REFLEXIVIDAD Y *T*-TRANSITIVIDAD APROXIMADAS

Dionís Boixader **J. Recasens**

Universitat Poliotècnica de Catalunya.
E.T.S. Arquitecura del Vallès C. Pere Serra 1-15
Sant Cugat del Vallès – 08190
{dionis.boixader,j.recasens}@upc.edu

Resumen

Los preórdenes y las equivalencias son probablemente las relaciones más estudiadas dentro de la Lógica Difusa. Sin embargo, su definición generalmente aceptada es crisp, ya que dada una relación, sólo puede cumplir, o no cumplir, con los axiomas de preorden o equivalencia difusos. En este artículo proponemos una fuzzificación de dichos conceptos basada en dos procedimientos: primero, a base de introducir grados en el cumplimiento de los axiomas y, segundo, comparando relaciones por medio de una similitud. El estudio posterior muestra que ambas vías están estrechamente relacionadas.

Palabras Clave: preoden difuso, equivalencia difusa, *t*-norma, implicación residuada, reflexividad, simetría, *T*-transitividad.

1 INTRODUCCIÓN

Los preórdenes y las equivalencias difusas son, probablemente, las relaciones que han merecido más atención por parte de los investigadores en el campo de la Lógica Difusa.

Aunque aparecen bajo una gran variedad de nombres en la literatura, rige un consenso casi general sobre cómo sus homólogos crisp deben generalizarse a contexto fuzzy, a saber, a través de la fuzzificación de las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad que definen estas relaciones en la matemática tradicional.

Dicha fuzzificación apareció por primera vez en Zadeh [7] y desde entonces pocas modificaciones ha sufrido, a excepción del uso de una t-norma general en la modelización de la transitividad difusa, una función restringida originalmente a T=MIN.

Definición 1.1: Una operación T del intervalo unidad [0,1] es una *t-norma* si es asociativa, conmutativa, monótona y satisface las condiciones de contorno $T(x,0)=T(0,x)=0$ y $T(x,1)=T(1,x)=x$ para todo x de X.

Estrechamente relacionadas con las t-normas aparecen las cuasi-inversas o implicaciones residuadas:

Definición 1.2: Dada una t-norma T, su cuasi-inversa es la operación del intervalo unidad definida mediante: $\vec{T}(x \mid y) = \sup\{a \in [0,1] \ / \ T(a,x) \le y\}$ para todos x, y de [0,1].

Simetrizando la cuasi-inversa de una t-norma se obtiene una nueva operación E_T .

Definición 1.3: Dada una t-norma T, la *biimplicación* o *equivalencia natural* asociada se define como: $\overset{\leftrightarrow}{T} = \min\{\vec{T}(x \mid y), \vec{T}(y \mid x)\}$ para todos x, y de [0,1].

En el marco de las relaciones difusas, ambas operaciones se interpretan como relaciones en el intervalo unidad, y se utilizan las notaciones I_T y E_T para la implicación residuada y la equivalencia natural, respectivamente.

Definición 1.4: Una relación difusa R en un conjunto X, o lo que es lo mismo, una aplicación $R: X \times X \to [0,1]$ es:

Reflexiva, si $R(x,x)=1$ para todo x de X.
Simétrica, si $R(x,y)=R(y,x)$ para todos x, y de X.
T-Transitiva, si $T(R(x,y), R(y,z)) \le R(x,z)$ para todos x, y, z de X.

Definición 1.5: Un *Preorden Difuso* es una relación difusa reflexiva y T-transitiva.

El ejemplo fundamental de preorden difuso lo proporciona la propia implicación residuada I_T, mientras que E_T constituye el ejemplo básico de equivalencia difusa.

Definición 1.6: Una *Equivalencia Difusa* es una relación difusa reflexiva, simétrica y *T*-transitiva.

Otras denominaciones para las equivalencias difusas son *Similitud*, *Semejanza*, *Relación de Parecido*, *T-indistinguibilidad* y *Igualdad Difusa*. Todos estos nombres sugieren que las equivalencias difusas proporcionan una medida de hasta qué punto dos objetos pueden verse como próximos o intercambiables en el marco de una teoría.

Resulta claro que una relación difusa dada *R* puede satisfacer, o no satisfacer, cada una de las propiedades listadas más arriba. Y que esto se produce de una forma estrictamente crisp.

Así, el conjunto de las relaciones difusas en *X* se divide entre las que son reflexivas y las que no lo son. Entre las que son simétricas, y las que no lo son, etcétera. Y, por conjunción de dichas propiedades, entre las que són preórdenes difusos, o equivalencias difusas, y las que no.

Resulta imposible comparar dos relaciones *R* y *S* y afirmar, por ejemplo, que *R* se comporta más como un preorden difuso que *S*, o que *S* es ligeramente más simétrica que *R*. Ser un preorden, o ser simétrica, no es en modo alguno una cuestión cuantificable o graduable.

De esta forma, grado y vaguedad quedan totalmente excluidos de la propia teoría. Una teoría que, no lo perdamos de vista, está orientada precisamente a modelizar los conceptos vagos y graduales por naturaleza. Objeciones de este estilo, así como vías de solución basadas en la gradación de los axiomas pueden encontrarse en [1,3,5].

Más allá de las consideraciones teóricas que se quieran invocar, existen también aspectos prácticos que justifican la necesidad de ampliar la clase de las relaciones estudiadas con nuevos elementos que no sean, en sentido estricto, preórdenes o equivalencias difusas.

Allá donde la información provenga de la cuantificación subjetiva de un agente expresando la proximidad entre objetos, no es razonable esperar que los datos se comporten de forma estrictamente *T*-transitiva, por ejemplo. O también en aquellos casos en que la información esté vinculada a medidas experimentales, y por tanto sujeta a errores de naturaleza probabilística o sistemática inherentes al proceso de medida. Sin embargo, cabe esperar que las relaciones difusas obtenidas por dichos procedimientos se comporten, aproximadamente, como preórdenes o equivalencias difusas, si ésta es la hipótesis subyacente al modelo teórico.

Con la finalidad de poder asumir que cualquier relación difusa es, hasta cierto punto, un preorden o una equivalencia difusos, proponemos dos caminos distintos.

De una parte, se trata de redefinir los axiomas de reflexividad, simetría y *T*-transitividad a base de introducir grados de satisfacción en las definiciones originales. Esta vía respondería probablemente a las motivaciones de orden teórico que se han expuesto.

Por otro lado, y dado que los errores experimentales o subjetivos deforman en cierta medida el conjunto de valores de la relación en su conjunto, propondremos también medidas de semejanza entre relaciones. La idea es considerar una relación *S* más o menos como un preorden o una equivalencia difusos, de acuerdo con la medida de semejanza entre *S* y *R*, donde *R* es un preorden o equivalencia difusos en el sentido tradicional. En este sentido, hablaremos de *candidatos* (la relación *S*) y de *prototipos* o *referencias* (la relación *R*).

Quizás, la parte más interesante de la investigación que presentamos se encuentre en que ambos tratamientos del problema están, de hecho, muy relacionados.

2 INTRODUCCIÓN DE GRADOS EN LOS AXIOMAS

Empecemos por la modificación de los axiomas, o propiedades definitorias de las relaciones estudiadas.

Definición 2.1: Una relación difusa *R* en *X* se dirá que es:

a-Reflexiva si $R(x,x) \geq a$, para cierto $a \in [0,1]$ y para todo *x* de *X*.

a-Simétrica respecto a una t-norma *T* si $T(a, R(x,y)) \leq R(y,x)$, para cierto $a \in [0,1]$ y para todos *x*, *y* de *X*.

a-Transitiva respecto a una t-norma *T*, o *a-T-transitiva*, si $T(a, T(R(x,y), R(y,z))) \leq R(x,z)$, para cierto $a \in [0,1]$ y para todos *x*, *y*, z de *X*.

Dos simples consecuencias se desprenden de la definición anterior. La primera, que para $a = 1$ se recuperan reflexividad, simetría y *T*-transitividad en el sentido habitual. La segunda, que toda relación *a*-reflexiva, *a*-simétrica o *a*-*T*-transitiva será también *b*-reflexiva, *b*-

simétrica o *b*-*T*-transitiva para todo $b \le a$. Estas observaciones dan sentido a la próxima definición.

Definición 2.2: Dada una t-norma *T* y una relación difusa *R* en un conjunto *X*:

Su grado de reflexividad es $a_r = \inf_{x \in X} R(x,x)$

Su grado de simetría respecto a *T* es

$a_s = \inf_{x,y \in X} \left\{ \sup\left\{ a \in [0,1] \ | \ T(a, R(x,y)) \le R(y,x) \right\} \right\}$

Su grado de transitividad con respecto a *T* es

$a_t = \inf_{x,y \in X} \left\{ \sup\left\{ a \in [0,1] \,|\, T(a, T(R(x,y), R(y,z))) \le R(x,z) \right\} \right\}$

De esta manera, una relación difusa *R* es un preorden difuso si, y sólo si $a_r = a_t = 1$, y es una equivalencia difusa si, y sólo si $a_r = a_s = a_t = 1$.

Los anteriores niveles se pueden expresar utilizando la casi-inversa $\vec{T}$, o implicación residuada. El grado de simetría de *R* respecto a *T* es

$$a_s = \inf_{x,y \in X} \left\{ \vec{T}(R(x,y) \mid R(y,x)) \right\}$$

mientras que el grado de transitividad es

$$a_t = \inf_{x,y \in X} \left\{ \vec{T}(T(R(x,y), R(y,z)) \ \mid \ R(x,z)) \right\}$$

Una posible alternativa consiste en reescribir el nivel de simetría a_s mediante la equivalencia natural del intervalo unidad E_T como sigue:

$$a_s = \inf_{x,y \in X} E_T\left(R(x,y), R(y,x) \right)$$

Definición 2.3: Una relación difusa *R* es un *a*-*Preorden* si sus niveles de reflexividad y transitividad son ambos mayores que *a*.

Definición 2.4: Una relación difusa *R* es una *a*-*Equivalencia* si sus niveles de reflexividad, simetría y transitividad son todos mayores que *a*.

3 RELACIONES DE REFERENCIA

A continuación, procederemos a comparar relaciones difusas con la intención de transferir grados de reflexividad, simetría y transitividad entre ellas.

Dos relaciones difusas *R* y *S* definidas sobre un mismo conjunto *X* pueden compararse de muchas maneras. En este trabajo nos restringiremos a la proximidad o semejanza punto a punto. Nos referiremos a esta particular manera de evaluar la semejanza entre relaciones como a su *equivalencia natural*, dado que extiende de forma obvia la Definición 1.4 para el intervalo unidad.

Definición 3.1: Dadas dos relaciones difusas sobre *X,* la *equivalencia natural entre R y S* se define como:

$E_T(R,S) = \inf_{x,y \in X} E_T(R(x,y), S(x,y))$

Por esta misma razón seguiremos usando la notación E_T. De hecho, se trata únicamente de una extensión punto a punto, o mejor dicho tratándose de relaciones, par a par.

Obsérvese que E_T define una equivalencia difusa en el conjunto de todas las relaciones difusas sobre *X*, estrictamente en el sentido que marca la Definición 1.6, según se prueba en [5]. Por lo tanto, E_T constituye una medida de proximidad entre *R* y *S,* o lo que es lo mismo, de hasta qué punto ambas relaciones son intercambiables entre sí.

Para transferir propiedades de *R* (relación de referencia) a *S* (relación candidato), otro concepto importante es el *orden puntual*.

Definición 3.2: Una relación difusa *R* es menor o igual que otra relación difusa *S* punto a punto, $R \le_X S$, si $R(x,y) \le S(x,y)$ para cualesquiera *x* e *y* de *X*.

En este caso, es habitual decir que *R* es *más específica* que *S*.

En adelante, supondremos que la relación de referencia es un preorden o una equivalencia difusos, mientras que *S*, el candidato, puede ser cualquier relación, con la única condición de que sea similar a *R* cuando ambas se comparen mediante E_T.

Proposición 3.3: Sean *R* y *S* dos relaciones difusas sobre *X*. Si *R* es reflexiva y $E_T(R,S) \ge a$ entonces *S* es *a*-reflexiva.

Este resultado se obtiene como consecuencia de los dos lemas siguientes.

Lema 3.4: Sean *R* y *S* relaciones difusas sobre *X* tales que $S \le_X R$. Si *R* es reflexiva y $E_T(R,S) \ge a$ entonces *S* es *a*-reflexiva.

Para probar la Proposición 3.3 podemos dividir *S* en dos relaciones $S_1 = \min\{S,R\}$ y $S_2 = \max\{S,R\}$ tales que $S_1 \le_X R$ y $R \le_X S_2$. Los grados de reflexividad de S_1 y S_2 , *a* y 1 respectivamente, se agregarán mediante la t-norma *T* y así se obtiene el grado de reflexividad estimado para *S*, que vale $T(a,1) = a$.

Proposición 3.5: Sean R y S dos relaciones difusas sobre X. Si R es simétrica y $E_T(R,S) \geq a$ entonces S es b-simétrica para $b = T(a,a)$.

Como antes, el nivel estimado de simetría de S puede ser mejorado si se supone que las relaciones que intervienen están ordenadas puntualmente. La Proposición 3.5 es también en este caso una consecuencia natural del lema siguiente.

Lema 3.6: Sean R y S relaciones difusas en X tales que $R \leq_X S$ o $S \leq_X R$. Si R es simétrica y $E_T(R,S) \geq a$ entonces S es a-simétrica.

Descomponiendo S en S_1 y S_2 de la forma anterior, se obtiene que $b = T(a,a)$ es el grado de simetría estimado para S.

Finalmente, tenemos también un resultado parecido para la transitividad.

Proposición 3.7: Sean R y S dos relaciones difusas en X. Si R es T-transitiva y $E_T(R,S) \geq a$ entonces S es b-T-transitiva para $b = T(T(a,a),a)$.

También aquí el orden puntual de las relaciones permite mejorar la estimación sobre el grado de transitividad del candidato S, a la vez que proporciona una demostración de la Proposición 3.7.

Lema 3.8: Sean R y S relaciones difusas en X tales que $R \leq_X S$. Si R es T-transitiva y $E_T(R,S) \geq a$ entonces S es b-T-transitiva con $b = T(a,a)$.

Lema 3.9: Sean R y S relaciones difusas en X tales que $S \leq_X R$. Si R es T-transitiva y $E_T(R,S) \geq a$ entonces S es a-T-transitiva.

Resumiendo, y puesto que la transitividad establece la cota más baja entre las tres propiedades consideradas, cuando R es un preorden o una equivalencia difusos, se tiene:

Proposición 3.10: Si R es un preorden o una equivalencia difusos sobre X, y S es una relación difusa tal que $E_T(R,S) \geq a$, entonces S será un b- preorden o una b-equivalencia con $b = T(T(a,a),a)$.

4 RELACIÓN ENTRE TRANSITIVIDAD APROXIMADA Y REFLEXIVIDAD.

Aunque en general transitividad y reflexividad se presentan como axiomas independientes, no lo son del todo. Cierto grado de reflexividad está garantizado cuando una relación es T- transitiva.

En efecto, si R es T-transitiva a cada elemento x de X se le puede asignar un valor a_x que sea una cota inferior del grado de reflexividad de la relación en x, $R(x,x)$. Tal valor a_x se calcula mediante la *clausura transitiva* (véase, por ejemplo, [6]), que en el caso que nos ocupa se escribirá como $a_x = \sup_{u \in X} T(R(x,u), R(u,x))$

Aunque cada cota inferior a_x esté relacionada con un elemento x específico, se puede calcular una cota inferior conjunta de la manera habitual.

Proposición 4.1: Toda relación T-transitiva R en X es también b-reflexiva, con $b = \inf_{u \in X} a_x$.

Este resultado se generaliza sin dificultades al caso en que la relación R sea tan solo a-T-transitiva.

Proposición 4.2: Toda relación a-T-transitiva R en X es también b-reflexiva, con $b = \inf_{u \in X} a_x$, donde cada a_x se calcula como $a_x = \sup_{u \in X} T(T(R(x,u), R(u,x)), a)$.

Y si el grado de transitividad determina una cota inferior para el de reflexividad, éste último determina una cota superior para el primero.

Proposición 4.3: Sea R una relación b-reflexiva sobre X. Entonces el grado de transitividad de R es menor o igual que $c = \vec{T}(\inf_{u \in X} a_x \mid b)$

Nótese que los niveles de reflexividad por encima de a_x no tienen efecto alguno sobre los de transitividad.

Proposición 4.4: Sea R una relación a-T-transitiva sobre X. Si S es otra relación tal que $S(x,y) = R(x,y)$ para todos $x \neq y$, pero $S(x,x) \geq R(x,x)$, entonces S es también a-T-transitiva.

Así que, vista la particular relación que existe entre transitividad y reflexividad aproximadas, por un lado, y la completa independencia que ambas propiedades presentan respecto a la simetría, parece razonable afirmar que la reflexividad es una propiedad superflua en el contexto que nos ocupa. Un punto de vista parecido puede encontrarse en [4].

5 BÚSQUEDA DE RELACIONES DE REFERENCIA PRÓXIMAS.

Vamos a abordar ahora el problema de encontrar, para una relación dada *S*, una relación de referencia *R* parecida. Supondremos que *S* satisface hasta cierto grado algunos de los axiomas en el sentido que establece la Definición 2.2. Como consecuencia, calcularemos cotas para los grados de similitud entre *S* y alguna relación de referencia *R* que satisfaga los mismos axiomas que *S*, pero en el sentido habitual (Definición 1.4). De hecho, veremos que a mayor grado de satisfacción de los axiomas por parte de S, más próxima se encuentra la relación de referencia *R*.

Lema 5.1: Dada una relación difusa *S* en *X*, la relación $S_a(x,y) = T(a, S(x,y))$ (*T* una t-norma) satisface:

5.1.1 $S_a \leq_X S$

5.1.2 $E_T(S_a, S) \geq a$

Lema 5.2: Si *S* es una relación reflexiva y *b*-transitiva en *X*, entonces $S_a(x,y) = T(a, S(x,y))$ (*T* una t-norma) satisface:

5.2.1 S_a is *c*-*T*-transitiva con $c = \vec{T}(b \mid a)$.

5.2.2 S_a is *a*-reflexiva.

Como consecuencia, $c = 1$ y por tanto S_a es *T*-transitiva cuando $b \leq a$, lo que prueba el corolario siguiente.

Proposición 5.3: Dado un *a*-preorden *S* en *X*, la relación difusa $S_a(x,y) = T(a, S(x,y))$ (*T* una t-norma) es *b*-reflexiva con $b = T(a,a)$, es *T*-transitiva, satisface que $S_a \leq_X S$ y que $E_T(S_a, S) \geq a$.

Por lo tanto $R = S_a$ es una relación de referencia para *S*, y su proximidad viene determinada esencialmente por el grado de transitividad de la relación candidato *S*.

Además, teniendo en cuenta la Proposición 4.4 se puede transformar S_a en una nueva relación reflexiva *R*, incrementando los valores de la diagonal:

$R(x,y) = S_a(x,y)$ para todos $x \neq y$, y

$R(x,x) = 1$ para todo *x*.

Una tal relación *R* constituye un preorden de referencia para *S*. Sin embargo, ni $R \leq_X S$ ni $S \leq_X R$, y además $E_T(R,S) \geq T(a,a)$, es decir, que *R* se aleja de *S*.

Volviendo a la Proposición 5.3, lo que allí se ha encontrado es una aproximación inferior para una relación dada *S*. ¿Existe alguna aproximación superior? Una posible opción es tomar la clausura transitiva de *S*. La clausura transitiva de una relación se define como la menor de todas las relaciones transitivas que son mayores o iguales que ella según el orden puntual. Así pues, si *R’* denota la clausura transitiva de *S*, se tiene que $S \leq_X R'$. Sin embargo, es difícil establecer una cota para $E_T(R', S)$ y, de momento, este problema permanece abierto.

Finalmente, consideremos también la simetría. El procedimiento estándar para simetrizar una relación dada *S* consiste en tomar el mínimo entre los valores *S*(*x*,*y*) y *S*(*y*,*x*) para cada par (*x*,*y*).

Lema 5.4: Dada una relación *a*-simétrica *S* sobre *X*, la relación difusa $R_{SYM}(x,y) = \min\{S(x,y), S(y,x)\}$ cumple:

5.4.1 R_{SYM} es simétrica.

5.4.2 $R_{SYM} \leq_X S$

5.4.3 $E_T(R_{SYM}, S) \geq a$

Por lo tanto, R_{SYM} proporciona una relación de referencia para *S* en lo que a simetría se refiere. Además, el procedimiento preserva tanto la reflexividad como la *T*-transitividad.

Lema 5.5: Para toda relación *S* *a*-reflexiva, la relación $R_{SYM}(x,y) = \min\{S(x,y), S(y,x)\}$ es también *a*-reflexiva.

Lema 5.6: Para toda relación *S* *a*-*T*-transitiva, la relación

$$R_{SYM}(x,y) = \min\{S(x,y), S(y,x)\}$$

es también *a*-*T*-transitiva

Proposición 5.7: Dada una *a*-equivalencia *S* sobre *X*, la relación difusa $S_a(x,y) = T(a, R_{SYM}(x,y))$ es *a*-reflexiva, simétrica y *T*-transitiva.

Como antes, se puede transformar S_a incrementando su diagonal y obtener así una relación reflexiva:

$R(x,y) = S_a(x,y)$ para todos $x \neq y$, y

$R(x,x) = 1$ para todo *x*.

También en este caso, aunque *R* constituye una relación de referencia para *S*, se pierde el orden puntual y la cota de proximidad empeora convirtiéndose en

$$E_T(R,S) \geq T(T(a,a),a).$$

6 CONCLUSIONES.

Se ha mostrado cómo el enfoque tradicional en la fuzzificación de preórdenes y equivalencias puede relajarse, de manera que incluya un mayor espectro de relaciones.

De hecho, cualquier relación difusa puede ser considerada como un preorden o una equivalencia, hasta cierto punto.

El grado con que pueda serlo se ha introducido de dos maneras distintas. Primero, mediante la relajación de los axiomas de reflexividad, simetría y transitividad. Después, comparando la semejanza o proximidad entre la relación arbitraria S y una relación de referencia R. Finalmente, se han establecido relaciones entre ambos puntos de vista, que resultan ser esencialmente equivalentes.

Referencias

[1] L. A. Zadeh, “Similarity relations and fuzzy orderings,” *Information Sciences*, 3, 1971, pp. 177–200.
[2] G. J. Klir and Bo Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1995, ch. 3.
[3] D. Boixader, J. Jacas and J. Recasens, "*Fuzzy equivalence relations: advanced material*" in Fundamentals of Fuzzy Sets, D. Dubois and H. Prade eds, Kluwer 2000, pp.261-290.
[4] S. Gottwald, "Fuzzified fuzzy relations. *Proc. of the 4th IFSA congress,* vol. Mathematics, Brussels 1991, pp.82-86.
[5] J. Jacas and J. Recasens, “Fuzzified properties of fuzzy relations” *Proc. IPMU 10th International Conference*, 2002, pp.157–161.
[6] L. Behoumek, “Extensionality in graded properties of fuzzy relations” *Proc. IPMU Eleventh 10th International Conference,* vol.II, 2006, pp.1604–1611.
[7] U. Hohle, "Fuzzy sets and sheaves. Part 1: basic concepts." *Fuzzy Sets and Systems 158,* 2007, pp.1143-1174.