TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: La introducció de l'àlgebra de Viète a Espanya

Autor: Anna Eroles Crivillé

Director: Maria Rosa Massa Esteve

Codirector: Mònica Blanco Abellán

Departament: Matemàtiques

Convocatòria: 2019-09

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Tot el meu agraïment a les dues fantàstiques tutores que han dedicat tota la seva implicació en aquest treball.

Tota la meva estima a la meva família, parella i amics per no deixar-me rendir. Gràcies en especial a "elles": Marta, Patricia, Cristina, Aina, Naira i Ares. Gràcies a Laia i Ana.

Per acabar vull agrair a les professores i mestres que em van animar a aventurar-me en aquest llarg camí, a Margarita i a Pepita, per haver fet néixer en mi el somni de ser matemàtica.

Seguirem treballant per tal que els petits de la casa, Pau i Oriol, tant de bo el dia de demà ens sorprenguin amb nous somnis que facin créixer el coneixement de tots.

Índex de continguts

Capítol 1 – Introducció

Les matemàtiques han evolucionat al llarg dels segles gràcies a les contribucions que han realitzat les diferents civilitzacions i que han permès el desenvolupament d'aquesta ciència. S'han donat salts en la història convertint meres intuïcions o inclús aplicacions trivials i inconscients del passat, en lemes i teoremes crucials per desenvolupar la matemàtica com la coneixem avui en dia. Ha estat gràcies a la passió per aquesta ciència per part de diferents matemàtics i a la difusió i troballes de diferents obres el que ens ha permès reconstruir la història.

En aquest treball, però, posarem tota la nostra atenció únicament en una època, el segle XVII i una localització concreta, Espanya. Tot i així al llarg d'aquestes pàgines intentarem conduir al lector perquè es situï en el context històric adequat i tingui la perspectiva necessària dins aquest.

La motivació que hi ha darrera d'aquest treball és l'interès en conèixer com l'àlgebra vietiana va arribar i es va difondre a Espanya. Hem treballat en la recerca de l'aplicació o menció del mètode analític, en la resolució d'equacions i el llenguatge simbòlic emprat que hem observat en l'obra de José Zaragoza (1627 – 1679).

Per descomptat estudiarem les influències d'aquest autor i les vinculacions amb altres matemàtics precedents i posteriors a ell, centrant el nostre objectiu en el tractament de l'àlgebra a través de l'anàlisi i interpretació del contingut del llibre *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa* publicada per Zaragoza el 1670.

Intentarem aprofundir en les paraules i el llegat que aquest autor deixa plasmat en el seu llibre i, sobretot, identificarem la influència de François Viète (1540 – 1603) i la seva obra *In artem analyticem isagoge* (1591) amb l'aparició d'una nova Àlgebra especiosa com un nou mètode d'anàlisi.

Per finalitzar, presentarem algun problema del recull que fa Zaragoza al final del seu llibre. D'aquesta manera podrem estudiar si es fa evident l'aplicació d'una nova àlgebra i mètode analític o si pel contrari, Zaragoza únicament deixa amagades les paraules i mètode de Viète en la seva definició de l'àlgebra. Aprofitarem per escollir un problema vinculat amb la geometria per poder comparar-lo amb alguns aspectes que treballava Viète.

A continuació expliquem de forma breu el contingut dels capítols que composen aquest treball a fi de facilitar al lector l'estructura i metodologia que realitzarem.

En el capítol 2 es presentaran de forma introductòria els precedents històrics que necessitem conèixer per seguir en l'estudi de l'*Arithmetica Universal*. Recorrerem els inicis del procediment de l'algebraització de les matemàtiques durant el segle XVI i XVII i la trajectòria i aportació de Viète. A més, també coneixem altres matemàtics que es van fer càrrec de l'Art Major, precedent de l'àlgebra nova de Viète a la Península Ibèrica, com Juan Pérez de Moya (1513 – 1596), i que tenen la seva menció en aquest treball.

Realitzarem una comparativa amb diferents personatges anteriors a Zaragoza que ja havien treballat amb l'àlgebra entesa com Art Major com Marco Aurel[1] o Christoph Rudolff (1494 – 1543) per poder trobar similituds i diferències en les seves publicacions *(Massa-Esteve, 2012; Romero, 2018)*.

El capítol 3 el dedicarem exclusivament a l'autor, José Zaragoza. Una breu biografia acompanyada de les seves aportacions com a matemàtic i presentació de la seva obra. A més, ens agradaria estudiar els trets més característics dels seus llibres i les vinculacions amb altres autors i obres per veure'n les influències que ha rebut.

El bloc que constitueixen el capítol 4 i 5 es converteix en el centre d'estudi d'aquest treball: l'*Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa*. Aquesta obra conté ja en el seu títol el que desitgem observar en l'anàlisi del seu contingut: la menció i aplicació de l'àlgebra analítica en la resolució d'equacions i altres problemes aplicats, la separació de l'"Arte Maior" de l'aritmètica o "Arte Menor" com una nova branca independent de les matemàtiques i l'ús d'una nova simbologia per expressar i facilitar la resolució de les equacions. És per això que l'anàlisi de l'obra la separem en dos capítols. Un que estudia l'estructura i l'agrupació de contingut en els 4 llibres que la formen, i l'altre centrat en el llibre tercer, exclusiu i dedicat a l'Àlgebra. A més l'últim i quart llibre de Zaragoza recull un volum de problemes dels quals en presentarem alguns exemples per comprovar com l'autor empra l'àlgebra que ha presentat al llarg del llibre tercer.

El capítol 6 recull les conclusions que hem pogut establir a través de l'anàlisi i presentació feta en els capítols anteriors. Deixem també la porta oberta a poder seguir estudiant l'algebraització que es va donar al segle XVII a Espanya que, tot i que sota algunes opinions ha estat escassa, no ha de perdre la menció merescuda a grans matemàtics que van ajudar en la didàctica i expansió de l'evolució de les matemàtiques, com ha estat el cas de l'obra de Zaragoza.

[1] De la biografia de Marco Aurel no se'n sap pràcticament res, tot i que sí podem datar les seves publicacions al segle XVI: *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* (1552).

Capítol 2 – Context històric

2.1. Usos de l'àlgebra com Art Major durant el segle XVI a Espanya[2]

Les matemàtiques de l'Europa renaixentista van venir marcades pel pas de l'aritmètica a l'àlgebra, on es comencen a presentar les equacions i operacions abreviades i s'intensifica l'ús del simbolisme alleugerint la redacció retòrica emprada anteriorment en els textos aritmètics-algebraics de l'època.

Al segle XVI els procediments algebraics es van desenvolupar per definir els seus propis elements i fer-se un lloc entre la geometria i l'aritmètica. L'àlgebra o "Art Major" se separava de l'aritmètica o "Art Menor". A Espanya, aquesta introducció es va donar a través de textos comercials i mercantils que es poden dividir en dos grans grups en funció de les seves característiques:

- Aritmètica especulativa o acadèmica: textos escrits en llatí que tracten l'estudi de números i proporcions sense cap referència a l'àlgebra.
- Aritmètica pràctica: textos escrits en la llengua pròpia de l'entorn que tracten eines per resoldre problemes mercantils amb un característic estil directe i senzill.

El primer rastre d'àlgebra apareix en llibres del segon tipus, contrastant amb l'Art Menor dels primers. El primer tractat aritmètic imprès a Espanya que conté qüestions algebraiques va ser *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* (1552) de Marco Aurel. De les fonts analitzades que van poder influir en aquesta publicació, cal destacar la connexió que existeix amb el text alemany *Coss* (1525) de Christoff Rudolff (1494 – 1543). Les fonts per a l'Art Major a l'Espanya del segle XVI cal analitzar-les dintre el context europeu. Moltes d'elles presentaran similituds en quant a notació i tractament de les equacions. Tot i així, els noms de les incògnites i els procediments canvien d'un text a un altre (*Romero & Massa-Esteve, 2018*).

Coss va ser un dels primers tractats d'àlgebra publicats a Alemanya. El títol complet de l'obra és *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genent werden* que traduït significa "Bell i àgil càlcul a través de les regles artístiques de l'àlgebra [que] són anomenades comunament "Coss". Ja en el títol observem l'ús que farà Rudolff d'aquesta paraula per designar la incògnita.

L'origen de la paraula *cosa* el trobem en l'obra de Luca Pacioli (1447 - 1517), *Summa de Arithmetica, Geometria proportioni et proportionalità* (Venècia, 1494). En aquesta obra s'introdueix el terme *cosa* per designar la quantitat desconeguda o incògnita i d'aquesta paraula derivaran les versions alemanya i anglesa, *coss* i *art còssic*, que durant els segles XVI i XVII eren sinònim d'àlgebra. Per estudiar l'origen de la paraula *àlgebra* ens hem de remuntar a l'obra d'Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 – 850), Hisâb al-jabr w'al-muqqabala (segle IX). En aquest llibre s'introdueix la paraula *mâl* i *jidhr o shay* per enunciar els problemes i en la resolució d'equacions de segon grau. L'autor utilitza

[2] Més informació a Romero & Massa-Esteve (2018).

jidhr per designar la “cosa” que volem cercar, és a dir, la incògnita o arrel, el quadrat de la qual és el *mâl.* El seu llibre ha estat un dels primers en la història de les matemàtiques que parla i usa el nom d’àlgebra. La seva traducció al llatí per Robert de Chester amb el títol *Liber algebrat et almucabala* (Segòvia, 1145) és d’on prové el nom actual d’àlgebra. (*Cajori, 1928-29*)

L’ús de la paraula *cosa* per identificar la incògnita del segle IX és va transmetre des d’Itàlia fins a tota Europa i veiem la seva influència en autors com Rudolff.

Els treballs de Rudolff i Aurel contenen procediments aritmètics i algebraics similars amb molts exemples numèrics idèntics, però organitzats en ordre diferent per motius didàctics. Usen la mateixa simbologia (*characters*), igual que veurem en l’obra de Zaragoza, *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa* (1670) un segle posterior, entre d’altres matemàtics de l’època. Rudolff i Aurel també coincideixen amb el número de tipus d’equacions, 8. Zaragoza, en canvi, treballa amb tot tipus d’equacions sense seguir cap classificació en particular.

Els dos autors, Aurel i Rudolff, comparteixen el significat de la simbologia per a les incògnites disposades en proporció contínua. Fan referència a la proporció entre caràcters - Aurel a la proporció contínua de la “*Regla de la Cosa*” - mencionant el novè llibre dels Elements d’Euclides, la idea del qual consisteix en la següent:

Tenint tants nombres com vulguem, començant per la unitat i disposats en proporció contínua, el tercer des de la unitat serà un quadrat, al igual que els que successivament deixen de banda un caràcter. El quart serà un cub, al igual que els que successivament deixen de banda dos caràcters; i el setè serà al mateix temps un cub i un quadrat , al igual que els que successivament deixen de banda cinc caràcters. (*Heath, 1956*)

Equivalent en notació moderna:

$$1:x = x:x^2 = x^2:x^3 = x^3:x^4 = \cdots$$

Aquesta idea de proporció donada per Euclides apareix novament en l’obra de Zaragoza, en el capítol XI del llibre primer on defineix els conceptes de raó i proporció:

> Proporción es el respecto, o relación de una Razón a otra, y se divide en tantas especies como la razón porque si comparamos una razón con otra puede ser igual, mayor o menor. [...] Aunque la Proporción puede estar entre dos razones desiguales, Euclides solo definió la proporción de igualdad, esto es, el respeto de dos razones iguales o semejantes; y así dicho, que la Proporción era una semejante de dos razones: como si comparamos la razón de 4 a 1 con la de 6 a 3, son las dos iguales y semejantes porque las dos son duples. A esta llamó Euclides Proporción y de esta sola hablaré, dejando aparte la Proporción de desigualdad por ahora. […] Si quatro números son proporcionales, el producto de la multiplicación de los extremos, es igual al producto de los dos medios, y si el producto de los extremos es igual al de los medios, serán los quatro números proporcionales (Eucl. p.19.l.7). (*Zaragoza, 1670*)

La diferència més important entre Rudolff i Aurel recau en la forma d'entendre la part aritmètica. Rudolff entén l'àlgebra com una extensió de l'aritmètica: és necessari primer entendre els números per després poder enfrontar-se a aquest "Art" de les coses. En canvi, Aurel menciona l'origen aràbic de la paraula Àlgebra i considera *"La regla de la Cosa"*, Àlgebra o "*Arte Mayor*" com una disciplina en sí mateixa. No fa referència als números en sí sinó a procediments específicament algebraics. Romero i Massa-Esteve (2018) mostren que Aurel s'ha impregnat de l'obra de Rudolff i de fonts com Francesco Ghaligai (1498 – 1573)[3] i altres per crear la seva idea d'àlgebra.

A més, Aurel menciona la relació de l'àlgebra amb la geometria en el seu prefaci, on afirma que totes les explicacions a través dels números es poden entendre com línies. Tot i així, el punt essencial per l'aplicació de la *"Regla de la Cosa"* és el significat dels caràcters.

La "Regla de la Cosa" és un mètode complet per resoldre problemes i no només un algorisme per resoldre l'equació reduïda una vegada declarada. Anteriorment, el mètode que es feia servir al segle XVI consistia en anomenar incògnita al número que volíem trobar, operar i derivar fins a una equació. Després resoldre-la amb una regla donada. En canvi, per Aurel la "Regla de la Cosa" permet establir una equació amb incògnites, assumint la pregunta ja resolta, amb la qual poder treballar d'acord amb les instruccions donades.

En paraules d'Aurel:

> Per tal de realitzar una qüestió, has de suposar que ja està feta i resposta i només la vols demostrar. Posarem una x, amb la qual procedirem amb les regles donades, com si fos la quantitat sabuda fins que finalment arribem a l'última resposta, sota caràcters, els quals seran als quals havíem dit que volíem arribar. I després es crearà una equació (una de les 8), a la qual s'associarà i així trobarem el valor de la x amagat i inicialment proposat.[4] (*Aurel, 1552*)

Observem la gran similitud amb les paraules de Rudolff:

> Aquest art està fonamentat en 8 regles d'equacions. Aleshores, treballant a través de cada exemple, s'ha de substituir la x per la incògnita al començament per allò que un desitja saber. Amb l'arrel substituïda, s'ha de procedir com si es tractés del nombre correcte fins que la cosa arribi al punt en que dos ordres de números esdevinguin iguals entre sí. En aquest moment, es seguirà amb una de

[3] Ghaligai, Francesco 1521, *Summa de Arithmetica.*

[4] Y digo que para hacer una demanda, por la dicha regla (de la cosa), has de imaginar que tal cuenta o demanda ya es hecha, y respondido, y tu agora la quieres provar. Y pornas que la respuesta fuesse una x, con la qual has de proceder con los avisos y reglas dadas, como si fuere la propia quantidad sabida, o respuesta verdadera, hasta tanto que venga a la postre la ultima respuesta, debaxo de caracteres o quantidades ocultas. La qual o las quales diras ser igual a lo que tu querrias que viniese. Y luego practicaras esta tal igualacion, por una de las 8 igualaciones siguientes, a la que sera sujeta, y por ella te sera declarada la valor de la x oculta, y primero propuesta.

> les equacions de les descrites a continuació. Per aquest mètode, el valor i significat de l'arrel substituïda primer, esdevé evident.[5] (*Rudolff, 1525*)

En obres posteriors, es mencionen les mateixes paraules d'Aurel: Juan Pérez de Moya (ca. 1513 – 1596) en *Compendio de la Regla de la Cosa* (1558), Antic Roca (ca. 1530 – 1580) en la seva obra *Arithmetica* (1564). Es troben traces d'aquests raonaments en textos anteriors com a *Arithmetica integra* (1544) de Michael Stifel (1487 – 1567).

> Y assi digo que para hazer qualquier demanda por esta regla, has de presuponer que la tal demanda es ya hecha y respondida, y que la quieres provar. Poniendo por ejemplo que la respuesta fuesse una cosa, con la qual procederas, haziendo lo que la demanda pidiere, y lo que te viniere con la 1. *co.* Diras ser ygual a lo que quisieras que viniera. (*Pérez de Moya, 1558*)

> Digo que para hazer qualquier demanda por esta regla de la Cossa, ha de imaginar que la tal demanda es ya hecha y respondida, empero tu la quieres provar; y pornas primeramente que la respuesta fuesse una cosa, con la qual has de proceder haziendo lo que la demanda pidiere, y lo que te viniere con la 1. Cosa diras ser ygual a lo que quisieras que viniera. (*Roca, 1564*)

Així, Aurel en el seu *Libro Primero* adopta la idea de la pràctica de la *"Regla de la Cosa"* de Rudolff i la modifica per donar-li un sentit més analític com les pràctiques realitzades per Europa durant el segle XVI. Zaragoza, que segurament coneix les obres d'Aurel, Pérez de Moya i Roca, fa un pas més i desenvolupa l'art analític de Viète.

2.2. El naixement de la matemàtica moderna i la seva algebraització[6]

L'empremta del context històric que ens deixa el segle XVI indica que les àlgebres o arts majors nascudes durant el Renaixement ja incitaven a un canvi en els procediments algebraics, però no serà fins al segle XVII quan es pugui donar la veritable algebraització de les matemàtiques.

Un dels principals avenços del segle XVII va ser la vinculació de l'àlgebra amb la geometria que va permetre el naixement de dues noves branques de la matemàtica: el càlcul infinitesimal i la geometria analítica. La seva importància recau en el fet d'establir una correspondència entre els càlculs abstractes mostrats en la formulació matemàtica i la construcció de figures geomètriques.

---

[5] Dise Kunst: wie obgemeldEt: ist gegründet in 8 Regeln der Equation oder vergleichung. Denn in practicirung eines jeden exempels an stat des verborgen dings so man zu wissen begert müss anfenglich gesetzt werden 1 x. Mit sölchen gesetzten radix müss man darnach procediRen in aller gestaltsam wer es die rechte zal so lang bis die sach dahin gebracht das zwo ordnung der zalen eine der andern gleich werde. Als dann wirt die vergleichung practiciert durch eine auss den untergeschribnen Equation so sie eingefallen ist. Durch sölche practicken kompt an den Tag der wert und bedeutniss des erstgesetzten radix.

[6] Informació extreta dels apunts de l'assignatura Història de la Matemàtica (Massa-Esteve, 2014-15)

Un dels punts clau de l'algebraització de les matemàtiques va ser la introducció d'un nou llenguatge simbòlic de la mà de François Viète (1540 – 1603) per representar tant quantitats conegudes com incògnites en les equacions. Aquesta nova manera de tractar l'àlgebra a través de la logística "*especiosa*" que agrupava els elements en espècies permetent generalitzar les magnituds tant numèriques com geomètriques, es va imposar i generalitzar a partir de finals del segle XVII, convertint-se en l'eina del nou mètode analític desenvolupat per Viète.

Per poder entendre bé l'impacte dels diferents aspectes mencionats i com van afectar aquests canvis als fonaments de les matemàtiques cal posar el punt de mira dins el propi context històric, entenent la situació matemàtica que es vivia i l'objectiu al que es volia arribar enlloc d'observar les conseqüències que s'han donat a partir d'aquests avenços.

El segle XVII ha estat marcat per desenvolupaments paral·lels a l'àlgebra com la revolució infinitesimal o avenços en la mecànica racional, tenint en compte l'herència matemàtica clàssica que el precedia. Igualment també hi ha estudis que remarquen la presència d'aspectes religiosos i filosòfics que han influït en el creixement del coneixement a nivell matemàtic.

Viète va ser el gran influent en el canvi a una nova simbologia gràcies a la publicació d'*In artem analyticen isagoge* (1591). En aquest llibre es mostra la novetat d'utilitzar símbols tant en el valor de les incògnites com en el de les quantitats conegudes i demostra la utilitat de la logística especiosa aplicada a les equacions generals. A més, Viète també va participar en la vinculació de l'àlgebra amb la geometria determinant algunes equacions que donen forma a construccions geomètriques conegudes.

Arran d'aquesta nova relació entre àlgebra i geometria, neixen altres estudis relacionats amb l'assoliment del nou mètode analític a partir dels mètodes clàssics o l'estudi de quina seria la millor terminologia i metodologia aplicada a àmbits influenciats pel nou mètode: aritmètica, àlgebra, anàlisi i geometria. A més es van obrir les portes a nous mètodes algebraics i el desenvolupament de la logística especiosa com el nou llenguatge i simbologia.

La nova àlgebra de Viète va ser innovadora en aquest punt. L'ús del nou llenguatge simbòlic permetia concebre un nou mètode analític, on es construïen "espècies" algebraiques amb l'aplicació de les quals s'assolien nous resultats de gran interès com quadratures, màxims, series o equacions. A més va influenciar altres matemàtics, com Descartes o Fermat, els quals a l'introduir la seva àlgebra i mètode analític a la geometria van oferir un nou pensament menys intuïtiu que l'euclidià però més generalitzat, ja que permetia treballar amb objectes matemàtics, encara que no tinguessin representació geomètrica.

Aquests dos matemàtics són posteriors a Viète i més enllà, la història va anar perfeccionant l'ús de la relació entre àlgebra i geometria. Amb tot plegat es va acabar constituint l'algebraització de les matemàtiques.

L'àlgebra va tardar prop d'un segle en imposar-se permeten la resolució de problemes que d'altra manera no tenien solució. El seu impacte va deixar moltes opinions al seu pas i més tenint en compte que no va ser un procés lineal ni en el temps ni en l'espai.

Els defensors del nou mètode o "art analític" de Viète defensaven l'àlgebra com una nova branca independent en les matemàtiques i per contra, altres com Thomas Hobbes (1588 – 1679) o Isaac Barrow (1630 – 1677) la consideraven una traïció a les veritables ciències com la geometria o l'aritmètica, menyspreant el llenguatge simbòlic i associant l'àlgebra a un raonament simbòlic o instrument de lògica molt més complicat. John Wallis (1616 – 1703) per la seva banda, va anar més enllà amb l'aplicació de l'àlgebra. Va escriure el *Treatise on Algebra* (1685) que incloïa un recorregut històric i les contribucions algebraiques de Thomas Harriot (1560 – 1621). (*Massa-Esteve, 2001*)

2.3. L'art analític de François Viète

L'ús de la simbologia en les incògnites, representades amb vocals, i quantitats conegudes, representades amb consonants, va permetre a Viète la generalització de les equacions. A continuació presentem un exemple d'equació presentada per Viète en el Suplement de Geometria de la seva obra *In artem Analyticen Isagoge:*

> ... cubus ex IA plus solido sub AB & quadrato ex IA minùs solido duplo sub IA & quadrato ex AB aequatur cubo ex AB. (*Viète, 1591*)

Si considerem AB i IA dos segments, l'equació equivalent en notació actual considerant $X = IA$ seria:

$$X^3 + (AB) \cdot X^2 - 2X \cdot (AB)^2 = (AB)^3$$

L'art analític de Viète es va desenvolupar a partir de la logística especiosa, càlculs amb "espècies", confrontada a la logística numerosa, càlculs amb nombres, emprada des del renaixement. Quan parlem de càlculs amb "espècies" ens referim a tipus o classes d'elements. D'aquesta manera, podem agrupar magnituds, ja siguin numèriques o geomètriques, com per exemple, els nombres naturals o racionals però també les longituds, àrees, volums o angles.

Per explicar el procediment de resolució d'equacions mitjançant l'art analític, Viète va donar-li l'enfocament de la metodologia de l'anàlisi grega. El concepte consisteix en assumir allò que busquem com si fos ja admès i treballar a través de les conseqüències per arribar a allò que és cert de veritat.

L'objectiu de Viète era obtenir un mètode de resolució que es pogués aplicar a tots els problemes plantejats. Aquest mètode estava format per tres passos claus:

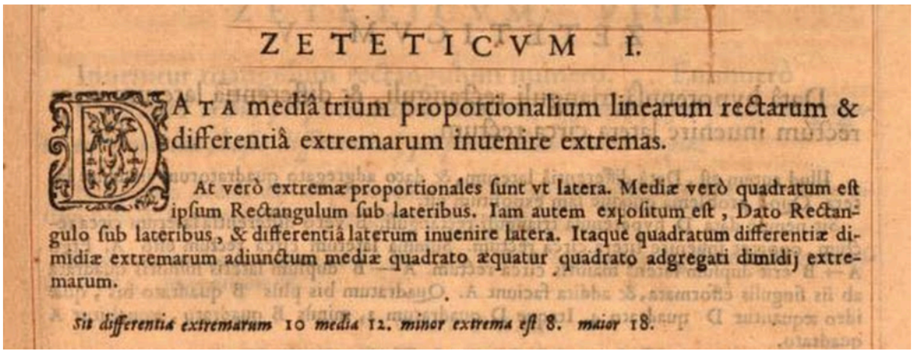
El primer, conegut com Zetètica, transforma la informació del problema i la presenta en forma d'equació tot expressant les quantitats i incògnites en símbols. El segon o Porística aplica les diferents normes o teoremes ja coneguts a l'equació per convertir-la en una equació en forma general ($ax^2 + bx + c = 0$). Per últim, el tercer i més important dels passos per Viète, la Exegètica treballa amb l'estructura de l'equació per poder aïllar la incògnita i trobar la solució desitjada. Viète conclou l'explicació del seu mètode afirmant que serveix per resoldre tots els problemes:

> Finalment, l'art analític, dotat de les seves tres formes zetètica, porística i exegètica, reclama per a ell mateix la solució del problema més gran de tots que és solucionar tots els problemes. (*Viète, 1591*)

2.4. Construcció geomètrica de la solució d'una equació de segon grau

El següent exemple és una mostra de la vinculació de l'àlgebra i la geometria a l'obra de Viète. Ell resol un problema geomètric amb una equació de segon grau a partir de proporcions i l'aplicació del seu mètode analític, tot emprant el llenguatge simbòlic introduït.

> Donada la mitjana de tres línies rectes proporcionals i la diferència entre els extrems, trobar l'extrem més petit. (*Viète, 1591*)



ZETETICVM I.

DATA mediâ trium proportionalium linearum rectarum & differentiâ extremarum inuenire extremas.

At verò extremæ proportionales sunt vt latera. Mediæ verò quadratum est ipsum Rectangulum sub lateribus. Iam autem expositum est, Dato Rectangulo sub lateribus, & differentiâ laterum inuenire latera. Itaque quadratum differentiæ dimidiæ extremarum adiunctum mediæ quadrato æquatur quadrato adgregati dimidij extremarum.

Sit differentia extremarum 10 *media* 12. *minor extrema est* 8. *maior* 18.

Figura 2.1. Viète 1591, Llibre tercer. Proposició I. 1970:56 *In artem Analyticen Isagoge*

A partir de la informació de l'enunciat, donada una Z, podem construir la següent equació, estudiats els coneixements necessaris de proporcions. El plantejament de l'equació (Zetètica) és el que segueix amb notació actual:

$$A:Z = Z:(A+B)$$

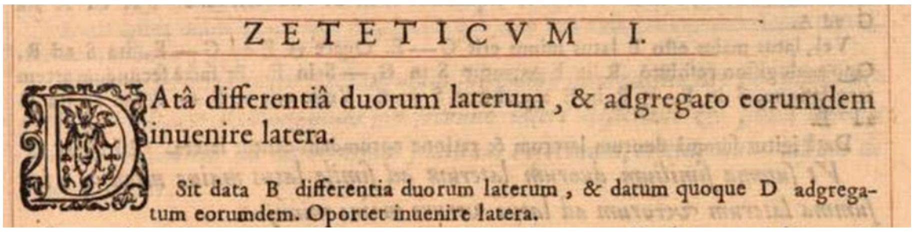
on A és la nostra incògnita, B la diferència entre els extrems, Z la mitjana i Z^2 l'àrea. B i Z són donades i, per tant, quantitats conegudes que compleixen la següent relació coneguda (Porística):

$$A \times (A+B) = Z^2$$

Per poder trobar la solució d'aquesta equació (Exegètica), necessitem primer haver resolt la Proposició II del Llibre II del *Zeteticorum libri quinque* (1593), també de Viète.

> Donada l'àrea d'un triangle i la diferència dels costats, trobar els costats A i B. (*Viète, 1593*)

La resolució és la que segueix: si al quadrat de la diferència dels costats li afegim quatre vegades el rectangle o àrea, trobarem el quadrat de la suma o, equivalentment en notació actual: $[(A+B)-A]^2 + 4\,A \times (A+B) = [(A+B)+A]^2$
Amb aquesta proposició podem trobar la suma i diferència dels costats i amb el Teorema I del Llibre I de *In artem analyticen isagoge* (*Figura 2.2*) a partir de la suma i diferència podrem trobar els costats A i B, que és el que volíem aconseguir.

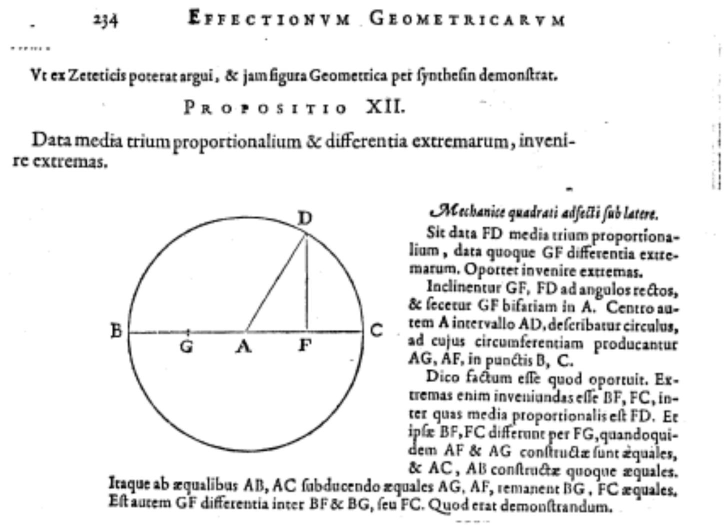

ZETETICVM I.

DAtâ differentiâ duorum laterum, & adgregato eorumdem inuenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet inuenire latera.

Figura 2.2. Viète 1591, Llibre primer. Proposició I. *In artem Analyticen Isagoge*

L'equació feta servir en la resolució de la Porposició I del Llibre III pertanyia a l'obra *Zeteticorum libri quinque* (1593) on s'exemplificava el mètode proposat a l'*Isagoge* i també apareix en *Effectionum Geometricarum Canonical Recensio* publicat el 1646 per Viète, on es realitzen construccions geomètriques de les solucions de les equacions de segon i quart grau[7] (*Figura 2.3.*).


234 EFFECTIONVM GEOMETRICARVM

Vt ex Zeteticis poterat argui, & jam figura Geometrica per synthesin demonstrat.

PROPOSITIO XII.

Data media trium proportionalium & differentia extremarum, inuenire extremas.

Mechanice quadrati adfecti sub latere.

Sit data FD media trium proportionalium, data quoque GF differentia extremarum. Oportet inuenire extremas.

Inclinentur GF, FD ad angulos rectos, & secetur GF bifariam in A. Centro autem A interuallo AD, describatur circulus, ad cujus circumferentiam producantur AG, AF, in punctis B, C.

Dico factum esse quod oportuit. Extremas enim inueniundas esse BF, FC, inter quas media proportionalis est FD. Et ipsæ BF, FC differunt per FG, quandoquidem AF & AG constructæ sunt æquales, & AC, AB constructæ quoque æquales. Itaque ab æqualibus AB, AC subducendo æquales AG, AF, remanent BG, FC æquales. Est autem GF differentia inter BF & BG, seu FC. Quod erat demonstrandum.

Figura 2.3. Viète, 1646, *Effectionum Geometricarum Canonical Recensio*

[7] Adjuntem la traducció de la Proposició XII que s'exposa en la *Figura 2.1.*:
Proposició XII: Donada la mitjana de tres quantitats proporcionals i la diferència dels extrems, cal trobar els extrems.
La solució geomètrica d'un quadrat afectat per un costat: Sigui FD la mitjana de tres proporcions i sigui GF la diferència entre els extrems. Cal trobar els extrems. Traçarem GF i FD formant un angle recte i dividirem GF per la meitat en A. Definirem un cercle de centre A i interval AD i estendrem la circumferència AG i AF donats els punts B i C. Una vegada fet això, els extrems que busquem són BF i FC, entre els quals la mitjana proporcional és FD. I els mateixos BF i FC difereixen en FG, ja que AF i AG són iguals per construcció i AC i AB són també iguals per construcció. Llavors restant els iguals AG i AF dels iguals AB i AC, resten els iguals BG i FC. I també GF és la diferència entre BF i BG o bé FC. La qual cosa és el que volíem demostrar.

2.5. Llegat de François Viète

A més de la innovació del seu propi art analític i la introducció d'un nou llenguatge simbòlic, l'obra de Viète és coneguda per identificar les equacions algebraiques amb les proporcions mitjançant el producte de mitjos i extrems d'una proporció, influència de la teoria de proporcions d'Euclides que hem identificat també en *Arithmetica Universal* de Zaragoza.

La resolució d'equacions vinculades a l'aritmètica, la geometria o la trigonometria es va veure transformada amb les noves expressions algebraiques que presentava Viète, marcades pel rigor i la generalització de la seva forma. Tot i així presentaven mancances que han anat evolucionant fins a l'actualitat, com l'absència del signe d'igualtat, els exponents o els radicals.

La difusió de l'àlgebra de Viète es va realitzar a través de diferents textos relacionats amb l'àlgebra. Un dels més coneguts són els sis volums del *Cursus Mathematicus* (1634 – 1637 – 1642) de Pierre Hérigone (1580 – 1643). L'objectiu d'Hérigone era construir un mètode i llenguatge universal per treballar amb totes les parts de la matemàtica i simplificar les demostracions (*Massa-Esteve, 2008*). Herigóne a *Cursus* (1634) adopta la idea de l'art analític en la resolució d'equacions quan explica l'àlgebra de Viète:

> La doctrina analítica o àlgebra és l'art de trobar la incògnita prenent-la com ja sabuda i trobant la igualtat entre això i les magnituds donades. (*Hérigone, 1634*)

Un altre exemple és la *Geometriae Speciosae Elementa* (1659) de Pietro Mengoli (1626/7 – 1686). Aquest autor es va basar principalment en l'obra d'Hérigone i va crear involuntàriament un nou camp matemàtic anomenat *"geometria especiosa"* modelada sobre l'àlgebra especiosa de Viète a través de la influència d'Hérigone a la vegada que treballava amb el llenguatge simbòlic per representar no únicament els nombres sinó també els valors de qualsevol magnitud abstracta. L'objectiu de Mengoli era trobar un mètode general i ben fonamentat per calcular quadratures, en particular, la quadratura del cercle, utilitzant, d'una manera molt particular, les eines algebraiques que havia difós Viète. L'aspecte més innovador del procediment algebraic de Mengoli és l'ús de lletres per treballar directament amb l'expressió algebraica de la figura geomètrica, sense haver de dibuixar-la.

El punt clau per poder comparar aquests tres autors recau en el significat dels símbols emprats per representar qualsevol magnitud (discreta o contínua) a través del procés de raonament en les demostracions o resolució de problemes. Viète introdueix la seva logística *"especiosa"* per tractar qualsevol magnitud, Hérigone per la seva part desitja introduir un llenguatge universal per treballar tant amb la matemàtica pura com amb la mixta a través de teoremes universals, mentre que Mengoli finalment utilitza el llenguatge simbòlic per trobar nous resultats i per crear una nova disciplina matemàtica coneguda com la "geometria de les espècies". (*Massa-Esteve, 2012*)

2.6. Pierre de Fermat i René Descartes[8]

Durant els primers anys del segle XVII, quan l'obra de Viète es va conèixer, molts matemàtics van començar a considerar la utilitat dels procediments algebraics per resoldre qüestions geomètriques. Entre ells podem mencionar a Pierre de Fermat (1601 – 1665) o René Descartes (1596 – 1650).

Una de les obres més destacades de Fermat va ser el *Tractat de quadratures* (1659) conegut per contenir la primera demostració de la qual en tenim constància sobre el càlcul de l'àrea sota una paràbola o una hipèrbola superior. A més, en aquesta obra, Fermat redueix la quadratura d'un gran nombre de corbes algebraiques a la quadratura de corbes conegudes com la de la paràbola, de la hipèrbola o la del cercle.[9]

La possibilitat de trobar un mètode per determinar les propietats d'una corba a partir de la seva equació algebraica reforça la desvinculació de l'àlgebra amb la geometria clàssica.

Les contribucions de Fermat a la geometria algebraica venen donades per la determinació de les tangents a les corbes i el càlcul de les seves longituds i quadratures. En el càlcul de quadratures, Fermat desenvolupa un mètode algebraic que combina el canvi de variables i el que avui en dia podríem interpretar com un cas concret d'integració per parts.

Per altra banda, *La Geométrie* (1637) de Descartes va ser una de les obres més influents en el desenvolupament de l'àlgebra i, en concret, per a la resolució d'equacions. En ella l'àlgebra i la geometria es relacionen a través de les construccions geomètriques de la intersecció de les corbes (quasi sempre paràboles i circumferències) que expressen les solucions d'equacions algebraiques adequadament preparades de grau més gran que dos. Encara que Descartes no cita Viète, és clar que el coneixia, però ell va voler fer un altre camí definint la seva àlgebra de segments. Va començar demostrant les operacions entre segments fent construccions geomètriques.

D'aquesta manera Descartes va deixar les portes obertes a entendre la geometria des d'un altre punt de vista desenvolupant el mètode de la síntesi. Avui en dia, nosaltres utilitzem la notació que Descartes va introduir.

[8] Informació extreta dels apunts de l'assignatura Història de la Matemàtica (Massa-Esteve, 2014-15) i (Pla, 1999).
[9] Quadrar una corba volia dir calcular l'àrea delimitada per la corba i els eixos de coordenades o alguna de les seves asímptotes.

Capítol 3 – L’Obra de José Zaragoza

Aquest capítol està basat principalment en la biografia publicada per Eduard Recasens el 2010. També ens hem basat en altres referències com (*Jurado, 2011; Navarro Loidi, 2005; Navarro Loidi, 2007; Recasens, 2007*)

3.1. Biografia

El context històric que presenta l’Espanya del segle XVII no és gaire favorable per al desenvolupament de la ciència matemàtica ja que el país es trobava immers en una crisis demogràfica, econòmica i política que va de la mà del descontent de la població amb un govern de privats[10] i noblesa. La ciència espanyola es va veure afectada per aquesta crisis i endarrerida respecte el coneixement de la Revolució científica que s’estava donant a la resta d’Europa.

José Zaragoza i Vilanova (Alcalà de Xivert, Castelló de la Plana, 1627, Madrid, 1679) va estudiar Arts i Teologia a València i es va doctorar en aquesta última disciplina, tot i que la seva gran passió residia en l’estudi de les matemàtiques i l’astronomia. La seva orientació cap a les matemàtiques va ser sempre autodidacta i quan la universitat de València li va oferir la càtedra de matemàtiques, va rebutjar-la degut a la seva vocació religiosa.

El 1651 es va unir a la Companyia de Jesús amb l’edat de 24 anys. Va dedicar-se plenament a les funcions de jesuïta tot i que ho compaginava en paral·lel amb l’estudi de les matemàtiques i l’astronomia. Va realitzar el noviciat a Osca i després es va desplaçar a Calatayud on va ser professor de retòrica. Pocs anys després, el 1655, el van destinar al col·legi de jesuïtes Montesión de Mallorca per donar classes de filosofia i teologia on va establir un gran vincle amb Vicent Mut (1614 – 1687), astrònom que va influir significativament en la formació científica de Zaragoza. Mut i Zaragoza van treballar junts en l’estudi de la trajectòria parabòlica del cometa de 1664. Mut va realitzar una comparació de les trajectòries amb un altre cometa el 1665 i a partir d’aquests dos, va publicar *Comentarum anni MDCLXV* el 1666.

El 1660 va deixar Mallorca per viure una etapa a Barcelona de menys d’un any fins poder tornar a la seva terra natal, València, per ensenyar teologia al Col·legi Sant Pau. A partir d’aquest moment, la trajectòria científica de Zaragoza comença a créixer gràcies a les tertúlies que organitzava amb cercles de persones interessades en les matemàtiques i l’astronomia. Aquestes van ser les llavors que va influenciar als novells que més tard desenvoluparien la renovació científica a València a finals del segle XVII.

Va ser a través de la comunitat de jesuïtes que molts científics espanyols van entrar en contacte amb la ciència europea i no pas a través de les universitats, que sofrien l’aïllament europeu. En astronomia, Zaragoza va buscar una fórmula per admetre les doctrines de Copèrnic sense caure en la condemna eclesiàstica.

[10] Càrrec polític representat per una persona en qui el rei depositava confiança i dirigia bon part dels afers de l’Estat.

El 1669 tornaria a col·laborar amb Mut en la reforma del sistema de mesures del regne.

Durant aquesta època a València, la fama de Zaragoza va anar augmentant entre la noblesa amb la qual cosa va començar a créixer el número d'alumnes de les seves classes particulars i les peticions de consells per part d'intel·lectuals del moment. A més, l'Estat va començar a confiar-li diferents encàrrecs com la gestió de les mines d'Almadén i Guadalcanal o els plànols de la desembocadura de la ria de Sanlúcar de Barrameda on hi arribaven les embarcacions de les Índies.

El 1670, després d'una dècada a València, es va traslladar a Madrid per ocupar una càtedra de Matemàtiques als Reials Estudis del Col·legi Imperial regentat per jesuïtes i ajudar al rei Carles II en la seva educació científica. Compaginava càrrecs com el de cosmògraf o inspector de mines amb les classes i el desenvolupament dels seus estudis que el van portar a poder publicar la major part dels seus llibres en aquesta etapa. El 1670 fou el mateix any en què Zaragoza es va obrir camí amb la seva obra *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa*, un text per al qual Zaragoza va haver de dissenyar personalment els caràcters tipogràfics de l'àlgebra inexistents en les publicacions espanyoles del moment.

Zaragoza mor el 1679 a Madrid, un mes abans de complir els 52 anys.

3.2. Influència com a matemàtic

La principal vessant de l'estudi matemàtic de Zaragoza va ser la recuperació de la geometria clàssica grega i en especial, la recuperació del llibre perdut d'Apol·loni (262 – 190 a.C.) del segle III aC, *De Locis Planis* (Dels Llocs Plans), que tractava dels espais geomètrics resolubles a partir de rectes i circumferències. L'interès per aquest llibre també va captivar a Pierre de Fermat (1601 – 1665) durant la seva joventut.

El llibre d'Apol·loni va ser comentat per Pappus d'Alexandria (290 – 350) en el llibre VII de la seva *Synagoge*. L'obra és del 340 i se'n troba una traducció llatina al *Mathematicae Collectiones* (*Commandino, 1588*). En aquest llibre s'agrupen diferents enunciats que figuraven en el llibre d'Apol·loni i els presenta en forma de dos llistats de vuit enunciats cadascun però sense emprar cap demostració. Els enunciats de les llistes es corresponen a diferents situacions o llocs geomètrics. A més, Pappus introdueix uns lemes previs que faciliten la comprensió de l'obra d'Apol·loni.

Zaragoza va parar molta atenció a l'espai geomètric que ocupava el cinquè lloc del segon llistat de Pappus, igual que faria més endavant Fermat. Aquest lloc és el que segueix:

> Si des de punts donats en nombre qualsevol tracem segments rectilinis cap a un altre punt i les espècies sobre aquests totes juntes igualen una extensió donada,

> aquest punt es troba en una circumferència donada en posició. (*Commandino, 1588*)[11]

La resolució d'aquest espai presentava una dificultat afegida ja que el lloc geomètric dels punts que complien la condició imposada per Apol·loni era una circumferència que tenia com a centre, el centre de gravetat dels punts donats, suposats amb uns pesos associats, però el concepte de centre de gravetat de punts pesants no formava part de la geometria grega euclidiana.

Zaragoza va saber superar aquest inconvenient introduint una nova construcció en termes estrictament pertanyents a la geometria euclidiana per definir el concepte de "Centre mínim d'un sistema de punts geomètrics amb classes de polígons associats". Les propietats geomètriques que oferia aquest centre mínim coincideixen amb les del centre de gravetat de punts pesants. (*Recasens, 1991, 1994*)

És aquest nou concepte, l'aportació fonamental de Zaragoza i el que li va donar base per escriure una de les seves principals obres en matemàtiques, la *Geometria Magna in Minimis*, publicada el 1674 a Toledo. Zaragoza introdueix per primera vegada en geometria pura un punt geomètric que fa de centre de gravetat físic d'un sistema de punts amb pesos associats tot demostrant amb estricte rigor euclidià les propietats de la seva aportació i exemplificant el cas en la resolució de problemes lligats al càlcul de raons entre magnituds geomètriques. D'aquesta manera podem afirmar que Zaragoza s'anticipa un segle al *Càlcul Baricèntric* de August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) desenvolupat en llenguatge algebraic el 1827. (*Recasens, 1991, 1994*)

L'obra *Geometria Magna in Minimis* mereix el seu reconeixement entre els llibres publicats en geometria a l'Europa del segle XVII, tot i que no va tenir la difusió esperada, fet que ha provocat que Zaragoza passés desapercebut en el seu temps i fa que atorguem aquests descobriments a matemàtics posteriors. Entre els exemples, trobem el *Càlcul Baricèntric* de Möbius o el *Teorema de Ceva* on es dona una relació que també s'exposa en la *Geometria Magna in Minimis*.

Per altra banda, cal tenir en compte també el seu primer llibre publicat el 1670 a València, *Arithmetica Universal.* Aquesta obra amaga dins seu l'emprempta de l'art analític de Viète. Al llarg del llibre s'intueixen diferents lloances a l'Àlgebra com una disciplina en sí mateixa, independent del "Arte Menor" o Aritmètica i a un pas més de l'"Arte Maior". Zaragoza desenvoluparà el seu propi llenguatge simbòlic influenciat per la notació d'altres autors com Aurel o Rudolff però amb el desig d'aplicar el tractament dels elements com "espècies" propi de Viète. A més, amb un clar objectiu didàctic, l'autor descriu en aquesta obra els passos de resolució d'equacions estaberts en el nou mètode analític. Novament com en el cas de l'obra *Geometria Magna in Minimis*, l'*Arithmetica Universal* no va tenir el seu reconeixement en la societat de l'època.

[11] Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectae lineae et sint species quae ab omnibus fiunt dato spacio aequales punctum continget positione datam circumferentiam

Aquesta situació es deu a l'escàs cultiu de les matemàtiques que es va donar a l'Espanya del segle XVII o més ben dit, a l'escassa difusió que se'n va fer. Alguns matemàtics de renom com Julio Rey Pastor (1888 – 1962) o José Echegaray (1832 – 1916)[12] han donat pes a la visió pessimista de la cultura matemàtica espanyola del segle XVII però no és cert que res de valor matemàtic s'hagi aportat per part de la ciència espanyola del segle XVII. L'excepció la trobem en un grup petit de matemàtics jesuïtes, relacionats directa o indirectament amb el Col·legi Imperial de Madrid, els quals van treballar en el camp de la docència i van realitzar aportacions notables en el camp de la geometria pura. (*Recasens, 2007*)

Amb tot això, podem entendre la poca divulgació que es va fer i menys encara a nivell europeu on s'estaven desenvolupant mètodes analítics algebraics i el càlcul infinitesimal. Així, obres amb tanta abstracció com la que mostra la *Geometria Magna in Minimis* o l'*Arithmetica Universal* no van tenir l'oportunitat de ser ben estudiades ni aplicades.

3.3. Publicacions

Com hem comentat anteriorment, durant la seva última etapa a Madrid, Zaragoza va publicar la major part dels seus llibres. A més de la *Geometria Magna in Minims,* molts d'ells van representar un gran avenç del nivell matemàtic espanyol del segle XVII.

Zaragoza va publicar un total de catorze llibre de matemàtiques pures i aplicades de caràcter didàctic per impartir les seves classes i va escriure moltes obres més que han quedat manuscrites. És sabut que la prioritat d'estudi dels jesuïtes se centrava en la geometria pura. Dins d'aquesta, durant el segle XVII es va investigar sobre els tres problemes clàssics: la trisecció de l'angle, la duplicació del cub i la quadratura del cercle. Zaragoza els treballarà en la seva versió dels *Elements* del 1678, en el capítol "*De los problemas no resueltos".*

El primer llibre que va publicar Zaragoza constitueix el centre d'estudi d'aquest treball. *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra Vulgar y especiosa* (València, 1670) va introduir per primera vegada a España el concepte analític i àlgebra especiosa descrits per Viète abans en diferents punts d'Europa. (*Recasens, 2010*)

Aquest llibre obre les portes a l'algebraització d'un nou llenguatge simbòlic, el mètode analític de resolució i la construcció geomètrica en sistemes d'equacions. En les diferents seccions que segueixen en aquest treball aprofundirem més en la seva anàlisi i descriurem amb tot detall l'ús que Zaragoza fa de l'àlgebra amb la definició d'un nou mètode de resolució coincident amb les fases de Zetètica, Porística i Exegètica ja definides per Viète, del qual en rep una gran influència.

[12] Vegeu per exemple el *Discurso académico de apertura de curso 1912-13* de Rey Pastor (1934) o la *Historia de las Matemáticas puras en nuestra España* de Echegaray (1866)

Zaragoza va redactar dues versions dels *Elements* d'Euclides, una en llatí i l'altra en castellà. De la versió castellana se'n va realitzar dues impressions: la primera, publicada el 1671 a València, *Geometría especulativa y práctica de los planos y sòlidos* i la segona publicada el 1678 a Madrid, *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometria especulativa y pràctica de los planos y sólidos*. En la primera publicació, Zaragoza no introdueix nous corol·laris ni explicacions per complementar l'estudi de la geometria, però sí reorganitza l'obra dels *Elements* agrupant les definicions, els problemes i els teoremes en tres blocs.

Geometría especulativa y práctica de los planos y sòlidos va ser el llibre més conegut i utilitzat a Espanya i colònies americanes. Es tracta d'una versió didàctica que recull la part geomètrica dels *Elements* d'Euclides, exceptuant els apartats corresponents a poliedres regulars, els quals s'estudiaran en la *Geometria Magnae in Minimis* publicada el 1674.

El 1672, Zaragoza publica a Mallorca la seva *Trigonometría espanyola, resolución de triángulos planos i esféricos. Fábrica y uso de los senos y logaritmes. Canon Trigonometricus y Tabula logarithmica* on, novament per primera vegada a Espanya, s'explica què són els logaritmes, les seves propietats, la manera de calcular-los i la seva aplicació en la resolució de triangles. Zaragoza és l'autor que més influeix en la generalització del coneixement dels logaritmes a Espanya. També s'estudien en l'*Arithmetica Universal* i l'autor és el primer en imprimir taules de logaritmes: *Canon Trigonometricus y Tabula logarithmica*. (*Navarro Loidi, 2007*)

Zaragoza introdueix els logaritmes com una correspondència entre progressions i els identifica amb els exponents de la progressió geomètrica. Tot seguit presentem dos extractes de la definició de logaritme en les dues obres mencionades per veure la rellevància de les progressions en aquesta definició:

> Los Logarithmos son ciertos números artificiales, que en Progresión Arithmetica corresponden a los números verdaderos de una Progresión Geométrica. (*Zaragoza, 1672*)
>
> De suerte esta progresión aritmética natural es Exponente de la geométrica, porque sus términos exponen y declaran, el lugar que tienen los términos Geométricos en su Progresión. Este es el fundamento del Arte Mayor y de los logaritmos como en su lugar veremos. (*Zaragoza, 1670*)

El 1674 va ser l'any culminant de Zaragoza amb la publicació de *Geometria Magna in Minimis* seguida, el 1675, de *Esphera en común celeste y terráquea,* obra vinculada a l'Astronomia. A més, aquest mateix any i com a regal del 14è aniversari del rei Carles II, Zaragoza va redactar un petit i curiós llibre sobre la construcció d'instruments matemàtics, *Fabrica y uso de varios instrumentos matématicos* i li'n va construir alguns de senzills.

En la dècada dels anys 30 del segle XX, Patricio Peñalver de la Universitat de Sevilla, va fer notar l'excepcionalitat de Zaragoza en la publicació dels seus articles (*Peñalver, 1930*). També Albert Dou descriu en articles de les matemàtiques del segle XVII (*Dou,* *1990*) la rellevància matemàtica d'aquest autor i Eduard Recasens de la Universitat Politècnica de Catalunya va elaborar la tesis doctoral el 1991 analitzant la *Geometria Magna in Minimis* juntament amb l'article de 1994 descrivint el mètode baricèntric de Zaragoza. Víctor Navarro Brotons de la Universitat de València ha estudiat també la seva obra astronòmica i la seva influència en la renovació científica valenciana (*Navarro, 1996*).

És per tota la trajectòria i aportacions que ha deixat aquest gran matemàtic del segle XVII pel qual considerem que mereix un reconeixement que no va poder atorgar-se-li en el seu moment. S'ha mantingut desconegut per la Història de les Matemàtiques i per un seguit d'experts que han mantingut l'opinió de la poca riquesa científica i matemàtica espanyola del segle XVII.

Capítol 4 – Anàlisi de l’obra *Arithmetica Universal*

4.1. Introducció

Aquest capítol se centra en l’anàlisi de l’obra *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa*, d’ara en endavant *Arithmetica Universal*, que Zaragoza va publicar el 1670 a València, treballar el seu contingut i valorar les aportacions que va deixar l’autor en els seus capítols.

Aquesta obra és el centre del nostre estudi i comparació ja que en ella trobem un gran valor en l’ús de l’àlgebra Vietiana, en la qual predomina l’ús d’una nova simbologia i un nou tractament de les equacions amb una metodologia basada en l’anàlisi per identificar la incògnita buscada.

Concretament, aquest capítol el dedicarem a la motivació i elaboració de l’*Arithmetica Universal*, treballant el contingut dels seus llibres i aspectes clau com la notació. Tot i així, el nostre treball es focalitza en el tractament que Zaragoza fa de la nova Àlgebra, un pas més enllà de l’“Arte Maior”. És tanta la rellevància d’aquesta ciència en sí mateixa, que hem considerat oportú dedicar el capítol 5 únicament a l’anàlisi del llibre tercer de l’*Arithmetica Universal* titulat “De la Álgebra”. Per arribar a aquest punt, cal haver entès prèviament els conceptes que descriurem a continuació (objectiu de l’obra, valoració de l’Àlgebra com a entitat pròpia, contingut dels llibres primer i segon, regles bàsiques de l’aritmètica, càlculs d’arrels, presentació de la notació, “Arte Menor” i “Maior”), i les influències i primeres nocions que deixa entreveure l’autor en la seva introducció i primers llibres, així com les primeres traces de la notació que farà servir.

4.2. Propòsit de l’autor en la interpretació de l’obra

Abans de presentar els quatre llibres que constitueixen el nucli central de l’*Arithmetica Universal*, Zaragoza ens introdueix aspectes rellevants de la seva intenció en aquest llibre a través de diferents apartats introductoris: el prefaci o dedicatòria de l’obra, la llicència i censura o reconeixement d’altres personatges significatius i finalment, una introducció on veurem les primeres intencions de l’autor de cara al tractament de l’àlgebra i l’aritmètica.

4.2.1. Prefaci

Tota l’obra en sí i el coneixement que l’emmarca està dedicada al rei Carles II, al qual Zaragoza rendeix homenatge i del qual n’era professor de matemàtiques formant part de la seva cort. Com es descriu en el prefaci de *Arithmetica Universal*, l’autor diposita en Carles II tota la confiança per conduir al poble espanyol a aconseguir els èxits per al regne d’Espanya.

A continuació, comença la seva ferma lloança a l’àlgebra com l’esperit i ànima del cos de les matemàtiques. Zaragoza entén l’àlgebra com una entitat pròpia, una branca independent de les matemàtiques, una extensió de l’”Arte Maior” concebut en aquella època. El fet de no considerar l'"Arte Maior" com un complement de l'"Arte Menor" ens fa apropar més al pensament d'Aurel que al de Rudolff, com hem vist en el capítol 2 d'aquest treball.

> La nobleza del Algebra busca en los Reales pies de V. Majestad su centro, y como el espíritu que transciende y anima todo el cuerpo de las Matemáticas, unidas en sí, las rinde todas para su mayor gloria.[13]

En la seva obra *Arithmetica Universal*, Zaragoza recorrerà un camí que anirà creixent en complexitat. Començarà treballant l'"Arte Menor", del qual mantindrà l'estil per introduir l'"Arte Maior" i l'Àlgebra. En el segon llibre desenvoluparà l'"Arte Maior" i aquest pas li servirà com esgraó per culminar amb la descripció de la seva Àlgebra, terme que guarda per descriure l'Art analític de Viète.

Seguint amb el prefaci, l'autor valora l'ingeni per sobre la força i com el valor del saber hauria de reforçar-se, sobretot en el domini de les matemàtiques ja que són aquestes les que serveixen per alimentar el coneixement. És en aquest punt en el qual menciona l'aplicació militar de les matemàtiques, la qual podem relacionar amb altres autors precedents com Diego de Alava y Beaumont (c.a. 1557) i la seva obra *El Perfecto capitán* de 1590.

> No pelea el acero sin el impulso; ni los dos, tanto como el discurso que les dirige. Prevalece el arte a la fuerza, al León, aunque más robusto, le señorea el hombre, pero a este fin la industria quedará sujeta a la violencia de un bruto. El ingenio solo no erige trofeos, pues cuando más fecundo, si falta el beneficio, le viste de malezas y de corona de abrojos. Las Matemáticas fertilizan el ingenioso suelo y fecundan el campo militar, que con su riego produce triunfos en victoriosas palmas, y rinde coronas en eternos laureles.[14]

Més endavant fa referència a les tres branques de les matemàtiques que ell considera creació de Déu i, per tant, les més fonamentals: Aritmètica, Estàtica i Geometria. Menciona també la convivència d'aquestes tres amb la filosofia.

> Dios en número, peso y medida crio toda la gran máquina del orbe; Aritmética, Estática y Geometría concurrían a su creación y las mismas en buena Filosofía han de conservar el Imperio de V. Majestad pues sin hipérbole comprende al mundo, nunca pierde al Sol de vista, ni tiene otros términos, que los del universo.[15]

En l'inici del prefaci, Zaragoza parla de l'àlgebra com l'esperit i ànima de la matemàtica però a mesura que avança el discurs, observem com lloa l'aritmètica com la branca de les matemàtiques que ocupa el primer i un lloc superior a la resta de branques. La considera, però, amb molt més potencial que el que ofereix actualment i poc treballada,

---

[13] *Arithmetica Universal*, Señor (Dedicatòria), Zaragoza, 1670
[14] *Arithmetica Universal*, Señor, Zaragoza, 1670
[15] *Arithmetica Universal*, Señor, Zaragoza, 1670

reduïda a una essència substancial. Podem relacionar aquesta idea amb la influència del tractament clàssic de les matemàtiques que perdura des del segle XVI.

> Goza la Aritmética el primer lugar por superior y transcendente a todas las Matemáticas; sube por sus grados hasta la suprema cumbre. Reducida hoy a breve y compendioso volumen, se consagra a V Majestad por sí misma, como quien pronuncia, que por las ciencias a que se entiende, ha de llegar V. Majestad a lo sumo de la militar gloria…[16]

Amb aquesta primera visió tanca el prefaci i dedicatòria de l'obra. A continuació presenta la llicència i censura i tot seguit, en la introducció de l'*Arithmetica Universal* es tornarà a obrir el debat de la idea que tenia l'autor de l'Àlgebra.

4.2.2 Llicència i Censura

Qui atorga la llicència de impressió és el pare Jacinto Piquer, provincial de la Companyia de Jesús a Aragó, segellada al Col·legi de Barcelona a 6 d'Octubre de 1667.

La censura consisteix en l'opinió d'altres personatges de renom sobre l'estil i coneixement exposats en l'*Arithmetica Universal.*

En la censura de l'obra de Zaragoza, el doctor Ivan Bautista Ballester Arcediano de Morviedro, professor de filosofia de Zaragoza a la universitat de València on es va formar com a teòleg, parla de la seva forma de tractar l'àlgebra en relació a l'aritmètica. Segons aquesta censura, sembla ser que Zaragoza treballa amb una nova àlgebra enginyosa i la tracta com una ciència relacionada amb l'aritmètica però d'una forma "especiosa", per la qual cosa podem començar a imaginar-nos una certa relació amb l'àlgebra de Viète. Més endavant analitzarem com en fa menció, però cal assenyalar la diferència entre àlgebra "en xifres" i "especiosa". Es pot parlar de l'àlgebra en termes de logística per referir-nos a "càlcul". El terme logística el va emprar ja Viète i en diferenciava dos tipus: la numerosa i l'especiosa. La logística "numerosa" treballa amb el càlcul de nombres mentre que la logística "especiosa" treballa amb el càlcul d'espècies, on una espècie pot representar qualsevol magnitud tant numèrica com geomètrica. S'associa l'adjectiu "vulgar" al primer tipus d'àlgebra. En paraules de Bautista:

> Esta ingeniosa Álgebra en compendiosas cifras epiloga dos bien distantes extremos, así por la parte, que abate a lo vulgar, pero no vulgarmente el vuelo, como por la que sublimemente se remonta a lo más especioso de la Aritmética.[17]

Bautista distingeix en el llibre dos objectius diferenciats. Per una banda el descobriment de noves aplicacions de les matemàtiques en àmbits ja coneguts com el sector de les mercaderies o indústries. Per altra banda, el segon objectiu consisteix en dibuixar noves línies d'estudi de l'"Arte Maior". Fa especial èmfasi en com Zaragoza deixa enrere l'estil

[16] *Arithmetica Universal*, Señor, Zaragoza, 1670
[17] *Arithmetica Universal*, Censura, Zaragoza, 1670

d’enginy i retòrica de la Grècia clàssica per trobar un nou enfocament a l’embolcall de l’aritmètica, amb una nova simbologia de lletres.

> El otro es delinear nuevos rumbos en los inmensos Océanos del Arte Mayor, casi no arados con el estilo del ingenio, ni medidos con la fonda del discurso: uno y otro, en útiles experiencias de la pluma, logran todos los hombres de cuenta y razón, que no es menester poca, para dar alcance a este reciente Colon de la Aritmética, que deja muy atrás las Hercúleas Columnas.[18]

Fa menció d’aquelles ciències i procediments que es veuen beneficiats per l’ús de la simbologia com a notació, enlloc de la retòrica emprada com anys enrere. Astrònoms, enginyers, demarcadors o calculadors de fallides en podran fer ús i corregir errades detectades en el seu treball.

En aquesta censura es considera l’obra de Zaragoza com un document universal que treballa amb demostracions estrictes basades en la regla “Lesbia”, considerada la regla per excel·lència i usada per Aristòtil. Aquest matemàtic i filòsof va saber definir el concepte d’Equitat aplicat a l’ús de les lleis més abstractes a casos particulars a partir de la similitud amb l’ús d’un instrument per mesurar objectes amb superfícies còncaves convexes. A aquest instrument se l’anomena Regla Lesbia.

> ...exactísimas demostraciones sin el torcido de la regla Lesbia, porque esta es sin duda con propiedad la inflexible regla de oro.[19]

Trobem també altres citacions que mostren la gran admiració per l’estil universal de l’àlgebra que realitza l’autor. A continuació en presentem algunes d’elles:

> ...donde enlaza el ingenio y elegancia con el fruto, y viveza con el espíritu.[20]
>
> …le juzgan otros Euclides en la Geometría y Arquímedes en la Estática, en lo Astronómico, Ptolomeo y Diofanto en la Aritmética.[21]
>
> Quien no venera con rendimiento estos estudios, si hubiere leído en Joachimo Ratico, y en la Perla de Exisio su importancia, y más ponderando lo que dijo en sus elogios Alberto Magno.[22]

---

[18] *Arithmetica Universal*, Censura, Zaragoza, 1670
[19] *Arithmetica Universal*, Censura, Zaragoza, 1670
[20] *Arithmetica Universal*, Censura, Zaragoza, 1670
[21] *Arithmetica Universal*, Censura, Zaragoza, 1670
[22] *Arithmetica Universal*, Censura, Zaragoza, 1670

4.3. Introducció de l'*Arithmetica Universal*

Zaragoza destina una introducció de sis pàgines en la qual fa una anàlisi de l'estructura i importància de cadascun dels llibres i capítols que constitueixen *l'Arithmetica Universal*. En les diferents seccions que presenta aquesta introducció, comença parlant de l'aritmètica per després moure's cap a la vessant de l'àlgebra. Menciona també els logaritmes com hem comentat en el capítol 3 d'aquest treball. A continuació segueixen algunes seccions per entendre la matèria, l'estil, el mètode, la simbologia i la manera d'estudiar el conjunt dels llibres.

4.3.1. La importància de l'Aritmètica en el cos de les Matemàtiques

Zaragoza considera l'aritmètica com la branca fonamental que dóna cos a les matemàtiques, que permet estendre els càlculs discrets als continus. L'aritmètica obre les portes al coneixement de les matemàtiques i, a la vegada, demana el coneixement de totes les altres ciències per entendre-la. A més, l'autor remarca el fort vincle que existeix entre la geometria i la seva interpretació a través de l'aritmètica. En l'últim llibre de l'*Arithmetica Universal*, Zaragoza treballa la resolució de problemes aplicats a diferents àmbits, entre ells la geometria i estudiarem com, a més de l'aritmètica, també l'ús de l'àlgebra serà clau com a eina de resolució de problemes. Tot i així, el veritable estudi de geometria el desenvoluparà en altres de les seves obres posteriors com *Geometria especulativa y práctica de los planos y sólidos* (1671) o *Geometria Magna in Minimis* (1674).[23]

Trobem ja en les primeres paraules de Zaragoza una evidència compartida amb Viète en la menció de Plató com el pare que descriu el camí de l'aritmètica a l'anàlisi.

> La Aritmética es la primera, y la última de las Matemáticas. Primera en orden, por ser la llave de estas sublimes ciencias, o puerta según Platón de las otras facultades mayores. [24]

Viète, en el primer capítol de l'obra *In artem analyticen isagoge* escriu:

> Hi ha una certa manera de buscar la veritat en matemàtiques que es diu que Plató va descobrir primer. Theon l'anomena anàlisi [...][25]

Aquest només és un petit exemple de la influència de Viète en l'obra de Zaragoza, però més endavant analitzarem amb més detall altres evidències de l'*Isagoge* com a font original de l'*Arithmetica Universal.*

---

[23] Més informació a Recasens, 1991 i 1994.
[24] *Arithmetica Universal*, Introducció, Zaragoza, 1670
[25] *In artem analyticen isagoge*, Capítol I, Viète, 1591

4.3.2. Arte Menor, Arte Maior i Àlgebra

En l'inici de les seves explicacions, Zaragoza divideix l'Aritmètica en dues: la menor i la major. El primer llibre de l'*Arithmetica Universal* el dedicarà plenament a la menor, mentre que el segon se centrarà en l'aritmètica major o "Arte Maior". El terme Àlgebra el reserva per explicar i desenvolupar l'àlgebra introduïda per Viète, a la qual li dedica el llibre tercer. Aquesta separació dels dos "Artes" s'ha d'entendre com la necessitat de l'aritmètica menor en l'aplicació i ús de la major i, conseqüentment, en l'àlgebra. El fet de mantenir l'estil de l'"Arte Menor" ens fa allunyar una mica del pensament d'Aurel de l'entitat de l'àlgebra per si sola tot i que creiem que Zaragoza desitja que sigui independent de l'aritmètica menor, influenciat pels pensaments de Viète i la manera en com lloa l'àlgebra en el tercer llibre. Per introduir el concepte d'àlgebra, Zaragoza treballarà prèviament amb l'Aritmètica major, presentada més tard sota la nomenclatura d'"Arte Maior". Però anirà més enllà, tractant l'àlgebra com un últim esgraó més complex que l'"Arte Maior" ja treballat i necessari per desenvolupar la seva àlgebra.

L'aritmètica menor inclou les operacions, proporcions, alineació, falses posicions, progressions i combinacions, juntament amb les regles bàsiques de la suma, resta, multiplicació i quocient. La major fa un pas més i treballa amb les potències [potestades] numèriques. És l'eina per analitzar la composició d'aquestes potències i resoldre les seves arrels, la qual servirà de fonament a l'Àlgebra. En la definició d'Àlgebra, Zaragoza deixa entreveure la visió d'anàlisi que començava a aflorar a la resta d'Europa i havia introduït Viète. Utilitza la paraula "caràcter" per designar les incògnites substituïdes per la notació de la simbologia, igual que feien Rudolff, Aurel i altres. A més, el procediment de resolució analítica també sembla coincidir amb aquests autors, ja que considera un caràcter suposat per després resoldre la magnitud i trobar el valor que li correspon.

> La mayor sube a las Potestades numéricas, examina sus composiciones, inquiere sus raíces, como principal fundamento del Algebra. Esta nobilísima ciencia es verdadera Analítica, que con superior artificio suponiendo un Carácter en lugar de la Cantidad continua, y discreta incógnita, llega a determinar el valor del Carácter supuesto y a resolver con él la magnitud de que se dudaba.[26]

4.3.3. La utilitat de l'Àlgebra

Zaragoza presenta l'Àlgebra amb gran admiració, definint-la com la llum i essència de les Matemàtiques. Un descobriment que aporta valor i certesa a la resolució de qualsevol problema ja que ens ajuda a determinar falses suposicions i a verificar el resultat trobat. Aquest procediment de resolució de problemes coincideix amb l'art analític de Viète, assumint la incògnita com si fos ja admesa i treballar a partir d'unes regles donades per arribar a allò que és veritablement cert.

[26] *Arithmetica Universal*, Introducció, Zaragoza, 1670

Zaragoza, considera l'Àlgebra una matèria que s'escapa de les estudiades fins al moment i que envolta un coneixement més profund i més útil que la resta, per la qual cosa en algunes ocasions se l'havia tractat d'una ciència divina.

> Excede los términos de la elocuencia, y aun no cabe en el dilatado océano de la imaginación. Muchos no dudaron llamarla divina. Es el Sol entre las Matemáticas, de quien todas han recibido lucidos aumentos. No hay enigma al que no de luz, ni problema, que no resuelva, y esto con tan singular industria, que sola entre todas las facultades halla la verdad por un número falso, y consigue la certeza por una suposición incierta.[27]

L'obra *Arithmetica Universal* no treballarà les característiques ni aplicacions dels logaritmes, ja que l'objectiu està centrat en l'aritmètica i l'àlgebra. Tanmateix, en aquest punt, Zaragoza no vol restar importància a introduir la definició de logaritme degut a una certa vinculació amb l'àlgebra. Com hem comentat en el capítol 3 d'aquest treball, existeix una significant relació entre els logaritmes i les progressions i en *l'Arithmetica Universal* així ho fa notar l'autor.

Les aplicacions dels logaritmes són presentades en l'obra de Zaragoza *Trigonometría espanyola, resolución de triángulos planos i esféricos. Fábrica y uso de los senos y logaritmes. Canon Trigonometricus y Tabula logarithmica* (Mallorca, 1672). En aquesta obra s'explica què són els logaritmes, les seves propietats i la manera de calcular-los i la seva aplicació en la resolució de triangles.

4.3.4. Objectiu de l'obra

Les dues vessants del llibre són l'Aritmètica i l'Àlgebra. Es presenten com "Arte Menor" i "Arte Maior" o, respectivament, les dues aritmètiques, però l'Àlgebra se separarà de l'"Arte Maior" per vincular-se a l'àlgebra vulgar i especiosa introduïda a Europa de la mà de Viète. Zaragoza no desitja seguir estrictament les definicions establertes per autors anteriors i la seva manera de desenvolupar aquests dos *"Artes"*, sinó que pretén construir nous principis per tal de facilitar la comprensió del lector. L'objectiu de *l'Arithmetica Universal* és l'aprenentatge didàctic i no l'exposició dels principis que la regeixen:

> Fue mi intento no explicar mas que el Algebra, pues aun para ella sola era corto el volumen, pero atendiendo que el mendigar principios ajenos era imperfección de la obra, resolví ceñir una, y otra de fuerte, que sin otros principios pudiese llegar al Lector; sino a entera comprensión, por lo menos a una mas que mediana noticia de las dos Aritméticas.[28]

Per tal d'aconseguir-ho ressalta l'ús del castellà com idioma de redacció. No sense desmerèixer el llatí, ha preferit fer servir la seva llengua materna per així donar més importància a la seva pàtria davant dels ulls del poble.

---

[27] *Arithmetica Universal*, Introducció, Zaragoza, 1670
[28] *Arithmetica Universal*, Introducció, Zaragoza, 1670

Degut a l'escassa difusió de les aportacions matemàtiques de la època a Espanya, l'autor ha preferit focalitzar-se en una redacció clara, breu però a la vegada entenedora i sense limitar la matèria. Tot i així unir aquests requisits sol ser complicat i està obert al judici d'altres autors.

A continuació, estudiarem el contingut desenvolupat en l'*Arithmetica Universal*, tot organitzant les matèries en llibres i seguint l'ordre recomanat per l'autor.

4.4. Estructura de l'Arithmetica Universal

L'Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa de José Zaragoza està constituïda per un total de 448 pàgines organitzades en quatre llibres: *Libro I. De la Aritmética menor,* amb 152 pàgines, *Libro II. De las Raíces,* amb 112 pàgines*, Libro III. De la Álgebra,* amb 81 pàgines*,* i *Libro IV. De los Enigmas,* amb 103 pàgines. Prèviament a la presentació de cadascun d'ells, l'autor prepara una Introducció no paginada que hem detallat en la secció anterior, on fa menció dels aspectes rellevants que possiblement quedin difuminats en l'explicació dels capítols de cada llibre, ja que aquests se centren en continguts específics i no tant en la metodologia emprada. Aquesta està formada per la dedicatòria o Señor, la llicència i censura de l'obra i la introducció de l'autor. Ha estat en aquesta primera presa de contacte on ja hem notat algunes influències de l'àlgebra especiosa de Viète, com la importància del llenguatge simbòlic ("caràcters"), l'ús d'"espècies" en algunes definicions o la universalitat de l'àlgebra. Més endavant caldrà veure i corroborar si aquestes primeres nocions s'estenen al camp pràctic en la resolució de problemes.

Cadascun dels llibres que formen el conjunt de l'*Arithmetica Universal* conté una agrupació de capítols que tracten diferents continguts i amb metodologies de resolució ben estructurades. El criteri de l'obra és didàctic i l'ordre de presentació dels llibres és clau, ja que la comprensió del llibre posterior necessita de la clarificació de conceptes dels llibres que el precedeix.

Al finalitzar l'exposició dels quatre llibres, Zaragoza presenta un índex amb els capítols que formen cada llibre i la seva paginació i un índex de continguts ordenats alfabèticament per facilitar al lector la cerca dels conceptes clau. Aquest fet és original en les obres de l'època i s'enllaça amb el caràcter didàctic de l'obra. A més també s'adjunta l'explicació de la notació més utilitzada en una taula de caràcters. D'aquesta en parlarem en la secció 4.5. d'aquest capítol.

Tot seguit, procedim en l'explicació i agrupació dels continguts que s'inclouen en cadascun dels llibres mencionats.

4.4.1. Libro I. De la Artimética Menor

Aquest primer llibre tracta els aspectes més fonamentals de l'aritmètica bàsica, com era usual en les aritmètiques de l'època. Treballa les operacions i regles fonamentals amb les quals el lector s'ha de familiaritzar per tenir clara la notació i metodologia que s'emprarà més endavant quan les qüestions es tornin de major complexitat. Igualment acompanya cada explicació amb demostracions argumentades i exemples senzills.

Els primers sis capítols descriuen les regles de sumar, restar, multiplicar i dividir. Del capítol VII al X treballa amb les fraccions i les seves aplicacions. A partir del capítol XI fins al XIX desenvolupa temes relacionats amb les proporcions, definint també la Regla de tres, Regla de tres astronòmica o els principis de la alineació. El capítol XX el destina a parlar de les falses posicions; el XXI i XXII de les progressions que tindran un paper fonamental en els llibres següents. I, finalment, acaba aquest primer gran bloc amb les combinacions. Durant aquests capítols ja descrits es treballa amb arrels, però serà en el següent llibre on hi dedicarà més atenció en la seva descripció i aplicació.

4.4.2 Libro II. De las Raíces

El segon llibre, format per catorze capítols, té un enfocament més precís sobre el tractament de les arrels, la seva construcció, càlculs i operacions. En aquest llibre Zaragoza descriu l"Arte Maior", emprant ja la simbologia de les lletres per treballar amb el càlcul de les arrels.

> Este asunto es sin duda el más difícil de la Aritmética, y el que me empeño a tomar la pluma con ánimo de experimentar si dejaba reducirse a método claro, y breve un océano inmenso de dificultades. Para su inteligencia debe el Aritmético estar bien ejercitado en el Arte Menor, y tener muy presente la doctrina de los SS 68, 69, 70, 181, 182, 212 hasta 215 sino quiere perder el tiempo, y lo que es más, el ánimo y esperanza de salir con la empresa.[29]

En cada capítol realitza un tractament adequat en funció de si l'arrel a treballar és quadrada, cúbica o si les potències [*potestades*] són simples o compostes, o si el signe que hi intervé és positiu o negatiu. Observem la intenció de l'autor de generalitzar els algorismes a través de la introducció del terme "fórmula" en moltes de les taules presentades en aquest llibre (*Figura 4.1.*).

[29] *Arithmetica Universal*, p. 153 Libro II. De las Raíces, Zaragoza, 1670

182 *Formula de la aproximacion primera.*

2.4:9: √ *Aproximada de la Cantidad.*

9725056000000	*Resid.* 2º *con* 5 *zeros.*
1609244476249	$-\ 1Z^5$
315818400600	$-\ 600Z^4$
476742876849	*suma* −
1362824100000	$+\ 900000Z^3$
270000000000	$+\ 3000000000Z^1$
1389824100000	*suma* +
913081223151	*Difer. de* +, *y* −
59424376849	*Residuo* 3º.

Figura 4.1. Exemple de Taula on s'empra el terme "Fórmula". Arithmetica Universal, p. 262

Zaragoza classifica els diferents tipus de càlcul d'arrels buscant la màxima generalització possible en aquesta agrupació i presentant exemples que englobin diferents situacions.

> En estos tres ejemplos se contienen todas las dificultades, que se pueden ofrecer en esta materia. Los que saben otros modos mas breves de sacar la Raíz cuadrada, deben ajustarse a este, por ser general para todas las Raíces, como se verá en los Capítulos siguientes. [30]

Treballa l'"Arte Maior" amb la simbologia de les lletres per mostrar la universalitat dels procediments que es faran servir en l'extensió a l'àlgebra i que es tornen cada cop més complexos però seguint un mateix estil d'algoritme. Aquest "Arte Maior" que descriu Zaragoza servirà com a base i introducció al llibre tercer, dedicat exclusivament a l'Àlgebra.

> En el discurso de este libro se ha visto, el método universal de sacar todas las raíces simples, o compuestas con un mismo estilo, aunque las operaciones se aumentan al paso, que las Potestades suben, y entran más especies diferentes en la composición. En este artificio consiste únicamente la extensión infinita de la Álgebra, y el que le tuviere bien entendido, puede estar seguro, que no hallará enigma tan confuso, que no pueda resolver fácilmente si tuviere términos bastantes para la solución.[31]

[30] *Arithmetica Universal*, p. 170 Libro II. De las Raíces, Zaragoza, 1670

[31] *Arithmetica Universal*, p. 258 Libro II. De las Raíces, Zaragoza, 1670

4.4.3. Libro III. De la Álgebra

El tercer llibre serà estudiat amb més profunditat en el proper capítol d'aquest treball, dedicat exclusivament a ell, ja que constitueix un punt clau en el nostre estudi de l'ús de l'Àlgebra al segle XVII a Espanya i l'impacte de l'obra de Zaragoza. Per ara en farem una breu ressenya per entendre el contingut que en ell es desenvolupa.

Es tracta d'una introducció al lector en el coneixement de l'Àlgebra, ciència que fins al moment era poc coneguda i refusada per molts matemàtics del moment en contraposició a l'ús més conegut de l'Aritmètica menor. Aquest llibre, l'autor mateix el presenta com un tractament breu i superficial de la nova concepció de l'àlgebra o Art analític, però considera que amb l'aprenentatge assolit en els llibres anteriors i la matèria desenvolupada en aquest tercer es pot arribar a profunditzar molt més en el coneixement d'aquesta ciència, la qual requereix inversió de temps i coneixement per arribar a dominar-la.

> La parte más sutil no solo de la Aritmética, sino de las Matemáticas, es la Álgebra; y la menos entendida de los Aritméticos, no tanto por su dificultad, cuanto por los muchos preceptos con los que los Antiguos confundieron sus operaciones. Estas son el único objeto de este breve libro; su brevedad alentará a los más pusilánimes, pues nadie, creo, se persuadirá, que es inaccesible, ni aun dificultosa la Facultad que puede ceñirse a tan breves y claros preceptos, como dirá la experiencia, que espero, ha de ser el mayor desempeño.[32]

Consta de 12 capítols:

- Capítol I: Definició, estructura i fonaments de l'Àlgebra
- Capítol II i III: Algoritme de caràcters simples i compostos
- Capítol IV: Potències i arrels de caràcters
- Capítol V i VI: Nombres irracionals simples i compostos
- Capítol VII: Arrels universals
- Capítol VIII: Binomis i residus
- Capítol IX: Fraccions
- Capítol X: Regla única de l'Àlgebra
- Capítol XI: Reducció de les igualtats
- Capítol XII: Valor de la lletra

Els tres últims capítols són els més significatius, ja que en ells explica la metodologia fonamental en la que es basa l'àlgebra de Zaragoza: obtenció de la igualtat mitjançant el plantejament de la qüestió, reducció de la igualtat per facilitar el treball i l'aplicació dels principis apresos anteriorment, i resolució de l'equació a través del valor de la lletra. Aquests tres procediments descrits corresponen a les tres etapes que utilitzava Viète en la seva nova Àlgebra introduïda al segle XVII a Europa per la resolució d'equacions, tot i que les anomena amb noms propis diferents. Viète va intentar explicar el camí que emprava per resoldre les equacions emmarcant-lo dins l'anàlisi grega. L'objectiu del seu

[32] *Arithmetica Universal*, p. 265 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

"Art analític" era proporcionar un mètode per resoldre tots els problemes mitjançant tres fases: la primera o zetètica per transformar el problema en una equació o igualtat composta de quantitats conegudes i desconegudes; la segona o anàlisi porística per la discussió de l'equació plantejada mitjançant la prova de teoremes coneguts; i finalment la tercera fase anomenada anàlisi rètica o Exegètica per tornar al problema inicial amb la solució trobada. Aquesta última fase era la més important per Viète.

El vincle entre l'àlgebra de Viète i la de Zaragoza és cada cop més clar i creiem poder afirmar que va ser Zaragoza un dels que va ajudar més en la difusió d'aquesta nova forma d'entendre l'àlgebra a Espanya. Gràcies al càrrec que ocupava com a magistrat del Col·legi Imperial, tenia a les seves mans la possibilitat de transmetre aquest coneixement i, a més, sabem que l'objectiu principal de les seves obres és d'intenció didàctica. Cal valorar aquest autor, doncs, com un dels que va ajudar a transmetre el pensament de Viète a Espanya. En el tractament de problemes [enigmas] analitzarem la part pràctica d'aquesta teoria i, a més, en el capítol següent aprofundirem més en l'anàlisi del llibre de l'Àlgebra per veure'n més mencions a altres autors, però sobretot l'aparició de Viète en les seves notes.

4.4.4. Libro IV. De los Enigmas

Amb tot el coneixement descrit de forma precisa i argumentada en els tres primer llibres i també la forma d'actuar en front a un qüestió o enigma, procedeix a presentar el quart i últim llibre: una col·lecció de problemes relacionats amb tots els aspectes descrits anteriorment. Consta d'un total de 120 qüestions a resoldre agrupades en dotze capítols.

La resolució que fa servir involucra l'àlgebra i tracta de diferents temàtiques: proporcions, progressions aritmètica i geomètrica, combinatòria, geometria, arrels, nombres irracionals, etc.

Amb tot això complementa aquesta detallada estructura i segmentació de capítols i llibres del contingut tractat en *l'Arithmetica Universal* de Zaragoza.

L'estructura d'aquesta obra coincideix amb altres publicacions d'autors precedents que comencen sempre en una introducció a les regles bàsiques de l'aritmètica menor i acaben amb un a col·lecció de problemes basats en exemples exposats al llarg dels llibres precedents. El tractament de l'àlgebra en un llibre independent és un cas més particular de Zaragoza que d'altres autors i una primera senyal que fa especial aquesta *Arithmetica Universal*.

4.5. Criteri didàctic de *l'Arithmetica Universal*

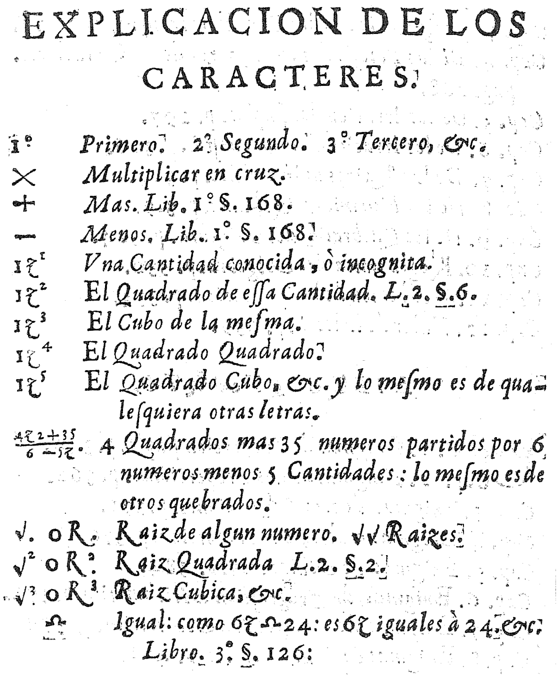
Arithmetica Universal és clarament una obra de caràcter didàctic. L'autor ha preparat cadascun dels llibres que la formen i l'ordre de presentació d'aquests pensant en l'objectiu final de l'ensenyança i la transmissió del coneixement de les dues aritmètiques i l'àlgebra. Aquest objectiu el deixa clar en un dels últims apartats de la seva Introducció. Presentem a continuació les regles d'estudi segons Zaragoza:

Arithmetica Universal comença amb la interpretació de les quatre regles bàsiques de l'Aritmètica Menor. Els capítols VII i VIII del primer llibre titulat *De la Aritmética Menor* són els més necessaris i cal aprofundir en la seva comprensió. Per tal de passar al segon llibre, *De las Raices,* no cal saber-ne d'alineacions, falses posicions ni combinacions, i de manera similar, per entrar en la lectura del tercer, *De la Algebra*, són suficients els cinc primers capítols del segon llibre. Respecte el quart i últim llibre que composa *l'Arithmetica Universal, De los Enigmas,* per tal d'aconseguir una veritable comprensió, Zaragoza recomana l'estudi dels tres llibres anteriors, ja que aquest quart llibre desenvolupa exercicis pràctics relacionats amb els principis exposats i desenvolupats de forma argumentada anteriorment.

La forma d'aplicar la matèria exposada en el conjunt dels llibres té una intenció didàctica que consisteix en reproduir primer els exemples proposats en cada capítol i després considerar-ne altres similars. D'aquesta manera es trobaran errors que no s'han tingut en compte i que serviran per corregir errates.

4.6. Notació de l'*Arithmetica Universal*. Ús de caràcters en l'Àlgebra

Tot seguit passem a estudiar la notació que l'autor ha emprat al llarg de *l'Arithmetica Universal* posant especial èmfasi en la simbologia que aprofitarà per al tercer llibre, *De la Álgebra*, ja que en ell descobrirem vincles amb altres autors com la influència de Viète. També hem percebut que Zaragoza té la intenció de desenvolupar un mètode propi per tal de facilitar la divulgació de l'àlgebra i l'aritmètica. És per això que dedicarem aquesta atenció a la simbologia. Al final de *Arithmetica Universal* Zaragoza adjunta una taula resum dels símbols presentats al llarg de tots els llibres per ajudar al lector i tenir un "diccionari" de referència (*Figura 4.2.*).



EXPLICACION DE LOS CARACTERES.

1° Primero. 2° Segundo. 3° Tercero, &c.
× Multiplicar en cruz.
+ Mas. Lib. 1° §. 168.
— Menos. Lib. 1° §. 168.
1ζ¹ Vna Cantidad conocida, ò incognita.
1ζ² El Quadrado de essa Cantidad. L. 2. §. 6.
1ζ³ El Cubo de la mesma.
1ζ⁴ El Quadrado Quadrado.
1ζ⁵ El Quadrado Cubo, &c. y lo mesmo es de qualesquiera otras letras.
4ζ2+35 / 6−5ζ. 4 Quadrados mas 35 numeros partidos por 6 numeros menos 5 Cantidades: lo mesmo es de otros quebrados.
√. o R. Raiz de algun numero. √√ Raizes.
√² o R². Raiz Quadrada L. 2. §. 2.
√³ o R³. Raiz Cubica, &c.
♎ Igual: como 6ζ ♎ 24: es 6ζ iguales à 24, &c. Libro. 3°. §. 126.

Figura 4.2. Taula dels caràcters emprats en la nova notació. Arithmetica Universal, p. 452

En la diferenciació d'Àlgebra i Aritmètica, l'autor clarament defensa l'ús d'una nova notació amb "caràcters" per substituir tant els valors de les incògnites com de les quantitats conegudes i aquesta simbologia estarà present en tota *l'Arithmetica Universal* i, amb més èmfasi, en la metodologia de resolució de problemes d'àlgebra. Destaquem com original el fet d'utilitzar la mateixa lletra, $1Z^1$ (*Figura 4.2.*) per definir tant la incògnita com la quantitat coneguda. Zaragoza considera del tot necessari i essencial l'ús de la simbologia per poder treballar amb l'Àlgebra, com ja havíem vist que feia Viète, el qual va transmetre aquestes idees a través de la seva obra *In artem analyticen isagoge* (1591), font que segurament haurà consultat el nostre autor.

A més, Zaragoza remarca la necessitat d'invertir més temps i diners en la creació d'una nova notació que ell exemplificarà en unes taules que presentem a continuació, on fa servir els exponents com els coneixem avui en dia, índexs superiors drets que acompanyen la lletra (*Figura 4.2.*).

Zaragoza creu en la universalitat del llenguatge per poder transmetre més còmodament el coneixement de l'àlgebra. Així, el fet que cada autor utilitzi diferents notacions i, en molts casos, no s'incloguin els "caràcters" en aquestes simbologies, és causa de confusió per al lector. Menciona autors com Marino Ghetaldi (1568 – 1626)[33], el pare Jacques de Billy (1602 – 1679)[34] o el Pare Gaspar Schott (1608 – 1666)[35], tots ells d'altres països d'Europa, a qui retreu la falta d'un llenguatge simbòlic de caràcters en les seves terminologies.

> Los Caracteres propios del Algebra
>
> Son el complemento de su perfección: la falta de ellos fue siempre causa de confusión y prolijidad. Gran motivo tuviera para quejarme de las impresiones de España, sino viera que en Italia le faltaron a Marino Ghetaldo, en Francia al P.Billi y al P-Gaspar Scoto en la superior Alemania. No me pude reducir a sacar sin este complemento el libro viendo que con dinero no se podía remediar el daño, por faltar los artificios, apliqué mi industria y conseguí lo que solo intentar, pareció a muchos, temeridad. Hice por mi mano los punzones, matrices y llaves, fundí todos los caracteres enteros y quebrados que juzgué necesarios sin perdonar a trabajo, ni gasto por conseguir toda la perfección.[36]

De forma general, entén que no es pot fer servir un caràcter sense prèvia definició i així ho intenta aplicar. No obstant, sabent que el lector segurament no està familiaritzat amb aquesta nova notació, adjunta al final de tot del conjunt de llibres un índex i una taula que resumeix el significat dels caràcters emprats en la seva nova simbologia. Zaragoza va haver de crear els símbols per a la impremta com es dedueix de la cita anterior. (*Figura 4.2.*). Cal remarcar el fet que Zaragoza, igual que Viète, usa caràcters no només per substituir les incògnites sinó també quantitats que venen donades i són ja conegudes.

---

[33] Més informació a O'Connor & Robertson, 2010

[34] Més informació a O'Connor & Robertson, 2006

[35] Més informació a A. G. Keller, *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 12

[36] *Arithmetica Universal*, p. 9 Introducció, Zaragoza, 1670

4.6.1. Simbologia inicial, Libro I. De la Aritmética Menor (Arte Menor)

En la introducció del llibre primer, el qual tracta fonamentalment de l'aritmètica i les regles bàsiques del sumar, restar, multiplicar i dividir, introdueix la unitat com el principi de tot nombre i, en conseqüència, qualsevol altre nombre es defineix com la multitud d'unitats, ja siguin pertanyents al mateix tipus d'objecte [espècie] o diferents.

Considera únicament deu xifres corresponents a la notació decimal i que adaptarà en notació sexagesimal en cas que convingui. En el llibre primer es defineixen a més, regles bàsiques d'aritmètica com la regla de tres, proporcions, operacions amb fraccions, etc.

Els teoremes i regles que Zaragoza exposa per introduir les proporcions i aprendre a treballar amb elles són clau ja que es basen en els principis difosos per Euclides en els *Elements* com ja hem mencionat en el capítol 2 d'aquest treball. Aquestes regles són bàsiques i les veurem aplicades en la majoria de qüestions del Libro IV. De los Enigmas, com és el cas de la regla del producte d'extrems igual al producte de mitjos.

En el nostre estudi buscarem coincidències amb altres autors ja presentats en capítols anteriors o que el propi Zaragoza mencioni en les seves notes. En aquest cas trobem ja un dels exemples que fa servir per definir "Alligación", la Corona d'Arquimedes. Aquest exemple s'havia utilitzat en publicacions com el *Libro Primero* d'Aurel o en *Coss* de Rudolf (*Romero & Massa-Esteve, 2018*).

Per facilitar la comprensió del lector definirem el que entenia Zaragoza i els matemàtics de l'època per "Alligació". Es tracta de la mescla d'espècies diferents per aconseguir-ne una de nova, anomenada Mitjana. El principi fonamental al qual està lligat és la Regla Única General: si la diferència dels extrems es fa Tot, les diferències del mig escrites en creu, formen les parts de la mescla.

> Alligación se dice la mezcla de muchas especies, para que resulte otra especie Media: como si se mezcla oro de 22 quilates con oro de 13, saldrá una especie Media, más perfecta que de 13, y menos que de 22. Lo mismo es en el vino, trigo, lanas. En cada alligación hay seis términos, que son las tres especies Mayor, Menor y Media, que se declaran por sus precios, y las tres cantidades, de la especie Mayor, Menor y Media.
>
> Regla Única General
>
> Si la diferencia de los extremos se hace Todo, las diferencias del Medio puestas en cruz, son las partes de la Mezcla.[37]

Per facilitar la comprensió d'aquesta regla, presentem l'exemple emprat en el mateix apartat del llibre.

Exemple. Donat dos tipus d'or, un de 22 quirats i l'altre de 13 volem reduir-lo a 16 quirats. Quina proporció prendrà cada espècie?[38]

---

[37] *Arithmetica Universal,* p. 95 Libro I De la Aritmética Menor, Zaragoza, 1670

[38] *Arithmetica Universal*, p. 95, Libro I De la Aritmética Menor, Zaragoza, 1670

Escriurem les espècies de tal manera que la més gran quedi a dalt, la més petita a sota i la mitjana en un lateral, tal i com mostrem en la *Figura 4.3.* A continuació escriurem les diferències entre la Mitjana i les dues espècies en forma de creu, és a dir, la diferència entre 22 i 16, 6, l'escriurem a sota i la diferència entre 16 i 13, 3, l'escriurem a dalt. Com que la diferència entre els extrems, 22 i 13 és 9, l'escriurem baix de les dues diferències ja presentades. D'aquesta manera podem llegir que en cada 9 porcions de mescla, 3 han de ser de 22 quirats i 6 de 13, obtenint així 9 porcions d'or de 16 quirats. La prova està en que multiplicant 22 per 3 i 16 per 6, la suma dels productes és igual al producte dels extrems, 16 per 9. (*Figura 4.3.*)[39]

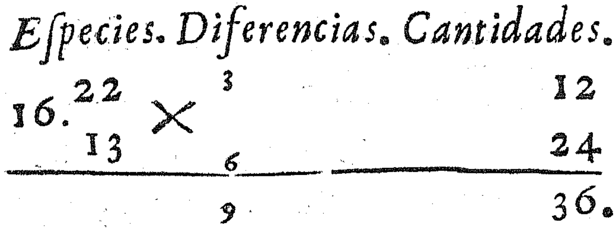


Figura 4.3. Alligació i Regla Única General. Pàgina 95, Libro I. De la Aritmética Menor. Arithmetica Universal

A continuació presentem l'exemple de la Corona d'Arquimedes:

> El Rey Hieron dio a un Platero oro de 24 quilates para una Corona; el Oficial puso mezcla de Plata. El rey temió el engaño y mandó a Arquímedes lo averiguase, sin deshacer la corona. Tomó Arquímedes un pedazo de oro y otro de plata de igual peso que la corona, y poniendo cada uno en un vaso lleno de agua, vio que salió más gua de la de Plata que de la corona, y de esta más que del oro, y entendió que había mezcla.[40]

Més endavant, en el capítol XXI del primer llibre, Zaragoza empra notació amb lletres per denominar termes destacats de les progressions. Anomena A al primer terme; B a l'últim; N el nombre de termes i S a la suma de tots ells. D n'és el denominador, entenent denominador com la raó de la progressió (*Figura 4.4*). Sembla ser que usa la lletra que més intuïció ens pot donar respecte al terme al qual fa referència, en comptes d'un ordre lexicogràfic. No fa distincions entre vocals i consonants, sinó que tria les lletres en funció de la primera lletra de la seva definició.

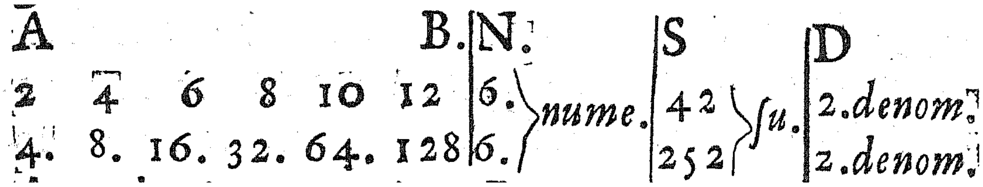


Figura 4.4. Simbologia de les lletres per progressions. Pàgina 119, Libro I. De la Aritmética Menor. Arithmetica Universal

---

[39] La part dreta de la figura on es mostren els nombres 12, 24 i 36, s'empren en un exemple posterior i Zaragoza fa servir la mateixa figura per mostrar-ne el resultat.
[40] *Arithmetica Universal*, p. 97 Libro I. De la Aritmética Menor, Zaragoza, 1670

De forma general, la notació està molt vinculada a l'ús de les progressions, tant aritmètica com geomètrica. El capítol XXIII tracta les nocions de combinatòria. En ell es mostra una primera taula (*Figura 4.5.*) constituïda a partir de la progressió aritmètica natural i una segona (*Figura 4.6.*) formada a base de sumar el terme de la progressió amb el seu immediat superior anterior. Aquesta segona taula de combinatòria l'anomena Taula Triangular i és l'equivalent al triangle de Pascal[41] i es farà servir novament en els càlculs d'arrels.

Per construir la primera Taula de Combinatòria escrivim en la columna esquerra la progressió aritmètica natural. El primer terme de la segona columna serà la unitat i per aconseguir la resta de termes el que cal fer és multiplicar el número superior pel de la seva esquerra (línia inferior). Així: $1 \times 2 = 2; 2 \times 3 = 6; 6 \times 4 = 24$ ... D'aquesta manera, el que aconseguim a la segona columna són els nombres factorials corresponents a cada terme de la progressió aritmètica natural.

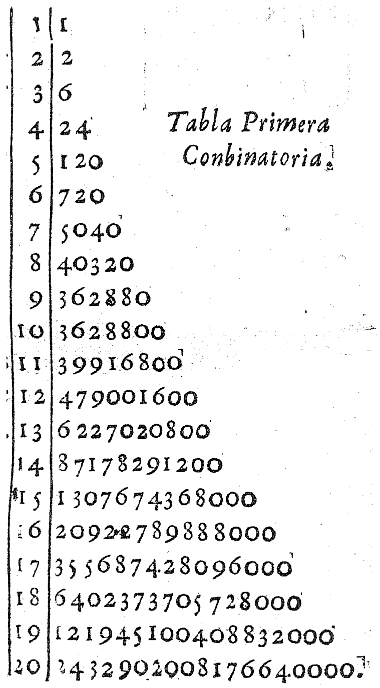


Tabla Primera Conbinatoria.

1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121945100408832000
20	2432902008176640000

Figura 4.5. Taula Primera Combinatòria. Pàgina 140, Libro I. De la Aritmética Menor, Arithmetica Universal

[41] Blaise Pascal (1623 – 1662) defineix per primera vegada aquest triangle com objecte matemàtic en el *Traité du triangle arithmétique* (1653), tot i que civilitzacions anteriors ja l'havien fet servir. Es creu que apareix representat com a triangle per primera vegada a l'obra *De Arithmetica* de Jordanus de Nemorario cap al 1225. També el trobem en la matemàtica xinesa, en l'obra *El mirall preciós* de Txu Xhi-kei (1303). Més tard també l'empra Niccolo Tartaglia (1499 – 1557) un segle anterior a Pascal. (*Massa-Esteve & Romero, 2009*)

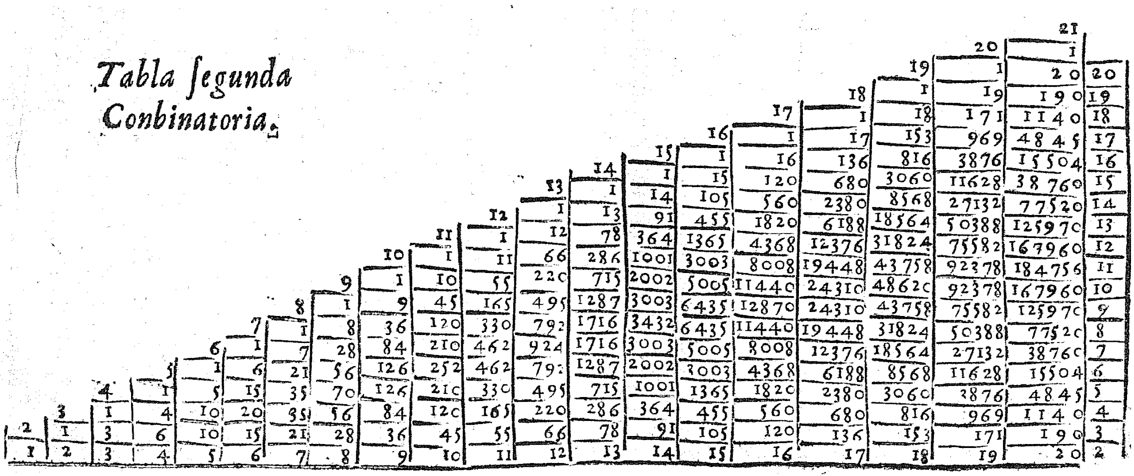


Tabla ſegunda Conbinatoria.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
																			1	
																		1	20	20
																	1	19	190	19
																1	18	171	1140	18
															1	17	153	969	4845	17
														1	16	136	816	3876	15504	16
													1	15	120	680	3060	11628	38760	15
												1	14	105	560	2380	8568	27132	77520	14
											1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	13
										1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	12
									1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	11
								1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	10
							1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	9
						1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	8
					1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	7
				1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	6
			1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	5
		1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140	4
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2

Figura 4.6. Taula Segona Combinatòria. Pàgina 145, Libro I. De la Aritmética Menor, Arithmetica Universal

La segona Taula Combinatòria és equivalent al Triangle de Pascal. A sota de tot s'escriu la progressió aritmètica natural i a les grades (posició superior de totes les columnes), s'escriurà la progressió aritmètica natural començant per 2. Immediatament sota d'aquesta, escriurem unitats per cada columna. Els altres números entremitjos es trobaran sumant el de sota amb el seu immediat superior: $2+1=3; 3+3=6; 4+6=10; 5+10=15$... Aquest procediment s'aplica a tots els nivells de cada columna.

En la següent secció presentarem un exemple on veurem l'aplicació d'aquesta segona taula en el càlcul d'una arrel quadrada.

4.6.2. Caràcters en el Libro II. De las Raíces (Arte Maior)

En el segon llibre de l'*Arithmetica Universal* és on s'introdueix la notació que emprarà Zaragoza per designar les arrels i el tractament d'equacions. Remarcant el criteri didàctic d'aquesta obra, l'autor vol deixar ben clares les definicions de les espècies que farà servir, i així, ja en el primer capítol d'aquest llibre introdueix la simbologia dels caràcters (*Figura 4.7.*).

És a partir de les progressions aritmètica i geomètrica, introduïdes en el Libro I, que Zaragoza defineix les arrels i els conseqüents termes amb les corresponents potències. A partir d'una progressió aritmètica que comenci per 0 podem donar nom als diferents exponents en funció de la posició i el grau de la potència.

> Raíz numérica es un número, de quien otros proceden, continuando una progresión geométrica con la misma proporción, que tiene la unidad como Raíz. Luego si una progresión geométrica comienza de la unidad, el 2º termino será Raíz de los que se siguen, y todos los otros se llaman Potestades, a donde puede subir la Raíz multiplicada por si misma continuamente. Estas Potestades tienen diferentes nombres conforme el grado, y lugar, que tuvieren en la Progresión. Para dar nombres a estas Potestades, se dispone otra Progresión Aritmética

natural, que comience en cero, y sus términos se llaman exponentes de la Geométrica.[42]

En la següent taula (*Figura 4.7.*) veiem la primera mostra de la transformació de notació a caràcters. Les tres primeres columnes són tres progressions geomètriques de raó 2, 4 i 8 respectivament. La quarta columna numera els exponents i la cinquena presenta els noms associats a l'exponent per designar cada arrel. Els caràcters de la sisena columna són els que identifiquen les diferents potències [potestades]. Aquests caràcters són els que els algebristes anomenen caràcters *Cossics* i Viète, *Magnituds Escalars* o *Graduals.* La següent i última columna mostra una segona versió dels mateixos caràcters més senzills, clars i fàcils de referenciar amb l'arrel, per a la qual utilitza el símbol Z. Tria la lletra Z com hagués pogut elegir qualsevol altra de l'abecedari. Veiem com utilitza l'exponent al costat de la lletra Z i superior (*Figura 4.8.*). Aquesta última manera d'expressar els caràcters la identifiquem també amb com Descartes va presentar la seva simbologia. L'autor remarca que aquesta manera de definir els caràcters portarà facilitat i senzillesa a l'hora d'operar amb ells. Cal fer notar que abans de Zaragoza, cada autor feia servir una notació diferent per designar les incògnites i, la majoria d'ells no empraven el que entén Zaragoza per "caràcters".

1. Prog. Geom.	2. Prog. Geom.	3. Prog. Geom.	Exponentes.	Nombres.	1. Caracteres.	2. Caracteres.
1	1.	1.	0			
2	4.	8.	1	Raiz.	R.	Z^1.
4	16.	64.	2	Quad.	Q.	Z^2.
8	64.	512.	3	Cubo.	C.	Z^3.
16	256.	4096.	4	Quad.Quad.	QQ.	Z^4.
32	1024.	32768.	5	Quad.Cubo.	QC.	Z^5.
64	4096.	262144.	6	CuboCubo.	CC.	Z^6.
128	16384.	2097152.	7	Q.Q.Cubo.	QQC.	Z^7.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Figura 4.7. Taula de les Arrels i Caràcters. Pàgina 154, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

$$Z^2$$

Figura 4.8. Exponent de Z (arrel) lateral superior. Pàgina 198, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

En la Itàlia posterior als àrabs es feien servir uns noms diferents per designar les arrels: deien cosa a l'arrel o incògnita, censo enlloc de Quadrat; Supersolido enlloc de Quadrat cúbic (Exponent 5); Quadrat cúbic enlloc de Cub cúbic (Exponent 6). El motiu pel qual no prestaven atenció als noms utilitzats era perquè en aquell moment no es va tenir

[42] *Arithmetica Universal,* p. 154 Libro II. De las Raíces, Zaragoza, 1670

present l’operació suma de caràcters sinó que directament ho van entendre com la multiplicació dels exponents.
Seguint amb la notació i simbologia establerta per Zaragoza, abans de treballar amb qualsevol problema relacionat amb les arrels, nota Arrel quadrada amb R^2 o $\sqrt{}^{2}$; Arrel cúbica amb R^3 o $\sqrt{}^{3}$; etc (*Figura 4.2.*). En el mètode de resolució per trobar arrels utilitzarà la mateixa metodologia de resolució que fem servir actualment tot i que amb més detalls i precisió en la gran part dels passos, fent servir unes taules que descrivim a continuació.

Zaragoza construeix unes taules per ajudar-se en el càlcul d’arrels. La dificultat es troba en buscar els divisors i residus dels diferents quocients que anem trobant en cada pas i per això consultarà la Taula Triangular presentada en la *Figura 4.6.* Amb tot plegat construeix les taules següents basades principalment en procediments descrits en les progressions geomètriques (*Figura 4.9.*). La primera columna fa referència als números de la Taula Triangular propis de cada arrel. La segona conté les potències de A, començant pel menor més proper de l’exponent de l’arrel. La tercera són els divisors, és a dir, els productes de la primera i la segona columna. La quarta conté B amb les seves potències pel seu ordre i la cinquena són els residus, producte de la tercera i quarta columna.

Tabla de la $\sqrt{}^{2}$.

2	A^1	oo	B^1	oo
			B^2	oo

Tablade la $\sqrt{}^{3}$.

3	A^2	oo	B^1	oo
3	A^1	oo	B^2	oo
			B^3	oo

Tabla de la $\sqrt{}^{4}$.

4	A^3	oo	B^1	oo
6	A^2	oo	B^2	oo
4	A^1	oo	B^3	oo
			B^4	oo

Tabla de la $\sqrt{}^{5}$.

5	A^4	oo	B^1	oo
10	A^3	oo	B^2	oo
10	A^2	oo	B^3	oo
5	A^1	oo	B^4	oo
			B^5	oo

Tabla de la $\sqrt{}^{6}$.

6	A^5	oo	B^1	oo
15	A^4	oo	B^2	oo
20	A^3	oo	B^3	oo
15	A^2	oo	B^4	oo
6	A^1	oo	B^5	oo
			B^6	oo

Tabla de la $\sqrt{}^{7}$.

7	A^6	oo	B^1	oo
21	A^5	oo	B^2	oo
35	A^4	oo	B^3	oo
35	A^3	oo	B^4	oo
21	A^2	oo	B^5	oo
7	A^1	oo	B^6	oo
			B^7	oo

Tabla de la $\sqrt{}^{8}$.

8	A^7	oo	B^1	oo
28	A^6	oo	B^2	oo
56	A^5	oo	B^3	oo
70	A^4	oo	B^4	oo
56	A^3	oo	B^5	oo
28	A^2	oo	B^6	oo
8	A^1	oo	B^7	oo
			B^8	oo

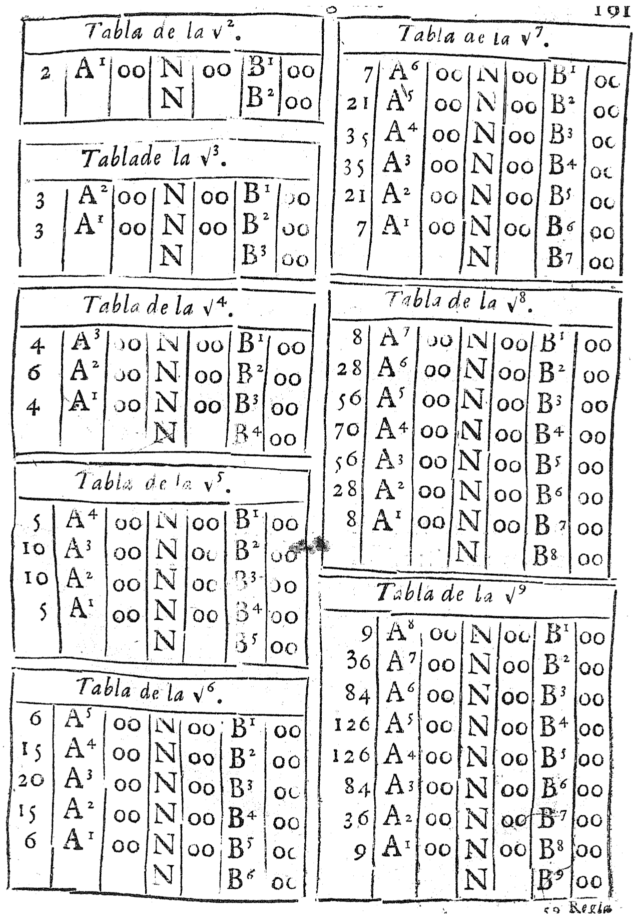
Tabla de la $\sqrt{}^{9}$

9	A^8	oo	B^1	oo
36	A^7	oo	B^2	oo
84	A^6	oo	B^3	oo
126	A^5	oo	B^4	oo
126	A^4	oo	B^5	oo
84	A^3	oo	B^6	oo
36	A^2	oo	B^7	oo
9	A^1	oo	B^8	oo
			B^9	oo

X 2 CAP.

Figura 4.9. Taula del càlcul d’Arrels. Pàgina 163, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

Igual que en el cas de les arrels simples, per treballar amb les arrels compostes utilitza unes taules d'operacions amb la mateixa estructura i notació tot i que el procediment de resolució és força més complex. S'introdueix la N per fer referència al número de potències que constitueixen la quantitat o, equivalentment, el número pel qual es multiplica la potència simple (*Figura 4.10.*).



191

Tabla de la $\surd^{2}$.

2	A^1	oo	N	oo	B^1	oo
			N		B^2	oo

Tablade la $\surd^{3}$.

3	A^2	oo	N	oo	B^1	oo
3	A^1	oo	N	oo	B^2	oo
			N		B^3	oo

Tabla de la $\surd^{4}$.

4	A^3	oo	N	oo	B^1	oo
6	A^2	oo	N	oo	B^2	oo
4	A^1	oo	N	oo	B^3	oo
			N		B^4	oo

Tabla de la $\surd^{5}$.

5	A^4	oo	N	oo	B^1	oo
10	A^3	oo	N	oo	B^2	oo
10	A^2	oo	N	oo	B^3	oo
5	A^1	oo	N	oo	B^4	oo
			N		B^5	oo

Tabla de la $\surd^{6}$.

6	A^5	oo	N	oo	B^1	oo
15	A^4	oo	N	oo	B^2	oo
20	A^3	oo	N	oo	B^3	oo
15	A^2	oo	N	oo	B^4	oo
6	A^1	oo	N	oo	B^5	oo
			N		B^6	oo

Tabla de la $\surd^{7}$.

7	A^6	oo	N	oo	B^1	oo
21	A^5	oo	N	oo	B^2	oo
35	A^4	oo	N	oo	B^3	oo
35	A^3	oo	N	oo	B^4	oo
21	A^2	oo	N	oo	B^5	oo
7	A^1	oo	N	oo	B^6	oo
			N		B^7	oo

Tabla de la $\surd^{8}$.

8	A^7	oo	N	oo	B^1	oo
28	A^6	oo	N	oo	B^2	oo
56	A^5	oo	N	oo	B^3	oo
70	A^4	oo	N	oo	B^4	oo
56	A^3	oo	N	oo	B^5	oo
28	A^2	oo	N	oo	B^6	oo
8	A^1	oo	N	oo	B^7	oo
			N		B^8	oo

Tabla de la $\surd^{9}$

9	A^8	oo	N	oo	B^1	oo
36	A^7	oo	N	oo	B^2	oo
84	A^6	oo	N	oo	B^3	oo
126	A^5	oo	N	oo	B^4	oo
126	A^4	oo	N	oo	B^5	oo
84	A^3	oo	N	oo	B^6	oo
36	A^2	oo	N	oo	B^7	oo
9	A^1	oo	N	oo	B^8	oo
			N		B^9	oo

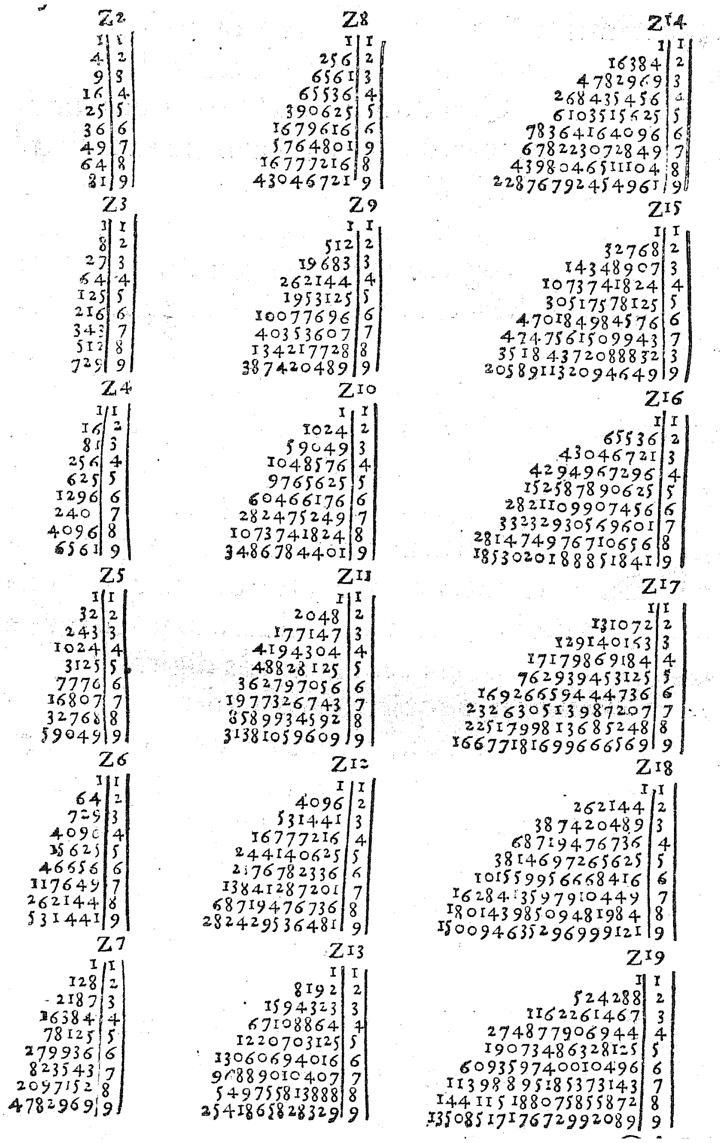
Figura 4.10. Taula del càlcul d'Arrels Compostes. Pàgina 163, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

Per il·lustrat aquests últims conceptes descrits, adjuntem a continuació el detall d'un exemple, en concret el càlcul de l'arrel quadrada.[43]

Sigui 5.480.281 el número del qual volem calcular l'arrel quadrada. Separem el número de dos en dos xifres amb punts i ens queda 5.48.02.81. El primer punt deixa un 5 a mà esquerra així que busquem el seu menor més pròxim a la taula de Z^2 (*Figura 4.11.*) ja que volem calcular l'arrel quadrada. Aquest menor és 4 i l'arrel que apareix al seu costat és 2. Dibuixem una ratlla sobre el número del qual volem calcular l'arrel, escrivim el 2 a sobre i el 4 a sota tal com mostra la *Figura 4.12*. A continuació, restem el 4 del 5 donant com a resultat el primer residu, 1.480.281. El primer punt de mà esquerra que separava el número de dos en dos ja no l'escriurem perquè no se li aplicarà cap operació més

[43] *Arithmetica Universal,* p. 164-167 Libro II. De las Raíces, Zaragoza, 1670

quedant el 148 agrupat. Aquest procediment s'aplica a tots els càlculs d'arrels però caldrà operar amb compte.



	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	240	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969

	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13
1	1	1	1	1	1	1
2	256	512	1024	2048	4096	8192
3	6561	19683	59049	177147	531441	1594323
4	65536	262144	1048576	4194304	16777216	67108864
5	390625	1953125	9765625	48828125	244140625	1220703125
6	1679616	10077696	60466176	362797056	2176782336	13060694016
7	5764801	40353607	282475249	1977326743	13841287201	96889010407
8	16777216	134217728	1073741824	8589934592	68719476736	549755813888
9	43046721	387420489	3486784401	31381059609	282429536481	2541865828329

	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18	Z19
1	1	1	1	1	1	1
2	16384	32768	65536	131072	262144	524288
3	4782969	14348907	43046721	129140163	387420489	1162261467
4	268435456	1073741824	4294967296	17179869184	68719476736	274877906944
5	6103515625	30517578125	152587890625	762939453125	3814697265625	19073486328125
6	78364164096	470184984576	2821109907456	16926659444736	101559956668416	609359740010496
7	678223072849	4747561509943	33232930569601	232630513987207	1628413597910449	11398895185373143
8	4398046511104	35184372088832	281474976710656	2251799813685248	18014398509481984	144115188075855872
9	22876792454961	205891132094649	1853020188851841	16677181699666569	150094635296999121	1350851717672992089

Figura 4.11. Taula de les potències dels nombres dígits fins a Z^{19}. Pàgina 158, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

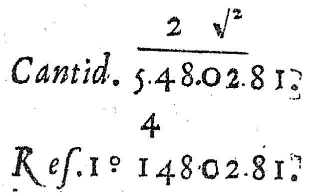
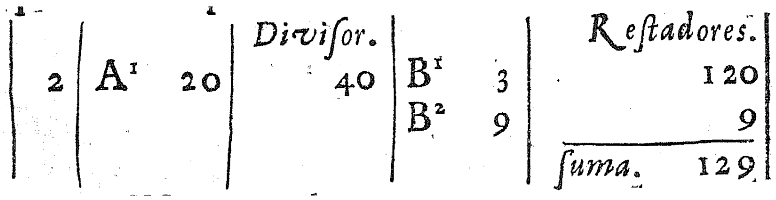


Figura 4.12. Residu 1r. Pàgina 164, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

Per continuar amb la segona operació, afegim un 0 al 2 que havíem obtingut de la taula de l'arrel quadrada, obtenint un 20 i corresponent al valor de A^1.

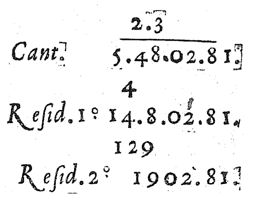
Usarem ara les taules de la *Figura 4.9.*, en concret la taula de la $\sqrt{}^{2}$ amb els cinc ordres o columnes com es mostra a continuació.



2	A^1 20	Divisor. 40	B^1 3	Restadores. 120
			B^2 9	9
				suma. 129

Figura 4.13. Taula del càlcul de $\sqrt{}^{2}$. Pàgina 165, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

Escriurem a la segona columna el valor de 20 corresponent a A^1. Multiplicant 20 per 2 (de la primera columna) obtenim el Divisor 40 que afegim a la tercera. El primer punt del residu separa 148 així que veiem quantes vegades cap 40 a 148 i obtenim 3. Escrivim B^1 corresponent a aquest 3 i, multiplicat per ell mateix obtenim el seu quadrat, 9 vinculat a B^2. Afegim aquest 3 a la línia on hem escrit la primera arrel, el 2. Multiplicant la columna 3 i 4 obtenim la columna cinquena de restants que sumats donen 129 i que restarem del 148 obtingut en el primer residu. Obtenim així el segon residu 1902.81 (*Figura 4.13 i 4.14.*).



2.3
Cant. 5.48.02.81
4
Resid.1° 14.8.02.81
129
Resid.2° 1902.81

Figura 4.14. Residu 2n. Pàgina 165, Libro II. De las Raíces, Arithmetica Universal

Repetint els passos descrits anirem aconseguint els diferents residus fins a arribar a residu 0 que en aquest exemple es donarà en el càlcul del quart residu. En aquest punt ja haurem obtingut l'arrel quadrada del nombre donat que s'haurà escrit a la línia superior de les operacions i que és 2.341.

D'aquesta manera completem l'exemple per millorar la comprensió de les taules del càlcul d'arrels.

4.6.3. Introducció a la notació del Libro III. De la Álgebra

En aquesta secció hem desenvolupat la simbologia inicial que presenta Zaragoza en els dos primers llibres per passar ara a treballar amb la seva Àlgebra. En els llibres I i II de *Arithmetica Universal* hem vist la introducció i l'aplicació de la notació en les regles bàsiques de l'aritmètica i en el càlcul d'arrels que queda vinculat a l'"Arte Maior" i que calia presentar i entendre bé per ara veure com Zaragoza l'estén en el Libro III. De la Álgebra, on veurem una part més pràctica d'aquest llenguatge simbòlic i una clara influència de les Regles de l'Art analític que presenta Viète en la seva obra *In artem analyticen isagoge.*

La notació d'aquest tercer llibre es treballarà a fons en el proper capítol. Tanmateix destaquem a continuació, els trets més rellevants de la seva simbologia.

L'Àlgebra es dividirà en dos tipus: la vulgar i l'especiosa. Aquestes idees, clarament vinculades a l'*Isagoge* de Viète, necessitaran de nou, l'ús de caràcters per poder treballar amb les espècies. Les primeres lletres de l'alfabet quedaran reservades per treballar amb les quantitats conegudes, mentre que les últimes es faran servir per substituir la incògnita. Descartes en la seva obra *La Geometrie* (1637) ja va aplicar aquesta mateixa manera de definir incògnites i quantitats conegudes. Tot i així, en els exemples pràctics i també en la taula resum de caràcters que s'inclou al final de l'obra, es veu com Zaragoza treballarà amb qualsevol lletra de l'alfabet, sense fer distincions ni seguir cap criteri en l'elecció d'aquesta.

Per poder definir les operacions i regles bàsiques dels caràcters descrits, es necessari introduir els conceptes de caràcters semblants, diferents, simples i compostos. Els caràcters semblants són aquells que comparteixen la mateixa lletra i exponent, en contraposició als caràcters diferents. Per altra banda, els caràcters compostos van acompanyats d'un terme independent que no apareix en un caràcter simple. Les operacions només es realitzen en caràcters semblants.

L'altra vessant de la simbologia del tercer llibre és la importància de la progressió geomètrica per construir les potències i treballar en l'extracció de les arrels. Aquest punt enllaçarà amb la notació descrita en el llibre segon i, per tant, amb l'"Arte Maior" que com hem mencionat ja anteriorment, es convertirà en el fonament de l'Àlgebra de Zaragoza.

Capítol 5 – L'Àlgebra i la seva aplicació

Aquest capítol està dedicat al *Libro III. De la Álgebra* de *l'Arithmetica Universal*. És aquí on Zaragoza desenvolupa la seva Àlgebra, ampliant l'"Arte Maior" a la idea d'anàlisi. Descriu amb precisió la seva percepció d'aquesta nova ciència que rep influències de grans autors com Viète. Aquesta font l'inclina a crear una nova Àlgebra amb una metodologia de resolució de problemes que passa per les diferents fases ja descrites per Viète: plantejament de l'equació, simplificació o reducció i substitució del valor de la incògnita. El tractament de les incògnites amb la notació dels caràcters descrits en el capítol anterior es un altre símptoma de la importància de l'Àlgebra per a Zaragoza, qui considerava un gran avenç l'ús de la simbologia per facilitar la comprensió del desenvolupament dels problemes.

En aquest capítol ens centrarem en la concepció de l'Àlgebra, en la seva definició i ús, la seva notació, el tractament de les equacions i resolució de problemes.

5.1. Què és Àlgebra?

En la introducció del *Libro III. De la Álgebra,* Zaragoza tria amb delicadesa, precisió i elegància les paraules per descriure l'Àlgebra, la qual considera que forma part de l'Aritmètica però també de les Matemàtiques en sí mateixa. L'àlgebra de Zaragoza neix com a continuació de l'aritmètica i l'"Arte Maior" però existeix de forma independent, com ja havíem vist que ho interpretava Aurel en el seu *Libro Primero*, tot i que aquesta vinculació amb l'aritmètica pot semblar més propera a Rudolff (Romero & Massa-Esteve, 2018).

Arithmetica Universal obre les portes de l'"Arte Maior", com explica l'autor en la introducció inicial de l'obra, però només és un primer tast per deixar via lliure al lector i concebre aquesta idea que cal perfeccionar i experimentar. Degut a la dificultat que presenta l'àlgebra en la concepció i comprensió, ha estat considerada una matèria amb la necessitat d'una gran implicació i acompliment.

L'àlgebra guarda el seu valor en la universalitat i generalització de la seva metodologia, com mostra l'autor amb les seves paraules en la següent cita que ja havíem mencionat en el capítol 4 d'aquest treball:

> No hay enigma a que no de luz, ni problema que no resuelva y esto con tan singular industria, que sola entre las facultades, halla la verdad por un numero falso, y consigue la certeza por una suposición incierta.[44]

Segons Zaragoza, l'àlgebra és sinònim d'anàlisi o resolució, de la mateixa manera que Viète presenta el seu Art Analític en la seva obra *In artem analyticen isagoge* (1591). Es tracta de la facultat o art que ensenya a resoldre qüestions a través dels termes que la constitueixen:

---

[44] *Arithmetica Universal*, Introducció, Zaragoza, 1670

> Álgebra es doctrina analítica, *analysis* dicción griega es lo mismo que en latín *resolutio*, y en castellano *resolución*. Analítica es resolutiva, con que Álgebra es una facultad o arte resolutiva, que enseña a resolver las cuestiones por los mismos términos con que la compusieron. Los Árabes la llamaron Algebra, que es tanto como *restauración*, y Almucabala, que es *oposición*, porque los Caracteres incógnitos en la una parte, se oponen a una Cantidad conocida en la otra parte de la igualación.[45]

L'origen de la paraula prové dels àrabs, que feien servir *Àlgebra* per designar restauració i *Almucabala* per referir-se a oposició de Caràcters desconeguts, igualats a Quantitats conegudes com s'explica en l'obra d'al-Khwarizmi, Hisâb al-jabr w'al-muqqabala (segle IX). Més endavant, els italians la van començar a anomenar la *Regla de la Cosa* i van introduir el terme arrel per definir una cosa incerta que substitueix la magnitud real que es desitja trobar. La *Regla de la Cosa* és com hem vist que treballaven Aurel i Rudolff en el capítol 2 d'aquest treball (*Romero & Massa-Esteve, 2018*).

Zaragoza defineix Àlgebra com "Arte Maior" ja que estem parlant d'una regla major a les estudiades fins ara en l'Aritmètica, una regla més subtil, noble i universal. També es parla d'ella com Logística, ja que el procediment de plantejament i resolució de problemes segueix una argumentació racional i lògica, la qual cosa permet donar més certesa al mètode. Aquest terme, logística, és l'usat per Viète per referir-se al terme "càlcul", tot i que Viète específica dos tipus de logística: numerosa i especiosa per diferenciar el càlcul amb números del càlcul amb magnituds[46]. Zaragoza, es refereix sempre a espècies identificades a través de la notació de caràcters, tal com feia Viète, per designar qualsevol tipus d'objecte, incloent així, tant l'opció numèrica com la de magnitud geomètrica. Tot i així, hi ha alguns detalls que ens faran pensar que Zaragoza no va acabar d'estendre aquestes espècies a les magnituds tal i com les entenia Viète en la geometria, o almenys, no en aquesta obra. En la secció 5.4. d'aquest capítol en veurem alguns exemples.

A través de l'àlgebra obtenim una millor comprensió dels objectes i equacions ja que els principis que es fan servir en les demostracions són més senzills i a la vegada universals (veritats demostrades i argumentades en principis generalitzats i verídics).

> Los italianos la llamaron Regla de la Cosa, y censo, que es Regla de la Raíz, y Quadrado porque la mayor parte de sus cuestiones se resolvían por Quadrado y raíz, suponiendo por raíz una cosa incierta, en lugar de la magnitud cierta que se busca. Arte Mayor se llama, porque entre todas las regles de la Aritmética, es la mayor, más sutil, noble y universal. Logística se dice también, que es suputación o cálculo: su lógica es la mejor, y el método de argumentar es el más cierto, como el más sencillo, fácil y llano, fundado en menos, y más universales principios.[47]

[45] *Arithmetica Universal*, p. 265-266 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[46] Més informació a Oaks, 2018
[47] *Arithmetica Universal*, p. 266 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

Zaragoza recorre a la història de la paraula àlgebra i el seu ús per donar el mèrit als àrabs en la creació d'aquesta ciència i aprofita també per mencionar a Diofant d'Alexandria (c.a. 200 – c.a. 284) com a primer autor en utilitzar l'àlgebra en sí mateixa en la seva obra *Arithmetica*.

> Atribuyen algunos su invención a cierto Mahomet Árabe, hijo de Moisés, pero sin fundamento, aunque no se puede negar que los árabes ejercitaron esta ciencia nobilísima (con otras muchas que nos participaron) y le dieron el nombre. Comúnmente se dice que fue su inventor Gebro Astrónomo Árabe, de quien tomó el nombre de Álgebra pero lo más cierto es que el primer autor fue Diophanto Alejandrino por ser el primero que sabemos haber escrito de esta facultad y en el prólogo de Dionisio dice que emprendía la explicación de una ciencia no conocida hasta entonces.[48]

També veiem aquesta menció a Diofant en l'obra de Viète, *In artem analyticen isagoge* (1591) (Oaks, 2018).

> Diofant va emprar la zetètica més subtilment que tots els llibres que s'han recopilat en la *Aritmètica*. Allí segurament exhibeix aquest mètode en números, però no en espècies, tot i que sí les utilitza. A causa d'això, el seu ingeni i rapidesa mental són els més admirables, ja que les coses que pareixen ser molt subtils i abstractes en logística numerosa són bastant familiars i inclús fàcils en espècies.[49]

En aquest recorregut introductori de l'"Arte Maior" que presenta Zaragoza en el primer capítol del *Libro III. De la Álgebra*, previ a definir les regles que regiran la seva Àlgebra, dedica uns paràgrafs Viète o, més ben dit, als conceptes introduïts per aquest autor, ja que en ell es basa per escriure la notació que emprarà d'ara en endavant i explica els fonaments per entendre la seva manera de treballar.

5.2. Notació de l'Àlgebra

Segons Zaragoza i amb clara influència de Viète, cal diferenciar dos tipus d'Àlgebra: vulgar i especiosa. La primera tracta les operacions fins arribar a aconseguir una igualtat entre les incògnites i les quantitats conegudes a través de la lògica. D'aquesta manera pretén trobar la magnitud que cercava. L'especiosa, en canvi, no treballa amb números sinó que considera espècies, formes o caràcters amb els quals crear hipòtesis i equacions.

> Se divide la Álgebra en Vulgar y Especiosa. La vulgar ejercita su lógica y operaciones con los números conocidos hasta hallar alguna igualación entre los

[48] *Arithmetica Universal*, p. 266 - 267 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[49] *In artem analyticen isagoge*, fol. 8a.10, Viète, 1591
Zeteticem autem subtilissimè omnium exercuit Diophantus in iis libris qui de re Arithmeticâ conscripti sunt. Eam verò tanquam per numeros, non etiam per species, quibus tamen usus est, institutam exhibuit, quò sua esset magis admirationi subtilitas & solertia, quando quae Logistae numeroso subtiliora aparent, & abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt & statim obvia.

> Caracteres incógnitos, y alguna Cantidad conocida, y por su medio resolver la magnitud, o número de que se dudaba. La especiosa deja los números, y en su lugar de vale de ciertas especies, formas o Caracteres, hasta hallar la igualación que busca. Llamase *Vietea* de su autor Francisco Vieta, a quien debemos esta noble invención. [50]

Clarament aquestes línies descriuen la logística numerosa i especiosa de Viète, autor que defineix aquest tipus d'Àlgebra i la difon per Europa durant el segle XVII. Zaragoza el menciona en aquest punt de les definicions.

Per tal de definir aquestes espècies s'utilitzen les lletres de l'abecedari, ja siguin majúscules o cursives. El detall recau en la definició de les espècies amb les primeres lletres de l'alfabet enlloc dels nombres coneguts, i les últimes per denominar les incògnites que es desitja trobar. Aquesta manera de definir les incògnites i les quantitats conegudes està inspirada amb la transmissió de les idees de Descartes en la seva obra *La Geometrie* (1637) (*Pla, 1999*). Tot i així, més endavant, en l'ús d'exemples d'aquest llibre i en la taula resum que apareix al final de l'obra veiem que no segueix la norma que aquí descriu.

Un altre punt a tenir en compte, i que potser s'allunya una mica de la visió de Viète, és l'ús de la unitat acompanyant al caràcter que representa la incògnita o quantitat coneguda. Aquest fet s'identifica amb la notació emprada per Michael Stifel (1487 – 1567) i altres autors anteriors com Aurel o Rudolff. Stifel fa servir "1A" igual que veurem en moltes ocasions a Zaragoza "1Z" en contraposició a la "A" de Viète. Per a Stifel, la lletra A significa un tipus de nombre que requereix "1" per esdevenir un valor, mentre que la "A" de Viète és per si sola un valor d'una magnitud desconeguda. L'ús de la unitat acompanyant el caràcter és influència de les notacions algebraiques precedents. (*Oaks, 2018*)

Zaragoza vol apropar-se a la manera de fer àlgebra que havia difós Viète però alguns aspectes ens fan pensar que no acaba d'estendre-la a la vessant més pràctica de l'obra *Arithmetica Universal*. Aquest punt el tornarem a analitzar en els exemple de resolució de problemes.

Per tal de construir una bona base per aquesta nova àlgebra, Zaragoza es basa en les dues progressions: aritmètica i geomètrica. A més farà servir la notació descrita en el capítol anterior per definir arrel, potències, nombres, exponents i caràcters còssics que representen les Magnituds Escalars o Graduals de la progressió geomètrica.

En el capítol anterior d'aquest treball, en l'estructura de *Arithmetica Universal* hem presentat els 12 capítols que presenta aquest tercer llibre:

- Capítol I: Definició, estructura i fonaments de l'Àlgebra
- Capítol II i III: Algoritme de caràcters simples i compostos
- Capítol IV: Potències i arrels de caràcters

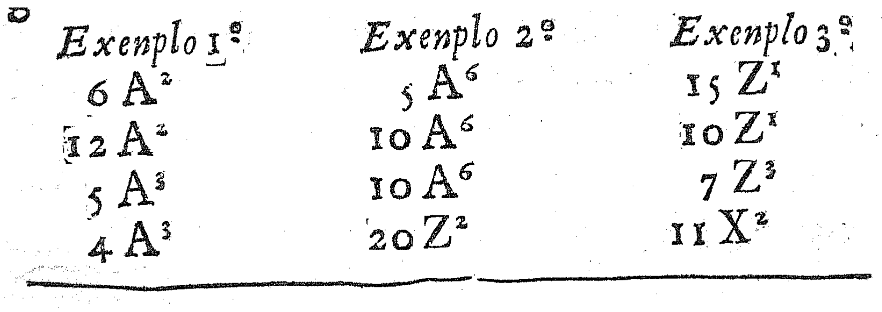
[50] *Arithmetica Universal*, p. 267 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

- Capítol V i VI: Nombres irracionals simples i compostos
- Capítol VII: Arrels universals
- Capítol VIII: Binomis i residus
- Capítol IX: Fraccions
- Capítol X: Regla única de l'Àlgebra
- Capítol XI: Reducció de les igualtats
- Capítol XII: Valor de la lletra

El capítol II i III descriuen les regles de la suma, resta, multiplicació i divisió de caràcters prèviament descrits. Però en la introducció a aquestes operacions fa la distinció entre caràcters semblants i diferents i entre simples i compostos. Aquesta forma de diferenciar els caràcters està relacionada amb autors com Aurel o Pérez de Moya (*Romero, 2018*). Els caràcters semblants són aquells que comparteixen lletra i exponent independentment del coeficient que els acompanya. Entén com a simples qualsevol caràcter amb exponent acompanyat o no del seu coeficient, mentre que els compostos són aquells als quals podem sumar o resta un terme independent.

> Algoritmo se llaman las cuatro reglas de sumar, restar, multiplicar y partir. Los caracteres son *Semejantes* cuando la letra y el exponente es el mismo, aunque los números que les preceden sean diferentes: como $10\ Z^2$ y $20\ Z^2$. *Diferentes* son cuando la letra o el exponente fueren diferentes, aunque en lo demás concuerden: como Z^2 y Z^5 son diferentes caracteres por ser diferentes los exponentes, aunque la letra es la misma. Al contrario Z^2 y X^2 son diferentes caracteres, aunque el exponente es el mismo. Estos caracteres se llaman *Simples* cuando no llevan + más, ni – menos; y cuando llevan los signos +, o – se llaman *Compuestos* como $A^2 + 20$.[51]

A partir d'aquests conceptes inicials ja pot començar a definir les regles bàsiques. Les operacions només s'executaran en caràcters semblants. En cas contrari, s'hauran de deixar escrits a continuació amb el signe operacional corresponent, com es pot veure a la *Figura 5.1.*



Exenplo 1º	Exenplo 2º	Exenplo 3º
6 A²	5 A⁶	15 Z¹
12 A²	10 A⁶	10 Z¹
5 A³	10 A⁶	7 Z³
4 A³	20 Z²	11 X²
suma 18A2 + 9A3.	suma 22A6 + 20Z2	suma 25Z1 + 7Z3 + 11X2

Figura 5.1. Exemples de suma de caràcters diferents. Pàgina 271, Libro III. De la Álgebra, Arithmetica Universal

[51] *Arithmetica Universal*, p. 270 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

Tornant a fixar la mirada en la notació, al llarg dels exemples que exposa per presentar les regles mencionades, utilitza diferents lletres, tant majúscules com minúscules per designar les incògnites o quantitats conegudes. No segueix un criteri establert ni fa distincions entre les primeres o les últimes lletres de l'alfabet com havia exposat anteriorment. (*Figura 5.2.*)

A més, considera que si davant de la lletra que defineix com incògnita amb el seu exponent no apareix cap número, automàticament l'equivalència és la unitat. D'aquesta manera tornem a adoptar la visió de Viète enlloc de la de Stifel o Aurel que havíem mencionat anteriorment. De totes maneres, en la vessant pràctica de resolució de problemes de forma majoritària, utilitza la unitat acompanyant el caràcter.

> Siempre que una letra está solitaria, se entiende que tiene unidad por numero, y exponente: y así lo mismo es z que $1z^1$, y x que $1x^1$ y lo mismo es zx, que $1z^1x^1$. Esto es muy usado en los Authores.[52]

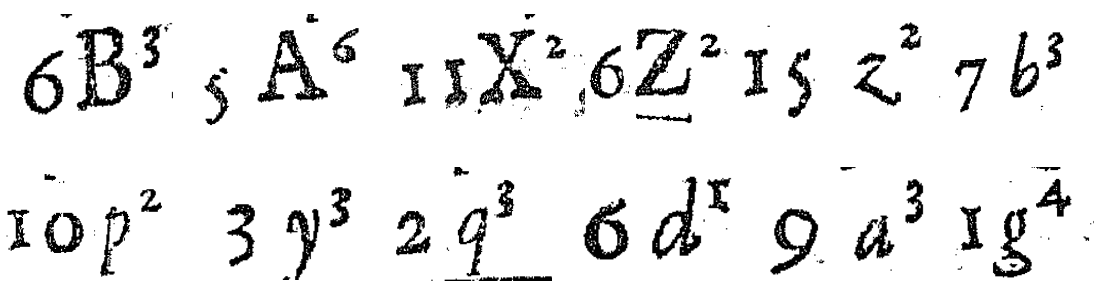

$6B^3$ $5A^6$ $11X^2$ $6Z^2$ $15z^2$ $7b^3$
$10p^2$ $3y^3$ $2q^3$ $6d^1$ $9a^3$ $1g^4$

Figura 5.2. Exemples de lletres com incògnites. Libro III. De la Álgebra, Arithmetica Universal

El capítol IV remarca la importància de la progressió geomètrica en la construcció de les potència i l'extracció d'arrels. Així, donat un caràcter, compost d'una o dues lletres, acompanyades d'un coeficient, podem construir la seva progressió geomètrica a base d'anar multiplicant el coeficient per ell mateix i augmentant l'exponent sumant en cada pas l'exponent donat de partida. Aquesta idea coincideix amb la mateixa que presenta Descartes en la construcció de sèries de potències.

> Si el Carácter es simple, se hallaran las Potestades, por la continua multiplicación del numero que precede, y por la suma o adición continua del exponente. Como si se da $1z^1$ será la Progresión de sus Potestades $1z^1$; $1z^2$; $1z^3$ [...] Lo mismo es aunque sean dos letras juntes como $1z^1x^1$, sus potestades son $1z^2x^2$; $1z^3x^3$; $1z^4x^4$.[53]

Quan desitgem trobar l'arrel d'algun caràcter acompanyat d'un coeficient, es calcula aplicant aquesta arrel al coeficient i també a la incògnita. En aquest capítol, s'ajuda de la notació dels caràcters còssics per explicar els exemples dels caràcters compostos.

[52] *Arithmetica Universal*, p. 289 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[53] *Arithmetica Universal*, p. 289 Libro III, De la Álgebra, Zaragoza, 1670

També notem de nou, la importància de la Taula Triangular en el càlcul de les arrels de caràcters. No entrarem en més detall dels procediments descrits, però si que els veurem reflectits en els exemples pràctics.

Els capítols V, VI i VII són complementaris a la línia d'estudi de l'àlgebra i treballen l'ús d'aquesta en els nombres irracionals. L'autor recomana consultar aquests capítols una vegada el lector s'endinsi en el *Libro IV. De los Enigmas* i necessiti l'ajuda d'aquests capítols. Per ara podem fer un salt als següents capítols.

El capítol VIII està dedicat als binomis i als residus. En ell Zaragoza menciona la definició que Euclides va donar a cadascun d'aquests termes, veient com el pes de la influència clàssica encara és molt present. Un binomi és un irracional compost de dos termes, amb el signe + entre ells. En canvi, Apotema o Residu és el mateix binomi però amb signe negatiu davant. Estarem parlant de trinomis si hi ha tres termes involucrats o quadrinomi si n'hi ha quatre. Si generalitzem la idea a més termes obtenim el concepte de Polinomi.

> Vulgarmente los algebristas llaman *Binomios* a los irracionales compuestos de dos términos, con el signo + por ser compuestos de dos nombres, como $\sqrt{}^{2}18+\sqrt{}^{2}8$, y a los compuestos con el signo - llaman *Apotomes* o *Residuos*, como $\sqrt{}^{2}18-\sqrt{}^{2}8$. Cuando es compuesto de tres términos, se llama *Trinomio* como $\sqrt{}^{2}18+\sqrt{}^{2}8+5$, y si es de cuatro *Quadrinomio*, y generalmente a todos estos compuestos, llaman *Polinomios*, que es compuesto de muchos nombres.[54]

Els tres últims capítols que formen el *Libro III. De la Álgebra* són els més importants ja que descriuen la metodologia de plantejament i resolució de problemes que involucren equacions de caràcters i quantitats conegudes, coincidents amb les fases de resolució d'equacions que presentava Viète en l'*Isagoge* (Zetètica, Porística i Exegètica). Aquests capítols es poden treballar una vegada ja s'han interioritzat els conceptes fonamentals presentats ens els capítols del I al IX. És per això que dedicarem la següent secció a parlar i analitzar cadascun d'ells.

5.3. Resolució d'Equacions

La regla única de l'àlgebra és el títol que engloba la metodologia emprada per Zaragoza a l'hora de desenvolupar i resoldre un problema [enigma]. Aquesta s'explica en tres fases que corresponen als tres capítols finals del llibre.

El concepte clau consisteix en assumir allò que busquem com si fos ja admès i d'aquesta manera podrem aplicar els teoremes i regles que ja coneixem per obtenir una igualtat i operar amb ella per arribar a allò que és cert realment. Aquest procediment el coneixem ja d'Aurel i altres autors com Pérez de Moya com hem mencionat en el capítol 2 d'aquest treball, però sobretot, coincideix amb l'Art Analític de Viète.

[54] *Arithmetica Universal*, p. 319 Libro III, De la Álgebra, Zaragoza, 1670

Enlloc de treballar amb números, Zaragoza fa servir les lletres [caràcter] per substituir el valor buscat i realitzar les operacions regides per les regles descrites en els capítols anteriors del *Libro III. De la Álgebra*. D'aquesta manera podrem plantejar una igualtat que involucra caràcters i quantitats conegudes. Caldrà manipular-la fins arribar a una igualtat més compacta i senzilla i finalment, caldrà trobar el valor de representa la lletra amb l'objectiu de trobar el resultat que es buscava inicialment. Les fases coincideixen amb la Zetètica, Porísitca i Exegètica de Viète. Zaragoza les anomena Igualació, Reducció i Valor de la lletra.

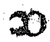
> En lugar del número incógnito, que se busca, supóngase una letra del abecedario A, B, C... Sea pues la letra $1Z^1$ y con ella se harán todas las operaciones sumando, restando, multiplicando o partiendo, conforme el tenor de la cuestión propuesta, hasta hallar alguna igualación. 2º: esta igualación se reducirá si fuere necesario y 3º se buscará el valor de la letra, y ese es el número incógnito, que se busca.
>
> En esta breve regla se cifra toda la inmensidad del Álgebra: contiene tres partes, que son igualación, reducción y valor de la letra.[55]

A continuació comentarem amb detall cadascuna d'aquestes tres regles.

5.3.1. Igualació

La primera fase, o Igualació segons Zaragoza, equival al plantejament de l'equació a partir de l'enunciat donat en retòrica.

Definició: La igualació és la comparació d'una quantitat amb una altra de semblant però amb noms diferents. Per tal d'escriure la igualtat en l'equació Zaragoza fa servir  o .[56]

> Igualación es la comparación de una Cantidad con otra igual de diferente nombre, o la igualdad de dos Cantidades en el nombre diferentes: como $1Z^2 + 6Z^1$ es igual a 16. Denotase la igualdad con este carácter , de esta suerte $1Z^2 + 6Z^1$  16, o con este otro , así $1Z^2 + 6Z^1$  16, esto es $1Z^2 + 6Z^1$ son iguales a 16. En adelante con este carácter  significaré la igualdad por ser en la práctica más fácil.[57]

A continuació, l'autor presenta alguns exemples bàsics per entendre aquest primer pas del plantejament d'equacions [igualtats] donant un enunciat d'un problema senzill que no necessiti la intervenció d'altres principis ja establerts i així comprendre bé la definició donada.

---

[55] *Arithmetica Universal*, p. 330 Libro III, De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[56] Més informació sobre simbologia per designar la igualtat a Cajori, 1928-29.
En contraposició, Viète no especifica cap signe per a la igualtat (*Witmer, 2006*).
[57] *Arithmetica Universal*, p. 330 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

Per poder generalitzar la Igualació a qualsevol enunciat donat, Zaragoza es basarà en 9 principis definits de forma estricta i demostrats que cal tenir present en el desenvolupament d'aquesta primera fase. Aquests principis coincideixen amb els presentats per Viète en el Capítol II de la Introducció de la seva obra *In artem analyticen Isagoge*. Viète en presenta un total de 16 , dels quals 9 són els exposats per Zaragoza (en el cas del 3r, 4t i 7è agrupen, cadascun, dos principis dels de Viète).

A continuació presentem els 9 principis de Zaragoza:

Principios generales para la igualación

1º El Todo es igual a todas sus partes juntas.
2º Las Cantidades iguales a otra, son entre si iguales.
3º Si a iguales se añaden, o quita iguales, quedan iguales.
4º Y si iguales se multiplican, o parten por iguales.
5º El multiplicador, o partidor común no altera la proporción.
6º La Proporción directa, es también alterna i conversa.
7º Si a proporcionales se añaden, o quitan proporcionales semejantes, resultan proporcionales.
8º Si hay cuatro proporcionales, el Producto de los extremos es igual al Producto de los medios.
9º Si hay tres proporcionales, el Producto de los extremos es igual al Cuadrado del medio.[58]

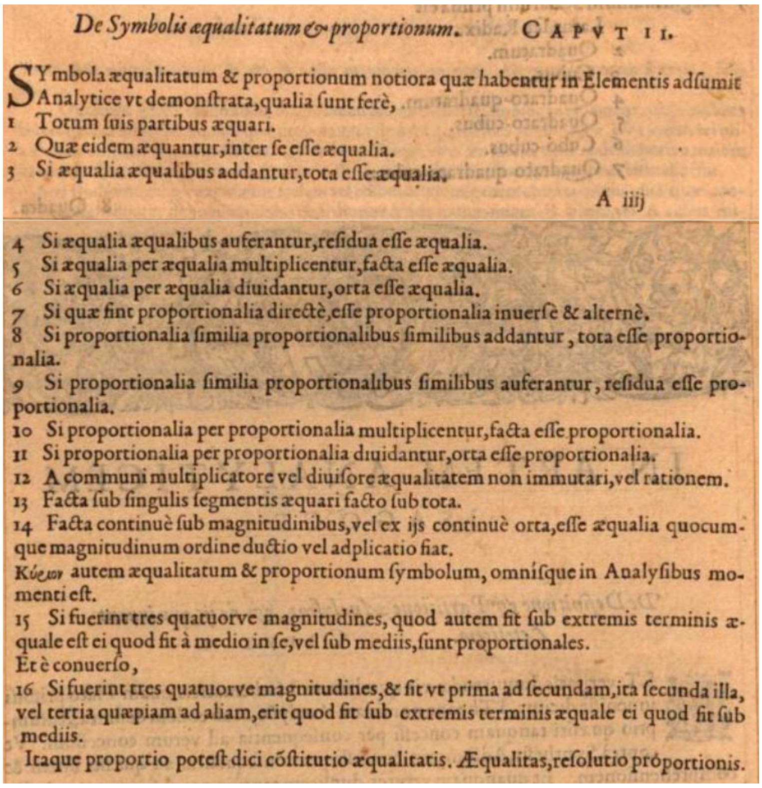
Comparem aquests principis amb les regles presentades per Viète en la seva *Isagoge* (*Figura 5.3.*). A continuació presentem la traducció al català d'aquestes 16 regles:

Sobre les regles fonamentals d'equacions i proporcions

1. El tot és igual a la suma de les seves parts.
2. Coses iguals a una mateixa cosa, són iguals entre sí.
3. Si s'afegeixen iguals a iguals, les sumes són iguals.
4. Si es resten iguals a iguals, la resta és igual.
5. Si es multipliques iguals per iguals, els productes són iguals.
6. Si es divideixen iguals entre iguals, els quocients són iguals.
7. Qualsevol cosa que estigui en proporció directa, estarà en proporció inversa i alterna.
8. Si s'afegeixen proporcionals semblants a proporcionals semblants, la suma és proporcional.
9. Si es resten proporcionals semblants a proporcionals semblants, la resta és proporcional.
10. Si es multipliquen proporcionals de forma proporcional, els productes són proporcionals.
11. Si es divideixen proporcionals de forma proporcional, els quocients són proporcionals.
12. Una equació o raó no varia per la multiplicació o divisió comú dels seus termes.

[58] *Arithmetica Universal*, p. 331 - 332 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

13. La suma dels productes de vàries parts del tot és igual al producte del tot.
14. Les multiplicacions i divisions consecutives de termes produeixen els mateixos resultats, independentment de l'ordre en que es realitzen la multiplicació o divisió de termes.
15. Si hi ha tres o quatre termes tals que el producte dels extrems és igual al quadrat dels mitjos o al producte dels mitjos, són proporcionals.
16. Si hi ha tres o quatre termes tals que el primer és al segon com el segon o el tercer és a l'últim, el producte dels extrems serà igual al producte dels mitjos.[59]



De Symbolis æqualitatum & proportionum. CAPVT II.

Symbola æqualitatum & proportionum notiora quæ habentur in Elementis adſumit Analytice vt demonſtrata, qualia ſunt ferè,

1 Totum ſuis partibus æquari.
2 Quæ eidem æquantur, inter ſe eſſe æqualia.
3 Si æqualia æqualibus addantur, tota eſſe æqualia.

A iiij

4 Si æqualia æqualibus auferantur, reſidua eſſe æqualia.
5 Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta eſſe æqualia.
6 Si æqualia per æqualia diuidantur, orta eſſe æqualia.
7 Si quæ ſint proportionalia directè, eſſe proportionalia inuerſè & alternè.
8 Si proportionalia ſimilia proportionalibus ſimilibus addantur, tota eſſe proportionalia.
9 Si proportionalia ſimilia proportionalibus ſimilibus auferantur, reſidua eſſe proportionalia.
10 Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta eſſe proportionalia.
11 Si proportionalia per proportionalia diuidantur, orta eſſe proportionalia.
12 A communi multiplicatore vel diuiſore æqualitatem non immutari, vel rationem.
13 Facta ſub ſingulis ſegmentis æquari facto ſub tota.
14 Facta continuè ſub magnitudinibus, vel ex ijs continuè orta, eſſe æqualia quocumque magnitudinum ordine ductio vel adplicatio fiat.

Κύϱιον autem æqualitatum & proportionum ſymbolum, omníſque in Analyſibus momenti eſt.

15 Si fuerint tres quatuorve magnitudines, quod autem fit ſub extremis terminis æquale eſt ei quod fit à medio in ſe, vel ſub mediis, ſunt proportionales.

Et è conuerſo,

16 Si fuerint tres quatuorve magnitudines, & ſit vt prima ad ſecundam, ita ſecunda illa, vel tertia quæpiam ad aliam, erit quod fit ſub extremis terminis æquale ei quod fit ſub mediis.

Itaque proportio poteſt dici cõſtitutio æqualitatis. Æqualitas, reſolutio proportionis.

Figura 5.3. Regles fonamentals d'equacions i proporcions. Capítol II de la Introducció d'In artem analyticen Isagoge, Viète (1591).

D'aquesta manera es fa evident que l'*Arithmetica Universal* de Zaragoza es basa en l'*Isagoge* de Viète i que la idea d'àlgebra que plasma l'autor en la seva obra rep la influència de l'Art analític descrit en l'*Isagoge*, al igual que la importància del llenguatge simbòlic i l'ús de les espècies de la logística especiosa. El que ens queda pendent encara és veure com aplica aquests conceptes transmesos en la vessant més teòrica i didàctica de l'*Arithmetica Universal*, però ho farem després d'haver descrit les tres fases de la resolució d'equacions.

Segons Zaragoza, cal complementar els principis generals amb algunes proposicions geomètriques d'estil aritmètic per tal de poder resoldre els problemes relacionats amb

[59] *In artem analyticen isagoge*, Capítol II De Symbolis aequalitatum & proportionum, Viète, 1591

la geometria. Posa d'exemple el teorema de Pitàgores i altres proposicions introduïdes per Euclides en els *Elements.* D'aquesta manera realça la importància de la geometria vinculada a l'àlgebra en la resolució de problemes.

> Sin estos Principios es muchas veces preciso valerse de algunas proposiciones Geométricas, para resolver las Cuestiones que pertenecen a la Geometría, aunque se proponen con estilo Aritmético como 1º Si un Triangulo es rectángulo, el Cuadrado del lado mayor es igual a los dos Cuadrados de los dos lados. 2º Si dos rectángulos son iguales, los lados son recíprocamente proporcionales. 3º Los rectángulos semejantes tienen entre si la proporción duplicada de los lados. En fin, generalmente no hay proposición en la Geometría, de que no pueda valerse el Algebrista para resolver otras.[60]

A més dels principis fonamentals que cal seguir per plantejar l'equació amb caràcters, Zaragoza també presenta alguns casos particulars, deixant oberta la possibilitat de la no existència de solució, molt útil en problemes geomètrics si la conclusió és l'absurd, o igualacions trivials on falta informació per trobar la incògnita. Menciona la utilització de lletres diferents quan es demanen valors diferents o quan un depèn de l'altre per no utilitzar exponents gaire elevats. Tot i així deixa a elecció del lector utilitzar una o més incògnites en funció del mètode que li resulti més pràctic.

> No es preciso suponer siempre $1Z^1$ porque tal vez será más fácil suponer la misma letra con diferentes números; como pídanse dos números con proporción de 2 a 3, que se multiplican: supongo que el 1º sea $2Z^1$ y el 2º $3Z^1$. Otras veces conviene suponer diferentes letras, que llaman segundas raíces, como supongo el 1º sea $1Z^1$ y el 2º, $1X^1$. Con esto se sigue la pregunta hasta llegar a la igualación. También se puede suponer alguna Potestad de la letra, Cuadrado o Cubo, como $1Z^2$ o $1Z^3$ y si en esto se tiene cuidado, sirve para evitar irracionales, y la molestia de sus operaciones. [61]

5.3.2. Reducció

En la majoria de casos, la primera fase o Igualació deixa escrita una equació que no permet de forma fàcil obtenir el valor que amaga la lletra o caràcter que busquem conèixer. Aquí és on entra en joc la segona fase o Reducció.

Definició: La reducció és el procediment mitjançant el qual aconseguim aïllar la quantitat sense cap caràcter en un costat de l'equació. Per tal d'arribar a aquesta situació, es realitzaran tots els procediments següents possibles: eliminar fraccions, depressió de caràcters o "Hypobibasmo" - simplificació d'incògnites en cas que no hi hagi termes independents - , reducció del terme independent en una part de la igualtat – sumant o restant el que faci falta en cada part de la igualtat – i reducció del coeficient més gran a la unitat dividint tots els termes pel coeficient del caràcter amb exponent més alt.

[60] *Arithmetica Universal*, p. 332 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[61] *Arithmetica Universal*, p. 333 - 334 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

No siempre la igualación se halla en términos hábiles, para sacar el valor de la letra, y es necesario reducirla de suerte, que en la una parte de la igualación de Halle el numero solitario sin Carácter alguno, por ser la Cantidad conocida, de quien se ha de sacar el valor de la letra, o por división, o por extracción de raíz; y el Carácter mayor en la otra parte de la igualación, se ha de reducir a unidad. 1º de librará la igualación de Quebrados; 2º se hará depresión de Caracteres, si hay necesidad; 3º se reducirá el número solo a la una parte de la igualación; 4º se reducirá el Carácter mayor a unidad.[62]

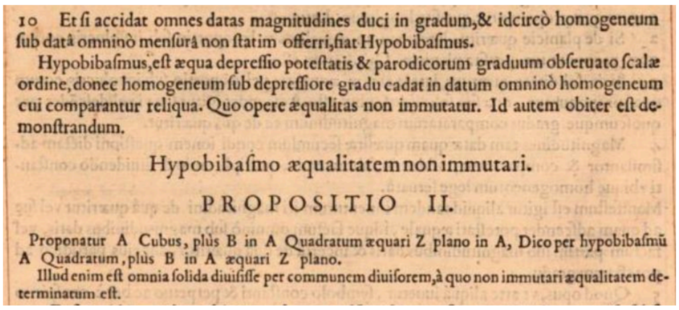
L'ús i definició del concepte Hypobibasmo deriva de l'*Isagoge* de Viète. Viète empra aquesta paraula per descriure la depressió de caràcters i coincideix amb el desenvolupament descrit per Zaragoza. Aquest procediment és equivalent a la simplificació de caràcters que coneixem avui en dia.

Reducción por depresión de Caracteres

Cuando todos los términos de la igualación son Caracteres y en ninguna parte hay número sin letra, se hará la depresión de los caracteres, quitando el exponente menor de todos los exponentes; y es lo mismo que partir todos los términos por el Carácter menor, con que es fuerza quede en la una, o en las dos partes número si Carácter: como si $2Z^3 \ \Omega \ 16Z^1$, partiendo los términos por $1Z^1$ quedará $2Z^2 \ \Omega \ 16$ […] De suerte que se quita el Carácter menor y el exponente menor se resta de los mayores: esta depresión, o disminución se llama Hypobibasmo.[63]

Comparem ara amb la descripció d'Hypobibasmo segons Viète (Figura 5.4.):

L'Hypobibasme o depressió és una reducció igual de la potència i els termes d'ordre inferior en l'ordre observat de l'escala fins que el terme variable més baix es converteixi en una constant pura amb la qual es puguin comparar la resta. L'equació no varia amb aquesta operació com demostrem en l'exemple següent: donat $A^3 + BA^2 = Z^p A$ (notació actual), aplicant l'hypobibasme o depressió obtenim $A^2 + AB = Z^p$ (notació actual).[64]


10 Et si accidat omnes datas magnitudines duci in gradum,& idcircò homogeneum sub datâ omninò mensurâ non statim offerri,fiat Hypobibasmus.

Hypobibasmus,est æqua depressio potestatis & parodicorum graduum obseruato scalæ ordine,donec homogeneum sub depressiore gradu cadat in datum omninò homogeneum cui comparantur reliqua. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter est demonstrandum.

Hypobibasmo æqualitatem non immutari.

PROPOSITIO II.

Proponatur A Cubus, plùs B in A Quadratum æquari Z plano in A, Dico per hypobibasmũ A Quadratum, plùs B in A æquari Z plano.

Illud enim est omnia solida diuisisse per communem diuisorem,à quo non immutari æqualitatem determinatum est.

Figura 5.4. Hypobibasme segons Viète. Capítol V de la Introducció d'In artem analyticen Isagoge, Viète (1591).

[62] *Arithmetica Universal*, p. 334 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

[63] *Arithmetica Universal*, p. 335 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

[64] *In artem anayticen isagoge*, p. 7 Capítol V, Viète, 1591 (*Witmer, 2006*)

Els procediments que Zaragoza descriu per poder reduir l'equació, van acompanyats d'exemples que fan molt més fàcil la seva comprensió i involucren únicament el procediment mencionat en cada moment. Destaca novament l'ús de la progressió geomètrica en la reducció del coeficient principal a la unitat, ja que en alguns casos la divisió no serà entera. Tractarem aquesta excepció en particular ja que l'aplicarem en els exemples pràctics i volem clarificar la comprensió d'aquest procediment.

La reducció del caràcter més gran a la unitat consisteix en dividir tots els termes pel coeficient principal per deixar així el caràcter més gran acompanyat de la unitat. El cas particular es troba quan aquesta divisió no és entera. En aquesta situació el que proposa Zaragoza és construir una progressió geomètrica de raó el coeficient principal i començant-la amb el primer terme igual a la unitat. El següent pas és multiplicar els termes de l'equació pels de la progressió en l'ordre establert pels exponents i així obtenim una equació equivalent a la original. L'arrel de la primera equació l'aconseguirem dividint l'arrel de l'equació reduïda pel coeficient principal de l'original. Aquest procediment serveix per trobar les arreles enteres només positives construint una segona equació amb la mateixa arrel positiva que l'equació original.

Reducción del Carácter mayor a la unidad

> Pártase todos los términos por el número del Carácter mayor, y quedará reducido: como si $10z^3 + 30z^2 - 40z^1 \,\Omega\, 500$. El Carácter mayor es z^3 y su número 10. Partiendo todos los números por 10, será $1z^3 + 3z^2 - 4z^1 \,\Omega\, 50$.
>
> Cuando la partición no puede venir justa, se formará una progresión Geométrica, que el término 1º sea la unidad; el 2º sea el número del Carácter mayor, el 3º su Cuadrado, el 4º su Cubo… Los términos han de ser tantos como el exponente mayor de la igualación y comenzando por el último se escribirán los exponentes 0, 1, 2, 3… Los términos pues de la igualación, se multiplicarán por los términos de la progresión, que corresponde a su exponente y, dejando el Carácter mayor con la unidad, quedará reducida la igualación, pero la raíz de esta nueva igualación se ha de partir por el número del Carácter mayor, y el Cociente será la raíz verdadera de la primera igualación.[65]

Per facilitar la comprensió al lector, presentem un parell d'exemples on s'aplica aquesta reducció descrita per Zaragoza:

Exemple 1: Donada l'equació $10z^6 + 5z^4 - 2z^3 - 100z^2 + 200z^1 \,\Omega\, 1004000$. L'exponent més gran és 6 i el coeficient que l'acompanya o principal és 10. Per tant escriurem la progressió geomètrica de raó 10 amb 6 termes i numerarem els exponents de 0 a 5 en ordre invers (*Taula 5.1.*).

[65] *Arithmetica Universal*, p. 338 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

Progressió	$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$
Exponents	$5, 4, 3, 2, 1, 0$

Taula 5.1. Exemple de Reducció del Caràcter a la unitat quan la divisió no és entera. Construcció de la progressió Geomètrica. Pàgina 338 Libro III De la Álgebra, Arithmetica Universal

Recordem deixar el caràcter més gran acompanyat de la unitat. Ara ens queda multiplicar els termes de la igualtat pels de la progressió: multiplicarem $5z^4 \times 10$, corresponent a l'exponent 4, $2z^3 \times 100$ (exponent 3), $100z^2 \times 1000$ (exponent 2), $200z^1 \times 10000$ (exponent 1), 1004000×100000 (terme independent).[66]

D'aquesta manera l'equació reduïda quedarà $1z^6 + 50z^4 - 200z^3 - 100000z^2 + 2000000z^1 \, \Omega \, 1004000000000$.

L'arrel d'aquesta equació, pel *Libro II. De las Raíces*, és 100, però cal dividir-la per 10, coeficient que acompanya el caràcter més gran, obtenint el quocient 10 que correspon a l'arrel de l'equació original.

Exemple 2: Donada l'equació $2z^4 + 1z^1 \, \Omega \, 320020$. L'exponent més gran és 4 i el coeficient principal és 2. Escriurem la progressió geomètrica de raó 2 amb 4 termes i numerarem els exponents de 0 a 3 en ordre invers (*Taula 5.2.*).

Progressió	$1, 2, 4, 8$
Exponents	$3, 2, 1, 0$

Taula 5.2. Exemple de Reducció del Caràcter a la unitat quan la divisió no és entera. Construcció de la progressió Geomètrica. Pàgina 338 Libro III De la Álgebra, Arithmetica Universal

Multiplicarem $1z^1 \times 4$, corresponent a l'exponent 1 i 320020×8, corresponent al terme independent. D'aquesta manera l'equació reduïda quedarà $1z^4 + 4z^1 \, \Omega \, 2560160$.

El que aconseguirem en aquesta fase és deixar arreglada l'equació de tal manera que aïllem en un costat el caràcter amb coeficient 1, deixant la resta de termes a l'altra banda de l'equació, com procediríem avui en dia, de tal manera que només quedi realitzar el càlcul de l'arrel en qüestió.

5.3.3. Valor de la lletra

Finalment, ens queda trobar el valor del caràcter que estem buscant i la situació que ha deixat la última fase o Reducció és precisa i còmoda per poder realitzar el càlcul de l'arrel aplicant la metodologia descrita en el *Libro II. De las Raíces*.

[66] Com que el coeficient d'exponent 5 és 0, al multiplicar $0z^5 \times 1$ queda 0.

Per a Zaragoza, igual que per Viète, la tercera fase, Exegètica o Valor de la Lletra, és el punt clau de tot el recorregut, ja que la simbologia que s'ha emprat es pot substituir pel valor real que havíem suposat cert d'entrada.

> Este es el fin de todo el trabajo antecedente, pues como la letra se supone en lugar del numero incognito, que se pide, sabido el valor de la letra, se sabe el numero, y queda la cuestión resuelta, y descifrado el enigma.[67]

En aquesta forma d'expressar-se de Zaragoza, observem que és possible que només estigui entenent el valor de la lletra com un valor numèric, però recordem el seu desig de treballar amb la notació simbòlica per identificar qualsevol magnitud numèrica o geomètrica, com havia après de Viète.

En aquesta última fase distingeix dues regles per obtenir el valor de la lletra: la Regla General i la Particular.

La Regla General descriu explícitament com procedir quan hi ha un únic caràcter i distingeix entre exponent 1 o més gran que 1. En el primer cas els termes que queden a la part dreta de l'equació representen ja la quantitat desitjada i en el cas d'un exponent més gran que 1, cal realitzar el càlcul de l'arrel corresponent, per trobar novament la quantitat cercada, és a dir, el valor de la lletra.

> *Regla General*
>
> Si el carácter es solo, y su exponente 1, se partirá la Cantidad por el número del carácter; si el exponente es 2, 3, 4... se sacará la $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$... y si hay muchos caracteres compuestos con afirmación, o negación, se sacará la raíz conforme al exponente mayor por el Libro 2º. El Cociente o raíz hallada será el valor de la letra.[68]

La Regla Particular, descriu la fórmula de l'arrel d'una equació de segon grau. Aquesta es pot aplicar únicament en el cas particular quan l'equació segueix la següent estructura en notació actual: $ax^{2n} + bx^n + c = 0 \mid n > 0$, és a dir, quan l'exponent del caràcter més gran sigui el doble de l'exponent del caràcter petit. En aquest cas, sempre podem reduir l'equació a una equació de segon grau, la qual cosa, ens permet aplicar la fórmula que coneixem avui en dia sota aquesta notació:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zaragoza descriu minuciosament tots els passos de forma retòrica, anomenant "Cantidad" a c, i "número" als coeficients que acompanyen a la x^n (caràcter menor) i x^{2n} (caràcter major). A més, considera $a = 1$, ja que en la segona fase o Reducció hem dividit tota l'equació pel coeficient principal.

[67] *Arithmetica Universal*, p. 339 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[68] *Arithmetica Universal*, p. 339 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

Regla Particular

> Cuando en la igualación dos caracteres, y el exponente mayor es duplo del menor: 1º al Cuadrado del numero del carácter menor, añádase, o quítese el Cuádruplo de la Cantidad, según el signo del carácter mayor; 2º sacada la $\sqrt[2]{}$ de la suma, o resta, si el carácter menor tiene el signo +, se tomará la diferencia de su número, y de esta raíz, y si -, se tomará la suma. 3º la mitad de esta diferencia, o suma es el valor del carácter menor.
>
> Si el Carácter mayor tiene el signo -, tendrá el Carácter menor dos valores, y la suma de los dos es igual a su numero, con que la diferencia de su numero, y del valor 1º, será el valor del 2º algunas veces los dos satisfacen a la cuestión, otras veces solo el uno, y esto se debe examinar.[69]

Zaragoza, acaba mencionant els diferents tipus de solucions que dona com a resultat la fórmula de segon grau. És possible que les dues arrels siguin solució, que només ho sigui una d'elles o cap, ja que en el context històric en el que ens trobem, encara no es treballava amb els nombres negatius, i per tant, no consideren solució ni aquests ni les solucions complexes.

Acompanya l'explicació d'una sèrie d'exemples que clarifiquen les idees exposades i els diferents casos comentats d'aquesta Regla Particular. A més, dona importància també a la gran utilitat d'aquesta fórmula ja que serà la més treballada en els problemes del *Libro IV. De los Enigmas*, tot i que només es pot donar sota una estructura tancada d'equació.

Les dues regles que exposa Zaragoza s'apliquen en uns casos molt concrets, però quan l'equació involucra dos o més caràcters i no es compleixen els requisits de la Regla Particular, caldrà procedir a l'extracció de l'arrel tal i com l'autor explica en el *Libro II. De las Raíces*, determinant el tipus d'arrel que volem calcular i aplicar les generalitzacions millor adaptades a cada cas.

> Cuando hay más de dos Caracteres, como tres, cuatro, etc. O cuando aunque sean dos, los exponentes no estén en proporción dupla, esto es que el mayor no es duplo del menor: como $z^1 + z^3$, $z^4 - z^1$, $z^5 + z^2$, se ha de sacar la raíz de la igualación por el Libro 2º advirtiendo con mucho cuidado las calidades de la igualación, si es la Cantidad diminuta o entera, si es la negación directa, o inversa, como se noto en su lugar.[70]

Amb aquesta exposició d'idees concloem el *Libro III. De la Álgebra*, emmarcat en la importància dels últims tres capítols, ja que són aquests els que expliquen la metodologia de resolució de tots els possibles problemes plantejats per l'autor. Zaragoza, influenciat clarament per les idees de Viète, ha presentat aquestes tres fases seguint el camí de l'*Isagoge*, i remarcant l'ús de la simbologia dels caràcters. Tot i així, tots els exemples que han ajudat en aquest marc teòric, han estat relacionats amb conceptes numèrics. En el següent i últim apartat estudiarem un parell de problemes

[69] *Arithmetica Universal*, p. 340 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[70] *Arithmetica Universal*, p. 343-344 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

presentats en el *Libro IV. De los Enigmas*, relacionats amb la geometria, per veure si el caràcter que suposem cert i que podem manipular en les equacions s'estén a magnituds no numèriques, com àrees, longituds o volums.

5.4. Exemple resolució de problemes aplicats a la geometria

Seguint amb el criteri didàctic de l'obra *Arithmetica Universal*, l'últim llibre, està exclusivament dedicat a la resolució de tot tipus de problemes. Està dividit en dotze capítols que tracten diferents àmbits en els quals cal plantejar l'equació i resoldre el valor de la lletra, recorrent temàtiques com les proporcions simples i compostes descrites en el primer llibre, passant per les progressions fins a arribar a la vessant més aplicada amb problemes de geometria.

L'autor desitja que l'àlgebra sigui l'eina que ajudi en aquest desenvolupament d'ingeni. Els problemes s'anomenen enigmes a causa de la subtilesa que necessiten en la seva resolució. En la presentació observem la intenció de desenvolupar un mètode nou, ja que han estat molts els autors que han escrit sobre l'"Arte Mayor" i considera una bona oportunitat de proposar també ell una nova manera de treballar aquests enigmes, basada en l'Art analític de Viète. Tot així no abandona l'estil de l'"Arte menor" que s'ha emprat en el primer llibre, amb la qual cosa deixa establert el vincle entre l'aritmètica i l'àlgebra.

> Enigma es una cuestión obscura y difícil, que pide mucho ingenio su resolución. Propiedad, que se halla en las cuestiones del Álgebra, y les mereció el nombre de Enigmas, pues son tan confusas y ocultas, que menos la sutileza de esta divina ciencia, nadie puede llegar a descifrar la verdad, que en la pregunta se esconde. […] En la disposición de las cuestiones hay tanta diversidad, como en los ingenios de los Autores que de la materia escribieron. Esto me dio licencia para intentar nuevo método, con que el Aritmético aprenda a resolver juntamente, y proponer los Enigmas. Guardando pues el estilo del Libro primero, y Arte menor trataremos enigmáticamente de la Proporción simple y compuesta, Alligaciones, Progresiones y Combinaciones […].[71]

El capítol IX està dedicat als Enigmes de Geometria. Per a poder resoldre'ls presenta tot un seguit de principis i teoremes que cal dominar relacionats amb la mesura de figures, reducció d'una figura a una altra i augmentar-les i disminuir-les en qualsevol proporció.

A continuació presentarem dos problemes, un relacionat amb una igualació simple, on intervé un únic caràcter, i l'altre amb una igualació composta, amb dos caràcters. En el desenvolupament de la resolució mencionarem també els teoremes principals que ha fet servir l'autor per justificar cada pas donat.

Per poder resoldre els enigmes de l'*Arithmetica Universal*, Zaragoza es basa amb unes Regles Generals que complementen els Principis generals per a la igualació. Aquestes estan inspirades en els *Elements* d'Euclides i el propi Zaragoza les presentarà de nou,

[71] *Arithmetica Universal*, p. 345 Libro IV. De lo Enigmas, Zaragoza, 1670

però per separat, en la seva versió *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometria especulativa y pràctica de los planos y sólidos* (1678) posterior a l'*Arithmetica Universal*.

Reglas Generales

1º Todas las Superficies semejantes, tienen entre si la proporción que los Cuadrados de los lados semejantes.
2º Todos los Cuerpos sólidos semejantes tienen entere si la proporción que los Cubos de sus lados semejantes.
3º La circunferencia de una Columna igualmente gruesa (cuadrada, o redonda) multiplicada por su altura da la Superficie.
4º La Superficies de la base de una columna cuadrada, o redonda, multiplicada por su altura, da la solidez de la Columna.
5º La Superficie de la base de una pirámide cuadrada, o redonda, multiplicada por $\frac{1}{3}$ de su altura, da la solidez de la pirámide.[72]

5.4.1. Qüestió 78 de Geometria (Igualació simple)

Enunciat: Donat un triangle equilàter inscrit en un cercle de tal manera que la suma del seu costat i el radi doni 10, es demana el costat i el radi.

Presentem prèviament l'enunciat §117 que fa servir Zaragoza en la resolució perquè sigui més còmode per al lector. L'autor el menciona en la introducció dels enigmes de la Geometria.

§**117** Donat el cercle, trobar les Figures: com 10.000 al número de la Taula primera (*Figura 5.5*), així és el radi donat del Cercle al costat de la Figura.[73]

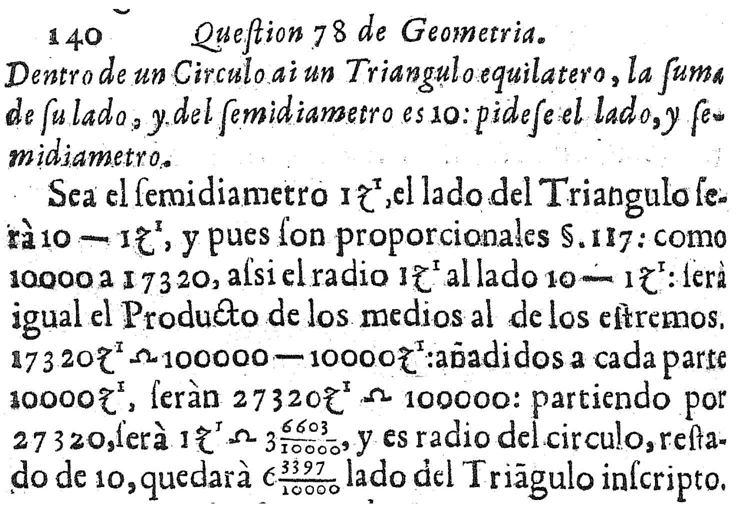
116 FIGVRAS DENTRO, Y FVERA DEL CIRCVLO.

	I. Dado el Circulo hallar las Figuras.		II. Dada la Figura hallar el Circulo.	
	Inscriptas.	Circunscriptas.	Inscripto.	Circunscripto.
Triãgulo	17320.	34640	2887.	5773
Quadrado	14142.	20000	5000.	7071
Pẽtagono	11756.	14530	6882.	8507
Hexagono	10000.	11547	8660.	10000
Sietavº	8678.	9630	10384.	11524
Ochavº	7654.	8284	12071.	13066
Nonavº	6840.	7297	13704.	14619
Diezavº	6180.	6498	15388.	16180
Dezavº	5176.	5358	18660.	19319

Figura 5.5. Proporcions de Figures inscrites i circumscrites al Cercle. Libro IV. De los Enigmas, Arithmetica Universal

[72] *Arithmetica Universal*, p. 421-422 Libro IV. De lo Enigmas, Zaragoza, 1670
[73] *Arithmetica Universal*, p. 413 Libro IV. De lo Enigmas, Zaragoza, 1670
Dado el Círculo, hallar las Figuras: Como 10000 al número de la Tabla primera, así el radio dado del Círculo al lado de la Figura.

Procedim ara a la resolució del problema tal i com ho fa Zaragoza. Adjuntem la *Figura 5.6.* font original de l'obra.



140 *Queſtion 78 de Geometria.*

Dentro de un Circulo ai un Triangulo equilatero, la ſuma de ſu lado, y del ſemidiametro es 10: pideſe el lado, y ſemidiametro.

Sea el ſemidiametro $1Z^{1}$, el lado del Triangulo ſerà $10 - 1Z^{1}$, y pues ſon proporcionales §.117: como 10000 a 17320, aſsi el radio $1Z^{1}$ al lado $10 - 1Z^{1}$: ſerà igual el Producto de los medios al de los eſtremos. $17320Z^{1}\ \Omega\ 100000 - 10000Z^{1}$: añadidos a cada parte $10000Z^{1}$, ſeràn $27320Z^{1}\ \Omega\ 100000$: partiendo por 27320, ſerà $1Z^{1}\ \Omega\ 3\frac{6603}{10000}$, y es radio del circulo, reſtado de 10, quedarà $6\frac{3397}{10000}$ lado del Triãgulo inſcripto.

Figura 5.6. Resolució de la Qüestió 78 de Geometria. Libro IV. De los Enigmas, Arithmetica Universal

Resolució

Sigui el radi o semidiàmetre $1Z^1$, el costat del triangle serà $10 - 1Z^1$ i aquests dos seran proporcionals. Pel §117, el radi $1Z^1$ serà al costat $10 - 1Z^1$ com 10.000 a 17.320. Per tant, fent servir que el Producte dels mitjos serà igual al dels extrems: $17.320\,Z^1\ \Omega\ 100.000 - 10.000\,Z^1$. Sumant $10.000\,Z^1$ a cada banda, obtenim $27.320\,Z^1\ \Omega\ 100.000$. Ara cal dividir cada terme pel coeficient principal, és a dir, el que acompanya el caràcter d'exponent més elevat, $27.320\ :\ 1Z^1\ \Omega\ 3\frac{6.603}{10.000}$. D'aquesta manera ja hem obtingut el valor del radi del cercle. Restant el radi de 10, quedarà $10 - 1Z^1\ \Omega\ 6\frac{3.397}{10.000}$, que és el valor del costat del triangle inscrit.

Podem observar clarament com fa servir la metodologia de Igualació, Reducció i Valor de la Lletra, coincident amb les tres fases de l'Àlgebra de Viète. En la Igualació identifica les incògnites amb la simbologia de $1Z^1$, notació on apareix la unitat acompanyant el caràcter. Aquesta simbologia, com hem comentat anteriorment, s'associa més a autors anteriors com Aurel que no pas a Viète, el qual usaria tant sols la Z. A continuació utilitza principis i teoremes coneguts relacionats amb proporcions que s'han presentat prèviament per manipular l'equació fins aïllar el caràcter que busquem resoldre en un costat de l'equació. D'aquesta manera la "Quantitat" que es mostra a l'altra banda de l'equació és el Valor de la Lletra (estem treballant en igualacions simples en aquest exemple).

Notem que en aquest cas el llenguatge simbòlic el fem servir per identificar el costat d'un triangle i el radi d'un cercle, valors que considerem espècies, però l'autor no arriba a treballar amb magnituds com àrees o volums a l'*Arithmetica Universal.*

5.4.2. Qüestió 81 de Geometria (Igualació composta)

Enunciat: Donades dos esferes que tenen superfícies en proporció 9 a 16 i la diferència dels seus radis és de 2, es demanen els radis de cada esfera.

Enumerem els principis necessaris que s'empraran en la resolució d'aquest problema a fi de facilitar la comprensió al lector. L'autor els menciona al llarg dels diferents llibres que presenta l'*Arithmetica Universal.*

§**139 del Libro IV** Principi 1r de les *Regles Generales de la Geometria* exposades en la secció 5.4. d'aquesta treball: Totes les superfícies semblants tenen entre si la proporció que els quadrats dels seus costats semblants.[74]

§**141 del Libro III** *Reducció del Caràcter més gran a la unitat*: quan intentem dividir tots els termes pel coeficient principal, i aquesta partició no esdevé entera, procedirem a formar una progressió geomètrica de tal manera que el primer terme sigui al unitat, el segon sigui el coeficient principal, el tercer el seu quadrat, el quart el seu cub i així successivament. Ha d'haver-hi tants termes com el grau i, començant per l'últim s'escriuran els exponents 0, 1, 2, 3... Els termes de l'equació es multipliquen pels termes de la progressió que hem construït, que corresponent als seus exponents. Després, deixant el caràcter més gran amb la unitat, quedarà reduïda la igualació, però l'arrel d'aquesta nova igualació s'ha de dividir pel coeficient del caràcter més gran, i el quocient serà l'arrel vertadera de l'equació original.[75]

§**152 del Libro III** Exemple IV de la *Regla Particular del Valor de la Lletra*: Sigui $1Z^2 - 3Z^1 \; \Omega \; 40$. El quadrat de 3 és 9; el quàdruple de 40 és 160 que afegit a 9, serà 169 i la seva $\sqrt{}^2$ és 13. Com que el caràcter menor $3Z^1$ té el signe – se sumaran 3 i 13, donant 16, i la seva meitat són 8, valor de la Z^1.[76]

Procedim ara a la resolució del problema tal i com ho fa Zaragoza. Adjuntem la *Figura 5.7.* font original de l'obra.

---

[74] *Arithmetica Universal*, p. 421 Libro IV. De los Enigmas, Zaragoza, 1670
Todas las Superficies semejantes, tiene entre si la proporción que los Cuadrados de los lados semejantes.
[75] *Arithmetica Universal*, p. 337 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670
[76] *Arithmetica Universal*, p. 341 Libro III. De la Álgebra, Zaragoza, 1670

143 *Question 81 de Geometria.*

Dos Espheras, ò globos tienen las superficies como 9 à 16; y la diferencia de los radios es 2. Pidense los radios.

Sea el radio del globo menor $1\zeta^1$, y del maior $1\zeta^1 + 2$: sus Quadrados seràn $1\zeta^2$ y $1\zeta^2 + 4\zeta^1 + 4$: y pues las superficies son proporcionales a los Quadrados (§.139.) siendo las superficies como 9 a 16; seràn tanbien los Quadrados como 9 a 16: assi $1\zeta^2$ a $1\zeta^2 + 4\zeta^1 + 4$: y el Producto de los medios $16\zeta^2$ igual al de los estremos $9\zeta^2 + 36\zeta^1 + 36$: quitando de cada parte $9\zeta^2 + 36\zeta^1$, quedaràn $7\zeta^2 - 36\zeta^1 \backsim 36$: reduzida la igualacion (*Lib.*3.§.141.) serà $1\zeta^2 - 36\zeta^1 \backsim 252$: la $\sqrt{}^2$ de esta igualacion (*Lib.*3.§.152.) es 42: partida por 7: (*Lib.*3.§.141.) sale 6 valor de $1\zeta^1$, que es el radio del globo menor, + 2 serà 8 el otro radio.

Figura 5.7. Resolució de la Qüestió 81 de Geometria. Libro IV. De los Enigmas, Arithmetica Universal

Resolució

Sigui el radi de l'esfera menor $1Z^1$, el radi de l'esfera major serà $1Z^1 + 2$. Els seus respectius quadrats seran $1Z^2$ i $1Z^2 + 4Z^1 + 4$. Les superfícies de les esferes seran proporcionals als seus quadrats tal com diu el §139 del Libro IV i, degut a que la proporció de les superfícies és 9 a 16, també ho serà la dels quadrats. Així $1Z^2$: $1Z^2 + 4Z^1 + 4$ com 9 : 16. Aplicant el principi del Producte de mitjos és igual al producte dels extrems, obtenim: $16\,Z^2\;\Omega\;9\,Z^2 + 36\,Z^1 + 36$. Restant $9\,Z^2 + 36\,Z^1$ a cada banda, quedarà $7\,Z^2 - \;36\,Z^1\;\Omega\;36$.

Reduïm l'equació pel §141 del Libro III: construïm la progressió geomètrica de raó el coeficient principal, 7, i amb tants termes com l'exponent més gran, és a dir, 2.

Progressió	$1, 7$
Exponents	$1, 0$

Multipliquem els termes de la progressió pels caràcters de l'equació: $1 \times 36Z^1$ (exponent 1) i 7×36 (terme independent). Queda $1\,Z^2 - \;36\,Z^1\;\Omega\;252$. L'arrel quadrada d'aquesta igualació és 42 pel §152 del Libro III:

El quadrat de 36 és 1296 i el quàdruple de 252 és 1008 que sumat a 1296 dona 2304. La seva $\sqrt{}^2$ és 48. Com que el caràcter menor $36\,Z^1$ té signe negatiu, sumarem 36 i 48, obtenint 84 i la seva meitat és 42, el valor de Z^1.

Ara falta dividir aquesta arrel de l'equació reduïda per 7, que és el coeficient principal de l'equació original tal com es diu a §141 del Libro III. Obtenim el valor $Z^1\;\Omega\;6$, que correspon al radi de la esfera menor. Sumant-li $Z^1 + 2$, obtenim 8 per al radi de l'esfera major.

Novament, Zaragoza descriu els tres passos fonamentals per al tractament d'equacions per aconseguir el valor de la Lletra, com ja hem vist en l'exemple anterior i empra el llenguatge simbòlic per identificar, en aquest cas el radi de dues esferes. La fase de la reducció en aquest exemple ha implicat més teoremes, destacant la importància de les proporcions i la progressió geomètrica, però en definitiva, la metodologia és simètrica al problema anterior.

Hem volgut presentar aquests dos problemes relacionats amb la geometria per veure com els treballa Zaragoza i comparar aquesta metodologia amb la de Viète. Tot i trobar evidències i coincidències en les regles per resoldre les equacions, Viète, en la seva obra, s'ajuda de dibuixos de figures geomètriques. Aquest aspecte no l'hem trobat en l'*Arithmetica Universal.* Els dos autors fan servir el llenguatge simbòlic dels caràcters substituint tant la incògnita com les quantitats conegudes i treballen amb espècies. En els problemes de Zaragoza es treballen magnituds com longituds de figures i costats. Per la seva banda, Viète, a més d'aquestes, inclou en el tractament d'espècies magnituds més complexes com àrees i volums.

Capítol 6 – Conclusions

En els primers capítols d'aquest treball hem presentat el context històric que es vivia a l'Espanya del segle XVII i com el coneixement matemàtic s'havia desenvolupat a la resta d'Europa. Hem remarcat la innovació de François Viète amb la introducció d'un llenguatge simbòlic que permet representar tant incògnites com valors coneguts o quantitats. A més, l'Art analític que presenta aquest matemàtic té l'objectiu de generalitzar la resolució de qualsevol tipus d'equació que es pugui plantejar donat l'enunciat d'un problema a través de tres fases: Zetètica, Porística i Exegètica. La seva àlgebra especiosa tracta amb objectes, tipus o espècies que poden englobar tant caràcters numèrics com magnituds geomètriques.

L'objectiu del nostre treball ha consistit en trobar evidències en l'obra *Arithmetica universal que comprende el Arte Mayor y Menor, Álgebra Vulgar y especiosa*, publicada el 1670 per José Zaragoza, sobre la introducció de l'àlgebra de Viète a Espanya a través de l'anàlisi d'aquesta obra.

Hem treballat l'*Arithmetica Universal* analitzant el contingut, estructura i motivació de l'autor, posant especial atenció en el tercer llibre on es defineix i es desenvolupa l'Àlgebra de Zaragoza. L'autor treballa l'"Arte Menor" i l'"Arte Maior", però reserva el terme Àlgebra per referir-se a l'Art analític, innovació de Viète. De l'"Arte Menor" o Aritmètica cal aprendre els fonaments de les matemàtiques i mantindrà l'estil en la presentació de l'Àlgebra. L'"Arte Maior" actua com a pas intermedi per culminar l'extensió de l'àlgebra. El tracta independentment de l'"Arte Menor" i en el seu desenvolupament observem la seva intenció de generalitzar els conceptes a través del simbolisme dels caràcters. Finalment, l'Àlgebra entesa com eina analítica de resolució de problemes, presenta una subtilesa que permetrà a qui treballi amb ella, desxifrar qualsevol problema que es plantegi, coincidint amb el desig de Viète de generalitzar la resolució d'equacions.

Al llarg de l'*Arithmetica Universal* hem trobat indicis i citacions exactes que evidencien la influència de Viète i el fet que l'obra *In artem analyticen isagoge* (1591) ha estat font original per a Zaragoza. En la resolució d'equacions Zaragoza descriu tres fases equivalents a les presentades per Viète, tot i que en noms diferents: Igualació, Reducció i Valor de la Lletra. Tot el procediment que descriu i aplica Zaragoza en els seus problemes reflecteix la visió de Viète i la seva àlgebra especiosa. A més, ambdós autors mencionen els mateixos Principis generals que cal tenir en compte en la primera fase de les tres descrites o, per exemple, la definició d'Hypobabisme com a depressió dels caràcters. Altres evidències de Viète en l'*Arithmetica Universal* són la menció a Plató en la introducció de l'obra o la menció explícita a Viète en el capítol I del Libro III.

En tot moment, i ja des de l'inici de l'*Arithmetica Universal*, Zaragoza empra la notació de caràcters que no discrimina entre majúscules, minúscules, primeres o últimes lletres de l'alfabet. Aquests caràcters es fan servir per identificar la incògnita però també la quantitat coneguda. La metodologia considera cert el caràcter i, per això, podrem manipular-lo segons els teoremes ja demostrats. Finalment trobarem el valor que amaga la lletra demostrant que la hipòtesi era certa. Novament, la manera de procedir de Zaragoza encaixa amb les idees transmeses per Viète sobre la importància del llenguatge simbòlic.

Sabem pel propi autor que la intenció i criteri d'aquesta obra és de caràcter didàctic i l'objectiu de Zaragoza era la transmissió del coneixement i l'ensenyança. En l'*Arithmetica Universal* hem observat molts detalls que reforcen aquest objectiu per facilitar l'aprenentatge i comprensió al lector. En són exemples l'índex, la taula de continguts i la taula explicativa dels caràcters que es presenten al final de l'obra o la multitud d'advertències que trobem entre línies en tots els capítols.

Enllaçant aquest punt amb el seu paper com a docent i catedràtic del Col·legi Imperial i col·legis jesuïtes, podem concloure que Zaragoza va ajudar a la difusió de la innovació de Viète a Espanya, tal i com volíem provar en l'inici del treball. Considerem aquest treball original, ja que no s'ha realitzat fins ara un estudi de l'aportació de l'àlgebra de Zaragoza. L'obra més valorada d'aquest autor ha estat *Geometria Magna in Minimis* publicada el 1674 on s'introdueix el concepte de centre de gravetat d'un sistema de punts amb pesos associats. Aquesta obra ha acabat eclipsant la resta de les seves aportacions com a matemàtic. És per tot plegat i, a la vegada, per l'intent de desenvolupar una metodologia pròpia en l'àlgebra, pel que considerem que Zaragoza és mereixedor del reconeixement que volem donar-li a través d'aquest treball com a matemàtic de l'Espanya del segle XVII.

Capítol 7 – Bibliografia

AUREL, M. (1552) *Libro primero de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantívol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarment llamada Arte Mayor o Regla de la cosa: sin la qual no se podrà entender el décimo de Euclides, ni otros muchos primores, asi en Arithmetica como en Geometria: compuesto, ordenado, y hecho Imprimir por Marco Aurel*, València: En casa de Joan de Mey Flandro.

CAJORI, F. (1928-29) *A history of mathematical notations. I. Notations in Elementary mathematics. II. Notations Mainly in Higher Mathematics.* Chicago: The Open Court Publishing Company.

COMMANDINO, F. (1588) *Pappi Alexandirni Mathematicae collectiones a Federica Commandino Urbinate in latinum conversae, et commentariis illustratae*. Pisauri [Pesaro]: Apud Hieronymum Concordiam.

DOU, A. (1990) *Las Matemáticas en la España de los Austrias,* Universitat Autònoma de Barcelona.

HEATH, T. L. (Ed.) (1956) *Euclid. The thirtheen books of The Elements*, Nova York: Dover.

HÉRIGONE, P. (1634/1637/1642) *Cursus Mathematicus nova, brevi et clara método demonstratus, Per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, fáciles.* Per a l'autor i Henry Le Gras. Paris.

JURADO, L. (5 Juliol 2011) *El discípulo avanzado de Mut*, El Mundo. Recuperat de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=12856:el-discipulo-avanzado-de-mut&catid=55:matemcas-en-los-medios-de-comunicaci&Itemid=35

MASSA-ESTEVE, Mª R. (2001) "Las relaciones entre el àlgebra y la geometria en el siglo XVII". *Llull*, vol. 24, 705-725.

MASSA-ESTEVE, Mª R. (2008) "Symbolic language in early modern mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone (1580 – 1643)". *Historia Mathematica* 35, 285-301.

MASSA-ESTEVE, Mª R. & ROMERO-VALLHONESTA, FÁTIMA (2009) "El triangle aritmètic de Blaise Pascal (1623 – 1662)". *Biaix* 28-29, 6-17.

MASSA-ESTEVE, Mª R. (2012) *Spanish Arte Mayor in the Sixteenth century*, S Rommevaux, M Spiesser, i M R Massa Esteve (eds), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris: Honoré Champions Éditeur, 103-126.

MASSA-ESTEVE, Mª R. (2012) "The role of symbolic language in the transformation of mathematics". *Philosophica* 87, 153-193.

MASSA-ESTEVE, Mª R. (2014-15) *La Matemàtica a l'Antiguitat. De la ciència àrab al Renaixement. El naixement de la matemàtica moderna*, Materials de l'assignatura Història de la Matemàtica, Universitat Politècnica de Barcelona. Recuperat de http://hdl.handle.net/2099.3/39539

NAVARRO BROTONS, V. (1996) *Los jesuitas y la renovación científica en la España del siglo XVII,* Studia Historica, 14, 15-44.

NAVARRO LOIDI, J. (2005) *Los Elementos de Euclides en Castellano*. Institut de Batxillerat a Distància de Gipúzcoa. Recuperat de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10674:los-elementos-de-euclides-en-castellano&catid=61:libros-matemcos&Itemid=45

NAVARRO LOIDI, J. (2007) *La incorporación de los logaritmos a las matemáticas españolas*. Institut de Batxillerat a Distància de Gipúzcoa. Recuperat de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=12619:mayo-2007-la-incorporacion-de-los-logaritmos-a-las-matematicas-espanolas&catid=62:exposiciones-con-historia&Itemid=45

PEÑALVER, P. (1930) *Bosquejo de la matemática espanyola en los siglos de la decadencia,* Sevilla, Discurs d'obertura del curs acadèmic 1930-31.

PÉREZ DE MOYA, J. (1558) *Compendio de la Regla de la Cosa*, Burgos.

PLA CARRERA, J. (Ed.) (1999) *La geometria*, R. Descartes & J. Pla & P. Viader (eds), Institut d'Estudis Catalans, ISBN: 84-7306-565-4.

RECASENS, E. (1991) *La Geometria Magna in Minimis de J. Zaragoza. El Centre Mínim i el lloc 5è d'Apol·loni* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

RECASENS, E. (1994) "J. Zaragoza's Centrum Minimum, an Early Version of Barycentric Geometry". *Archive for History of Exact Sciences* 46, 285-320.

RECASENS, E. (2007) *El cultivo de las matemáticas puras en la España del siglo XVII* conferència que forma part del llibre *Más allá de la Leyenda Negra. España y la revolución Científica.* Editors V. Navarro Brotons i William Eamon. Institut d'Història de la Ciència i Documentació López Piñero. València.

RECASENS, E. (2010) *Zaragoza i Vilanoca, José (1627 – 1674)*. Recuperat de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10498:zaragoza-i-vilanova-jose-1627-1674&catid=45:biograf-de-matemcos-espas&Itemid=33

ROCA, A. (1564) *Arithmetica recopilación de todas las otras que se han publicado hasta agora*, Barcelona: Claudio Bornat.

ROMERO-VALLHONESTA, F. (2018) *L'àlgebra de la Península Ibèrica al segle XVI* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

ROMERO-VALLHONESTA, F. & MASSA-ESTEVE, Mª R. (2018) "The main sources for the Arte Mayor in sixteenth century Spain". *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 33:2, 73-95, DOI: 10.1080/17498430.2017.1419704.

RUDOLFF, C. (1525) *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genent werden*. Recuperat de http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903765.html

VIÈTE, F. (1591) *In artem Analyticen Isagoge. Seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu àlgebra nova*.

VIÈTE, F. (1593) *Zeteticorum libri quinque*. Recuperat de https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1520063f/f7.image

VIÈTE, F. (1983) *The Analytic Art.* T.R. Witmer (Tr.) Kent State University Press, Kent, Ohio.

ZARAGOZA, J. (1670) *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Algebra vulgar y especiosa*.

ZARAGOZA, J. (1672) *Trigonometría espanyola, resolución de triángulos planos i esféricos. Fábrica y uso de los senos y logaritmes.*