

# **Una Panorámica de las Posibilidades del MEF para Análisis de Procesos de Conformado de Metales**

**E. Oñate**

# **Una Panorámica de las Posibilidades del MEF para Análisis de Procesos de Conformado de Metales**

**E. Oñate**

**Publicación CIMNE Nº 23, Diciembre 1992**

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería**  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España



# UNA PANORAMICA DE LAS POSIBILIDADES DEL MEF PARA ANALISIS DE PROCESOS DE CONFORMADO DE METALES

E. Oñate

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,  
Universidad Politécnica de Cataluña,  
08034 Barcelona, España

## RESUMEN

Se presenta en este trabajo una breve panorámica de diferentes procedimientos para análisis de procesos de conformado de metales por el método de elementos finitos (MEF). Se describen las formulaciones de flujo y de sólido junto a diversos temas como el acoplamiento térmico, las técnicas para actualización de geometría, el tratamiento de contacto y rozamiento, el uso de métodos cuasi-estáticos frente a dinámicos explícitos y otros temas de interés. Asimismo se presentan ejemplos de aplicación de algunos de los métodos propuestos a problemas de extrusión, laminado, llenado de moldes y embutición de chapa.

## 1. INTRODUCCION

El estudio detallado de la deformación de metales durante procesos de conformado es de gran interés en muchas aplicaciones industriales. Ejemplos de estos problemas se encuentran en la compactación de polvos metálicos, en el llenado de moldes y solidificación en fundición, en procesos de laminado, extrusión y forja, y en embutición de chapa, entre otros muchos.

Pese a su interés práctico, el desarrollo de métodos numéricos fiables para predecir el comportamiento de procesos de deformación de metales ha encontrado obstáculos muy serios. Junto a la no linealidad del material, aparecen otros efectos de gran importancia y dificultad tales como la naturaleza transitoria del proceso, la gran magnitud de las deformaciones, el acoplamiento térmico y los efectos del contacto y el rozamiento en las interfaces metal-útiles. Todos ellos hacen que el estudio de procesos de conformado de metales sea tan complejo que requiera el uso de métodos de elementos finitos avanzados y ordenadores de altas prestaciones.

En la mayoría de los procesos de conformado el metal está sometido a una deformación continua que induce una rápida plastificación del material. Las ecuaciones del movimiento de este problema transitorio pueden escribirse en función de los desplazamientos de los puntos del metal medidos desde una configuración de referencia apropiada (formulación de sólido) o en función de sus velocidades en cada configuración deformada (formulación de flujo).

Ambas formulaciones de sólido y de flujo pueden utilizar modelos constitutivos elasto-plástico/viscoplástico o rígido-plástico/viscoplástico. Asimismo, las ecuaciones del movimiento pueden ser de tipo cuasiestático, o incorporar efectos dinámicos.

Este trabajo presenta una panorámica de algunas de las técnicas más populares para la solución de problemas de conformado de metales por el MEF. En particular se comparan las formulaciones de flujo y de sólido.

Otros temas que se presentan incluyen el tratamiento de los efectos de incompresibilidad, la inclusión de acoplamiento térmico, el tratamiento del contacto y el rozamiento y la utilización de métodos cuasiestáticos frente a dinámicos explícitos. Asimismo, se incluyen ejemplos de aplicación a problemas de extrusión, laminado, llenado de moldes y embutición.

## 2. FORMULACION DE SOLIDO

Esta formulación utiliza una descripción Lagrangiana total o actualizada del movimiento. Las variables fundamentales son los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de los puntos del metal, que están relacionados con las deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}$  por expresiones cinemáticas no lineales conocidas [1]. Por otra parte, la ecuación constitutiva que relaciona las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  (definidas de forma apropiada) y las deformaciones se escribe usualmente en una forma incremental objetiva que permita tratar el efecto de grandes deformaciones. Los modelos constitutivos más utilizados en este contexto son el elasto-plástico y el elasto-viscoplástico [2-5]. Finalmente, las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse en forma diferencial o bien, lo que es más usual, en forma global a través del principio de trabajos virtuales (PTV). El cuadro 1 presenta en forma esquemática las ecuaciones básicas de la formulación de sólido

Adviértase que en el Cuadro 1  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$  representan medidas adecuadas de las tensiones y deformaciones conjugadas. La forma del PTV escrita en el Cuadro 1 corresponde a la utilización de las segundas tensiones de Piola-Kirrhoff y las deformaciones de Green-Lagrange para  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$ , respectivamente. En cualquier libro de mecánica del continuo puede encontrarse la expresión del PTV para otras medidas de tensión y deformación (ej. tensiones de Cauchy y deformaciones de Almansi, etc.) [30].

## 3. FORMULACION DE FLUJO

Esta formulación es típica de problemas de mecánica de fluidos donde se utiliza generalmente un sistema de referencias Euleriano fijo que define un volumen de control a través del cual fluye el material. Este procedimiento parece más adecuado para problemas de conformado en masa como extrusión, laminado, forja, llenado de moldes, etc. [2-7]. Sin embargo, puede también aplicarse a problemas de embutición de chapa de manera sencilla sin más que identificar el volumen de control con la deformación de la plancha en cada instante.

En el Cuadro 1 se muestran también las ecuaciones básicas de la formulación de flujo. Las variables principales del problema son ahora las *velocidades* de los puntos del cuerpo en deformación,  $\dot{\mathbf{u}}$ , que están relacionadas linealmente

<i>FORMULACION DE SOLIDO</i>		<i>FORMULACION DE FLUJO</i>
Desplazamientos $\mathbf{u}$		Velocidades $\dot{\mathbf{u}}$
<i>Ecuaciones Cinemáticas</i>		
$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{L} + \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{u}))\mathbf{u}$		$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{u}}$
<i>Ecuaciones de Equilibrio</i>		
$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ en el volumen $V$ $\mathbf{M}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}$ en el contorno $\Gamma_t$		
$\mathbf{b}$ : fuerzas másicas, $\mathbf{t}$ : fuerzas de superficie $\mathbf{M}$ contiene las componentes de la normal unitaria a $\Gamma_t$		
<i>Trabajo Virtual</i>		
$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV =$ $= \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma$		$\int_V \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV =$ $= \int_V \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_t} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$
<i>Ecuaciones Constitutivas</i>		
$\nabla \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$		$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$

Cuadro 1. Ecuaciones básicas de las formulaciones de flujo y de sólido.

con las velocidades de deformación,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  [30]. Las ecuaciones de equilibrio y el PTV se escriben en función de las tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  y son análogas a las correspondientes ecuaciones de la formulación de sólido. Adviértase sin embargo que  $V$  y  $\Gamma_t$  representan ahora el volumen y el contorno cargado del cuerpo en la configuración deformada.

Las ecuaciones constitutivas de la formulación de flujo pueden escribirse en forma incremental utilizando modelos elasto-plásticos o elasto-viscoplásticos. No obstante, la solución numérica del problema de flujo se puede simplificar notablemente si se obtiene una expresión directa entre las tensiones de Cauchy y las velocidades de deformación como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (1)$$

La ec.(1) es típica de problemas de fluidos donde  $\mathbf{D}$  es una matrix constitutiva que depende de la viscosidad del fluido [1].

Puede demostrarse que la ec.(1) se obtiene utilizando un modelo constitutivo rígido-plástico (o rígido-viscoplástico) en el que se desprecian los efectos elásticos

[12]. En el caso isótropo la matriz  $\mathbf{D}$  es función de un único parámetro de viscosidad  $\mu$  que se define para un material rígido plástico de Von-Mises como [6-12]

$$\mu = \frac{\sigma_y}{3\dot{\bar{\epsilon}}} \quad (2)$$

donde  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia de Von-Mises y  $\dot{\bar{\epsilon}} = \left(\frac{2}{3}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\right)^{1/2}$ .

#### NOTA 1

La ec.(2) define una viscosidad no lineal lo que implica que el flujo es de naturaleza no Newtoniana. La expresión de  $\mu$  para materiales viscoplásticos incluyendo el efecto de poros microscópicos puede encontrarse en las referencias [12,13]. Adviértase también que las zonas rígidas se caracterizan por  $\dot{\bar{\epsilon}} = 0$  lo que conduce a  $\mu = \infty$ . Por consiguiente, en dichas zonas deberá utilizarse un valor límite de  $\mu$  para evitar singularidad.

#### NOTA 2

La forma de la ecuación constitutiva (2) para materiales que siguen el criterio de Von-Mises define un problema de flujo *incompresible* ( $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ ). Esto introduce problemas serios si la formulación de elementos finitos se basa en elementos de "sólido", debiendo utilizarse en este caso técnicas de penalización o formulaciones mixtas como se describe más adelante.

#### NOTA 3

Es interesante advertir que las ecuaciones de la formulación de flujo escritas en el Cuadro 1, son análogas a la de la elasticidad infinitesimal (incompresible) clásica [1,6,7]. Esta analogía puede aprovecharse para simplificar más el proceso computacional utilizando directamente programas de elementos finitos escritos para el problema elástico, simplemente reemplazando desplazamientos y deformaciones por velocidades y velocidades de deformación, respectivamente y el módulo de rigidez por la viscosidad (no lineal) del flujo [1,6-9].

## 4. TRATAMIENTO DE LA INCOMPRESIBILIDAD

Se han propuesto diferentes técnicas para tratar los efectos de incompresibilidad inducidos por la deformación plástica en procesos de conformado.

En la *formulación de flujo* se han utilizado con diferente éxito técnicas basadas en métodos de penalización, de multiplicadores de Lagrange y de Lagrangiano aumentado para imponer la incompresibilidad [1]. Quizás el método más popular en los últimos 15 años es el de penalización puesto que permite formular el problema en función únicamente de las velocidades. Sin embargo esta técnica debe generalmente utilizarse conjuntamente con integración reducida de los términos volumétricos en la matriz de rigidez para evitar el bloqueo numérico de la solución. La tendencia actual es evitar utilizar métodos basados en integración reducida puesto que pueden conducir a deficiencias en el rango de las matrices del elemento. La alternativa es utilizar una formulación mixta velocidad-presión que satisfaga la llamada condición

LBB [31-33] Esta técnica puede también combinarse de manera eficiente con la de penalización [29]. En todos estos casos, si se utiliza una interpolación discontinua para la presión se puede eliminar ésta de las variables elementales (método B-barra) y terminar con las velocidades como únicas variables nodales [1,16]. La utilización de la formulación de flujo puede también utilizarse en problemas de embutición de chapa con elementos tipo "lámina". En estos casos la condición de incompresibilidad puede imponerse simplemente haciendo el coeficiente de Poisson igual a 0.5 en el problema elástico análogo y actualizando el espesor del elemento de lámina mediante la hipótesis de tensión plana [8,9,13].

En la *formulación de sólido* pueden utilizarse las mismas técnicas que en la de flujo. La principal dificultad es la co-existencia de una parte incompresible (plástica) de la deformación con la parte elástica remanente en presencia de grandes deformaciones. Las técnicas más prometedoras actualmente son las basadas en formulaciones mixtas [14] y en una ampliación del método B-barra a grandes deformaciones [15,16].

## 5. TRATAMIENTO DEL ACOPLAMIENTO TERMICO

Es evidente que la temperatura juega un papel importante en los procesos de conformado de metales. Muchos de estos procesos tienen lugar a altas temperaturas. Asimismo, en muchos casos no puede despreciarse el calor generado durante el proceso, que afecta enormemente a las propiedades mecánicas del metal. El proceso está, por consiguiente, completamente acoplado y las ecuaciones que describen la deformación del metal deben resolverse conjuntamente con la de equilibrio térmico que se escribe como

$$\rho c \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{\mathbf{u}}^T \nabla \phi \\ \text{---} \end{array} \right] = \nabla^T \bar{\mathbf{D}} \nabla \phi + Q \quad (3)$$

En (3)  $\phi$  es la temperatura,  $\rho$  y  $c$  son la densidad y el calor específico, respectivamente,  $\bar{\mathbf{D}}$  es una matriz diagonal de conductividades térmicas,  $\nabla$  es el operador gradiente y  $Q$  el calor generado en el proceso de deformación y calculado como una proporción ( $\simeq 90\%$ ) del trabajo plástico desarrollado. La ec.(3) se completa con las condiciones de contorno adecuadas de temperatura y flujo de calor en los contornos, y también con las temperaturas conocidas al inicio del proceso.

### NOTA 4

El término subrayado en (3) sería igual a cero si se utiliza una descripción Lagrangiana del movimiento, como en la formulación de sólido.

El campo de temperaturas se discretiza por el MEF utilizando generalmente la misma interpolación que para las velocidades (o desplazamientos). Tras el proceso usual de residuos ponderados se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones [1,7]

$$\mathbf{C} \dot{\phi} + \mathbf{H}(\dot{\mathbf{u}}) \phi = \bar{\mathbf{f}} \quad (4)$$

En (4)  $\mathbf{C}$  es la matriz de capacidad térmica clásica,  $\bar{\mathbf{f}}$  es el vector de fuerzas debido a fuentes de calor y  $\mathbf{H}$  contiene las contribuciones de los términos de conducción y convección térmica. Estos últimos deben tratarse con sumo cuidado utilizando técnicas de Petrov-Galerkin o similares para evitar inestabilidades numéricas [1]. Estos problemas desaparecen en principio si se utiliza una formulación de sólido.

La ec.(4) debe resolverse conjuntamente con las ecuaciones resultante de la discretización por el MEF del problema de deformación. Este proceso se describe brevemente en el apartado siguiente.

## 6. DISCRETIZACIÓN POR EL MEF. ASPECTOS COMPUTACIONALES

Las ecuaciones de la discretización del problema no lineal pueden escribirse en ambas formulaciones de flujo y de sólido como (ver Cuadro 2)

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

donde  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{f}$  son los vectores de fuerzas residuales, fuerzas internas y fuerzas exteriores, respectivamente,  $\mathbf{a}$  son desplazamientos y velocidades en las formulaciones de sólido y de flujo, respectivamente,  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas cartesianas, y  $t$  representa el tiempo en la formulación de flujo y el incremento de cargas en la de sólido.

La ec.(5) puede resolverse iterativamente para los valores del vector  $\mathbf{a}$ . Para la iteración  $k$  tenemos

$$\Delta \mathbf{a}^k = - \left[ {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^k \right]^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^k \quad (6)$$

donde  $\mathbf{S}$  es una matriz de iteración adecuada. El vector  $\mathbf{a}$  se actualiza como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{k+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^k + \Delta \mathbf{a}^k \quad (7)$$

La etapa siguiente es calcular el nuevo de campo de tensiones. En la formulación de flujo rígido/plástico-viscoplástico las tensiones se obtienen *directamente* del campo de velocidades actualizado (ver Cuadro 2). En la formulación de sólido (o en la de un fluido elasto-plástico-viscoplástico [11]), el cálculo de las tensiones requiere la integración consistente de las ecuaciones constitutivas incrementales.

La etapa final es la actualización de la geometría del metal. Esto puede hacerse directamente a partir del campo de velocidades o desplazamientos como se muestra en el Cuadro 2. Sin embargo, pueden utilizarse otras técnicas como las descritas en el apartado siguiente. En esta etapa hay que actualizar las propiedades mecánicas del material y verificar las condiciones de contacto y rozamiento (ver Apartado 7).

La nueva geometría y propiedades mecánicas del metal se utilizan para calcular el incremento  $\Delta \mathbf{a}^k$  de la nueva iteración en (6). El proceso continua hasta que se obtiene convergencia, lo que usualmente se mide por

el cumplimiento de la ec.(5) utilizando una norma cuadrática para las fuerzas residuales.

Si el proceso está acoplado térmicamente hay que resolver las ecuaciones discretizadas del equilibrio térmico (4) juntamente con las del problema mecánico (5). El método más sencillo es utilizar un esquema "escalonado" en el que los valores de las velocidades (o desplazamientos) obtenidos en cada iteración del problema mecánico se utilizan como datos en (4) para calcular las temperaturas en (4). Así, para un problema cuasiestático se tiene

$${}^{t+\Delta t}\phi^{k+1} = [{}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{k+1}]^{-1} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{f}}^{k+1} \quad (8)$$

donde  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{k+1}$  y  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{f}}^{k+1}$  contienen las contribuciones de la solución del problema mecánico en la iteración k-ésima. Las temperaturas nodales obtenidas de (8) se utilizan como datos para la evaluación de las propiedades mecánicas en la siguiente iteración de (6). Este proceso se repite hasta que ambos campos de velocidades (o desplazamientos) y de temperaturas convergen. En el Cuadro 2 se presenta de forma esquemática el proceso de solución para las formulaciones de flujo y de sólido.

La discusión detallada de los aspectos computacionales de la solución del problema acoplado cae fuera de los objetivos de este trabajo. En la referencia [1] pueden encontrarse las expresiones de las matrices y vectores de las matrices y vectores del Cuadro 2 así como más información sobre otras técnicas para tratar problemas acoplados de este tipo.

No obstante las siguientes observaciones son quizás pertinentes:

- a) La matriz de iteración  $\mathbf{S}$  en la formulación de sólido se toma usualmente igual a la de rigidez tangente calculada como  $\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{a}}$ . El algoritmo de solución coincide en este caso con el conocido método de Newton-Raphson.
- b) La selección de  $\mathbf{S}$  en la formulación de sólido puede hacerse en base a técnicas de iteración *secante* o *tangente*. La expresión de  $\mathbf{S}$  para el caso secante coincide con la de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  para problemas de elasticidad infinitesimal [6-10].

La forma de la matriz tangente exacta es compleja y generalmente no simétrica, lo que exige utilizar expresiones aproximadas más sencillas [10,17].

- c) La utilización de un esquema de integración en el tiempo explícito ( $\theta = 0$ ) en la formulación de flujo conduce a un algoritmo en el que la geometría en  $t + \Delta t$  se supone conocida "a priori" y se mantiene constante durante todo el proceso iterativo en el que las velocidades en  $t + \Delta t$  son las únicas incógnitas. Sin embargo, en el caso implícito ( $\theta \neq 0$ ) las coordenadas en  $t + \Delta t$  cambian durante el proceso iterativo y esto permite formular el problema en función de las velocidades en  $t + \Delta t$  (como se muestra en el Cuadro 3), o bien en función de los incrementos de desplazamientos entre dos configuraciones en  $t$  y  $t + \Delta t$ , advirtiendo simplemente que la ecuación de actualización de geometría puede escribirse como

$$\Delta \mathbf{u} = ({}^t\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}\theta)\Delta t \quad (9)$$

FORMULACION DE SOLIDO

FORMULACION DE FLUJO

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{a} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{B}_s\mathbf{a} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_T\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}_T\bar{\mathbf{B}}_s\mathbf{a} \end{aligned}$$

Discretización

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \mathbf{B}_f\dot{\mathbf{a}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}\mathbf{B}_f\dot{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio del problema mecánico

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{p} = \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

$$\mathbf{p} = \left( \int_V \mathbf{B}_f^T \mathbf{D} \mathbf{B}_f dV \right) \mathbf{a} = \mathbf{K}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds$$

Proceso de solución

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^o = 0$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^o = {}^t\mathbf{a}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^o = {}^t\mathbf{x}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^o = {}^t\mathbf{x} + {}^t\mathbf{a}\Delta t$$

LOOP k = 1, NITER

$$\Delta \mathbf{a}^k = -[{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^k]^{-1}({}^{t+\Delta t}\mathbf{r}^k)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{k+1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^k + \Delta \mathbf{a}^k$$

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^k$  se calculan  
integrando la ecuación constitutiva

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \mathbf{D}\mathbf{B}_f{}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{k+1}$$

Actualización de geometría

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^{k+1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{a}^k$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}^{k+1} = {}^t\mathbf{x} + {}^t\mathbf{a}(1 - \theta)\Delta t +$$

$$+ {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{k+1}\theta\Delta t$$

$\theta = 0$  solución explícita

$\theta \neq 0$  solución implícita

COMPRUEBA CONTACTO

Calcula  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}^{k+1}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{k+1}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{k+1}$  y  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{f}}^{k+1}$

Calcula temperaturas  ${}^{t+\Delta t}\phi^{k+1} = [{}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{k+1}]^{-1} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{f}}^{k+1}$

Calcula norma del error  $E = \min \left( \frac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{r}^{k+1}\|}{\|{}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{f}}^{k+1}\|}, \|{}^{t+\Delta t}\phi^{k+1} - {}^{t+\Delta t}\phi^k\| \right)$

$E.GT.TOL.$   $\xrightarrow{si}$  continua iteraciones  
 $k = k + 1$

$\downarrow$  no

INICIA NUEVO INCREMENTO DE CARGA O DE TIEMPO

Cuadro 2. Algoritmo para solución cuasiestática por el MEF en las formulaciones de flujo y de sólido.

donde

$$\Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{x}^{k+1} - {}^t \mathbf{x} \quad (10)$$

$$\Delta \mathbf{a} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{k+1} - {}^t \mathbf{a}$$

son los vectores de incrementos de velocidades y de desplazamientos, respectivamente. Esta última alternativa no ha sido todavía explorada con fines prácticos y abre nuevas posibilidades que merecen ser investigadas.

- d) La terminología “explícito” e “implícito” en el Cuadro 2 se refiere al esquema de integración temporal escogido para actualizar la geometría en la formulación de flujo. Esto no debería confundirse con los denominados métodos de “dinámica explícita” basados en la solución de las ecuaciones dinámicas de segundo orden incluyendo términos de inercia utilizando un esquema de integración hacia atrás explícito. Esta posibilidad se trata en el Apartado 9.

Más aún, adviértase que en la formulación de flujo cuasi-estática el esquema de actualización de geometría “explícito” requiere necesariamente la solución iterativa de un sistema de ecuaciones no lineal para obtener los valores de las velocidades en  $t + \Delta t$ , aunque manteniendo constante la geometría durante el proceso iterativo.

## 7. TECNICAS PARA ACTUALIZACION DE LA GEOMETRIA

La técnica más sencilla para actualizar la geometría del metal durante el proceso de deformación es utilizar un método Lagrangiano en el que la geometría se actualiza en función de las velocidades (o desplazamientos) nodales obtenidos en cada incremento (ver Cuadro 2). Este procedimiento puede conducir a mallas distorsionadas para estados avanzados de la deformación lo que exige un nuevo remallado.

Una segunda alternativa es utilizar la denominada técnica Lagrangiana-Euleriana Arbitraria en la que los nodos de la malla se desacoplan de los nodos de la malla sobre la que se calculan las velocidades (o desplazamientos) permitiendo un movimiento relativo entre las dos mallas. Esta técnica es más apropiada para problemas en la que solamente un pequeño porcentaje del dominio total (generalmente el contorno) cambia de forma durante la deformación. Esta parte de la malla se actualiza de forma Lagrangiana mientras que en el resto del dominio se utiliza una malla Euleriana fija [25,35,36].

Es obligatorio mencionar aquí una tercera alternativa para la formulación de flujo denominada método de “pseudo-concentración” [25-29]. La idea básica es introducir una función escalar que se transporta a través de una malla fija en función del campo de velocidades obtenido de la solución del problema de flujo. Esta función se define en todo el dominio, utilizando un cierto isovalor para definir el frente del metal que se deforma. La región todavía no ocupada por el metal se supone constituida por un material ficticio (usualmente se toma el *aire*) cuyas propiedades físicas deben ser tales que no afecten el movimiento del metal. En la práctica esto implica resolver la siguiente ecuación de transporte

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u}^T \nabla \psi = 0 \quad (11)$$

donde  $\psi$  es la función escalar de pseudo-concentración que define la presencia o ausencia de metal en cada punto de la malla. Así, por ejemplo, puede asignarse al frente del metal el valor  $\psi = \psi_c$ , de manera que la región ocupada por el metal se identifica por los valores  $\psi \geq \psi_c$  y la posición del aire por  $\psi < \psi_c$ .

La discretización por el MEF de la ec.(11) conduce al sistema de ecuaciones siguiente

$$\bar{\mathbf{C}}\dot{\psi} + \mathbf{R}(\mathbf{u})\psi = \hat{\mathbf{f}} \quad (12)$$

donde  $\psi$  denota los valores nodales de la función de pseudo-concentración.

La ec.(12) se resuelve una vez obtenido el campo de velocidades de manera que puedan actualizarse los contornos de la región metálica para cada incremento de tiempo. Adviértase que la ec.(11) es de tipo hiperbólico lo que exige utilizar técnicas especiales de Petrov-Galerkin para evitar inestabilidades numéricas [1]. Adicionalmente, la matriz  $\mathbf{R}$  en (12) no es simétrica lo que introduce un problema adicional. Pese a estas aparentes dificultades el método de pseudo-concentración ha atraído la atención reciente de numerosos investigadores para solución de problemas de conformado de metales transitorios [26-29,37].

## 8. TRATAMIENTO DEL CONTACTO FRICCIONAL

El contacto y el rozamiento aparecen como consecuencia de la interacción entre cuerpos. Dicha interacción es típica de procesos de conformado de metales. Durante estos procesos el metal interacciona con los útiles añadiendo una nueva fuente de complejidad a la naturaleza no lineal de las condiciones de contorno. El tratamiento numérico de los problemas de contacto friccional involucra fundamentalmente dos etapas. Primero debe efectuarse una *búsqueda de contacto* para detectar las penetraciones (incompatibilidades cinemáticas) entre los diferentes cuerpos que intervienen en el análisis. Segundo, las penetraciones detectadas deben cancelarse de manera que se satisfagan las *condiciones de compatibilidad cinemáticas*.

Se han propuesto diferentes formulaciones para el análisis numérico de problemas de contacto friccional. En el *método de penalización* se añade un funcional penalizado al funcional del problema original sin coacciones de contacto. La principal dificultad de este método es que las condiciones de compatibilidad solo se satisfacen para valores *infinitos* del parámetro de penalización, lo que conduce al mal condicionamiento del operador tangente. Aparte de esto es un procedimiento muy sencillo para imponer las condiciones y también fácil de implementar en ordenador.

Los modelos de contacto friccional pueden describirse también utilizando la teoría de la plasticidad, en la que los parámetros de penalización (o de regulación) pueden interpretarse como parámetros constitutivos [18,19].

En la técnica de *multiplicadores de Lagrange* se introduce un nuevo campo (los multiplicadores) por medio de un funcional de contacto. Esto conduce a un incremento en el número de incógnitas del sistema de ecuaciones a resolver. Además, el operador tangente no está definido (tiene ceros en las posiciones de la diagonal principal correspondiente a los multiplicadores) y por ello debe

tenerse un cuidado especial durante el proceso de solución. Su principal ventaja es que las condiciones cinemáticas se satisfacen *exactamente*.

La indefinición del operador tangente puede corregirse utilizando la técnica de *multiplicadores de Lagrange perturbados*. Con este método pueden incluso formularse los métodos de penalización y de multiplicadores de Lagrange de manera unificada.

Otro procedimiento bastante utilizado es el de *Lagrangiano aumentado*. Esta técnica se utiliza generalmente de manera conjunta con el algoritmo de Uzawa y permite satisfacer exactamente las condiciones cinemáticas para valores *finitos* del parámetro de penalización. Esto resuelve los problemas asociados al valor infinito de dichos parámetros y al mal condicionamiento del operador tangente, antes mencionados. Además, no se incrementa el número de las ecuaciones a resolver y los multiplicadores se actualizan simplemente bien después de la convergencia de cada solución de equilibrio (algoritmo de Uzawa anidado), o bien después de cada iteración de equilibrio (algoritmo de Uzawa simultáneo) [21]. En el primer caso se necesita un bucle exterior, pero se mantiene la convergencia cuadrática si se utiliza un operador tangente consistente. En el segundo, dicho bucle no es necesario, pero la actualización de los multiplicadores destruye la convergencia cuadrática asintótica del esquema de Newton-Raphson. Más información sobre variantes de esta técnica pueden verse en las referencias [21] y [22].

Recientemente, Papadopoulos y Taylor [22] han propuesto una formulación para problemas de contacto sin rozamiento basada en un funcional de tres campos del tipo Hu-Washizu. En dicha formulación se postula el contacto entre elementos, introduciendo una función de penetración como una variable independiente más en la formulación. De hecho, este procedimiento puede considerarse una ampliación del propuesto años antes por Wriggers et al. [23] utilizando un funcional de dos campos.

## 9. METODOS CUASISTATICOS VERSUS DINAMICOS

Como se muestra en el Cuadro 2 las ecuaciones del movimiento deben integrarse en el espacio y en el tiempo. En la mayoría de procesos de conformado de metales esta integración no precisa incluir los efectos de inercia, puesto que son despreciables [24]. El método *cuasiestático* que se muestra en el Cuadro 2 es, por tanto, el más "natural". En dicho método el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio en  $t + \Delta t$  requiere *siempre* el uso de un esquema iterativo. Los obstáculos asociados a la solución iterativa de grandes sistemas de ecuaciones típicos de problemas tridimensionales pueden reducirse utilizando técnicas de gradiente conjugados. Desgraciadamente, la matriz de rigidez de elementos delgados puede estar mal condicionada, lo que hace estos procedimientos poco efectivos para problemas de embutición de chapa.

Los *métodos dinámicos explícitos* han adquirido recientemente gran popularidad en el contexto de la formulación de sólido al obviar la solución de un sistema de ecuaciones. La base de estos procedimientos es la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico en el tiempo  $t$ , utilizando un esquema de integración explícito con una matriz de masa diagonal. En el Cuadro 3 se muestra el algoritmo básico para las formulaciones de flujo y de sólido

SOLUCION DINAMICA EXPLICITA	
FORMULACION DE SOLIDO	FORMULACION DE FLUJO
$M\ddot{u} + p(u) = f$	$M\ddot{u} + p(\dot{u}) = f$
$M_D = \text{diag } M$	$p(\dot{u}) = K(\dot{u})\dot{u}$
( $\cdot$ ) <sup>n-1</sup> : Valores conocidos en el tiempo $n - 1$	
$u^n = u^{n-1} + \Delta t \dot{u}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}^{n-1}$	
Calcula $x^n, f^n, p^n$	Calcula $x^n, f^n$
	Itera para $\dot{u}^n, \ddot{u}^n$ (i=1, NITER)
$\ddot{u}^n = M_D^{-1}[f^n - p^n]$	$\ddot{u}_{i+1}^n = [M + \frac{\Delta t}{2} K_i^n]^{-1} \{f^n - K_i^n(\dot{u}^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}^{n-1})\}$
$\dot{u}^n = \dot{u}^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}^{n-1} + \ddot{u}^n)$	$\dot{u}_{i+1}^n = \dot{u}^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}^{n-1} + \ddot{u}_{i+1}^n)$
COMPRUEBA CONTACTO	
NUEVA SOLUCION EN EL TIEMPO $n + 1$	

Cuadro 3. Solución dinámica explícita en las formulaciones de sólido y de flujo.

sin incluir efectos térmicos. La ventaja de los métodos dinámicos explícitos en la formulación de sólido estriba en que no es preciso formar la matriz de rigidez y que las condiciones de contorno se modelan con precisión al utilizarse incrementos de tiempo muy pequeños. Además pueden paralelizarse fácilmente en ordenadores paralelos con arquitectura SIMD. En el lado negativo se tiene que exigen incrementos muy pequeños para evitar la inestabilidad de la solución. Otro inconveniente de esta técnica es su dificultad para predecir el inicio de inestabilidades locales y otros fenómenos como la recuperación elástica en procesos de conformado de chapa.

El debate actual entre métodos cuasiestáticos implícitos o dinámicos explícitos en la formulación de sólido se clarificará cuando se avance en la paralelización de algoritmos iterativos para solución de ecuaciones en programas implícitos. Se intuye que un programa implícito "optimizado" podría ser finalmente el más adecuado para análisis de problemas de conformado de metales.

La inclusión de efectos de inercia en la formulación de flujo no ha recibido mucha atención aunque se conoce un primer intento propuesto por Doltsinis [17] para análisis de problemas de choque de automóviles. Las razones de ello son probablemente debidos a que, incluso en el caso de utilizar un algoritmo dinámico explícito, es preciso resolver un sistema de ecuaciones no lineales para cada incremento de tiempo (ver Cuadro 3), destruyendo, por tanto, todas las ventajas que la solución explícita directa tenía en la formulación de sólido.

## 10. EJEMPLOS

El primer ejemplo que se muestra en la Figura 1 es la solución de un problema de extrusión plana estacionario resuelto con la formulación de flujo. El elemento utilizado es el cuadrilátero  $Q_2/P_1$  con una interpolación cuadrática

para las velocidades y la temperatura y una interpolación lineal discontinua para la presión [1,29]. En la referencia [7] pueden encontrarse detalles sobre la geometría y propiedades mecánicas de este problema.

La Figura 1a muestra la malla utilizada mientras que las Figuras 1b, 1c y 1d muestran los campos de velocidades, temperaturas y presión obtenidos en el análisis.

El segundo ejemplo que se muestra en la Figura 2 es el llenado de un molde rectangular por gravedad. El problema se resuelve con la formulación de flujo y la técnica de pseudo-concentración descrita en el Apartado 8. La Figura 2a muestra la malla de elementos  $Q_2/P_1$  utilizados en el análisis. Las Figuras 2b y 2c muestran la posición de contorno del metal fluido y la evolución de las presiones durante el llenado. Más información sobre este ejemplo puede encontrarse en las referencias [29] y [37].

El tercer ejemplo, que se muestra en la Figura 3 es el laminado en caliente de un tocho rectangular. La técnica de solución ha sido la misma que para el ejemplo anterior. Las propiedades geométricas y del material pueden encontrarse en [7]. La Figura 3 muestra la posición del contorno del metal durante el proceso de laminado y las líneas de iso-temperatura para la solución estacionaria.

El ejemplo final es la embutición profunda de una plancha metálica circular con un punzón cilíndrico. Este problema se ha resuelto con elementos de membrana 3D basados en la formulación de flujo. La Figura 4 muestra la geometría deformada de la plancha para diferentes estados de la embutición. En la referencia [34] puede encontrarse información detallada sobre este problema.

## 11. COMENTARIOS FINALES

Parece claro que las dificultades intrínsecas de la simulación por ordenador de los procesos de conformado de metales son una clara motivación para el desarrollo de nuevas y más sofisticadas técnicas numéricas. En este trabajo se ha presentado una panorámica de algunas de las más recientes y populares. No obstante, la solución de problemas de interés industrial exige procedimientos numéricos más eficientes que permitan predecir la evolución de todos los parámetros que intervienen en los procesos de conformado de manera precisa. La necesidad de mejoras en esta área es clara y temas como el desarrollo de nuevos elementos finitos, así como de técnicas computacionales más eficientes compatibles con las nuevas arquitecturas de ordenadores paralelos, serán seguramente el objetivo de la investigación en los próximos años.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a los Drs. C. Agelet de Saracibar y R. Codina sus comentarios durante la preparación de este trabajo. Asimismo se agradece al Dr. W. Sosnowski y el Sr. O. Soto por la ayuda en la realización de los ejemplos presentados.

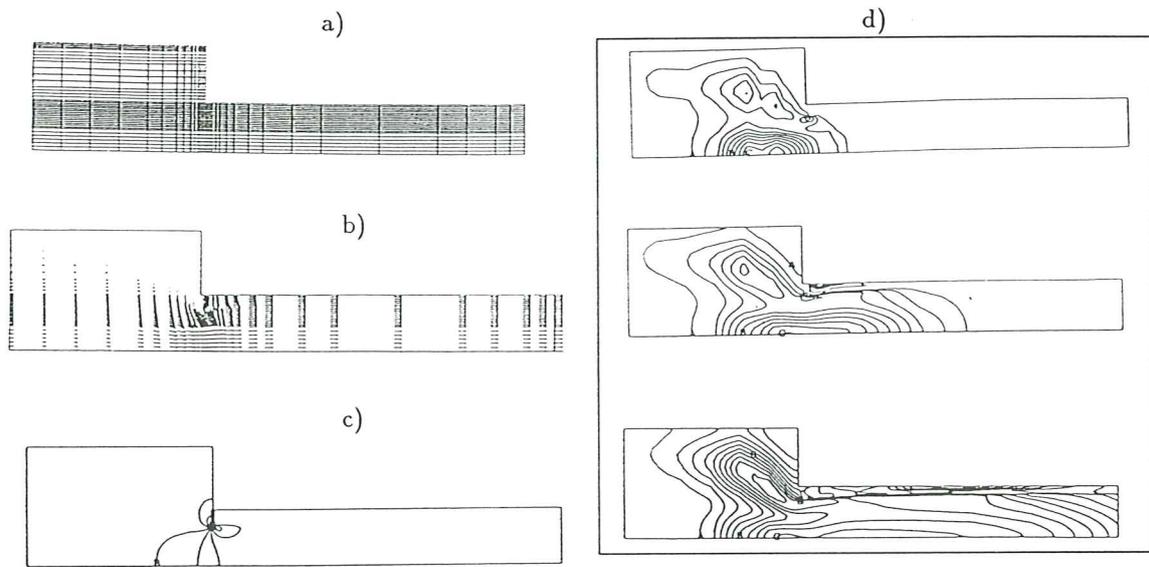


Figura 1. Extrusión plana. a) Geometría y malla de 230 elementos mixtos  $Q_2/P_1$  utilizados. b) Campo de velocidades. c) Isolíneas de presión y d) Evolución de isolíneas de temperatura desde el estado inicial al final.

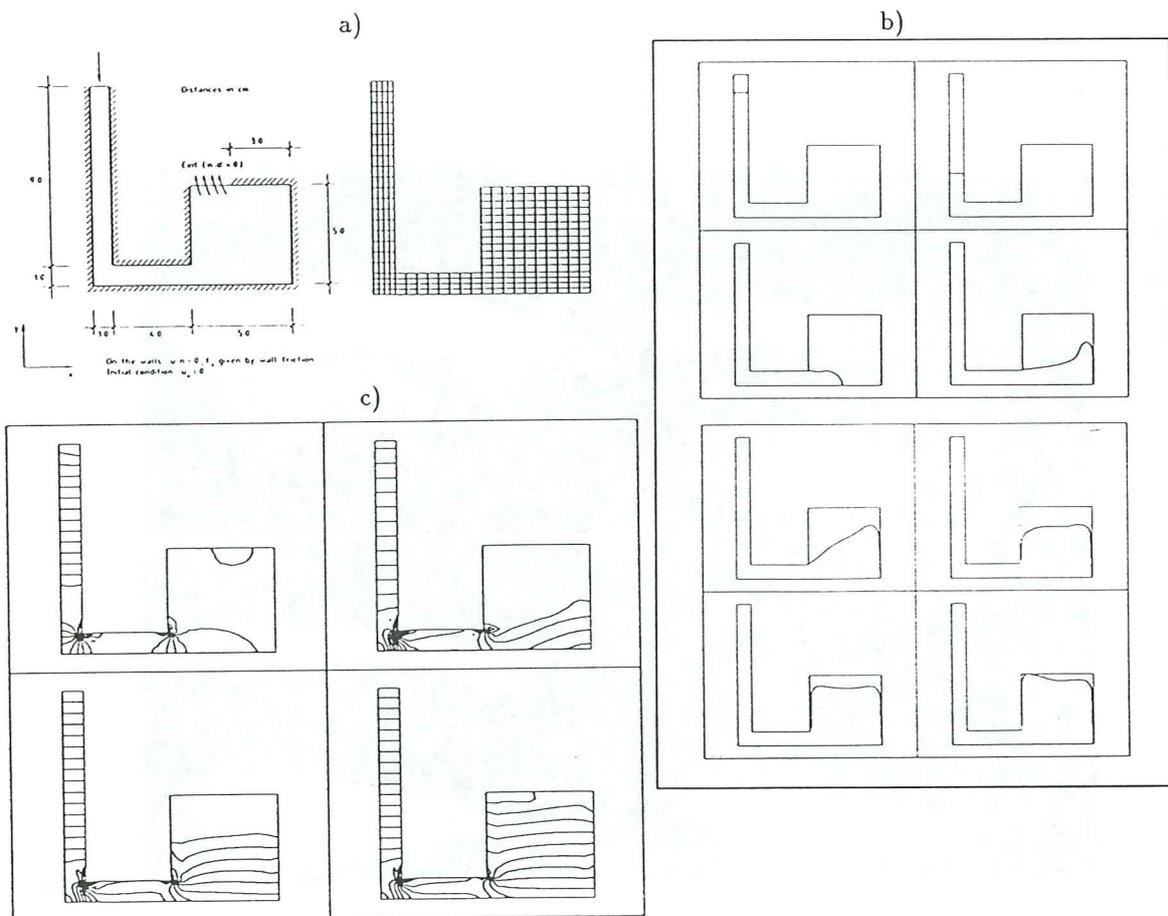


Figura 2. Llenado de un molde por gravedad. a) Geometría y malla de 280  $Q_2/P_1$  elementos mixtos utilizados. b) Evolución del contorno del metal líquido y c) Isolíneas de presión para tiempos diferentes.

## REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "*The Finite Element Method*", *Fourth Edition*, Volume 2, McGraw-Hill, (1991).
2. J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood and J.M. Alexander (eds.), "*Numerical Methods in Industrial Forming Processes*", Proceedings of NUMIFORM'86, J. Wiley, (1984).
3. K. Mattiasson A. Samuelsson, R.D. Wood O.C. Zienkiewicz (eds.), "*Numerical Methods in Industrial Forming Processes*", Proceedings of NUMIFORM'86, Balkema, (1986).
4. E.G. Thomppson, R.O. Wood, O.C. Zienkiewicz and A. Samuelsson (eds.), "*Numerical Methods in Industrial Forming Processes*", Proceedings of NUMIFORM'89, Balkema, (1989).
5. R. Owen, E. Oñate and E. Hinton, (eds.), "*Computational Plasticity Models and Applications*", Vols. I and II, Pineridge Press/CIMNE, (1992).
6. O.C. Zienkiewicz, P.C. Jain and E. Oñate, "Flow of solids during forming and extrusion. Some aspects of numerical solutions", *Int. J. Solids Struct.* Vol. 14, (1978), pp. 14-28.
7. O.C. Zienkiewicz, E. Oñate and J.C. Heinrich. "A general formulation for coupled thermal flow of metals using finite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 1497-1519, (1991).
8. E. Oñate and O.C. Zienkiewicz, "A viscous shell formulation for the analysis of thin sheet metal forming", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 25, pp. 305-335., (1983).
9. E. Oñate and C. Agelet de Saracibar, "Analysis of sheet metal forming problems using a selective bending-membrane formulation", *Int. J. Num. Engng.*, Vol. 30, (1990), pp. 1577-1593.
10. C. Agelet de Saracibar, "Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes" (in Spanish) Ph.D. Thesis., Univ. Politec. Catalunya, Barcelona, (1990).
11. J.L. Chenot, "A velocity approach to finite element calculation of elastoplastic and viscoplastic deformation processes", *Eng. Comput.*, Vol. 5, (1988), pp. 2-9.
12. C. Agelet de Saracibar and E. Oñate, "Plasticity metals for porous metals", Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Plasticity, D.R.J Owen, E. Hinton and E. Oñate (eds.), Pineridge Press, (1989), pp. 159-152.
13. E. Oñate and C. Agelet de Saracibar, "Numerical modelling of sheet metal forming problems", Numerical Modelling of Material Deformation Processes: Research, Developments and Applications, P.Hartley et al. (eds.), Springer-Verlag, (1992), (to appear).
14. J.C. Simo, "A framework for finite strain elastoplastics based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part II: Computational Aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 68, (1988), 1-31, Norf Holland.
15. J.C. Simo, R.L. Taylor and K.S. Pister, "Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity", *Comp. Meth. App. Mech. Engng.*, Vol. 51, (1988), 177-208.

16. T.J.R. Hughes, "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non linear media", *Inf. J. Numerical Meth. in Engng.*, Vol. **19** (9), (1980), 1413, 18.
17. I.St. Doltsinis, "Nonlinear concepts in the analysis of solids and structures", *Advances in Computational nonlinear Mechanics*, I. St, Doltsinis (ed.), Springer Verlag, (1989).
18. P.Wriggers T. Vu Van and E. Stein, "Finite elements formulation of large Deformation Impact-Contact problems, Vol. **37**, (1990), pp. 319-331.
19. C. Agelet de Saracibar, "Numerical simulation of frictional contact problems", *Lectures notes of the A short Course on Finite Element Procedures for Plasticity and Viscoplasticity*, Barcelona, Spain, (1992), April 2-3.
20. J.W. Ju, R.L. Taylor and L.Y. Cheng, "A Consistent Finite Element Formulation of Nonlinear Frictional Contact Problems", *Proc. NUMETA'87, D5/1*, A.A. Balkema, (1987).
21. J.C. Simo and T.A. Laursen, "An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction", *Computers & Structures*, Vol. **42**, (1992), pp. 97-116.
22. P. Papadopoulos and R.L. Taylor, "A mixed formulations for the finite element solution of contact problems", *Comp Meth. Appl. Mech Engng.*, Vol. **94**, (1992), pp. 373-389.
23. P. Wriggers, J.C. Simo and R.L. Taylor, "Penalty and augmented Lagrangian Formulations for contact problems", *Proc. NUMETA'85*, pp. 97-106, A.A. Balkema, (1985).
24. T. Wertheimer, "Numerical Simulation of metal sheet forming processes", *Proc. FE-Simulator of 3-D sheet Metal Forming Processes in Automatic Industry*, pp. 405-440, VDI. (1991).
25. J. Huentink, P.T. Vreede and J. van der Lugt, "Progress in mixed Eulerian-Lagrangean finite element simulation of forming processes", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **30**, (1990), 1441.
26. E. Thompson and R.E. Smelser, "Transient analysis of forging operations by the pseudoconcentration method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **25**, (1988), 177-89.
27. H.J. Antunez and J.R. Idelsohn, "Using pseudoconcentration in the analysis of transient forming processes", *Engineering Comput.*, (to appear).
28. E. Dvorkin and E.G. Petöcz, "On the modelling of 2D metal forming processes using the flow formulations and the pseudo-concentrations technique", in *Computational Plasticity*, R. Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds.), Pineridge Press /CIMNE, (1992).
29. R. Codina, "A finite element model for incompressible flow problems", Ph. D. Thesis, Univ. Politècnica de Catalunya, (1992).
30. L.E. Malvern, "Introduction to the mechanics of a continuous medium", Prentice-Hall, (1969).
31. I. Babuska, "Error bounds for finite element method", *Numer. Math.*, Vol. **16**, (1971), 322-33.
32. I. Babuska, J. Osborn and J. Pitkäranta, "Analysis of mixed methods using mesh dependent norms", *Math. Comp.*, Vol. **35**, (1982), 1039-62.

33. F. Brezzi and K.J. Bathe, "A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations", *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng*, Vol. 82, (1990), pp. 27-97.
34. W. Sosnowski, E. Oñate and C. Agelet de Saracibar, "Computational aspects in the finite element analysis of sheet metal forming problems using a viscous shell approach", in *Computational Plasticity*, R. Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds.), Pineridge Press/CIMNE, (1992).
35. A. Huerta, "Una formulación arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana para grandes desplazamientos del contorno", *Int. Center for Numerical Methods in Engng.*, Barcelona, Spain, (1988).
36. A. Huerta and M. Casteleiro, "Progress in arbitrary Lagrangian-Eulerian analysis of fluid and solid problems", in *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, H. Alder, J.C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate and B. Suárez (Eds.), CIMNE, Barcelona, (1992).
37. R. Codina, U. Schäfer, E. Oñate, M. Cervera and O. Soto, "A finite element model to track free surfaces of viscous incompressible flows", in *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, H. Alder, J.C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate and B. Suárez (Eds.), CIMNE, Barcelona, (1992).