  $P_{11}(s)$ ,  $P_{12}(s)$ ,  $P_{21}(s)$  i  $P_{22}(s)$ .

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

On

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e(s) & -W_e(s)G(s) \\ I & -G(s) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

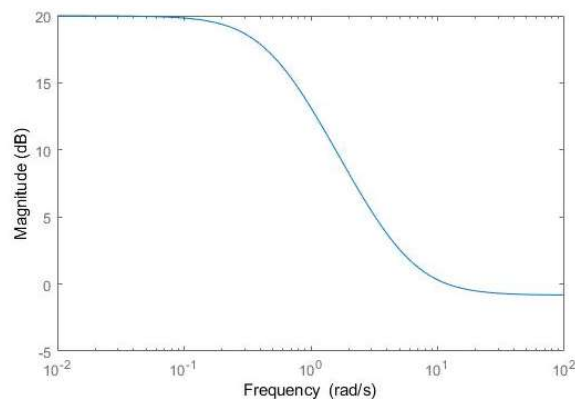
El valor de  $\|S(s) \cdot W_e(s)\|_{\infty}$  n'hi direm  $\gamma$  i l'objectiu serà que sempre sigui menor que 1.

### Anàlisi de $W_e(s)$

Un cop aplicada l'optimització  $H_{\infty}$ , el senyal que queda minimitzada és el senyal  $\tilde{E}(s)$ , ja que se'n minimitza la  $\|S(s) \cdot W_e(s)\|_{\infty}$ . Així doncs, les freqüències de  $E(s)$  que es veuran afectades per aquesta minimització seran les que aconseguixin “passar” la funció d'especificacions  $W_e(s)$ . Com que interessa minimitzar el guany de  $S(s)$  a baixes freqüències, i per tant, minimitzar el senyal  $E(s)$  a baixes freqüències, la funció d'especificacions  $W_e(s)$  ha de ser un filtre passabaix.

La funció d'especificacions  $W_e(s)$  serveix per regular quines freqüències de  $S(s)$  es veuran més o menys afectades per la minimització. Les freqüències on el guany de  $W_e(s)$  sigui elevat es veuran més afectades que on el guany sigui baix.

Si analitzem la funció de transferència  $W_e(s)$  veurem que efectivament es tracta d'un filtre passabaix (Figura 22).



**Figura 22:** Diagrama de Bode del guany de  $W_e(s)$

Aquesta anàlisi és útil per veure i entendre el problema des d'un altre punt de vista, però per modelar les funcions de sensibilitat es farà ús del procediment explicat anteriorment. Es modelarà la funció  $W_e^{-1}$  amb les especificacions desitjades i es procurarà obtenir un valor de  $\|S(s) \cdot W_e(s)\|_\infty$ ,  $\gamma$ , menor que 1 garantint el compliment de les especificacions.

#### 4.2.2 Modelatge de la funció de sensibilitat de control $S_u(s)$

L'altra funció de sensibilitat que interessa modelar és la sensibilitat de control. Aquesta funció de transferència acostuma a tenir un guany elevat a altes freqüències i això comporta una amplificació de les pertorbacions que pugui haver-hi.

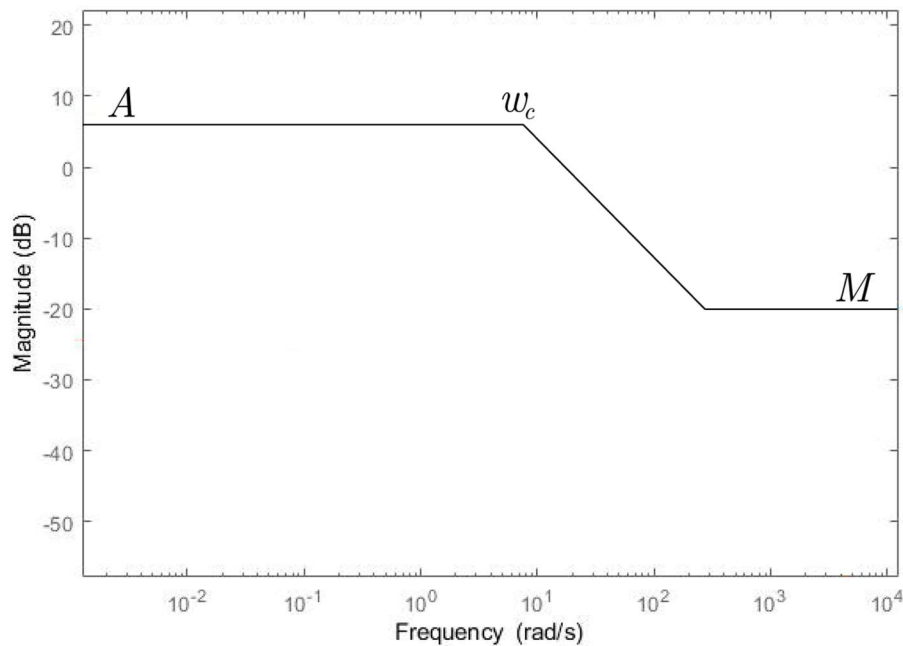
A més, la planta no està preparada per rebre un senyal de control d'una freqüència elevada i els actuadors es poden fer malbé. Així doncs, per solucionar aquests problemes es crearà una funció d'especificacions, de manera semblant amb la funció de sensibilitat, per limitar el guany de  $S_u(s)$  per a freqüències elevades.

S'ha de crear una funció de transferència que actui com a cota superior de la funció de sensibilitat de control. Aquesta funció de transferència, com en el cas del modelatge de la funció de sensibilitat, serà la inversa de la funció d'especificacions,  $W_u(s)$ .

Aquesta funció de transferència,  $W_u^{-1}(s)$  ha de tenir les següents característiques:

- Guany elevat a freqüències baixes: com que només es vol limitar el guany per a freqüències altes, s'escollirà un guany elevat per a les freqüències baixes i així no imposar cap condició a aquestes freqüències.
- Guany reduït a freqüències altes: s'escollirà un valor de guany reduït per a les freqüències altes, ja que interessa limitar el guany de la funció  $S_u(s)$ . El valor de guany que es decideixi serà el valor màxim que podrà prendre el la funció  $S_u(s)$ .

A la Figura 23 es pot veure la forma que ha de tenir la funció  $W_u^{-1}(s)$



**Figura 23:** Forma de  $W_u^{-1}(s)$

On, igual que a la funció d'especificacions  $W_c^{-1}(s)$  també consta de tres paràmetres:

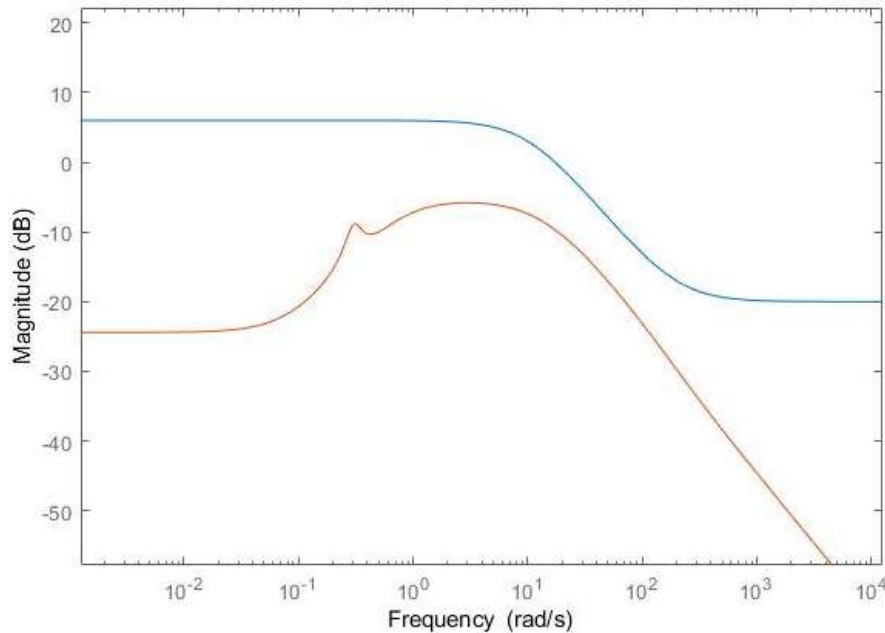
- $A$ : com més gran sigui aquest valor, menys es veuran afectades les baixes freqüències
- $M$ : indica quin serà el grau d'atenuació de les freqüències elevades
- $\omega_c$ : és l'amplada de banda de les freqüències que no es veuen afectades

### Funció d'especificació $W_u(s)$

Es pot veure que la forma anterior té canvis bruscos de pendent, i per tant, com en el cas del modelatge de la funció de sensibilitat, també s'ha de suavitzar. S'ha creat una funció de transferència que s'adapta a la forma anterior però suavitzada. Aquesta funció de transferència és la següent:

$$W_u^{-1}(s) = \frac{s + \omega_b \cdot A}{\frac{s}{M} + \omega_b} \quad \text{On } \omega_b = \frac{\omega_c}{M}$$

Com en el cas de la funció d'especificacions per modelar la funció de sensibilitat, mentre  $\|S_u(s) \cdot W_u(s)\|_\infty$  sigui menor que 1 es compliran les condicions establertes per la funció de transferència  $W_u(s)$ , com es pot veure a la Figura 24.



**Figura 24:** Diagrama de Bode de  $W_u^{-1}(s)$  i de la funció de sensibilitat de control

La condició que es vol imposar, doncs, és la següent:

$$|S_u(j\omega)| < |W_u^{-1}(j\omega)| \quad \forall \omega$$

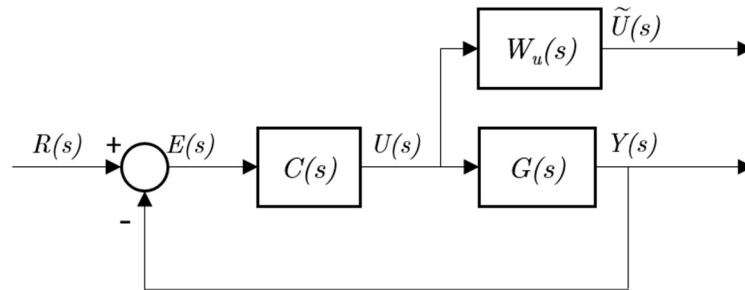
Aquesta condició implica que

$$\|S_u(s) \cdot W_u(s)\|_\infty < 1 \quad (4.10)$$

Per tal d'obtenir la funció de transferència  $S_u(s) \cdot W_u(s)$ , aquesta funció de ponderació ha d'afegir-se al senyal  $U(s)$ . Si la sortida del bloc  $W_u(s)$  li diem  $\tilde{U}(s)$ , la funció de transferència que s'obté al relacionar aquesta sortida amb la referència és, efectivament,  $S_u(s) \cdot W_u(s)$ :

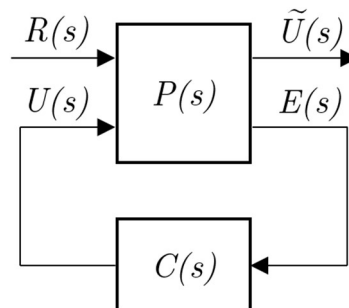
$$\frac{\tilde{U}(s)}{R(s)} = S_u(s) \cdot W_u(s)$$

A la Figura 25 es pot veure com queda el diagrama de blocs amb la funció d'especificacions  $W_u(s)$ :



**Figura 25:** Diagrama de blocs amb la funció d'especificacions  $W_u(s)$

Aquest diagrama cal relacionar-lo amb les entrades i sortides de la planta augmentada, com s'ha fet anteriorment amb l'altra funció d'especificacions. Com que es vol minimitzar la funció de transferència  $S_u(s) \cdot W_u(s)$ , les entrades i sortides de la planta augmentada han de ser les següents (Figura 26):

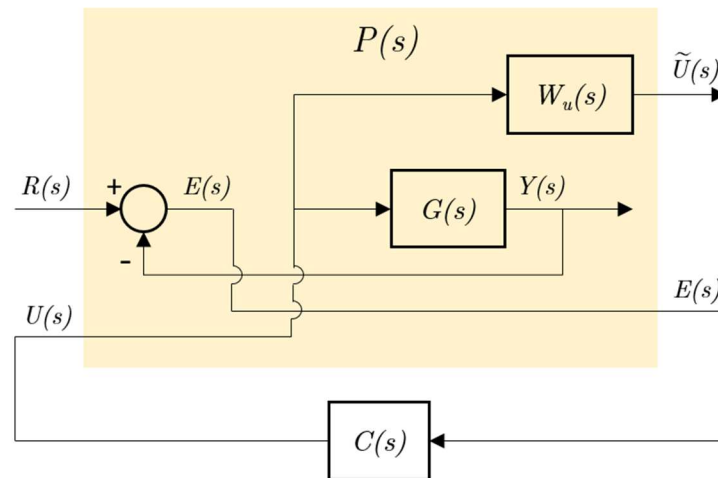


**Figura 26:** Senyals per modelar la funció de sensibilitat de control

Com en el cas anterior, l'entrada del controlador segueix sent el senyal  $E(s)$  i la sortida és el senyal de control  $U(s)$ .

El diagrama de blocs es pot ordenar per visualitzar la planta augmentada en el diagrama de blocs de llaç tancat. A la Figura 27 es mostra aquest diagrama de blocs.





**Figura 27:** Planta augmentada amb la funció d'especificacions  $W_u(s)$

Relacionant les entrades i sortides de la planta augmentada, podem trobar els valors de  $P_{11}(s)$ ,  $P_{12}(s)$ ,  $P_{21}(s)$  i  $P_{22}(s)$ .

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

On

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_u(s) \\ I & -G(s) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

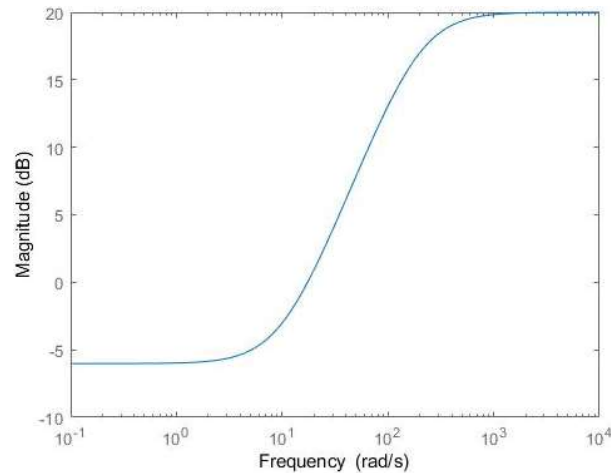
El valor de  $\|S(s) \cdot W_u(s)\|_{\infty}$ , com anteriorment, l'hi direm  $\gamma$  i l'objectiu serà que sempre sigui menor que 1. Cal dir que a l'aplicació interactiva, aquesta funció d'especificacions pot activar-se i desactivar-se segons el problema en qüestió.

### Anàlisi de $W_u(s)$

De la mateixa manera que la funció d'especificacions era un filtre passabaix, ja que es volien minimitzar les freqüències baixes de la funció de sensibilitat, la funció d'especificacions  $W_u(s)$  és un filtre passaalt, ja que es volen limitar les altes freqüències de la funció de sensibilitat de control. Com que es tracta d'un cas anàleg amb la funció

d'especificacions  $W_e(s)$  no es repetirà tota l'explicació. Per més detall, veure l'apartat corresponent.

A la Figura 28 es pot veure el diagrama de Bode de la funció d'especificacions  $W_u(s)$ .



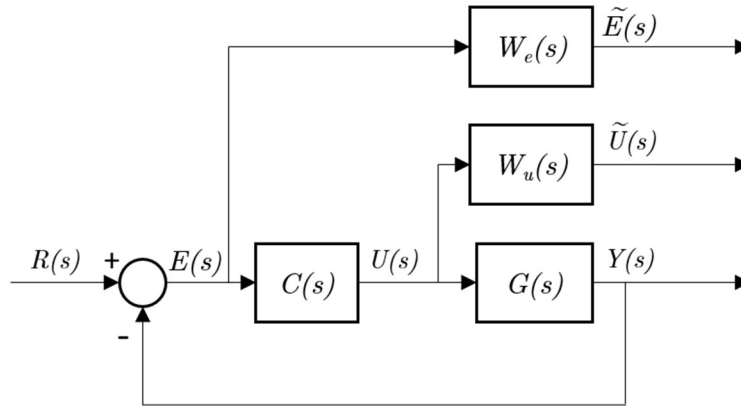
**Figura 28:** Diagrama de Bode del guany de  $W_u(s)$

Les freqüències de  $U(s)$  que es veuen afectades per la minimització són les que “passen” el filtre de la funció d'especificacions. Així doncs, com que interessa limitar, i per tant, minimitzar els senyals d'alta freqüència, la funció d'especificacions ha de permetre que aquestes freqüències no quedin atenuades.

Com en el cas de  $W_e(s)$ , la funció  $W_u(s)$  també serveix per regular quines freqüències de  $U(s)$  es veuen afectades per l'optimització  $H_\infty$  i quines no.

### 4.2.3 Planta augmentada amb les dues funcions de ponderació

S'ha vist que es pot reordenar el diagrama de blocs per tal d'aconseguir un sistema adequat per realitzar l'optimització  $H_{\infty}$ . Quan es vol modelar les dues funcions de sensibilitat a la vegada s'ha d'afegir les dues funcions d'especificacions  $W_e(s)$  i  $W_u(s)$  al diagrama de blocs (Figura 29).

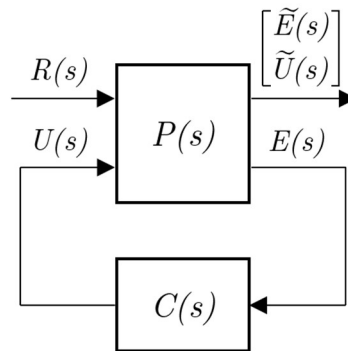


**Figura 29:** Diagrama de blocs amb les funcions d'especificacions  $W_e(s)$  i  $W_u(s)$

Com que les funcions de transferència de les que s'ha de minimitzar la norma  $H_\infty$  són  $S(s) \cdot W_e(s)$  i  $S_u(s) \cdot W_u(s)$ , la sortida  $Z(s)$  de la planta augmentada haurà de contenir els senyals  $\tilde{E}(s)$  i  $\tilde{U}(s)$ , per tant serà un vector tal que:

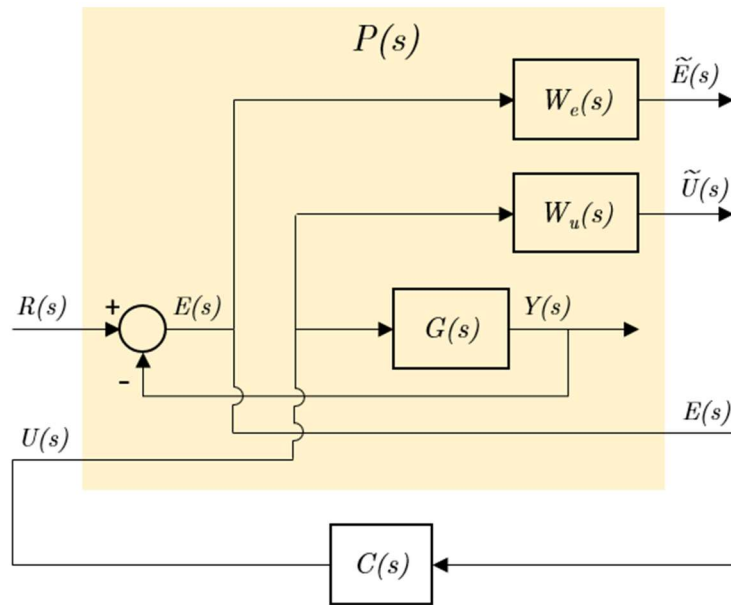
$$Z(s) = [\tilde{E}(s), \tilde{U}(s)]^T$$

Llavors, la planta augmentada quedarà de la següent manera (Figura 30):



**Figura 30:** Senyals per modelar les dues funcions de sensibilitat

A la Figura 31 es pot veure com queda el diagrama de blocs del sistema inicial si es reordena per tal de visualitzar la planta augmentada.



**Figura 31:** Planta augmentada amb les funcions d'especificacions  $W_e(s)$  i  $W_u(s)$

Relacionant les entrades i sortides de la planta augmentada, es troben els valors dels components d'aquesta:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}(s) \\ \tilde{U}(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

On

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e(s) & -W_e(s)G(s) \\ \mathbf{0} & W_u(s) \\ I & -G(s) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

La  $\gamma$ , serà:

$$\gamma = \left\| \begin{bmatrix} S(s)W_e(s) \\ S_u(s)W_u(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

Com que l'optimització afecta tant a la funció de sensibilitat com a la funció de sensibilitat de control i aquestes dues funcions no són independents, es pot donar el cas que no existeixi cap controlador capaç d'obtenir les especificacions desitjades. En aquest

cas, la  $\gamma$  obtinguda serà més gran que 1, i s'haurà de modificar les funcions de ponderació perquè no siguin tan exigents amb les especificacions i poder obtenir el controlador.

## 4.3 Controlador

Hi ha diferents mètodes per dissenyar un controlador que minimitzi la norma  $H_\infty$  de la funció de transferència de llaç tancat. El mètode més antic va ser exposat per Doyle, Glover, Khargonekar i Francis a l'any 1989. Deien que per obtenir la solució al problema  $H_\infty$  s'havia de resoldre dues equacions algebraiques de Riccati. Aquest mètode és el que es coneix com a mètode ARE (algebraic Riccati equations)

Un altre mètode més modern, exposat l'any 1994 per P. Gahinet i P. Apkarian, consisteix en reformular aquestes equacions algebraiques de Riccati en desigualtats de matrius lineals (LMI, linear matrix inequality). Tant aquest mètode com l'anterior utilitzen la representació en espai d'estats. La principal diferència entre els dos és que en el mètode ARE s'han de realitzar unes simplificacions més estrictes i restrictives que en el mètode LMI. Malgrat això, no vol dir que en tots els casos sigui millor utilitzar el mètode LMI. Tot seguit es decidirà quin mètode s'utilitzarà en aquest projecte.

### 4.3.1 Elecció del mètode utilitzat

Com que es tracta d'una aplicació interactiva, és important que l'algoritme de càlcul del controlador sigui el més ràpid possible. Per aquest motiu la velocitat de càlcul ha sigut un dels factors més importants per escollir l'algoritme. També s'ha valorat de manera molt positiva quin és l'algoritme que utilitza el programa MATLAB, ja que és el programa més potent que hi ha al mercat per resoldre problemes de la Teoria de Control.

Tots els mètodes per trobar el controlador utilitzen un valor de tolerància, ja que estan basats en sistemes iteratius i com més petita sigui la tolerància es necessitarà més

iteracions per obtenir resultat, fent la solució més precisa a cada iteració. El nombre d'iteracions i el temps que necessita cada iteració, doncs, són els paràmetres claus que defineixen el temps de càlcul, i el mètode ARE és el més ràpid dels dos, sent de dos a sis vegades més ràpid que el mètode LMI. [7]

El problema principal que té el mètode ARE és que s'han de fer una sèrie de suposicions, i això pot comportar a donar-se casos on, si no es poden realitzar les suposicions, el procés iteratiu sigui més llarg. Amb el mètode LMI aquest problema no existeix gràcies a no necessitar simplificacions al sistema tan estrictes, sent un mètode més constant.

El MATLAB actualment té la majoria de rutines basades en el mètode ARE i com que també és el mètode més ràpid, s'utilitzarà aquest mètode.

### 4.3.2 Mètode ARE (Equacions algebraïques de Riccati)

Cal dir que tots els mètodes requereixen un nivell avançat d'àlgebra i de control. Per aquest motiu en aquest projecte no es profunditzarà en temes purament matemàtics, ja que l'objectiu no és comprendre a la perfecció l'algoritme de càlcul del controlador, sinó saber com i quan utilitzar-lo. Si es desitja obtenir més informació, es proporcionen articles a l'apartat de Referències al final del projecte. [8][9]

Recordem que partim d'una planta augmentada  $P(s)$  i es vol obtenir un controlador  $C(s)$  tals que:

- $$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$
- $$C(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_C & B_C \\ \hline C_C & D_C \end{array} \right]$$

Tot seguit s'exposaran les suposicions que es fan en aquest mètode, considerant que el sistema en qüestió és un sistema amb una entrada i una sortida:

1.  $(A, B_2, C_2)$  és estabilitzable i detectable
2.  $\text{rang}(D_{12}) = 1$  i  $\text{rang}(D_{21}) = 1$
3.  $D_{11} = 0$  i  $D_{22} = 0$
4.  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + 1 \quad \forall \omega$
5.  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + 1 \quad \forall \omega$

Els conceptes d'estabilitzable i detectable són duals, la parella  $(A, B)$  és estabilitzable si i només si  $(A^T, B^T)$  és detectable, i la parella  $(A, C)$  és detectable si i només si  $(A^T, C^T)$  és estabilitzable.

Un sistema  $(A, B)$  serà estabilitzable si  $\text{rang}([B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]) = n$  on  $A$  és una matriu  $n \times n$ . És a dir,  $[B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]$  té rang màxim.

El mètode consisteix en trobar la solució de dues equacions algebraiques de Riccati (ARE). Aquestes són equacions no lineals i tenen la següent forma:

$$A^T X + XA - XPX + Q = 0$$

On  $X$  és la solució a l'equació i és  $n \times n$  simètrica.  $A$ ,  $P$  i  $Q$  són els components de la matriu Hamiltoniana,  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad P = P^T \quad i \quad Q = Q^T$$

Per tant,

$$X = Ric \begin{pmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$$

## Obtenció del valor de $\gamma$

Un cop vist que són les equacions algebraiques de Riccati, les dues ARE que cal resoldre són les següents:

$$\begin{aligned} X_\infty &= Ric \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ -C_1^T D_{1\cdot} \end{pmatrix} R^{-1} [D_{1\cdot}^T C_1 \quad B^T] \right\} \\ Y_\infty &= Ric \left\{ \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C^T \\ -B_1 D_{\cdot 1}^T \end{pmatrix} R_-^{-1} [D_{\cdot 1} B_1^T \quad C] \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

On,

$$\begin{aligned} D_{1\cdot} &= [D_{11} \quad D_{12}] \\ D_{\cdot 1} &= \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} \\ R &= D_{1\cdot}^T D_{1\cdot} - \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R_- &= D_{\cdot 1} D_{\cdot 1}^T - \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aquestes ARE no tindran solució si:

- Existeix algun valor propi de  $X_\infty$  o  $Y_\infty$  té part real igual a 0.
- Existeix algun valor propi de  $(X_\infty Y_\infty)$  més gran o igual que  $\gamma^2$

Per valors de  $\gamma$  elevats aquestes dues equacions tindran solució, però el problema apareix quan es redueix aquest valor. L'objectiu és arribar al valor de  $\gamma$  més petit possible i que les ARE tinguin solució, per això per obtenir el valor es farà mitjançant el mètode de bisecció, de la mateixa manera que s'ha vist al càlcul de la norma  $H_\infty$  de l'apartat 4.1.2.

Si totes les suposicions es compleixen, existirà un controlador que estabilitzi el sistema tal que  $\|T_{W \rightarrow Z}(P, C)\|_\infty = \gamma$ .



## Càlcul del controlador

En el cas que les suposicions es compleixin, el controlador que es vol obtenir tindrà la següent forma:

$$C : \begin{cases} \dot{x}_C(t) = A_C x_C(t) + B_C y(t) \\ u(t) = C_C x_C(t) + D_C y(t) \end{cases} \quad C(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_C & B_C \\ \hline C_C & D_C \end{array} \right]$$

Un cop obtinguts  $X_\infty$ ,  $Y_\infty$  i  $\gamma$ , l'expressió del controlador serà:

- $A_C = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$
- $B_C = -Z_\infty L_\infty$
- $C_C = F_\infty$
- $D_C = 0$

On

- $F_\infty = -B_2^T X_\infty$
- $L_\infty = -Y_\infty C_2^T$
- $Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$

Aquest és el controlador que minimitzarà la  $\|T_{W \rightarrow Z}(P, C)\|_\infty$ , i mentre aquest valor sigui més petit que 1, el controlador serà vàlid per assolir les especificacions desitjades.

## Transformació sobre la planta augmentada (1)

Si la suposició (3) no es compleix, cal aplicar una transformació a la planta per tal que es compleixin. La planta a la que es vol arribar és la següent:

$$\hat{P}(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right]$$

El problema consisteix en trobar un controlador  $\widehat{C}(s)$  que satisfaci  $\|F_l(\widehat{P}, \widehat{C})\|_\infty < \gamma$  i sigui equivalent al controlador  $C(s)$  que satisfaci  $\|F_l(P, C)\|_\infty < \gamma$  ( $F_l$  és la transferència de llac tancat que va de  $w$  a  $z$ , veure la Figura 33).

La transformació consta de 6 passos, que són els següents [6].:

1. Factoritzar les matrius  $D_{12}$  i  $D_{21}$  utilitzant la descomposició en valors singulars:

$$\begin{aligned} D_{12} &= U_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_1 \end{bmatrix} V_1^T \\ D_{21} &= U_2 \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} V_2^T \end{aligned} \quad (4.14)$$

2. Escalar la matriu  $D_{11}$  i fer una partició d'ella en una matriu de  $2 \times 2$  blocs.

$$U_1^T D_{11} V_2 = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

3. Calcular la matriu  $K_\infty$ .

$$K_\infty = -(D_{1122} + D_{1121}(\gamma^2 I - D_{1111}^T D_{1111})^{-1} D_{1111}^T D_{1112}) \quad (4.16)$$

4. Calcular la matriu  $M$ .

$$M = U_1^T D_{11} V_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} + K_\infty \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{12} &= (I - \gamma^{-2} M M^T)^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \widehat{D}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} (I - \gamma^{-2} M^T M)^{-1/2} \\ \widehat{D}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \gamma^{-2} M^T (I - \gamma^{-2} M M^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Factoritzar les matrius  $\widehat{D}_{12}$  i  $\widehat{D}_{21}$  utilitzant la descomposició en valors singulars:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{12} &= U_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_3 \end{bmatrix} V_3^T \\ \widehat{D}_{21} &= U_4 \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} V_4^T \end{aligned} \tag{4.18}$$

6. Calcular les matrius  $T_1$  i  $T_2$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} -U_3^T M V_4 & U_3^T (I - \gamma^{-2} M M^T)^{1/2} U_1^T \\ V_2 (I - \gamma^{-2} M^T M)^{1/2} V_4 & \gamma^{-2} V_2 M^T U_1^T \end{bmatrix} \\ T_2 &= \begin{bmatrix} V_1 \Sigma_1^{-1} K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T (I - L_1)^{-1} & V_1 \Sigma_1^{-1} (I - L_2)^{-1} V_3 \Sigma_3^{-1} \\ \Sigma_4^{-1} U_4^T \Sigma_2^{-1} U_2^T (I - L_1)^{-1} & -\Sigma_4^{-1} U_4^T \left[ \Sigma_2^{-1} U_2^T D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} (I - L_2)^{-1} - \widehat{D}_{22} \right] V_3 \Sigma_3^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.19}$$

On,

$$\begin{aligned} L_1 &= -D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T L_1 \\ L_2 &= -K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} \end{aligned}$$

Un cop realitzats aquests passos, es pot aplicar la transformada que es veu representada a la Figura 32.

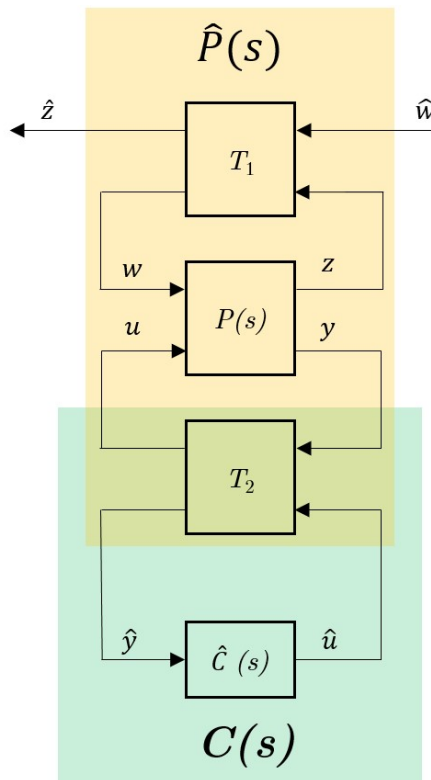
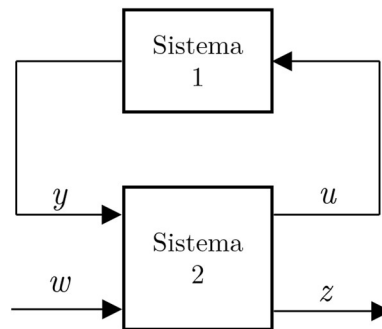


Figura 32: Transformació de la planta augmentada

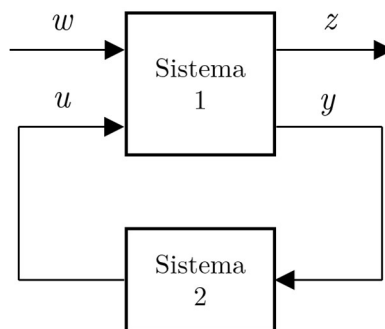
Per obtenir la planta augmentada modificada, cal utilitzar el que es coneix com TFL (transformació fraccional lineal, LFT en anglès) [10]:

$$P(s) = F_u \left( F_l(P(s), T_2), T_1 \right) \tag{4.20}$$

On, a la Figura 33 es pot veure la connexió que realitza la transformació  $F_u$  i a la Figura 34, la connexió que realitza la transformació  $F_l$ .



**Figura 33:** Connexió que realitza la transformació  $F_u$



**Figura 34:** Connexió que realitza la transformació  $F_l$

Amb aquestes transformacions s’aconsegueix que  $\widehat{D}_{11} = 0$  i  $\widehat{D}_{22} = 0$ . Per tant, ja es pot aplicar l’algorisme de càlcul del controlador. Cal dir que com que aquesta transformació depèn de  $\gamma$ , per cada iteració de l’algorisme de càlcul del controlador s’haurà de realitzar aquesta transformació.

Un cop obtingut el controlador, cal desfer la transformació respecte la matriu  $T_2$ , quedant així.

$$C(s) = F_l(T_2, \widehat{C}(s))$$

## Transformació sobre la planta augmentada (2)

Si la suposició (2) no es compleix, s'ha de modificar la planta augmentada per aconseguir que el rang tant de  $D_{12}$  com de  $D_{21}$  sigui igual a 1 [8]. Per fer-ho, primerament s'haurà d'afegir una columna i una fila de zeros com es mostra a continuació:

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc|c} A & B_1 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 & D_{22} \end{array} \right]$$

Veiem que ara  $\tilde{D}_{12} = [D_{12} \ 0]^T$  i  $\tilde{D}_{21} = [D_{21} \ 0]$ . Ara es tracta de sumar-hi unes pertorbacions amb l'objectiu que els rangs de  $\tilde{D}_{12}$  i  $\tilde{D}_{21}$  siguin igual a 1, de la següent manera:

$$\tilde{D}_{12} = \begin{bmatrix} D_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad \tilde{D}_{21} = [D_{21} \ 0] + [0 \ \varepsilon]$$

Mentre  $\varepsilon$  sigui diferent de zero, els rangs de  $\tilde{D}_{12}$  i  $\tilde{D}_{21}$  seran 1. En aquest punt, si la suposició (3) no es compleix, també caldria aplicar la transformació de l'apartat anterior.

Aquest procés és un procés iteratiu ja que l'objectiu és anar reduint el valor d'  $\varepsilon$  fins que sigui totalment negligible (ordre de  $10^{-8}$ ). Per la primera iteració es començarà amb una  $\varepsilon$  suficientment gran,  $\varepsilon=0.001$ , perquè no doni errors al calcular trobar  $\gamma$ . Per cada iteració es guardarà el valor de  $\gamma$  trobat, de tal manera que quan apareguin errors al trobar  $\gamma$  ( $\varepsilon$  molt petits), ens quedarem amb l'últim valor obtingut.

La planta augmentada, doncs, queda així:

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc|c} A & B_1 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \hline C_2 & D_{21} & \varepsilon & D_{22} \end{array} \right]$$

Aquest és un procés molt més llarg que si la planta augmentada no s'ha de modificar, ja que el nombre d'iteracions es veu augmentat exponencialment.

Un cop trobat el controlador, com s'ha augmentat les dimensions de la planta augmentada, el controlador obtingut no serà de les dimensions desitjades, tindrà dues entrades i dues sortides:

$$C(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A_C & B_{C_1} & B_{C_2} \\ \hline C_{C_1} & D_{C_{11}} & D_{C_{12}} \\ C_{C_2} & D_{C_{21}} & D_{C_{22}} \end{array} \right]$$

Per tal que el controlador s'adapti al sistema inicial d'una entrada i una sortida, el controlador anterior es modificarà de la següent manera:

$$C(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_C & B_{C_1} \\ \hline C_{C_1} & D_{C_{11}} \end{array} \right]$$

Aquesta simplificació només és vàlida per sistemes com el que s'ha plantejat en aquest projecte.

### **Funció de transferència de llaç tancat**

Un cop obtingut el controlador, interessa retornar al sistema inicial per si es vol estudiar la transferència de llaç tancat  $T(s)$ :

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

En aquest cas, com a la transformació de la planta de l'apartat anterior, també cal aplicar la TFL. Es tracta de simplificar les representacions en espai d'estats de la planta augmentada i el controlador de la següent manera:

Si

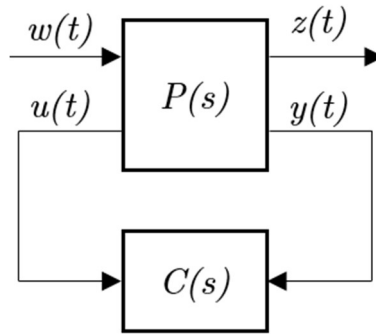


Figura 35: Sistema del problema  $H_\infty$

$$P: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases} \quad \text{On } D_c=0, \quad C: \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases}$$

L'objectiu és aconseguir una nova representació en espai d'estats que tingui aquesta forma:

$$T: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_T x(t) + B_T w(t) \\ z(t) = C_T x(s) + D_T w(t) \end{cases}$$

Si mirem la Figura 35, comprovarem que  $T$  té com a entrada  $w(t)$  i  $z(t)$  com a sortida, sent la funció de transferència de llaç tancat.

Si substituïm l'expressió  $u(t)$  provenint de  $C$  a  $P$ , obtenim:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + B_1w(t) + B_2C_c x_c(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}C_c x_c(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}C_c x_c(t) \end{aligned}$$

Si ara substituïm l'expressió  $y(t)$  a  $\dot{x}_c(t)$ , obtenim:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c [C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}C_c x_c(t)]$$

Si el vector d'estats de  $T$  és:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \text{ i per tant} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix}$$

Llavors, la representació d'estats de  $T$  queda de la següent manera:

$$T: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_C \\ B_C C_2 & A_C + B_C D_{22} C_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_C D_{21} \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) = [C_1 \quad D_{12} C_C] \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + D_{11} w(t) \end{cases}$$

On els components de la representació d'espai d'estats de  $T$  és:

- $A_T = \begin{bmatrix} A & B_2 C_C \\ B_C C_2 & A_C + B_C D_{22} C_C \end{bmatrix}$
- $B_T = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_C D_{21} \end{bmatrix}$
- $C_T = [C_1 \quad D_{12} C_C]$
- $D_T = D_{11}$

On la funció de transferència  $T(s)$  serà:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_T (sI - A_T)^{-1} B_T + D_T$$



## 5 Programa interactiu

La idea que va originar aquest projecte va ser, des del principi, crear un programa que permetés dissenyar controladors de manera interactiva. Aquest programa permetria modificar les variables del sistema d'una manera senzilla i, un cop obtingut el controlador desitjat, poder exportar-lo i ser utilitzat en altres programes, com ara el MATLAB.

La plataforma ideal per programar aquest tipus d'aplicacions és el programa Sysquake. Els dos factors que van fer decidir-se per utilitzar aquest programa van ser la ràpida velocitat de càlcul i la facilitat de crear una interfície interactiva.

Al ser una aplicació interactiva, és molt important que els càlculs es realitzin quasi a l'instant, ja que constantment s'estan modificant les variables. Si l'usuari ha d'estar esperant que el programa realitzi els càlculs, l'experiència que obtindrà serà molt dolenta i per tant aquest és un factor molt important. Si es compara aquest programa amb el MATLAB, ràpidament es pot veure que el Sysquake és molt més senzill; no contempla tantes funcions. Això que en alguns casos podria ser un defecte, afecta de manera positiva a la velocitat de càlcul.

El Sysquake també ofereix moltes facilitats per crear una interfície personalitzable de manera molt fàcil. No només és senzill crear la distribució de diferents gràfics i imatges, sinó que implementar la interactivitat en aquests gràfics també ho és. Això permet modificar les variables amb el cursor de l'ordinador i automàticament calcular-ne els resultats.

Aquest programa és útil per a tots els usuaris tot i no tenir coneixements avançats de la Teoria de Control. Com que el controlador es calcula utilitzant un algoritme intern, l'usuari pot establir les especificacions a obtenir i el programa retorna el controlador automàticament. No obstant, s'ha de saber llegir si el controlador serà apte per complir les especificacions o no, i es farà analitzant el valor de  $\gamma$  obtingut.

A més, com que aquest programa es controla amb el cursor fent click o arrossegant (*click and drag*) les diverses opcions interactives que hi ha, està capacitat per ser transportat a

dispositius tàctils. En un futur potser es contempla l'opció de transportar-lo a altres plataformes.

## 5.1 Sysquake

Sysquake és un programa informàtic numèric basat en un llenguatge de programació en gran part compatible amb MATLAB. El punt fort del programa és l'obtenció de gràfics interactius, que permeten una manipulació de les variables de manera molt intuïtiva. Aquesta eina és especialment útil per dissenyar controladors amb la tècnica *loop shaping*.

La tècnica *loop shaping*, com s'ha dit anteriorment, consisteix en anar modificant les funcions de ponderació de manera iterativa fins a obtenir el controlador que estabilitzi el sistema amb les especificacions desitjades. La interactivitat és molt útil, ja que aquest procés, de manera visual és molt més intuïtiu que de manera numèrica. A cada modificació de les funcions que es realitza, es calcula automàticament el controlador òptim, els diagrames de Bode i les respostes temporals que es mostren. Això permet obtenir informació en tot moment del sistema i modificar les especificacions al respecte.

### 5.1.1 Llibreries

Les llibreries són funcions dins d'una mateixa temàtica que estan agrupades en un document amb extensió *.lme* i fins que no s'importen, no es poden utilitzar. Són molt útils, ja que si no es disposés de llibreries, la velocitat de càlcul es veuria afectada ja que totes les funcions haurien d'estar disponibles per ser utilitzades, ocupant més capacitat de processador. Per importar-les, s'ha d'utilitzar la següent comanda:

```
use "llibreria"
```

La llibreria més utilitzada ha estat la llibreria LTI (Linear Time-Invariant)[11]. Aquesta llibreria permet realitzar una gran quantitat de funcions relacionades amb la teoria de

control. Entre totes les funcions que conté la llibreria, es troben les següents funcions que s'han utilitzat:

- `tf("numerador","denominador")` – Retorna la funció de transferència amb el numerador i denominador corresponents.
- `zpk("zeros","pols","guany")` – Retorna la funció de transferència amb els zeros, els pols i el guany corresponents.
- `ss("sistema")` – Retorna els components A, B, C i D de la representació d'espai d'estats del sistema corresponent

No obstant, el programa no incorpora cap llibreria que proporcioni funcions de Control Robust, cosa que ha dificultat la realització del projecte. Com que el MATLAB si que les incorpora i el Sysquake presenta moltes similituds pel que fa al llenguatge de programació, s'han pres com a referència per codificar-les amb el Sysquake.

S'ha creat un arxiu anomenat *robust.lme* que conté totes les funcions necessàries que es necessiten per realitzar els càlculs explicats anteriorment:

- `augw`: partint de la planta  $G(s)$ , i les funcions d'especificació  $W_e(s)$  i/o  $W_u(s)$ , retorna la planta augmentada  $P(s)$ .
- `norminf`: retorna la norma  $H_\infty$  del sistema que s'introdueixi com a entrada de la funció. Es calcula mitjançant el procés iteratiu d'obtenció del valor de  $\gamma$  (veure apartat 4.1.2)
- `hinfinit`: retorna el controlador, el valor de  $\gamma$  i la funció de transferència de llaç tancat  $T(s)$  d'una planta augmentada  $P(s)$ . Aquesta funció està basada en la funció del MATLAB `hinfsyn`, i la metodologia per obtenir les tres variables de sortida és el mateix que s'ha explicat a l'apartat 4.3.2
- `lti`: retorna la funció de transferència de llaç tancat  $T(s)$  del sistema a partir de la planta augmentada  $P(s)$  i el controlador obtingut  $C(s)$ . La metodologia utilitzada és l'explicada a l'apartat 4.3.2

## Estructura de dades

Una de les coses més importants a l'hora de crear el codi d'un programa és l'organització de variables i funcions, ja que si es cometen errors, serà molt més fàcil identificar-los. Amb l'objectiu d'estructurar de manera eficient les variables del sistema s'ha utilitzat el que es coneix com una estructura de dades.

L'estructura de dades és una variable que té la funció d'emmagatzemar els valors de totes les variables que es desitgi. El nom que se li ha posat és *Dades\_Sistema* i per introduir o modificar variables només cal afegir el sufix “*Dades\_sistema.*” i tot seguit el nom de la variable, per exemple “*G*”. Tot seguit se'n mostra un exemple:

```
Dades_sistema.G=zpk(Dades_sistema.G_z, Dades_sistema.G_p, Dades_sistema.G_k)
```

En aquest exemple, el valor de la planta *G* es veuria modificat pel valor obtingut d'aplicar la funció *zpk* que genera la funció de transferència amb els zeros, pols i guany (*G\_z, G\_p, G\_k*).

### 5.1.2 Interfície del programa

La interfície del programa s'ha dissenyat perquè sigui el més intuïtiu possible, podent dissenyar el controlador sense necessitat de necessitar documentació addicional. Com es pot veure a la Figura 36, la interfície consta de diverses parts.

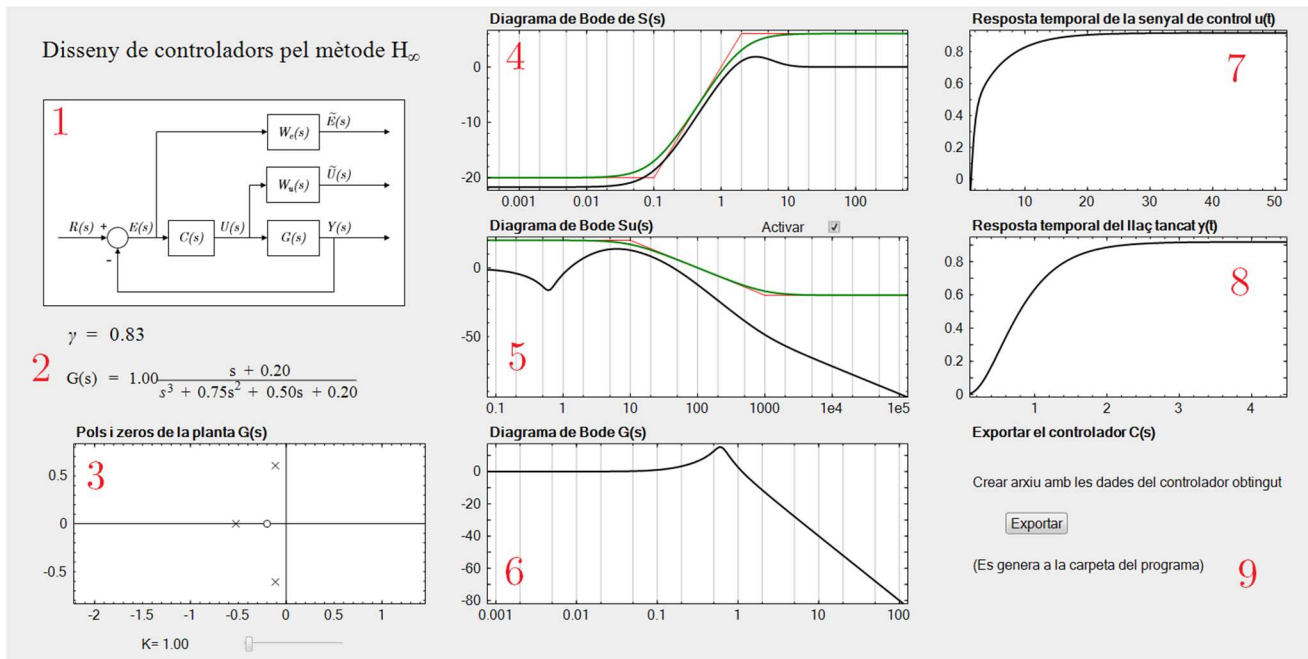


Figura 36: Intefície del programa

1. Diagrama de blocs del sistema.
2. Informació del sistema: l'expressió de la planta del sistema i el valor de  $\gamma$  obtingut.
3. Gràfic del pla s de pols i zeros de la planta  $G(s)$ .
4. Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat  $S(s)$  i de la funció de ponderació  $W_e(s)$ .
5. Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat de control  $S_u(s)$  i de la funció de ponderació  $W_u(s)$ .
6. Diagrama de Bode del guany de la planta  $G(s)$ .
7. Resposta temporal del senyal de control  $u(t)$ .
8. Resposta temporal del senyal de sortida del sistema  $y(t)$ .
9. Exportar el controlador obtingut.

## Diagrama de blocs

Mostra el diagrama de blocs del sistema amb les funcions de ponderació que estan actives en el moment. Com que l'especificació  $W_u(s)$  es pot activar i desactivar, el bloc de  $W_u(s)$  es mostrarà o s'ocultarà depenent si esta activa o no.

A la carpeta del programa hi ha dues imatges en format *.png*, una d'elles amb el bloc  $W_u(s)$  i l'altre sense, i es renderitza la imatge que s'escaigui en cada moment. A la Figura 37 es pot veure com està representat el diagrama de blocs a l'aplicació.

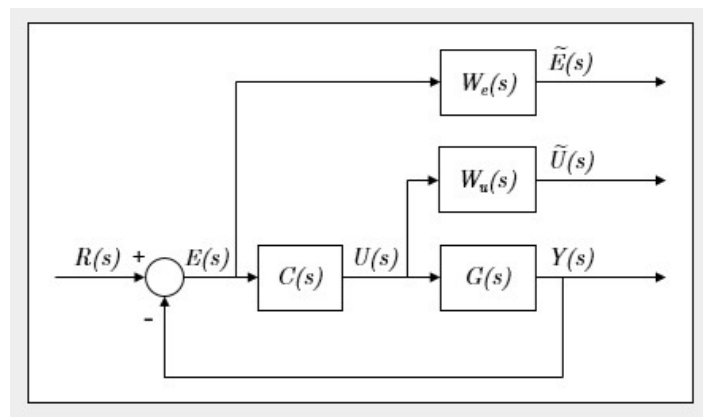


Figura 37: Diagrama de blocs del sistema

## Informació del sistema

En aquest apartat es mostra el valor de  $\gamma$  que s'ha obtingut en calcular el controlador. Si el valor de  $\gamma$  és més gran que 1, i per tant el controlador no compleix les especificacions, el text es mostra de color vermell. D'aquesta manera es veurà ràpidament que s'han de canviar les especificacions per unes de menys exigents per obtenir un controlador vàlid.

També s'hi mostra l'expressió de la funció de transferència de la planta actual en funció de la variable  $s$ .

$$\gamma = 0.83$$

$$G(s) = 1.00 \frac{s + 0.20}{s^3 + 0.75s^2 + 0.50s + 0.20}$$

Figura 38: Informació del sistema

A la Figura 38, es mostra el valor de  $\gamma$  i l'expressió de la planta del sistema.

### Mapa de pols i zeros de $G(s)$

En aquesta finestra es poden visualitzar i modificar els valors dels pols i els zeros de la planta. Aquesta finestra és interactiva, és a dir que movent els pols i zeros del mapa, es pot definir la planta  $G(s)$ . Com que per definir la planta també es necessita definir el valor del guany, s'ha afegit un *slider* que servirà per modificar el valor del guany de la planta.

Mentre els pols estiguin situats al semiplà esquerre, la planta serà estable. A més dels pols, els zeros també tenen un efecte sobre la planta. Si tots els zeros també estan situats al semiplà esquerre, es tracta d'una planta amb fase mínima, i si conté algun zero de part real positiva, es tracta d'una planta amb fase no mínima. Aquests dos tipus de planta tenen la mateixa característica de guany, però no de fase, ja que les plantes de fase no mínima tenen un retràs de fase a freqüències altes.

Com es pot veure a la Figura 39, en el mapa de pols i zeros, els zeros estan representats per la forma 'o' mentre que els pols ho estan per la forma 'x'. Aquesta és una manera estandarditzada de la representació de pols i zeros.

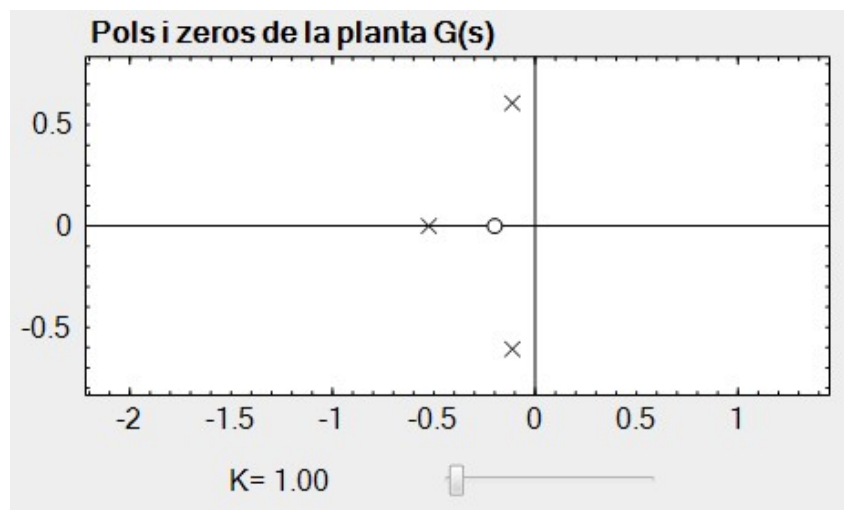


Figura 39: Mapa de pols i zeros de la planta

## Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat

Es mostra com varia el guany de la funció de sensibilitat  $S(s)$  per totes les freqüències utilitzant el diagrama de Bode. En aquesta finestra no només hi ha aquest diagrama de Bode de la funció de sensibilitat, es pot veure que en total hi ha tres funcions representades, cada una d'elles d'un color diferent (Figura 40):

- Funció de modelatge de la funció de ponderació  $W_e(s)$ (vermell): permet definir els valors de la funció de ponderació. Consta de dues semirectes i un segment formant la forma bàsica que se li vol donar a la  $S(s)$  que s'ha comentat anteriorment. Interactuant amb les semirectes i el segment es podrà modificar els paràmetres de la funció  $W_e(s)$ .
- Diagrama de Bode de  $W_e(s)$ (verd): és la funció d'especificacions que s'utilitza com a cota superior de la funció de sensibilitat.
- Funció de sensibilitat  $S(s)$  (negre): mentre aquesta funció estigui per sota de la funció  $W_e(s)$ , la funció de sensibilitat complirà les especificacions que s'han establert.

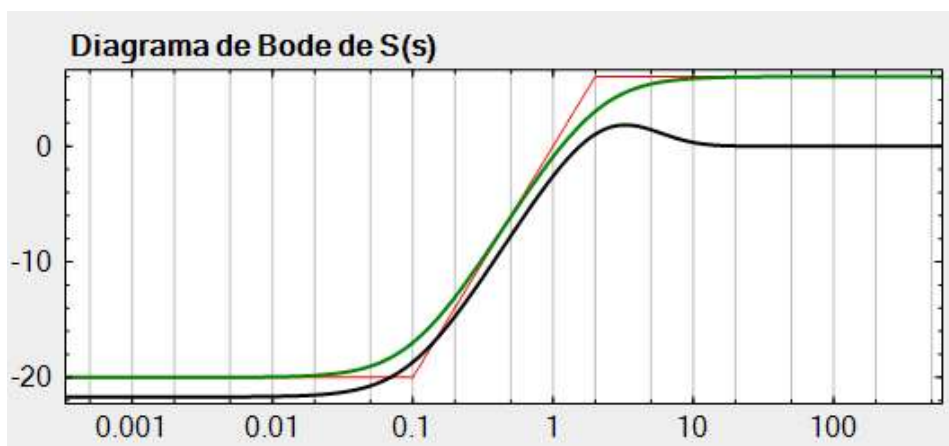


Figura 40: Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat

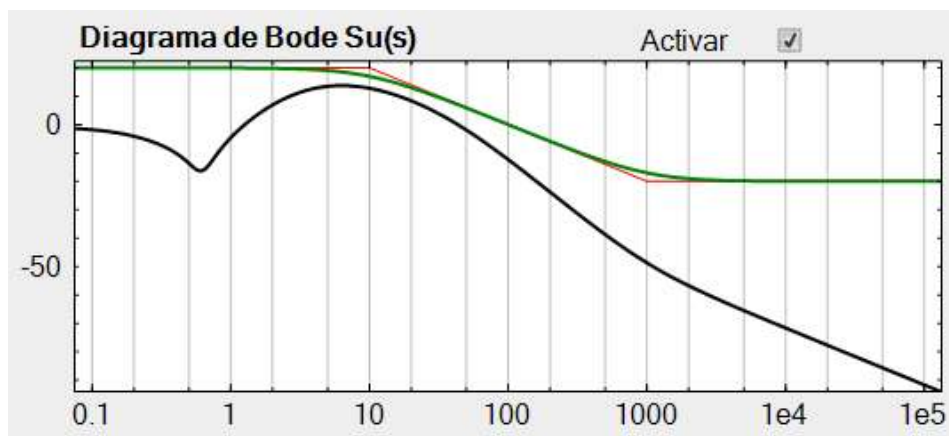


## Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat de control

De manera molt semblant a la finestra anterior, es mostra el diagrama de Bode de la funció de sensibilitat de control  $S_u(s)$ . La interacció amb el diagrama funciona de la mateixa manera, i les tres funcions representades són:

- Funció de modelatge de la funció de ponderació  $W_u(s)$ (vermell): permet interactuar amb les semirectes i el segment i així modificar els paràmetres de la funció  $W_u(s)$ .
- Diagrama de Bode de  $W_u(s)$ (verd): és la funció d'especificacions que s'utilitza com a cota superior de la funció de sensibilitat de control.
- Funció de sensibilitat de control  $S_u(s)$  (negre): mentre aquesta funció estigui per sota de la funció  $W_u(s)$ , es compliran les especificacions establertes.

A diferència de la funció de ponderació  $W_c(s)$ , la  $W_u(s)$  es pot activar i desactivar quan s'escaigui depenent del problema que es presenta i les especificacions que es volen imposar. Per fer-ho hi ha un botó a la dreta del títol, i si la funció està desactivada, només es veurà representada la funció de sensibilitat de control (Figura 41).



**Figura 41:** Diagrama de Bode del guany de la funció de sensibilitat de control

## Diagrama de Bode del guany de la planta

En aquesta finestra es pot veure com varia el guany de la planta  $G(s)$  en tot l'espectre freqüencial, mitjançant el diagrama de Bode. El guany es mostra en dB i les freqüències en rad/s. Aquesta finestra és important per veure quin comportament tindrà la planta en qüestió. A la Figura 42 es pot veure com està representat el diagrama de Bode a l'aplicació.

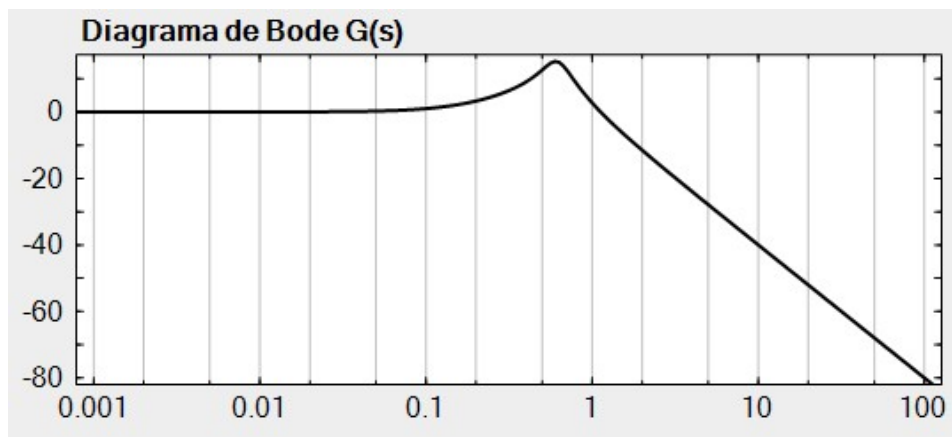


Figura 42: Diagrama de Bode del guany de la planta

## Resposta temporal del senyal de control $u(t)$

En aquesta finestra es pot veure el valor del senyal de control en funció del temps. Aquesta és el senyal que arriba a la planta del sistema (Figura 43).

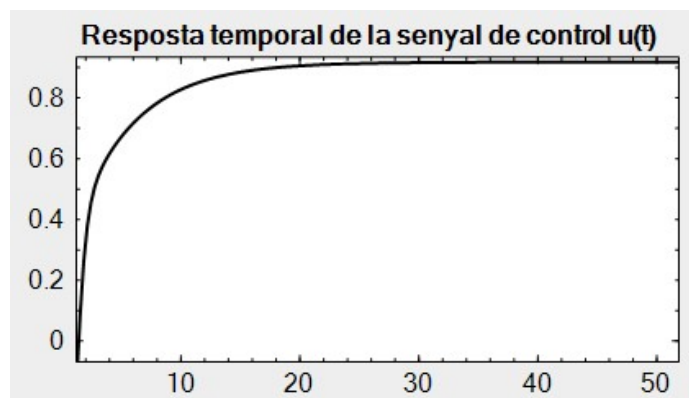


Figura 43: Resposta temporal del senyal de control

## Resposta temporal del senyal de sortida del sistema $y(t)$

Igual que a la finestra anterior, permet veure el valor del senyal de sortida en funció del temps. És útil per veure en quin moment el sistema arriba a l'estat estacionari (Figura 44).

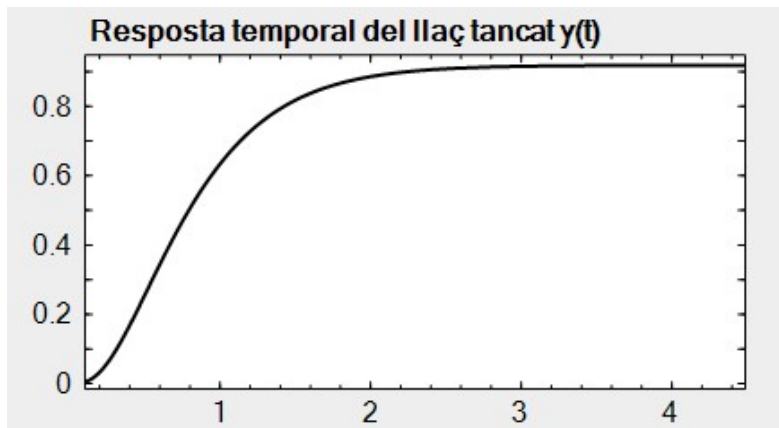


Figura 44: Resposta temporal del senyal de sortida del sistema

## Exportar el controlador obtingut

Aquesta part de la interfície està dedicada a poder extreure el controlador obtingut del programa. El programa no tindria sentit si un cop obtingut el controlador òptim no es pogués utilitzar per a altres aplicacions. Per això s'ha incorporat un botó que quan es prem, es genera un arxiu de text amb les dades que conformen el controlador. A la Figura 45 es pot veure la secció de l'aplicació dedicada a exportar el controlador.

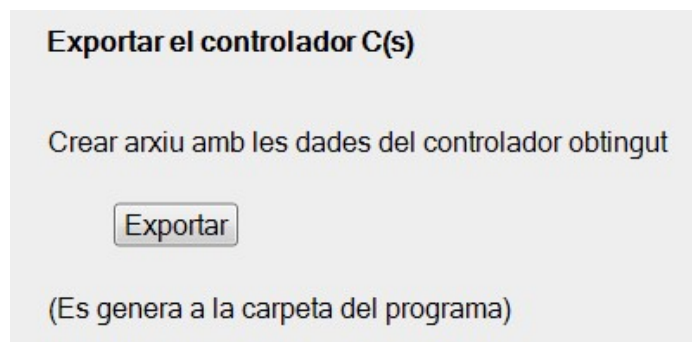


Figura 45: Botó per exportar el controlador obtingut

A continuació es mostra un exemple d'un document creat pel botó:

El controlador obtingut és el següent:

Numerador : [0.2916, 291.7864, 218.7924, 145.8134, 58.3064]

Denominador : [1, 24.9625, 211.316, 743.9694, 156.9801, 3.5147]

El numerador i denominador es proporcionen com a coeficients de la funció de transferència, ordenats de manera descendent.

L'arxiu es crea a la carpeta del programa i el nom d'aquest conté un número que té està pensat perquè estiguin ordenats de manera cronològica, sent l'últim document que s'ha creat el que es troba primer de tots.

Si es vol utilitzar aquest controlador amb el MATLAB, per exemple, només caldria fer el següent:

```
>> num=[0.2916, 291.7864, 218.7924, 145.8134, 58.3064];
>> den=[1, 24.9625, 211.316, 743.9694, 156.9801, 3.5147]
>> C=tf(num,den)
```

C =

$$0.2916 s^4 + 291.8 s^3 + 218.8 s^2 + 145.8 s + 58.31$$

-----

$$s^5 + 24.96 s^4 + 211.3 s^3 + 744 s^2 + 157 s + 3.515$$

Continuous-time transfer function.

### 5.1.3 Exemples

S'han creat quatre exemples de sistemes diferents per veure el funcionament del programa.

Els exemples són els següents:

1. Exemple 1: Planta amb tres pols i un zero amb fase mínima. En aquest exemple l'especificació  $W_u(s)$  no està activa, i per tant només es modelarà la funció de

sensibilitat. Les especificacions d'aquesta són tals que es permet obtenir un controlador que les assoleixi.

2. Exemple 2: Planta molt semblant a la de l'exemple 1. En aquest exemple, igual que a l'exemple 1, només es modelarà la funció de sensibilitat però en aquest cas les especificacions no es poden assolir. Per solucionar això s'haurien de modificar les especificacions perquè no fossin tan exigents.
3. Exemple 3: La planta d'aquest exemple segueix sent de fase mínima però en aquest cas hi ha dos zeros en lloc d'un. En aquest exemple es modelen les dues funcions de sensibilitat i les especificacions són tals que es pot obtenir el controlador.
4. Exemple 4: En aquest cas la planta té tres pols i un zero i és de fase no mínima. Es modelen les dues funcions de sensibilitat però en aquest cas no es poden assolir les especificacions. Com en el cas de l'exemple 2, caldrà modificar les especificacions per tal de poder trobar el controlador.

### 5.1.4 Interactivitat

El Sysquake és molt potent amb temes d'interactivitat, ja que incorpora una sèrie de funcions que faciliten la programació d'aquesta. S'ha utilitzat dues funcions per interactuar directament amb els gràfics: `mousedrag` i `mouseup`. A més d'aquestes dues funcions, el programa incorpora unes altres funcions que proporcionen informació sobre la posició del cursor. Les que s'han fet servir són:

- `_x` : coordenada horitzontal de la posició inicial del cursor
- `_y` : coordenada vertical de la posició inicial del cursor
- `_z` : posició inicial del cursor com a número complex
- `_x1` : coordenada horitzontal de la posició actual del cursor
- `_y1` : coordenada vertical de la posició actual del cursor
- `_z1` : posició actual com a número complex

A continuació s'explicaran com actuen les funcions d'interactuació directa amb el gràfic:

- **mousedrag**: Sempre que es faci click amb el cursor (o es mantingui polsat) sobre un element interactiu, aquesta funció es fa córrer. Aquesta funció, juntament amb funcions que proporcionen informació del cursor, permeten crear infinitat d'opcions interactives.

Aquesta funció s'ha utilitzat en el mapa de pols i zeros i en els diagrames de Bode de les dues funcions de sensibilitat. A continuació hi ha un fragment de codi que indica el funcionament de la funció:

Objectiu: quan es modifiqui la posició de la línia de la funció de ponderació  $W_e(s)$  que indica el valor de l'error estacionari, prengui el valor de la posició actual del cursor.

```
case 'mousedrag'  
    switch(_id)  
        case Id_We_ess  
            Dades_sistema.We_ess = _y1;  
        end  
    end  
end
```

Aquesta línia de codi es pot interpretar com: si es fa click a la línia (**Id\_We\_ess**), la variable **We\_ess** pren el valor de la coordenada vertical del cursor.

Si el codi que s'executa quan es fa córrer la funció **mousedrag** és ràpid, com en aquest cas, no hi ha problema. Els problemes sorgeixen quan el codi és lent, ja que si es manté polsat l'element interactiu, s'executa moltes vegades en molt poc temps, consumint molts recursos de processament. Per això, pels processos lents, com en el cas del càlcul del controlador, s'utilitzarà la funció **mouseup**.

- **mouseup**: El funcionament és exactament igual però en aquest cas només es farà córrer el codi quan es deixi de polsar el cursor.

La combinació de les dues funcions és el que fa que el programa sigui tan potent, ja que depenent de les necessitats, s'utilitzarà una funció o l'altra. És per això que el controlador només es calcula quan es deixa de polsar el cursor.

## 5.2 MATLAB

Aquest programa s'ha utilitzat per verificar que el programa calcula el controlador de manera correcta, ja que és important tenir un altre punt de referència per assegurar-ne el bon funcionament.

Com ja s'ha dit, el MATLAB també s'ha utilitzat com a referència a l'hora de crear el codi de càlcul del controlador (la funció `hinfinite` de la llibreria `robust.lme`).

A la Figura 46 es poden observar els diagrames de Bode dels controladors obtinguts amb el Sysquake i amb el MATLAB.

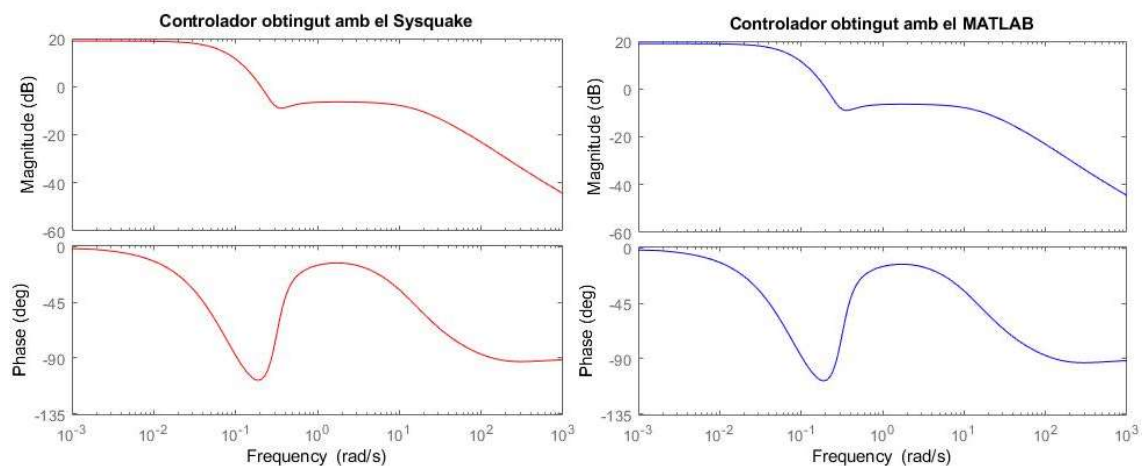


Figura 46: Comparació de controladors obtinguts

Es pot veure que els controladors són exactament iguals, de manera que el mètode d'obtenció del controlador amb el Sysquake queda validat.

## 5.3 Editor de codi

L'editor de codi que s'ha utilitzat és el programar Atom. S'ha utilitzat aquest programa, ja que a l'hora d'estructurar el codi proporciona bones ajudes.

També s'ha utilitzat l'editor que incorpora el MATLAB quan s'havia d'utilitzar l'eina de depuració (*debug*) del codi. Aquesta eina ha ajudat a trobar els errors en el codi.

## 6 Exemples de controladors

Tot seguit es mostraran exemples de controladors obtinguts amb l'aplicació:

### Exemple 1

La planta  $G(s) = \frac{s+0.2}{s^3+0.75s^2+0.5s+0.2}$  es vol controlar per tal que l'error en estat

estacionari sigui menys d'un 10% ( $e_{ss} < 0.1$ ), en una banda ampla de fins a 10rad/s.

L'amplificació del soroll ha de ser menor que 2.

Es pot veure que aquesta planta és de fase no mínima. Les dades a introduir al programa són:

- $G(s) = \frac{s+0.2}{s^3+0.75s^2+0.5s+0.2}$
- $e_{ss} = 0.1$ , que en dB és  $e_{ss} = -20\text{dB}$
- $M_s = 2$ , que en dB és  $M_s = 6\text{dB}$
- $\omega_c = 10\text{rad/s}$

Passos a realitzar:



1. Introduïr la planta al programa. A la finestra del mapa de pols i zeros, els ajustem per tal d'obtenir la planta desitjada (Figura 47).

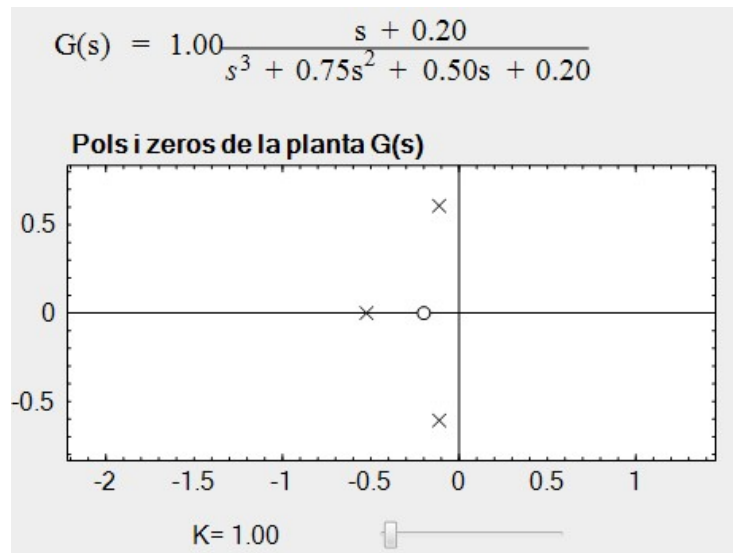


Figura 47: Introducció de la planta al programa

2. Definir les especificacions. En el diagrama de Bode de la funció de sensibilitat ajustem els paràmetres de la funció d'especificacions (Figura 48).

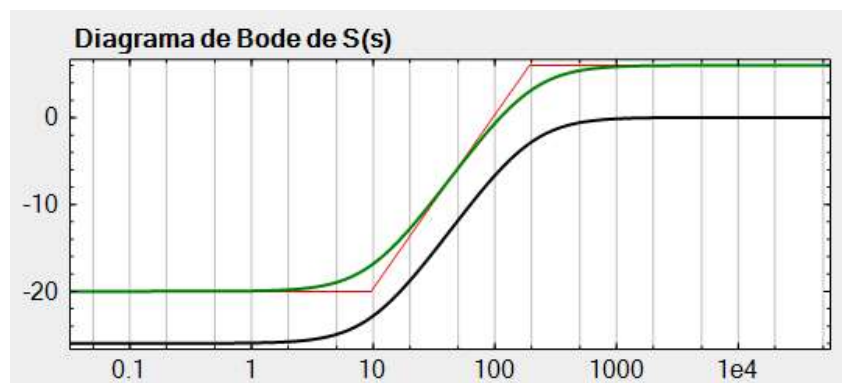


Figura 48: Introducció de les especificacions al programa

3. Exportar el controlador obtingut. Un cop introduïdes les dades, veiem que la  $\gamma$  obtinguda és igual a 0.5, i per tant el controlador és vàlid i es pot exportar (Figura 49).

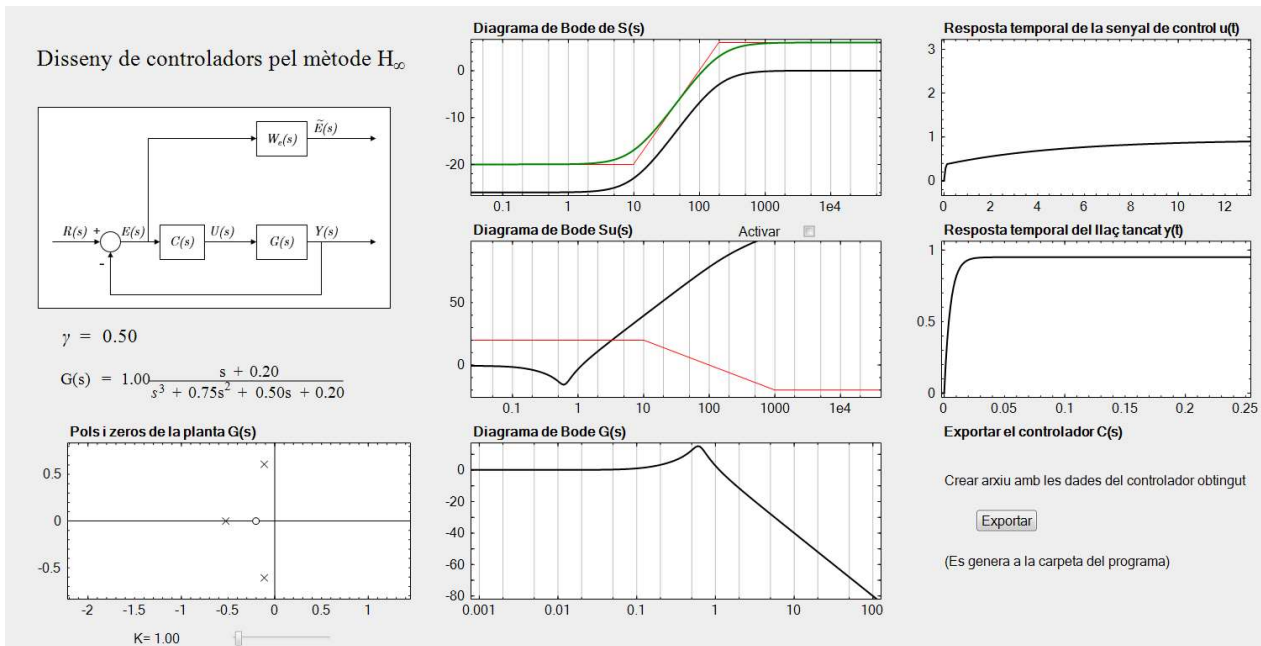


Figura 49: Interfície de l'Exemple 1

Despres de prémer el botó per exportar-lo, el controlador obtingut és el següent:

$$C(s) = \frac{2.421 \times 10^{13} s^3 + 1.816 \times 10^{13} s^2 + 1.211 \times 10^{13} s + 4.845 \times 10^{12}}{s^4 + 2.35 \times 10^6 s^3 + 1.33 \times 10^{11} s^2 + 1.305 \times 10^{12} s + 2.557 \times 10^{11}}$$

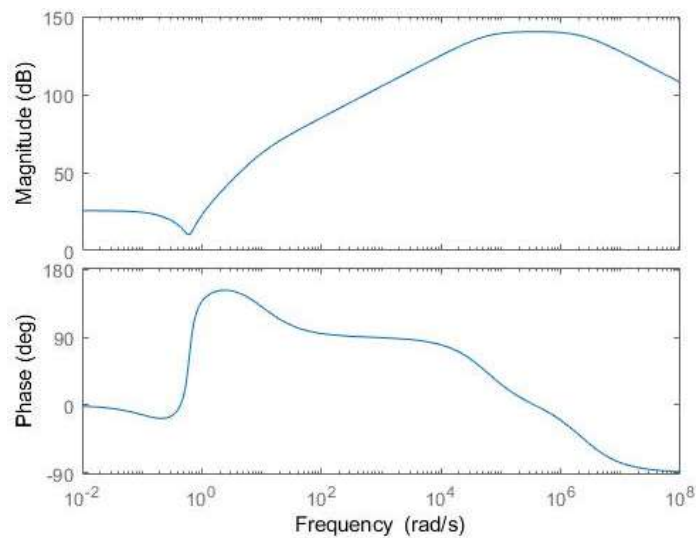


Figura 50: Diagrama de Bode del controlador obtingut

A la Figura 50 es pot veure el diagrama de Bode del controlador que s'ha obtingut amb l'aplicació interactiva.

## Exemple 2

Aquest exemple és quasi igual a l'exemple 1, però en aquest cas es tracta d'una planta amb fase mínima (el zero està a  $(0.2, 0)$  enlloc de  $(-0.2, 0)$ )

La planta  $G(s) = \frac{s - 0.2}{s^3 + 0.75s^2 + 0.5s + 0.2}$  es vol controlar per tal que l'error en estat estacionari sigui menys d'un 10% ( $e_{ss} < 0.1$ ), en una banda ampla de fins a 10rad/s.

L'amplificació del soroll ha de ser menor que 2.

- $G(s) = \frac{s - 0.2}{s^3 + 0.75s^2 + 0.5s + 0.2}$
- $e_{ss} = 0.1$ , que en dB és  $e_{ss} = -20\text{dB}$
- $M_s = 2$ , que en dB és  $M_s = 6\text{dB}$
- $\omega_c = 10\text{rad/s}$

Els passos a realitzar són els mateixos que anteriorment, però ara veiem que la  $\gamma$  és superior a 1 (9.82), indicant que aquestes especificacions no es poden assolir per aquesta planta de fase no mínima (Figura 51).

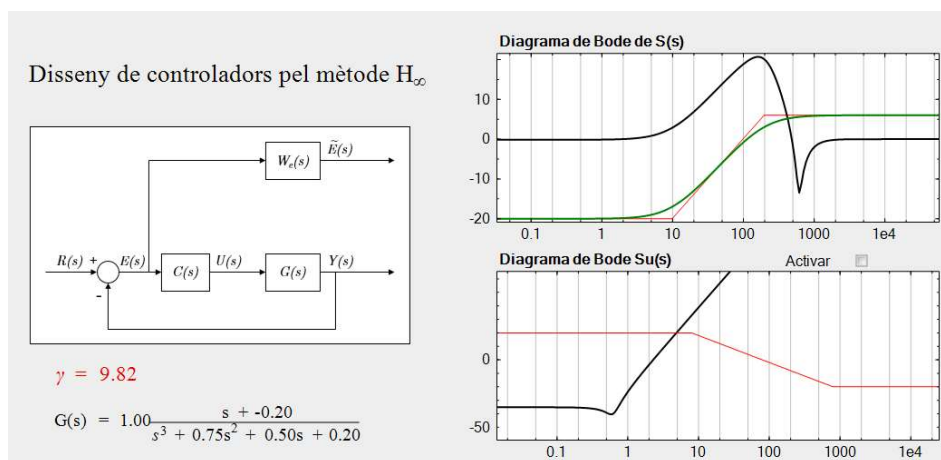
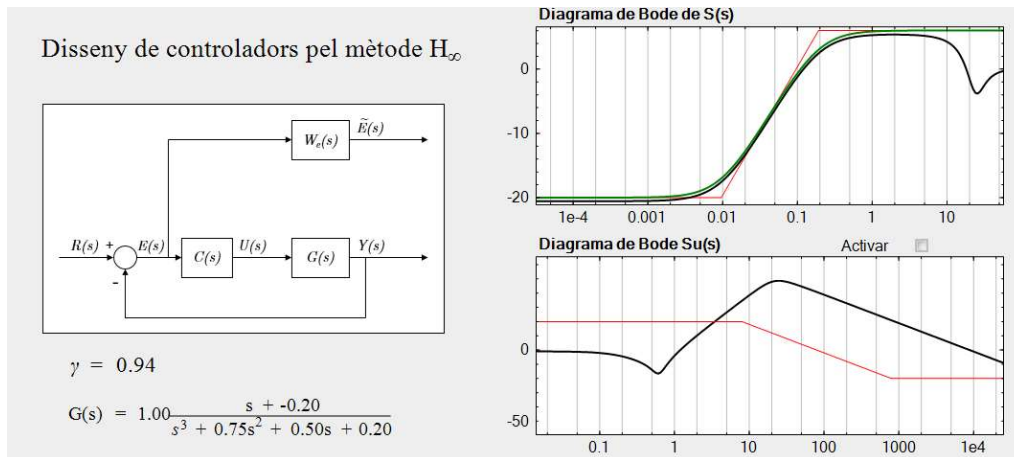


Figura 51: Interfície de l'Exemple 2 (no vàlid)

Per obtenir un controlador vàlid cal modificar les especificacions per fer-les menys exigents. Per fer-ho, es pot modificar la banda ampla de la funció d'especificacions  $W_e(s)$  fins que la  $\gamma$  sigui menor que 1.



**Figura 52:** Interfície de l'Exemple 2 (vàlid)

A la Figura 52, veiem que a partir de  $\omega_c < 0.01$  rad/s, la  $\gamma$  és menor que 1, assolint-se les especificacions imposades.

## 7 Estudi d'impacte ambiental

La realització d'aquest projecte no ha suposat un impacte ambiental notable, ja que al tractar-se de la realització d'un programa informàtic no s'ha generat cap mena de residu material. L'únic que es pot destacar és l'ús d'eines habituals d'oficina, com ara l'ordinador, la impressora o fulls de paper.

Es podria tenir en compte l'energia elèctrica utilitzada per l'ordinador i el monitor però aquesta quantitat és pràcticament insignificant i no caldria sotmetre's a cap mena d'avaluació d'impacte ambiental.

## 8 Cost del projecte

El cost econòmic d'aquest projecte es dividirà en dos apartats: les hores dedicades al projecte i les llicències del programari utilitzat. No s'ha valorat el cost de les eines utilitzades, com ara ordinadors, ja que no s'ha hagut de comprar res per la realització del projecte.

### 8.1 Cost de les hores dedicades

Al tractar-se d'un projecte acadèmic valorat en 12 crèdits ECTS, on cada crèdit equival a un nombre de 25 hore, el total d'hores destinades és de 300 hores. La Normativa de Pràctiques Acadèmiques Externes de l'escola diu que la compensació econòmica rebuda en aquesta mena de projectes és de 8€/h. Per tant, el cost de les hores dedicades en aquest projecte és de 2400€.

## 8.2 Cost de les llicències

Dels tres programes utilitzats, l'Atom és l'únic que és un programa de llicència lliure. Els altres dos tenen cost de llicència:

- Sysquake: aquest programa ofereix una versió gratuïta que no conté totes les extensions que la versió Pro ofereix. El preu que té la versió Pro del programa és de 1000CHF que actualment són 923€.
- MATLAB: el preu d'aquest programa és 2.000€ que inclou el programa i la llicència perpètua.

El cost total de les llicències és 2923€, que juntament amb el cost de les hores dedicades, el cost total del projecte és de 5323€.

## 9 Conclusions

En aquest projecte s'han assolit els objectius proposats, i per tant, es considera un projecte amb èxit. El programa que es volia crear des d'un principi és exactament com ha sigut el resultat final, i en aquest sentit estic molt satisfet.

La realització d'aquest projecte m'ha servit per aprendre i profunditzar en temes de la Teoria de Control que eren desconeguts per mi. A més, m'ha servit per refrescar temes de programació que estaven oxidats i aprendre'n de nous. Ha sigut un repte que, amb els seus alts i baixos, ha tingut el seu encant i no estic arrepentit d'haver-lo intentat.

El principal problema, on es van perdre unes quantes setmanes, va ser a l'hora de crear el codi del càlcul del controlador. Degut a la complexitat matemàtica que té l'algoritme de càlcul es va desistir el fet de crear el codi des de zero i es va decidir basar-se amb el del MATLAB.

Un dels aspectes més importants que m'ha aportat realitzar aquest projecte ha sigut veure que, després de dedicar una gran quantitat d'hores a temes relacionats amb l'àmbit del control automàtic, és un món amb moltes possibilitats i m'ha motivat a continuar-lo aprenent.

El programa creat està pensat per ser usat tant en camp educatiu, per visualitzar de manera gràfica el funcionament del mètode, o per obtenir controladors que serveixin per conduir sistemes reals.

## 10 Agraïments

Agraeixo tot l'esforç i temps que ha dedicat en Ramon Costa-Castelló. M'ha guiat durant gairebé mig any, realitzant reunions setmanals i em m'ha motivat a no llançar la tovallola. També li agraeixo la introducció al món del control robust ja que m'ha fet despertar la curiositat i tinc ganes de seguir-ne aprenent.



## 11 Referències

- [1] RICARD VILLA, *Dinàmica de Sistemes*, versió 24, agost 2018. Capítols 1, 2, 3.
- [2] INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, *Diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans*, 2a ed. 2007.
- [3] IGNACIO DÍAZ BLANCO, *Funciones de Sensibilidad*, Universidad de Oviedo, novembre 2003.
- [4] KARL JOHAN ÅSTRÖM, RICHARD M. MURRAY, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, abril 2008. Capítols 5, 6, 8, 9, 12.
- [5] ALLEN TANNENBAUM, BRUCE A. FRANCIS, JOHN C. DOYLE, *Feedback Control Theory*, 1992. Capítols 4, 5, 6, 7, 11, 12.
- [6] MANUEL GIL ORTEGA LINARES, *Aportaciones al control  $H_\infty$  de sistemas multivariables*, tesi doctoral, juny 2001. Capítol 3.
- [7] IGNACE VAN DEN HEUVEL,  *$H_\infty$  Controller Design, Algebraic Riccati Equalities versus Linear Matrix Inequalities*, juny 1997
- [8] KEITH GLOVER, JOHN C. DOYLE, *Space-state formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity*, maig 1988
- [9] PIERRE APKARIAN AND DOMINIKUS NOLL, *The  $H_\infty$  control problem is solved*, novembre 2017
- [10] MATHWORKS, *MATLAB Documentation*, funció lft.m
- [11] CALERGA SÀRL, *Sysquake User Manual*, desembre 2016