TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Gènesi del concepte de compacitat (1895 – 1925)

Autor: Júlia Moreno

Director: Pere Pascual i Mònica Blanco

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2018 - 2019

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Gènesi del concepte de compacitat (1895 - 1925)

Autora:
Júlia Moreno

Directors:

Pere Pascual
Mònica Blanco

Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona, maig de 2019

Previ a la presentació d'aquest treball, voldria donar les gràcies als directors del projecte, el Pere Pascual i la Mònica Blanco, pel seu suport, l'esforç que han dedicat i tot el que m'han ensenyat.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és l'estudi de l'evolució i l'assentament de la definició d'espai compacte. Partirem de l'anàlisi de les propietats dels intervals de la recta real, principalment del treball de Borel, fins arribar a la definició acceptada actualment que van proposar Alexandroff i Urysohn, passant per l'axiomatització dels espais topològics que li devem principalment a Hausdorff.

Paraules clau: Topologia, Història de les Matemàtiques, Compacitat, Espai Compacte.

Índex

Introducció

La compacitat és una de les nocions més importants en matemàtiques. Els espais compactes compleixen propietats especials que ens permeten treballar en ells de manera més "agradable". Partint de la definició d'espai compacte com aquell tancat i fitat, que té l'origen en els intervals de la recta real, es va intentar generalitzar per a espais més abstractes, fins arribar a la propietat del recobriment finit.

El germen de la idea de compacitat i de la topologia general el trobem en l'anàlisi clàssica al segle XIX. És en aquesta època en la qual les matemàtiques comencen a prendre la forma en la que les coneixem. Alguns dels matemàtics més importants, com Bernhard Bolzano (1781 – 1848), Karl Weierstrass (1815 – 1897) o Eduard Heine (1821 – 1881), estaven preocupats pels fonaments d'aquesta ciència i van començar a establir definicions i donar els resultats de la manera més rigorosa.

Amb Bolzano comença l'interès profund per les propietats de la recta real com a suport de l'anàlisi de funcions i juntament amb Weierstrass, lideren l'estudi de la caracterització basada en les propietats de les successions de nombres reals.

L'any 1817, Bolzano va escriure un article titual *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege (Demostració purament analítica del teorema: entre dos valors qualssevol que donen dos resultats de signes oposats es troba almenys una arrel real de l'equació)* centrat en la demostració del teorema dels valors intermedis en el qual enuncia com a lema el que ara es coneix com a propietat del suprem dels nombres reals. Es pot llegir una anàlisi detallada a [Dugac, 1985].

Les idees d'aquest manuscrit van portar a Weierstrass l'any 1877 a enunciar i demostrar el seu conegut teorema de que tota funció contínua en un interval tancat i fitat té un màxim, en l'article titulat *Einleitung in die Theorien der analytischen Functionen (Introducció a la teoria de les funcions anaítiques).* La motivació principal dels espais abstractes de Maurice Fréchet (1878 - 1973) es troba en aquest teorema, ja que el seu primer objectiu va ser la seva generalització.

A més, amb la propietat del suprem, Weierstrass va demostrar que tot conjunt infinit fitat de nombres reals té un punt límit. Aquest resultat és el que es coneix actualment com la propietat de Bolzano-Weierstrass o compacitat seqüencial.

Va ser Eduard Heine (1821 – 1881) en un article titulat *Die Elemente der Funktionenlehre (Els elements de la teoria de funcions)* publicat l'any 1872 el primer en donar una presentació sistemàtica i rigorosa dels teoremes fonamentals de l'anàlisi clàssica i que va constituir un pas important per a la futura topologia general.

Tot i que Heine no cita en cap moment a Bolzano, és possible que conegués els seus treballs en escriure el seu article sobre els elements de la teoria de funcions, ja que la memòria de Bolzano del 1817 va ser descoberta per Hermann A. Schwarz (1843 – 1921) que era ajudant de Heine a la Universitat de Halle, i que el treball de Bolzano l'influenciés a presentar els resultats amb la rigorositat amb que ho va fer. En la introducció exposa la seva opinió sobre la raó per la qual la teoria de funcions no havia avançat amb més rapidesa, i creu que és perquè alguns resultats que ja s'han provat acuradament se segueixen posant en dubte perquè no hi ha cap publicació on es puguin trobar desenvolupats sistemàticament. Remarca el cas de Weierstrass, conegut per les seves classes i conferències, però que propagava el seu coneixement en cercles reduïts i de forma oral, per la qual cosa molts dels seus resultats només es conserven per les notes que prenien els oients.

En una part de l'article Heine tracta les condicions de la continuïtat i és el primer en donar les definicions de continuïtat en un punt, ja que Bolzano, Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) i Weierstrass les donaven en un interval, i introdueix el concepte de continuïtat uniforme.

Es troba aquí la primera demostració rigorosa publicada del teorema dels valors intermedis, en la qual utilitza el lema previ de que una funció contínua en un interval tancat i fitat arriba als seus límits superior i inferior.

Heine enuncia i demostra el seu teorema sobre la continuïtat uniforme de que una funció contínua en un interval tancat i fitat és uniformement contínua. És en la prova d'aquest teorema en la qual per primera vegada hi ha publicada una incipient idea de recobrir un interval tancat i fitat amb un nombre finit de subintervals en els quals la funció té una certa propietat.

Cal remarcar que aquests mateixos resultats es troben en un escrit de Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) que data de 1829 però que no van ésser publicats fins 1904; per tant, el mèrit d'aquests resultats s'atribueix a Heine ja que no hi ha cap evidència de que conegués el treball de Dirichlet.

Durant l'últim quart del segle XIX hi ha un fet que marca l'evolució de les idees que conformarien la topologia de conjunts: la publicació d'una sèrie de sis articles de Georg Cantor (1845 – 1918) entre 1879 i 1884 a *Mathematische Annalen*.

Aquests treballs representen la base sobre la qual es van assentar les idees que a principis del segle XX portarien a la definició dels espais abstractes.

L'origen d'aquests treballs es troba a principis de la dècada de 1870, quan Heine li planteja a Cantor si la representació d'una funció per una sèrie trigonomètrica és única, qüestió de la qual Heine havia trobat una solució parcial imposant certes restriccions i en la que Cantor es proposa donar el resultat amb la màxima generalitat.

En un article publicat l'any 1872 titulat *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen (Sobre l'extensió d'un teorema de la teoria de les sèries trigonomètriques)* Cantor aconsegueix demostrar aquest resultat tant si la representació de la funció o la convergència de la sèrie no eren possibles per a una quantitat infinita de punts excepcionals. Per caracteritzar aquests punts, Cantor introdueix la idea de punt límit (que va anomenar *'Grenzpunkt'*) d'un conjunt P com un punt tal que entorn del punt conté infinits punts de P.

Aquesta idea ja s'havia utilitzat anteriorment, però va ser Cantor el primer que li va donar nom.

Amb aquesta definició, Cantor va introduir el concepte de 'conjunt derivat de P' que és aquell format per tots els punts límits de P i que va denotar P'. Com que P' és un conjunt puntual, pot iterar aquesta operació per obtenir el n-èssim conjunt derivat P^n.

Aquells conjunts P tals que el conjunt derivat d'ordre $n + 1$ és buit els anomena conjunts de primer ordre i espècie n; aquells conjunts tals que cap conjunt derivat és buit els anomena conjunts de segon ordre.

Utilitza els conjunts derivats per establir la caracterització dels punts excepcionals en els quals la representació de la funció o la convergència de la sèrie no eren úniques, i és que el conjunt d'aquests punts siguin de primer ordre; és a dir, que existeixi un n pel qual P^{n+1} és el buit.

En els articles esmentats anteriorment, Cantor segueix la investigació dels conjunts puntuals i defineix els "conjunts perfectes" com aquells que coincideixen amb el seu conjunt derivat i els "conjunts ben encadenats" com aquells conjunts tals que donats dos punt qualssevol t i t' del conjunt i un nombre positiu r, existeix sempre un nombre finit de punts $t_1, t_2, ..., t_n$ del conjunt tal que les distàncies $tt_1, t_1t_2, ..., t_nt'$ són totes menors que r.

Amb aquests dos conceptes, és capaç de donar la seva definició de conjunt continu com un conjunt que és alhora perfecte i ben encadenat.

Va introduir una definició que és fonamental en la topologia general: el conjunt tancat. Cantor defineix conjunt tancat com aquell que conté tots els seus punts límits. Aquesta definició, de fet, és la que utilitzarien posteriorment tant Maurice Fréchet com Felix Hausdorff, denominant punt d'acumulació el punt límit.

Cantor no va considerar la topologia de conjunts com una àrea independent i en la qual avançar, si no com una eina per l'anàlisi, però l'expansió de les seves idees va influenciar els grans matemàtics immediatament posteriors que van traslladar les seves definicions i resultats a l'estudi de conjunts formats per elements que no eren punts.

Aquest treball pretén analitzar l'evolució d'aquest concepte des del seu origen fins a l'assentament de la definició que s'utilitza en l'actualitat. Ens centrarem en episodis i personatges clau en aquest desenvolupament, tot i que com en qualsevol procés des de la gènesi d'una noció fins la seva versió definitiva, hi va haver el treball de molts altres matemàtics que van tenir més o menys rellevància.

En el primer capítol s'analitzarà en profunditat el teorema de Heine-Borel. Partint de la tesi de Borel de 1895 en la qual el dóna per primera vegada en termes d'extreure un subrecobriment finit d'un recobriment numerable, s'estudiarà la seva extensió a recobriments no numerables i s'examinaran alguns treballs sorgits després d'aquest primer enunciat. A més, s'exposaran les discussions que hi va haver sobre quins matemàtics mereixien aparèixer en el nom del teorema.

A continuació, en el segon capítol, es tractarà l'origen dels espais topològics en el qual hi ha dues figures imprescindibles: Maurice Fréchet i Felix Hausdorff. Fréchet va ser pioner en l'estudi d'espais abstractes basats en nocions d'anàlisi i va ser el primer en donar la definició d'espai mètric, principalment en la seva tesi doctoral publicada l'any 1906. L'axiomàtica que s'utilitza avui en dia en la topologia general, però, és la ideada per Hausdorff, que va publicar la seva teoria sobre espais abstractes basats en la noció d'entorn l'any 1914. Es presentaran altres tractaments posteriors fins a l'establiment de la definició d'espai topològic actual.

Finalment, l'assentament definitiu del concepte de compacitat en la forma més general es va produir durant la dècada de 1920 a les universitats russes. Concretament, són Pavel S. Alexandroff (1896 - 1982) i Pavel S. Urysohn (1898 – 1924) en la seva memòria publicada l'any 1929 qui la donaran tal com la coneixem actualment. Prosseguint els resultats d' Alexandroff i Urysohn, Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906 – 1993) va profunditzar més en l'estudi dels espais compactes i va donar importants teoremes, dels quals s'analitzarà el teorema de Tychonoff sobre la preservació de la compacitat en el producte d'espais.

En els espais topològics no són equivalents la compacitat seqüencial i la compacitat per recobriments. Tanmateix, durant el segle XX es van desenvolupar dues teories basades en dos nocions modernes, les xarxes i els filtres, que són generalitzacions del concepte de successió, amb les quals és possible definir la compacitat per recobriments d'una manera anàloga a la definició seqüencial.

Les xarxes van ser introduïdes per Eliakim H. Moore (1862 – 1932) i el seu alumne Herman L. Smith (1892 – 1950) en un article publicat l'any 1922 en el qual van generalitzar alguns resultats de Fréchet sobre la compacitat. El concepte de filtre li devem a Henri Cartan (1904 – 2008) que el va definir l'any 1937. Tot i ser dues generalitzacions diferents, ambdós donen la mateixa noció de convergència en els espais topològics.

Aquestes dues caracteritzacions de la compacitat no han estat analitzades en aquest treball, es pot trobar un resum dels conceptes clau a [Raman-Sundström, 2014] ja que hem decidit centrar-nos en la direcció presa per Alexandroff i Urysohn i que és la que actualment s'estudia en la nostra universitat. Una anàlisi en profunditat seria objecte d'un altre treball.

Capítol 1

El teorema de Heine-Borel

1.1 Introducció

El teorema de Heine-Borel estableix les condicions per a que un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ sigui compacte. En els espais euclidians la definició de subconjunt compacte és que sigui tancat i fitat, però el teorema dóna la seva forma més general:

Teorema de Heine-Borel: Un subconjunt K de $\mathbb{R}^n$ és compacte si, i només si, té la propietat del recobriment finit.

Però té altres formes lligades a les diferents caracteritzacions que es donen de la compacitat en diferents espais, com per exemple la caracterització per subsuccessions convergents en els espais mètrics o l'existència de punts límit per a suconjunts infinits.

No és fins el segle XX que es dóna la definició de compacitat que utilitzem actualment, però ja abans s'utilitzaven i s'estudiaven els subconjunts que complien les propietats que ara assignem als subconjunts compactes.

En aquest capítol ens centrarem en un punt clau en la història de les matemàtiques en el que aquest teorema va jugar un paper fonamental: el moment en que es va donar en termes de recobriments.

Va ser Émile Borel (1871 – 1956) el primer que va expressar-ho amb aquest nou concepte d'extreure un subrecobriment finit d'un recobriment infinit. Aquesta expressió, que és una idea fonamental en la teoria de la topologia general, és una prova del canvi en el pensament matemàtic que ja s'havia començat a produir amb els treballs publicats a la segona meitat del segle XIX amb Bolzano, Weierstrass, Heine o Cantor.

El que es consideren les primeres versions del teorema pertanyen a la branca de l'anàlisi, concretament es tracta de la demostració de que una funció contínua en un interval tancat i fitat és uniformement contínua. El mèrit d'aquesta demostració se li atribueix a Eduard Heine (1821 – 1881) que la va publicar el 1872 en el seu llibre *Die Elemente der Funktionenlehre (Els elements de la teoria de funcions).*

Ens trobem doncs en el punt on comença una diferenciació entre l'anàlisi i la topologia.

1.2 La figura d'Émile Borel

Émile Borel va nèixer a Saint-Affrique, França, l'any 1871. Els primers anys de vida el va educar a casa el seu pare, un ministre protestant, però amb només onze anys va abandonar la llar familiar per anar a viure amb la seva germana gran, amb qui hi havia una gran diferència d'edat, a Montauben. Allí va començar la seva educació al Liceu de Montauben, on va començar a destacar pel seu talent i pocs anys més tard va anar a París amb una beca del Collège Sainte-Barbe. Mentre estudiava allà, es va preparar els exàmens per entrar a l'École Polytechnique i a l'École Normale al Liceu Louis-le-Grand. Allí va fer amistat amb el fill de Gaston Darboux (1842-1917) i a través de la seva família va conéixer a grans matemàtics, entre els quals el mateix Borel va destacar a Émile Picard (1856 – 1941), que va ser una gran influència per a ell.

Tot i la pressió que va rebre per a que anés a l'École Polytechnique, ja que era més prestigiosa en l'àmbit dels negocis o la indústria, tenia clar que volia dedicar-se a la ciència, particularment a les matemàtiques, i amb el suport patern va decidir entrar a l'École Normale el 1889.

Va publicar els primers articles centrats en anàlisi, teoria de funcions i sèries l'any 1890 i el 1894 van premiar la seva tesi, titulada *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (veure Figura 1.1.), on tenia de tutor a Gaston Darboux. En els següents anys, destaca la quantitat de treballs i articles que va publicar centrats en teoria de funcions, així com la bona qualitat de la majoria d'ells. El van guardonar amb diversos premis, com el Premi Poncelet el 1901 o el Grand Prix de l'Académie des Sciences el 1898, i el 1905 va ser escollit president de la Societat Francesa de Matemàtics.

Al llarg dels anys, va donar classe a diverses universitats. El mateix any de la publicació de la seva tesi doctoral va ser nomenat professor titular de la Universitat de Lille, i tres anys més tard de la l'École Normale Supérieure. El 1909 van crear una càtedra especialment ideada per a ell que versava sobre teoria de funcions a Sorbonne, i l'any següent va aconseguir la posició de subdirector de l'École Normale.

La Primera Guerra Mundial va marcar un punt d'inflexió en la seva vida i en la seva carrera. Després de ser premiat el 1918 pels seus esforços com a voluntari en el servei militar, la tornada a donar classes l'École Normale li va resultar emocionalment dura i el 1920 va abandonar la seva posició com a subdirector.

Els seus interessos de recerca van canviar i a partir de la dècada dels anys 20 va enfocar els seus treballs sobretot en la teoria de la probabilitat i en la teoria de jocs, publicant múltiples articles d'aquests temes. Va ser el primer en donar la definició dels jocs d'estratègia.

En aquest període ja havia iniciat la seva carrera política. El 1924 va ser elegit diputat pel partit socialista, fins el 1936, i entre el 1925 i el 1940 va ser ministre de la Marina. Durant els anys la Segona Guerra Mundial, a part de continuar la seva tasca científica amb les contínues publicacions de treballs sobretot centrats en la teoria de la probabilitat, va estar lluitant per la Resistència. Per aquest motiu va ser empresonat durant un mes el 1941 i un cop alliberat va seguir treballant per la Resistència. En acabar la guerra el van guardonar amb la *Médaille de la Résistance* i la *Grand Croix Légion d'Honneur*.

La seva gran quantitat de treballs publicats al llarg de tota la seva vida, fins i tot en l'última etapa, que van ser de gran abast i van suposar contribucions importants en diferents àmbits, van ajudar a que Émile Borel sigui una de les figures més rellevants de la seva època. A part de la seva tesi doctoral de 1904, destaquen altres llibres com *Leçons sur la théorie des fonctions (1898), Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes (1905), Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions (1922), Valeur pratique et philosophique des probabilités (1939)* o *Les paradoxes de l'infini (1946)*, escrit amb 75 anys. Aquell mateix any va ser elegit membre de *Bureau des Longitudes* i el 1948 president de Comitè de Ciències de la UNESCO.

Pel seu treball científic va rebre la primera medalla d'or de Centre Nacional de Recerca Científica el 1955. Va morir a París el 1956.

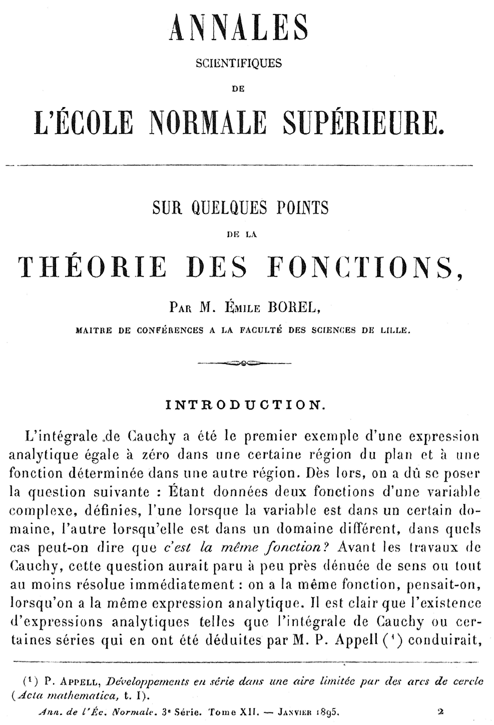
1.3 La tesi de Borel i el primer enunciat del teorema dels recobriments

Borel va publicar la seva tesi *Sur quelques points de la théorie des fonctions* l'any 1895, presentada el 14 de juny de 1894 a la Facultat de Ciències de París. Estava dirigida per Gaston Darboux i va tenir com a examinadors a Paul Appel (1855 – 1930) i Henri Poincaré (1854 – 1912).

La tesi tractava sobre les funcions de variable complexa. En la introducció es planteja si donades dues funcions complexes en dominis diferents es poden considerar la mateixa funció:

Donades dues funcions d'una variable complexa, una definida quan la variable està donada en un cert domini, l'altra quan està en un domini diferent, quan es pot dir que és la mateixa funció?[1]

[1]Totes les traduccions que apareixen en el treball són pròpies. De l'original [Borel 1895, p.9]: *Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorqu'elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que c'est la même fonction?*



ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR QUELQUES POINTS
DE LA
THÉORIE DES FONCTIONS,

PAR M. ÉMILE BOREL,
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

L'intégrale de Cauchy a été le premier exemple d'une expression analytique égale à zéro dans une certaine région du plan et à une fonction déterminée dans une autre région. Dès lors, on a dû se poser la question suivante : Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorsqu'elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que *c'est la même fonction?* Avant les travaux de Cauchy, cette question aurait paru à peu près dénuée de sens ou tout au moins résolue immédiatement : on a la même fonction, pensait-on, lorsqu'on a la même expression analytique. Il est clair que l'existence d'expressions analytiques telles que l'intégrale de Cauchy ou certaines séries qui en ont été déduites par M. P. Appell (1) conduirait,

(1) P. APPELL, *Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle* (*Acta mathematica*, t. I).

Ann. de l'Éc. Normale. 3e Série. Tome XII. — JANVIER 1895. 2

Figura 1.1: Portada de la tesi de Borel publicada l'any 1895.

Poincaré, en l' article *Sur les fonctions a espaces lacunaires* publicat el 1883 a l' *American Journal of Mathematics*, estudia les funcions de la forma $f(z) = \sum_{n>0} \frac{a_n}{\zeta_n - z}$, amb $\sum |a_n|$ convergent i els ζ_n que pertanyen a una corba de Jordan C (que pot ser la circumferència unitat) i que formen un conjunt dens en la corba. Llavors, la funció $f(z)$ s'ha de considerar definint dues funcions analítiques diferents: $f_1(z)$ a l'interior de la circumferència i $f_2(z)$ a l'exterior d'aquesta, ja que la corba C és un tall per a la continuació analítica en el sentit de Weierstrass des de l'interior a l'exterior d'ella mateixa.

Borel analitza el treball de Poincaré i planteja una altra possibilitat: comprova que sota certes condicions es pot estendre $f_1(z)$ a $f_2(z)$ al llarg d'un camí que travessa la circumferència. Es tracta d'una extensió que podríem dir-li unidimensional, diferent a l'extensió complexa de Weierstrass.

El primer que va demostrar va ser que donada una parella de punts P i Q que pertanyen a $\mathbb{C} \setminus C$ i estan a l'interior i a l'exterior de C respectivament, si es compleix que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{1/2} < \infty$ llavors existeix un camí γ de P a Q en el qual la sèrie que defineix $f(z)$ és absolutament i uniformement convergent i per tant defineix una funció contínua.

Amb aquest resultat, $f_1(z)$ i $f_2(z)$ estan connectades a través del camí per una funció contínua i en certa manera es pot considerar que són la mateixa funció.

Per veure en quin moment sorgeix la idea d'utilitzar els recobriments, s'analitzaran certs punts concrets del seu raonament.

Primer de tot, considera la mediatriu de PQ i un segment AB sobre aquesta. Per a cada punt O del segment AB, traça l'arc de la circumferència que passa per P i per Q i té com a centre el punt O. Cadascun d'aquests arcs l'anomenem C_0 i el camí γ que busquem es troba entre un d'aquests.

Denotem com O_n als punts O tals que l'arc de la circumferència de la qual són centre passen per un dels a_n. Així, tenim un conjunt numerable O_n en el segment AB, , i com un interval és no numerable, hi ha una infinitat de punts O tals que no són de O_n; o sigui, hi ha una infinitat d'arcs que no passen per cap dels a_n.

A més, necessita que la sèrie definida per $f(z)$ sigui absolutament i uniformement convergent. Per tant, ha de trobar un criteri per escollir el camí adequat en el qual es compleixi.

La condició $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ implica que existeix un nombre N a partir del qual es compleix que la sèrie és menor que la meitat de la distància entre els punts A i B; és a dir, $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^{1/2} < \frac{1}{2}d(A,B)$.

Si es considera el conjunt d'intervals del segment AB que tenen com a centre els O_n i com a longitud $2|a_n|^{1/2}$, o sigui el conjunt d'intervals és $I_n = (O_n - |a_n|^{1/2}, O_n + |a_n|^{1/2})$ es troba que la suma de totes les seves longituds és $2\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^{1/2} < d(A,B)$. Per tant, d'aquí Borel dedueix que hi ha una infinitat no numerable de punts en el conjunts format per les parts del segment que no pertanyen a cap d'aquests intervals i per tant, pot escollir-ne un, que denomenem O i l'arc de circumferència que el té com a centre i que passa pels punts P i Q és el camí de prolongació i li permet finalitzar la demostració.

El punt que assenyala Borel, del qual la demostració la deixa relegada a la nota final de la tesi, és la implicació $\sum l(I_n) < d(A,B) \Longrightarrow AB \setminus (\cup I_n) \neq \phi$. Es troba a les pàgines 25-26:

... la suma de tots els segments (en nombre infinit), tals que A_iB_i tots situats en el segment AB o en la seva prolongació, és inferior a la longitud l de AB; llavors existeix en AB una infinitat no numerable de punts que no pertanyen a cap dels segments.[2]

El 12 de febrer de 1894, va publicar una nota amb els resultats de la seva tesi, en la qual enuncia una nova versió del teorema i, tot i que considera que el resultat pot semblar evident, inclou la seva demostració per la importància de l'enunciat en sí i per l'interessant de la tècnica de la demostració:

[2]De l'original [Borel, 1895, p.25-26]: *la somme de tous les segments (en nombre infini), tels que A_iB_i, tous situés sur le segment AB ou sur son prolongement, est inférieure à la longueur l de AB; donc il existe sur AB une infinité non dénombrable de points n'appartenant à aucun de ces segments.*

Aquí està el teorema: Si tenim en una recta una infinitat d'intervals parcials, tals que tot punt de la recta és interior a almenys un dels intervals, un pot determinar efectivament un nombre limitat d'intervals triats entre els donats que compleixen la mateixa propietat (que tot punt de la recta és interior a almenys un d'ells).[3]

Finalment, el 1898 va publicar el llibre *Leçons sur la théorie des fonctions*, on va donar la versió definitiva del teorema del recobriment, remarcant que la família dels subintervals que recobreix $[A, B]$ és numerable. Es troba a la pàgina 42:

Si en un segment limitat d'una recta hi ha una infinitat numerable d'intervals parcials tals que tot punt del segment total és interior a almenys un dels intervals, existeix un nombre limitat d'intervals triats entre els intervals donats que compleixen la mateixa propietat (que tot punt del segment és interior a un d'ells).[4]

Cal notar que si llegim la traducció literal del teorema, trobem alguns termes que no es correspondrien amb el que entenem per aquest teorema. En les primeres versions, utilitza *'droite'*, que la traducció del francès és 'recta', per referir-se a un segment, ja que el concepte que està utilitzant és el d' interval tancat i fitat. El que denomina 'intervals parcials' són 'intervals oberts'. Finalment, per referir-se al concepte 'finit', Borel usa el mot 'limitat'.

Aquest es considera el primer cop que es va enunciar el teorema, tot i saber que particularitzacions d'aquest s'havien utilitzat i demostrat anteriorment. El punt clau doncs, és el fet d'utilitzar la idea d'extracció un subrecobriment finit d'un infinit.

Per a Borel aquest teorema tenia sentit en relació amb la teoria de la mesura. En el llibre de 1898 va avançar en la direcció de la seva teoria de la mesura, donant la definició del que va anomenar conjunt mesurable (en l' interval tancat $[0, 1]$) amb tres principis:

1. La mesura d'un interval és igual a la seva longitud.
2. Si es té una infinitat numerable de conjunts que tenen com mesures $s_1, s_2, ..., s_n, ...$, la mesura de la reunió de tots ells és la suma de les mesures $s_1+s_2+...+s_n+...$
3. Si un conjunt de mesura s conté un conjunt de mesura s', la mesura de la diferència és la diferència de mesures $s - s'$.

Després de donar aquests principis , Borel explica:

El teorema fonamental demostrat a les pàgines 41-42 ens assegura que aquestes definicions no seran mai contradictòries entre elles.[5]

[3]De l'original [Borel, 1895, p. 51]: *Voici ce théorème: Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un nombre limité d'intervalles choisis parmi les intervalles donés et ayant la même propieté (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux).*

[4]De l'original [Borel, 1898, p. 42]: *Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrable d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, il existe un nombre limité d'intervalles choisis parmi les intervalles donés et ayant la même propieté (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux).*

[5]De l'original [Borel, 1898, p. 47]: *Le théorème fondamental démontré pages 41-42 nous assure que ces définitions ne seront jamais contradictoires entre elles.*

No va exposar la prova d'aquesta afirmació, tot i que en un una nota al peu de pàgina assegura que es pot obtenir aquest resultat de forma bastant anàloga a la demostració del teorema.

1.4 La primera demostració del teorema

La primera demostració del teorema es troba relegada a una nota al final de la tesi. Borel utilitza en ella la teoria de Cantor, concretament els nombres transfinits.

Georg Cantor (1845 – 1918) va estudiar la cardinalitat dels conjunts, establint la definició de què dos conjunts eren equipotents si tenien el mateix cardinal. Va donar la primera definició de conjunt infinit: Si un conjunt és infinit, és possible trobar un subconjunt propi que tingui la mateixa cardinalitat que el conjunt original. Es va basar en les idees de Richard Dedekind (1831 – 1916) que va treballar aquesta igualtat entre el total i les seves parts.

Cantor va trencar amb la idea de que hi havia un sol infinit i va demostrar que existia tota una jerarquia d'ells. Per primera vegada, va utilitzar el terme de conjunt numerable el 1882 com aquells que són equipotents als nombre naturals. Va utilitzar la propietat dels nombres naturals de que es poden escriure en seqüència, i per tant, un conjunt numerable és aquell que els seus elements es poden posar en forma de seqüència infinita, i així és obvi que existeix una bijecció amb els naturals. Així va trobar que els nombres racionals són equipotents.

Va designar $\aleph_0$ com el cardinal dels nombres naturals i va trobar que el cardinal dels nombres reals era $2^{\aleph_0}$, per tant, tenen cardinals diferents.

Llavors, Georg Cantor va treballar amb els nombres ordinals, que són els representants dels conjunts ben ordenats; aquests nombres classifiquen tots els possibles conjunts ben ordenats. En conjunts finits són equivalents als cardinals, però en conjunts infinits donen una distinció més fina i són els anomenats nombres de segona classe. Per exemple, així com en els conjunts numerables només existeix el cardinal $\aleph_0$, hi ha un ordinal per cada manera d'ordenar el conjunt dels nombres naturals.

Donada la sèries dels nombre naturals $1, 2, 3, ...$ Cantor afirmava que existia la possibilitat de considerar un nou número , més gran que tots els nombres naturals i que no és cap d'ells. Si aplicava el mateix raonament podia crear així una successió $\omega+1, \omega+2, ...$ en la qual es podia tornar a considerar un nombre més gran que tota ella $\omega 2$, i aquest nombre es concep com el límit de tots els anteriors nombres, entenent la operació de límit en el sentit conjuntista (la unió dels anteriors). La successió es pot continuar: $1, 2, 3, ..., \omega, \omega+1, ..., \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2+1, ..., \omega^\omega$.

El total dels nombres anteriors a ω^ω són els nombres de primera classe, que tenen com a cardinal $\aleph_0$. Si es contínua la successió $\omega^\omega, ..., \alpha$, anomena a tots els nombres que precedeixen com els nombres de segona classe.

Un dels resultats més importants i que Borel va usar en la seva demostració va ser la no numerabilitat dels nombres de segona classe:

Teorema: El cardinal dels nombres segona classe és el segon cardinal transfinit $\aleph_1$.[6]

La idea bàsica del seu raonament, tot i que no s'entrarà en detalls sobre les operacions ja que s'escapa dels objectius d'aquest treball es pot trobar la prova a la introducció de [Cantor, 1955, p.64-65], va ser arribar a contradicció si suposava que eren numerables. Si suposa que els nombres de segona classe es poden posar en forma de successió $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ Hi ha dos casos possibles:

- Si existeix β segona classe tal que és de la seqüència i es compleix $\beta \geq \alpha_n \forall n$ llavors $\beta + 1 \notin (\alpha_n)$, però és una contradicció ja que $\beta + 1$ és de segona classe.
- Si no existeix β, és a dir, existeix el màxim de la seqüència, pren $\beta = \lim_n \alpha_n$ que és de segona classe però $\beta \notin (\alpha_n)$, i arriba a una altra contradicció.

Per tant, els nombres de segona classe no es poden posar en forma de successió i llavors el cardinal d'aquests és diferent al dels de primera classe.

Aquest conjunt de definicions i idees exposades per Cantor van revolucionar les matemàtiques, i, tot i que al principi van ser rebutjades per molts dels matemàtics més importants de l'època, van ser peces clau en el desenvolupament d'altres teories, com és el cas del teorema dels recobriments.

En la seva demostració, Borel va utilitzar la caracterització de la completesa de la convergència monòtona.

El primer que fa és assumir la numerabilitat del recobriment, suposant que els intervals d'aquest es poden numerar. Seguidament, donat l' interval tancat i fitat $[A, B]$ anomena (A_i, B_i) a un dels intervals oberts dels que contenen A, i si aquest interval no recobreix tot l'original, que en aquest cas ja hauria acabat, es té que B_i és un punt interior a $[A, B]$. Llavors tria un altre interval, que anomena (A_{i_1}, B_{i_1}), que conté B_i. Si aquest B_{i_1} és menor o igual a B, llavors tria un altre dels intervals (A_{i_2}, B_{i_2}), que conté B_{i_1}. Així, crea un procés iteratiu que veurà que acaba en un nombre finit de passes.

Si per algun n es compleix que B_{i_n} és més gran que B, ja es té un subrecobriment finit.

Si en canvi, no es troba cap n per a què això sigui possible, Borel examina la successió que formen els extrems drets dels intervals que es van escollint, és a dir, la successió formada pels B_{i_n}. Aquesta és una successió és monòtona creixent i està fitada, per tant, amb la propietat de la convergència monòtona sap que tindrà límit, al qual anomena B_{i_ω}. Si aquest límit és igual a B, es pot construir un subrecobriment finit de la següent forma: aquest punt B_{i_ω} estarà contingut en un interval que designa $(A_{i_{\omega+1}}, B_{i_{\omega+1}})$; com que el punt B_{i_ω} és un punt límit, només hi ha un nombre finit dels B_{i_n} que no estan continguts en aquest interval. Si $A_{i_{\omega+1}}$ està entre dos punts dels B_{i_n}, existeix un recobriment finit per a l'interval $[A, B_{i_\omega}]$ triant els intervals $(A_i, B_i), (A_{i_1}, B_{i_1}), (A_{i_2}, B_{i_2}), ..., (A_{i_\omega}, B_{i_\omega}), (A_{i_{\omega+1}}, B_{i_{\omega+1}})$.

Si tan B_{i_ω} com $B_{i_{\omega+1}}$ són menors que B, repeteix el mateix procediment però començant en B_{i_ω} en lloc de en B_i, i troba una successió infinita $B_{i_{\omega+1}}, B_{i_{\omega+2}}, ...$

[6] De [Cantor, 1955, p.173] de la traducció anglesa de Philip E.B. Jourdain: *The power of the second number-class α is the second greatest transfinite number Aleph-one.*

que convergeix cap a cert punt $B_{i_{2\omega}}$, i amb el mateix argument utilitzat prèviament es construeix un recobriment finit per a l'interval $[B_{i_\omega}, B_{i_{2\omega}}]$.

Si $B_{i_{2\omega}}$ és igual a B, triant aquests dos recobriments finits, ja es té un recobriment finit per a tot l'interval original $[A, B]$. Si no, torna a fer el mateix procés altre cop i mentre els punt límit siguin menors que B, ja que si n'existeix un que sigui igual a B, la unió dels recobriments finits dóna ja un recobriment finit.

Si es troba en el cas en el qual tots els punts límit són menors que B, considera la successió dels extrems drets dels intervals: $B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_\omega}, B_{i_{2\omega}}, ..., B_{i_{\omega^\omega}}, ...$ Pot crear una bijecció amb els intervals del recobriment inicial, però els índexs són els nombres de segona classe de la teoria cantoriana. Es troba amb una bijecció entre un conjunt numerable (els intervals del recobriment) i un de no numerable (els nombres de segona classe de Cantor) amb la qual cosa, està davant d'una contradicció que li permet finalitzar la demostració.

Tot i que poc després de que es publiqués aquesta primera demostració el teorema es va demostrar sense la necessitat d'utilitzar la teoria de Cantor, cal preguntar-se per què Borel l'utilitza. En l'article publicat el 1979 *Towards a Theory of Mathematical Research Programmes*, de Michael Hallet, trobem una interessant reflexió sobre per què és important no treure mèrit als estudis de Cantor en aquest àmbit. La part més important d'una teoria concreta és com va impactar en el coneixement matemàtic del període just posterior. Va ser la teoria de Cantor la que va permetre a Borel fer la primera demostració i va permetre establir la connexió del teorema de Heine-Borel amb la propietat de Bolzano-Weierstrass i la compacitat.

Rere aquesta primera demostració del teorema, el mateix Émile Borel va canviar-la quan el va enunciar el 1898 en el llibre *Leçons sur la théorie des fonctions*, utilitzant la tècnica de dividir i vèncer i allunyant-se de la teoria de Cantor.

El 1903, va publicar l'article *Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels* en el qual va enunciar el teorema per a conjunts, no només intervals, però no hi va afegir la hipòtesi de que el conjunt per recobrir havia de ser tancat i fitat, tot i que ho usava en la prova. Ernst Lindelöf (1870 – 1946) va fer notar-li l'error en una carta de l'agost de 1903, i aquell mateix any va incloure la versió correcta en l'article *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*:

Teorema VIII. Sigui E un conjunt donat tancat i fitat, $E_1, E_2, ..., E_p, ...$ una infinitat numerable de conjunts tals que cada punt de E és interior a, almenys, un d'ells; és possible trobar, entre $E_1, E_2, ..., E_p, ...$ un nombre finit de conjunts tals que cada punt de E és interior a, almenys un d'ells.[7]

[7] De l'original [Borel, 1903, p. 357]: *Théorème VIII: soit E un ensemble borné et fermé donné $E_1, E_2, ..., E_p, ...$ une infinité dénombrable d'ensembles tels que tout point de E soit intérieur à, au moins, l'un d'eux; il est possible de trouver, parmi $E_1, E_2, ..., E_p, ...$ un nombre limité d'ensembles tels que tout point de E soit intérieur à, au moins, l'un d'eux.*

1.5 Extensió a no numerable

Després de la presentació de la tesi de Borel, hi va haver altres matemàtics que es van interessar en el teorema i van publicar els seus propis resultats, que eren versions del teorema del recobriment sota diferents hipòtesis.

Les més destacables són les que van donar Arthur Schönflies i Henri Lebesgue, que eren la generalització al cas no numerable.

Arthur Schönflies (1853 – 1928) va escriure el 1899 un article sobre la topologia de conjunts puntuals que va publicar l'any següent a *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung (Informe Anual de l'Associació Alemanya de Matemàtics)* en el qual enuncia el teorema de Borel però sense la hipòtesi de numerabilitat. Schönflies, a més, abans d'enunciar-lo especifica que el teorema de Heine és una particularitat del de Borel:

[...]demostraré el següent teorema de Borel, que estén un conegut teorema de Heine: V. Si en una línia recta hi ha una successió infinita d'intervals δ, tal que cada punt de l' interval a...b és un punt interior a almenys un interval δ, llavors també hi ha una successió finita subconjunt dels intervals. [8]

En la seva demostració, que es troba a l'article publicat el 1900 *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (L'evolució de la doctrina dels conjunts de punts)*, Schönflies utilitza un raonament similar al de Borel i la mateixa versió de completesa.

Henri Lebesgue (1875 – 1941), que va estudiar matemàtiques a l'École Normale de Paris entre 1894 i 1897, va entrar en contacte amb el treball de Borel mentre feia la seva tesi. Encara es conserven moltes cartes que es van intercanviar entre ells, on discuteixen temes acadèmics i es percep l'amistat que van mantenir durant anys.

El 1904, Lebesgue va publicar el seu llibre *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, en el qual va incloure la seva versió del teorema:

Si tenim una família d'intervals I tals que qualsevol punt de l'interval (a, b), incloent a i b, és interior a almenys un dels de I, llavors existeix una família dels intervals de I que tenen la mateixa propietat(tot punt de (a, b) és interior a un d'ells).[9]

Lebesgue dóna el mateix teorema que Borel però sense la hipòtesi de numerabilitat, és a dir, ell ho demostra per una família d'intervals no numerable. De fet, en una carta que Lebesgue va enviar a Borel, explica que ell ja havia demostrat el teorema com a part de la demostració del teorema de Weierstrass i sense ser conscient del sentit matemàtic de la paraula conjunt, i que quan va veure la tesi de Borel, sen-

[8]De l'original [Schönflies, 1900, p.51]: *Um ein letzes Beispiel zu geben, beweise ich folgenden Satz Borel's, der einen bekannten Satz von Heine erweitert:*

V. *Giebt es auf einer Geraden eine unendliche Reihe von Intervallen δ, so dass jeder Punkt des Intervalls a...b innerer Punkt mindestens eines Intervalles δ ist, so giebt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle.*

[9]De l'original [Lebesgue, 1904, p.104]: *Si l'on a une famille d'intervalles I tels que tout point d'un intervalle (a, b) y compris a et b, soit intérieur à l'un au moins des I, il existe une famille formée d'un nombre fini des intervalles I et qui jouit de la même propieté (tout point (a, b) est intérieur à l'un d'eux).*

zillament va canviar la demostració de Borel per la seva, sense adonar-se fins més endavant que no tenien les mateixes hipòtesis.

En la seva demostració, que s'exposa a continuació, Lebesgue va usar la caracterització de completesa amb la propietat del suprem, és a dir, que existeix un suprem en qualsevol conjunt no buit i fitat. Remarcar que la notació que s'ha utilitzat correspon a l'actual, així quan Lebesgue es refereix a intervals tancats es troba escrit $[a, b]$ i quan es tracta d'intervals oberts (a, b).

Lebesgue comença donant una nova definició: si un interval $[a, x]$, amb x diferent de b, es pot recobrir amb un nombre finit d'intervals, llavors es diu que x està 'aconseguit'. Amb aquesta terminologia, és clar que si x està aconseguit llavors tots els punts entre a i x també ho estan, i si x no ho està, no hi ha cap punt entre x i b que ho estigui.

Suposa que b no ho està, ja que d'altra forma s'acaba la demostració, i defineix el punt de l'interval x_0 com primer punt no aconseguit'. En notació moderna, seria l'ínfim del conjunt dels $x \in [a, b]$ tal que x no està aconseguit. Aquest conjunt és no buit i fitat, i per tant és segur que té un ínfim.

Aquest punt x_0 està contingut en un interval (α_1, β_1) i tria dos punts x_1 i x_2 que es troben entre α_1 i $_0$ i entre x_0 i β_1 respectivament. Per la definició d' aconseguit, és clar que x_1 també ho estarà però x_2 no i per tant, l'interval $[a, x_1]$ està recobert per un nombre finit d' intervals. Si es tria aquest conjunt d'intervals i senzillament se li afegeix l'interval (α_1, β_1), es té una col·lecció finita que recobreix x_2, i es tindria que està aconseguit, la qual cosa s'arriba a una contradicció ja que x_0 no seria el primer punt no aconseguit; per tant, b està aconseguit.

Aquesta prova del teorema és la més senzilla de les que van fer els diferents matemàtics que van estudiar el teorema del recobriment, i la seva facilitat per seguir-la i la seva llargada l'han convertit en la més utilitzada en la posteritat. Per exemple, és la que es presenta a la nostra facultat en el curs de Topologia.

1.6 Introducció del nom de Heine

En l'apartat anterior s'ha esmentat que va ser Arthur Schönflies el primer en detectar una equivalència entre el teorema de Borel i el teorema de Heine de que una funció contínua en un interval tancat és uniformement contínua. En aquesta secció es presentarà un resum sobre les importants discussions que hi va haver en l'època sobre a qui atribuir el mèrit de l'autoria i quin nom se li havia d'assignar al teorema.

Anys abans de que Borel presentés la seva tesi i en ella el primer enunciat del teorema, hi va haver un gran estudi en anàlisi, concretament en la continuïtat uniforme de funcions, on destaquen principalment les figures de Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) i Eduard Heine (1821 – 1881).

Del treball de Dirichlet destaca l'enunciat i demostració del teorema que anomena com la propietat fonamental de les funcions contínues:

Sigui $y = f(x)$ una funció contínua de x en un interval finit de a a b, i per subin-

terval s'entén la diferència de dos valors qualssevol de x, per tant, qualsevol part de l'eix de les abscisses entre a i b. Llavors, per qualsevol valor tan petit com es vulgui ρ, un pot trobar una segona quantitat petita tal que, per tota partició de longitud $\leq \sigma$, la funció no varia més que ρ.[10]

Com que no va ser publicat fins el 1904 al llibre *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten integralen (Conferències sobre l'ensenyament d'integrals definides simples i múltiples)* a partir d'unes notes d'un curs sobre integració que Dirichlet va donar el 1852, se li atribueix el mèrit a Heine.

Dirichlet en cap moment utilitza el terme 'uniformement contínua', tot i que es tracta del resultat del teorema, i en la demostració queda clar que està utilitzant l' interval inicial com a tancat.

Comença la prova considerant un punt c_1 de l'interval $[a, b]$ tal que es compleixi $|f(c_1) - f(a)| = \rho$, i per tant per qualsevol $x \in [a, c_1)$ es compleix $|f(x) - f(a)| < \rho$. Llavors considera un punt $c_2 > c_1$, que pertany a l'interval $[c_1, b]$ i es verifica $|f(c_2) - f(c_1)| = \rho$.

Repeteix el procés amb l' interval (c_1, c_2), amb un $x \in (c_1, c_2)$ es té $|f(x)-f(c_1)| < \rho$. Així, obté una successió $c_1, c_2, ..., c_\mu, ...$ creixent i es pregunta si arribarà a b en un nombre finit de passes, o sigui, si hi haurà algun terme c_μ de la successió que serà igual a b o si és tan proper a b que per tot x entre c_μ i b, es compleix que $f(x)$ difereix de $f(c_\mu$ una quantitat inferior a ρ.

Si suposa que això és fals, té que la successió creixent i fitada convergeix a un cert valor $c \in [a, b]$. Llavors, es té per una banda per la construcció de la successió que $|f(c_{\mu+1} - f(c_\mu)| = \rho$, i per altra banda per la continuïtat de $f(x)$, $|f(c_\mu - f(c)| < \frac{\rho}{2}$ i $|f(c_{\mu+1} - f(c)| < \frac{\rho}{2}$ i, per tant, $|f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu)| < \rho$, que és una contradicció amb la igualtat obtinguda anteriorment.

Per tant, l' interval $[a, b]$ conté un nombre finit d' intervals amb la propietat que enuncia al teorema. A més, Dirichlet remarca que no es compleix si l' interval inicial és infinit.

El que Dirichlet està enunciant i demostrant és, en definitiva, que si es té una funció contínua en un interval tancat i fitat, és a dir, compacte en termes moderns, llavors aquesta és uniformement contínua.

Heine va publicar el 1872 el seu llibre *Die Elemente der Funktionenlehre (Els elements de la teoria de funcions)* va donar els mètodes per a les demostracions dels teoremes de l'anàlisi clàssica de les funcions reals. Una part d'aquest versa sobre les condicions de continuïtat, i introdueix la continuïtat en un punt, ja que fins aquell moment sempre es definia en un interval. Va introduir la noció de *continuïtat uniforme* i va enunciar el teorema:

Teorema de Heine: Una funció f(x) contínua de $x = a$ a $x = b$ (per tots els valors

[10]De la traducció a [Dugac, 1989, p. 91]: *Soit $y = f(x)$ une fonction continue de x dans un intervalle fini de a jusqu'à b, et par sous-intervalles on entend la différence de deux quelconques de ces valeurs de x, doncs toute partie de l'axe des abscisses entre a et b. Alors, aussi petite que soit choisie la valeur absolue ρ, on peut trouver une seconde petite quantité telle que, dans toute partie qui es $\leq \sigma$, la fonction y ne varie au plus de ρ.*

particulars) és uniformement contínua.[11]

Com a demostració va utilitzar exactament la mateixa que Dirichlet, tot i que no el va citar en cap lloc i no existeix cap evidència de que Heine la conegués.

Aquest teorema, enunciat de manera distinta, és una particularització del teorema que va donar Borel, i és per aquest motiu que es va originar controvèrsia sobre qui havia de donar-li nom.

El 1907, Paul Émile Appell (1855 – 1930) va presentar a l'*Académie des Sciences de Paris* una nota d' Arthur Schönflies titulada *Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel* on afirma que la demostració de Borel és la forma més pura i general i que fixa els fonaments geomètrics de la demostració que va donar Heine. En aquesta nota també cita el seu propi article que he esmentat anteriorment, on ja havia notat la estreta relació entre el teorema de Heine i el de Borel.

El 1904, el matemàtic nord-americà Oswald Veblen (1880 – 1960) va publicar un article on declarava que el teorema de Borel estava implícitament en la demostració de Heine. A més, afegia que si estava formulat com ho va fer Young, el mateix teorema portava al teorema de Weierstrass. Veblen va donar la definició de que un conjunt X tenia la propietat de Heine-Borel si, per qualsevol conjunt d'intervals tals que tot nombre de X pertany a un d'aquests intervals, és possible triar un subconjunt finit dels intervals pels quals se segueix complint que tot nombre de X pertany a un d'ells. Llavors, enuncia i demostra el teorema següent: Una condició necessària i suficient per a que un conjunt tancat tingui la propietat de Heine-Borel és que sigui fitat. En definitiva, el que Veblen està expressant en termes moderns és que un conjunt tancat i fitat és compacte, i és el primer en indicar-ho d'aquesta forma.

Tota aquesta controvèrsia es troba ben detallada en l'article de Pierre Dugac *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue* (1989), que es tracta d'un recull i anàlisi dels fragments més importants de cartes intercanviades referents a aquest teorema, sobretot entre Borel i Lebesgue.

Segons Lebesgue, no se li pot atribuir cap tipus de mèrit a Heine, ja que Heine no tenia la noció de recobriment ni va treballar amb conjunts ni amb col·leccions infinites de punts.

Alguns autors que han realitzat investigacions en aquest assumpte, consideren que en la demostració de Dirichlet, i per tant en la de Heine, hi és expressada explícitament la idea de recobriment. D'altres, però, opinen que és exagerat, ja que l'únic que està fent és tallar un segment en segments més petits, i que no es pot dir que aquesta subdivisió finita sigui la idea de recobriment.

Lebesgue va fer notar que les disputes que es va generar i la rivalitat en relació al teorema i que no va existir després de la demostració de Heine, mostra la importància del teorema i el gran interès que es va despertar al seu voltant. Va demanar opinió sobre els noms que es mereixien aparèixer al nom del teorema a

[11] De la traducció a [Dugac, 1989, p.94]: *Une fonction $f(x)$ continue de $x = a$ jusqu'à $x = b$ (pour toutes les valeurs particulières) est aussi uniformément continue.*

Paul Montel (Niça, 1876 – Paris, 1975), i aquest va donar una interessant visió, i és que segons ell és important distingir entre el teorema en sí mateix i les aplicacions que es facin d'aquest. Si s'aplica sobre la teoria de la mesura, s'hauria d'anomenar teorema de Borel-Borel, si tracta sobre la uniformitat de funcions, es pot acceptar de Heine-Borel, si en canvi versa a les funcions d'una variable s'hauria de dir de Borel-Schönflies. La seva conclusió, com la d' altres autors que han estudiat la història d'aquest teorema, és que aquest conté la primera demostració que va fer Borel i l'extensió al cas no numerable, que Montel considera que se li ha d'atribuir a Lebesgue i insisteix en que, tot i reconèixer que no ha llegit el treball de Heine, si no el va enunciar explícitament no se li hauria d'atribuir el mèrit. De fet, en la seva tesi el denomina Teorema de Borel-Lebesgue.

A partir d'aquest moment, va començar a créixer l'interès per estudiar el que es consideraven espais més generals que els espais mètrics, que més endavant van donar lloc a la definició del que ara es coneix com espai topològic. En aquesta construcció destaquen sobretot dues figures que s'estudiaran en el següent capítol: René Maurice Fréchet (1878 – 1973) i Felix Hausdorff (1868 – 1942).

Capítol 2

El naixement dels espais topològics

2.1 Introducció

La topologia general és la branca que se centra en l'estudi dels espais abstractes, en els quals els elements no tenen una naturalesa concreta. Establir les arrels i els orígens i situar-los en un moment determinat de la història és una tasca complicada, si no impossible.

A finals del segle XIX Georg Cantor (1845 - 1918) va donar ja alguns conceptes i resultats fonamentals en la topologia general per al cas de la recta real i els espais euclidians en una sèrie d'articles publicats entre 1879 i 1884. En el començament del segle XX, altres matemàtics van mostrar interès en la generalització d'aquestes idees a uns espais abstractes que van donar lloc al que actualment coneixem com espais topològics. Una anàlisi detallat sobre la prehistòria de la topologia general fins l'axiomatització dels espais topològics es troba a [Tarrés Freixenet, 1994].

En aquest capítol ens centrarem en dos personatges imprescindibles en aquesta transició: Maurice Fréchet (1878 - 1973) i Felix Hausdorff (1868 - 1942).

La primera formulació axiomàtica d'un espai abstracte es troba en un nota de Maurice Fréchet el 1904 que tenia com a objectiu principal generalitzar el teorema de Weierstrass sobre l'existència del màxim d'una funció en un interval. La culminació de l'estudi dels espais abstractes definits per Fréchet es troba a la seva tesi doctoral titulada *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel*, publicada el 1906 (veure Figura 2.1, p.28). El concepte central dels seus espais abstractes era el de límit d'una successió d'elements.

La seva motivació principal era desenvolupar una teoria de conjunts prou general per a que li permetés donar resultats generals en el càlcul funcional. En la tesi es troben conceptes innovadors i que van ser punts clau en la història de les matemàtiques, com per exemple la primera definició del que actualment es coneix com espai mètric o una primera aproximació al que ara anomenaríem conjunt compacte.

Hausdorff està considerat el pare de la topologia general. En la seva obra *Grundzüge* *der Mengenlehre (Fonaments de la Teoria de Conjunts)* publicada l'any 1914 (veure Figura 2.2, p.34) es troba el que es considera la primera definició d'espai topològic. Hausdorff va donar els axiomes dels seus espais prenent com a idea clau el concepte d'entorn de cada punt de l'espai. Aquesta formulació va representar el punt de partida de la teoria d'espais topològics.

Finalment, s'exposaran altres axiomàtiques que van sorgir en els següents anys en l'estudi dels espais abstractes fins que es va arribar a la formulació actual a partir de conjunts oberts.

2.2 La figura de Maurice Fréchet

Maurice Fréchet va néixer el 1878 a Maligny, a una regió de la Bourgogne francesa en el si d'una família protestant. Va ser el quart de sis fills. En el moment que va néixer, el seu pare, Jacques Fréchet, era el director d'un orfenat protestant a Maligny, però de seguida la família es va traslladar a París ja que Jacques va aconseguir la feina de director d'una escola protestant a la capital.

Aquesta favorable situació, però, va durar poc temps, ja que les noves lleis de la Tercera República Francesa apostaven per una educació gratuïta, lliure i laica. L'educació religiosa va ser substituïda per una educació laica i el pare de Maurice va perdre la seva feina. Per a poder mantenir la família, la seva mare Zoé Fréchet, va fer el seu propi negoci d'una pensió per a estrangers. L'ambient en el qual Maurice va viure aquells anys va influir en la seva visió internacional del món. Després d'un temps en aquesta situació, Jacques Fréchet va aconseguir trobar lloc en el nou sistema educatiu i la família va tornar a gaudir d'estabilitat econòmica.

Va estudiar al Liceu Buffon de París la seva educació secundària, on va tenir com a professor a Jacques Hadamard (1865 -– 1963), el qual de seguida va apreciar el potencial que tenia Fréchet en les matemàtiques i li va fer classes particulars. El 1894, Hadamard va aconseguir plaça com a professor a la Universitat de Bordeaux, però va mantenir el contacte amb Maurice mitjançant correspondència. S'enviaven cartes en les quals Hadamard li plantejava problemes matemàtics i quan Fréchet li enviava la resolució els corregia severament. Fréchet sentia gran admiració pel seu professor i agraïment per la orientació que va rebre, però també va admetre que tenia un temor constant de no saber resoldre els problemes que li proposava.

El 1900 va entrar a l'École Normale i mentre estudiava va tenir importants dubtes sobre si especialitzar-se en matemàtiques o en física. Es va decantar per les matemàtiques perquè estudiar física requeria adquirir coneixements en química, ciència per la qual no tenia cap interès.

A partir de 1903, any en que a més va rebre el premi *Agrégation des Sciences Mathematiques*, va començar a publicar alguns articles. Només el 1905, mentre realitzava la seva tesi doctoral en la qual tenia com a tutor al mateix Hadamard, va publicar onze articles. Tenia relació amb alguns nord-americans que estaven vivint a París, especialment amb Edwin Wilson que va ser l'editor de la revista *Transactions of the American Mathematical Society* des de 1903, i per aquest motiu alguns dels seus primers treballs es van publicar en l'*American Mathematical Society.* En el mateix període, durant l'hivern de 1903-1904, va redactar per la seva posterior publicació les conferències d'Émile Borel, a les quals hi va assistir mentre estava estudiant.

Maurice Fréchet va presentar la seva tesi el 2 d'abril de 1906, titulada *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* En ella va introduir el concepte d'espai mètric i va tractar les 'operacions funcionals' i el 'càlcul funcional' i va desenvolupar idees de Hadamard i de Vito Volterra (1860 -– 1940).

Durant els següents anys, va exercir com a professor en diferents institucions. Entre 1907 i 1908 va estar com a professor de matemàtiques al Liceu de Besançon, entre 1908 i 1909 al Liceu de Nantes i entre 1910 i 1911 va ser professor de mecànica a la Facultat de Ciències de París. El 1908 va contraure matrimoni amb Suzanne Carrive, amb la qual va tenir quatre fills.

L'esclat de la Primera Guerra Mundial va impedir que aprofités l'oferta que li van fer per a ser docent a la Universitat de Illinois per al curs de 1914–1915, ja que va ser cridat al servei militar. Els seus coneixements d'idiomes van fer que gran part de la guerra la passés com a intèrpret de l'armada britànica, que era una posició molt segura, però no es va salvar d'estar dos anys i mig proper al front. Va tenir la sort de sobreviure a la guerra, però ja tenia acordat amb alguns nord-americans publicar totes les seves obres completes si moria en la guerra. Malgrat les circumstàncies, va seguir produint treballs matemàtics.

Després de la guerra, Fréchet va ser elegit per restablir la Universitat de Strasbourg. Entre 1919 i 1927 va ser professor d'anàlisi i director de l' Institut de Matemàtics i, tot i que la seva posició requeria molta feina administrativa, com la creació i organització del Congrés Internacional de Matemàtics el 1920 que va ser especialment complicat per la situació política europea després de la guerra, va seguir amb una gran quantitat de projectes d'investigació. Només entre 1924 i 1925 va publicar 36 articles.

La majoria dels treballs publicats estaven centrats en l'anàlisi i la topologia, però en els anys en que estava a Strasbourg va començar a interessar-se per l'àmbit de l'estadística i va donar classes de probabilitat i estadística.

El 1928 va tornar a París, encoratjat per Émile Borel a que hi busqués feina i que va donar suport a la seva candidatura. Entre aquest any i 1948, en el qual es va retirar, va ocupar diferents càrrecs en el camp de les matemàtiques: va ser director d'estudis a l'École de Hautes-Études, professor a la Facultat de Ciències de París i professor d'anàlisi i mecànica a l'École Normale.

Durant gener i febrer de 1942 va donar conferències a Lisboa sobre anàlisi i topologia i a més, va donar una conferència considerada per a tots els públics sobre els orígens de les nocions matemàtiques. La *Societat Matemàtica Portuguesa* el va convertir en membre honorífic reconeixent-li grans triomfs com la gran influència que havia estat per a les matemàtiques, la creació d'una teoria dels espais abstractes o que la seva obra havia permès una síntesi i clarificació en les ciències matemàtiques.

Maurice Fréchet va fer grans contribucions en les àrees de l'estadística, la probabilitat, el càlcul, l'anàlisi i la topologia de conjunts puntuals. Ell mateix va dir, però, que la seva manera de fer aquestes grans contribucions havia estat proposant noves àrees d'investigació, no resolent grans qüestions.

És destacable que en la seva tesi doctoral de 1906, que analitzaré amb més detall a continuació i que es troba un estudiada en profunditat en [Taylor, 1982] i [Arboleda, 2017], va començar una àrea totalment nova amb les seves investigacions de funcionals en un espai mètric i va formular la noció abstracta de compacitat.

Fréchet va intercanviar moltes cartes amb la majoria dels principals matemàtics de l'època, per exemple: Alexandroff, Baire, Brouwer, Kuratowski, Lebesgue, Montel... Aquesta correspondència es troba a l'Arxiu de l'Acadèmia de Ciències de Paris. En les cartes que es va enviar amb Alexandroff i Urysohn entre 1920 i 1930 es pot apreciar el desenvolupament de la topologia en aquella dècada, i en les primeres els joves matemàtics russos expressen la seva gratitud a Fréchet per la creació de la teoria dels espais abstractes.

En general, es considera que Fréchet va estar més ben valorat en la resta de països que no eren el seu, com per exemple es nota en que durant la guerra havia pactat amb els nord-americans la publicació dels seus treballs en el cas de la seva mort. El van convidar a parlar al Congrés Internacional de Matemàtics de Bolonya el 1928 i a Oslo el 1932. Va ser elegit membre de l'Acadèmia de Ciències de Polònia el 1929 i de la Royal Society d'Edimburg el 1947. Va ser membre de l' Institut Internacional d'Estadística i va ser elegit per a l'Acadèmia de Ciències el 1956, als 78 anys, després d'haver perdut moltes vegades.

Va morir a París el 1973.

2.3 Els espais abstractes de Fréchet

Maurice Fréchet va ser pioner en la generalització dels espais euclidians a uns espais més abstractes. En aquest apartat s'estudiarà la seva tesi doctoral, l'obra de la seva carrera que va tenir més influència en la posteritat, així com algunes publicacions anteriors en les quals ja va exposar algunes nocions clau en el desenvolupament de la seva teoria d'espais abstractes.

Hadamard, que va ser el seu mentor des de que era jove i va dirigir la seva tesi, ja havia exposat sobre la importància que tenia estudiar els espais de funcions en una ponència a París l'any 1897. Es troba en el segon paràgraf:

No em sembla pas inútil assenyalar l' interès que hi hauria en estudiar els conjunts composats de funcions. [1]

Hadamard remarca la importància que té en la teoria d'equacions en derivades parcials, ja que permetria donar arguments sòlids a la reducció de la definició d'integrals d'aquestes funcions a qüestions de trobar màxims i mínims, i que aquestes qüestions estan relacionades amb la natura del domini en el qual s'està buscant aquest mínim

[1] De l'original [Hadamard, 1897]: *Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions.*

o màxim.

Tenint en compte el paper que va tenir Hadamard en la carrera de Fréchet, és molt probable que l'origen dels seus treballs sobre els espais abstractes es trobin en les idees de Hadamard. La seva motivació principal era la generalització del teorema de Weierstrass de que una funció contínua en un interval tancat i fitat té un màxim.

En una nota titulada *Généralisation d'un théorème de Weierstrass* publicada el 1904 a *Comptes Rendus*, Fréchet investiga aquesta generalització i presenta el que anomena els L-espais, que són els espais més abstractes objecte del seu estudi. En l'inici es troba:

Sabem la importància que tindria, en un gran nombre de problemes, saber si una quantitat U que depèn de certs elements (punts, funcions, etc.), té realment un mínim en el camp considerat.[2]

En aquest plantejament es detecta una continuació de les idees exposades per Hadamard anys enrere, i referint-se al teorema de Weierstrass, prosségueix la presentació de la nota:

Hi ha gran interès en ampliar aquesta proposta per abordar el problema més general del que s'ha recordat[3]

En el seu estudi del càlcul funcional, defineix U com una funció uniforme o operació funcional en un conjunt E d'elements d'una categoria arbitrària (corbes, nombres, superfícies,...) si a tot element A de E li correspon un nombre ben determinat U_A.

Fréchet considera que l'estudi del càlcul funcional no es pot fer adequadament sense desenvolupar abans una teoria de conjunts, ja que la generalitat dels resultats obtinguts dependran de la generalitat de la teoria de conjunts. Per tant, després de donar aquesta primera definició, estudia els espais en els quals vol arribar a la noció de continuïtat de l'operació funcional.

Per a l'estudi dels L-espais, pren com a concepte clau el de límit d'una successió infinita d'elements i els defineix amb dues restriccions: que és possible distingir els elements que són diferents i que és possible definir en concepte de límit d'una successió d'elements, assignant a una successió $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ el valor U_A.

Suposant l' existència d'aquesta noció de límit, aquest està subjecte a dos axiomes:

1. Si la successió $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ té un límit, tota subsuccessió $A_{p_1}, A_{p_2}, ..., A_{p_n}, ...$ d'elements de la primera successió amb índexs creixent té límit i és el mateix.
2. Si cap dels elements $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ és diferent de A, la successió té com a límit A. És a dir, si és constant a un valor, el límit és aquest mateix valor.

Defineix l'element límit d'un conjunt E com el que és límit d'una successió de diferents elements de E, que és el que ara s'anomena punt d'acumulació, i dóna la definició de conjunt tancat com aquell que no té cap element límit o els conté tots.

[2]De l'original [Fréchet, 1904, p.848]: *On sait l'importance qu'il y aurait dans un grand nombre de problèmes, à savoir si une quantité U dépendant de certains éléments (points, fonctions, etc.) atteint effectivement un mínimum dans le champ consideré.*

[3]De l'original [Fréchet, 1904, p.848]: *Il y aurait grand intérêt à étendre cette proposition de façon à répondre au problème plus général que nous avons rappelé*

Ara ja pot dir que una operació funcional U en un conjunt tancat E és contínua en E si per tota successió $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ que té límit A, es compleix que els nombres U_{A_n} tendeixen a U_A.

A continuació, es troba la primera definició en la que s'utilitza el mot compacte, que és diferent de la que donem actualment:

Finalment, anomenarem conjunt compacte a tot conjunt E tal que existeix sempre un element en comú en qualsevol successió infinita de conjunts $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ continguts en E, tals que (tenint almenys un element cadascun) són tancats i cadascun d'ells està contingut en l'anterior. $(E_1 \supseteq E_2 \supseteq ... \supseteq E_n \supseteq ...)$ [4]

Amb totes aquestes definicions, enuncia la generalització del teorema de Weierstrass:

Teorema: *Qualsevol operació funcional U_A uniforme i contínua en un conjunt compacte i tancat E:*

1. *Està fitada en E.*
2. *Assoleix almenys una vegada el seu límit superior.* [5]

Aquest teorema generalitzat juga un paper fonamental en la definició d'un conjunt compacte, i dóna la proposició que caracteritza de forma més senzilla els conjunts compactes en els seus L-espais:

La condició necessària i suficient per a que un conjunt E sigui compacte es que tot conjunt E_1 format per una infinitat d'elements diferents continguts en E doni lloc a almenys un element límit.[6]

Entre 1904 i 1905, va publicar una sèrie de notes que van contribuir al desenvolupament de la topologia que va dur a terme i que concentraria en la seva tesi doctoral. En un article de Angus E. Taylor publicat l'any 1982, es troba una anàlisi en profunditat d'aquest conjunt de notes de les quals s'exposaran els punts més importants.

En la primera nota publicada el 1904 a *Comptes Rendus*, Taylor remarca l'interés que mostra Fréchet per separar de diferents teories allò que tenen en comú, i d'aquí que vulgui introduir aquestes nocions de límit o d'element límit sense tenir en consideració la naturalesa dels elements. A més, planteja la qüestió de si el conjunt derivat d'un conjunt és tancat, i observa que no és cert amb un contraexemple concret: el conjunt de tots els polinomis reals de variable real en la classe de les funcions reals en un interval, amb la definició "f_n té límit f quan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f$

[4] De l'original [Fréchet, 1904, p.849]: *Enfin nous appellerons ensemble compact tout ensemble E tel qu'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ contenus dans E, lorsque ceux ci (possédant au moins un élément commun chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédént.*

[5] De l'original [Fréchet, 1904, p.849]: *Théorème: Toute opération fonctionelle U_A uniforme et continue dans un ensemble compact et fermé E*

1. Est bornée dans E;

2. Atteint au moins une fois sa limite supérieure.

[6] De l'original [Fréchet, 1904, p.849]: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit compact est que tout ensemble E_1 formé d'une infinité d'éléments distincts contenus dans E donne lieu à un élément-limite au moins.*

per cada x".

Amb aquest exemple, Fréchet s'involucra en la teoria de la mesura de Lebesgue, allunyant-se de la seva teoria d'espais abstractes.

Taylor mostra una carta de Hadamard a Fréchet sense data, que restava guardada per la filla de Fréchet, en la qual li respon a qüestions relacionades amb aquest exemple i en la qual es troba el que podria ser el motiu pel qual Fréchet va seguir la seva teoria d'espais abstractes amb l' enfocament des dels entorns. El fragment és el següent:

Faríem bé en partir, en general, de la noció d'entorn i no de la de límit? Això et concerneix, de la mateixa manera que la recerca del cas on, el raonament anterior no era vàlid, la conclusió seria errònia.[7]

En una nota publicada al març de 1905, titulada *La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel*, Fréchet va retornar a un punt de vista més abstracte, adoptant la noció de límit d'una successió basada en una mesura de la proximitat entre elements. A dos elements arbitraris en una classe d'elements de naturalesa arbitrària, assigna un nombre real (A, B) que anomena *écart* que compleix tres axiomes:

1. $(A, B) \geq 0$.
2. $(A, B) = 0$ si, i només si, $A = B$.
3. Si (A, C) i (A, B) són molt petits, llavors (A, B) ho és.

Aquesta noció d'*écart* és una primera versió de la que més endavant va desenvolupar en la seva tesi i que és la base dels espais de classe V i de classe E.

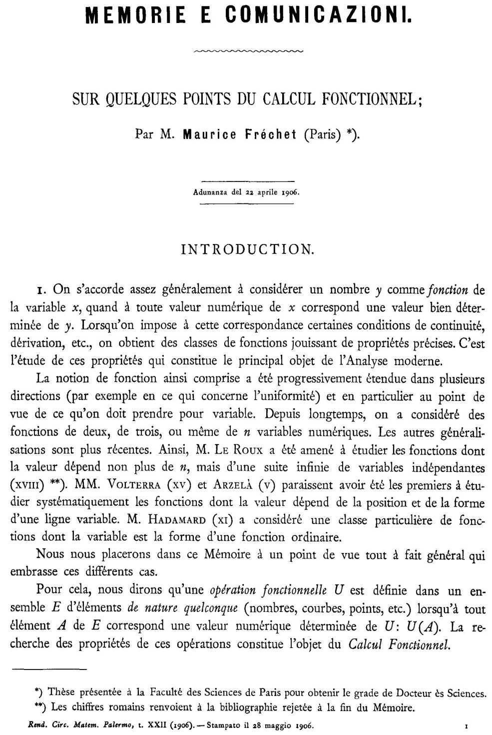
A continuació, va dir que una successió A_n té límit A si $\lim_{n\to\infty}(A_n, A) = 0$ i va establir que tot conjunt derivat és tancat.

Amb aquesta operació, va definir el concepte de que una operació funcional fos uniformement contínua i va mostrar que una operació funcional en un conjunt compacte i tancat és uniformement contínua, notant que es basava en la noció d' equicontinuïtat per funcions ordinàries del matemàtic Guido Ascoli (1887 – 1957). A més, va notar que la seva generalització del teorema de Weierstrass publicada l'any anterior es podia considerar una generalització d'un teorema de Cesare Arzelà (1847 – 1912). El treball d'aquests dos matemàtics italians van suposar una gran influència en el treball de Fréchet d'aquesta etapa.

En aquesta i en les següents notes publicades prèvies a la seva tesi, va escriure la generalització en el càlcul funcional de diferents resultats, com el del cèlebre teorema de Heine-Borel.

La seva tesi doctoral titulada *Sur quelques points du calcul fonctionnel* va ser presentada a l'abril de 1906 i és una de les seves obres que més rellevància i impacte ha tingut en el món de les matemàtiques. Consistia en la introducció i dues parts de llargada similar titulades: *I. Introduction de la notion de limite dans les ensembles abstraites, II. Applications de la théorie générale.*

[7] De l'original, citat a [Taylor, 1982, p.246]: *Feriez vous bien de partir, en général, de la notion de voisinage et non de celle de limite? Ceci vous regarde, de même que la recherche de cas où, le raisonnement précédent n'étant plus valable, sa conclusión serait en défaut.*



MEMORIE E COMUNICAZIONI.

SUR QUELQUES POINTS DU CALCUL FONCTIONNEL;

Par M. **Maurice Fréchet** (Paris) *).

Adunanza del 22 aprile 1906.

INTRODUCTION.

1. On s'accorde assez généralement à considérer un nombre y comme *fonction* de la variable x, quand à toute valeur numérique de x correspond une valeur bien déterminée de y. Lorsqu'on impose à cette correspondance certaines conditions de continuité, dérivation, etc., on obtient des classes de fonctions jouissant de propriétés précises. C'est l'étude de ces propriétés qui constitue le principal objet de l'Analyse moderne.

La notion de fonction ainsi comprise a été progressivement étendue dans plusieurs directions (par exemple en ce qui concerne l'uniformité) et en particulier au point de vue de ce qu'on doit prendre pour variable. Depuis longtemps, on a considéré des fonctions de deux, de trois, ou même de n variables numériques. Les autres généralisations sont plus récentes. Ainsi, M. Le Roux a été amené à étudier les fonctions dont la valeur dépend non plus de n, mais d'une suite infinie de variables indépendantes (XVIII) **). MM. Volterra (XV) et Arzelà (V) paraissent avoir été les premiers à étudier systématiquement les fonctions dont la valeur dépend de la position et de la forme d'une ligne variable. M. Hadamard (XI) a considéré une classe particulière de fonctions dont la variable est la forme d'une fonction ordinaire.

Nous nous placerons dans ce Mémoire à un point de vue tout à fait général qui embrasse ces différents cas.

Pour cela, nous dirons qu'une *opération fonctionnelle* U est définie dans un ensemble E d'éléments *de nature quelconque* (nombres, courbes, points, etc.) lorsqu'à tout élément A de E correspond une valeur numérique déterminée de U: $U(A)$. La recherche des propriétés de ces opérations constitue l'objet du *Calcul Fonctionnel.*

*) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences.
**) Les chiffres romains renvoient à la bibliographie rejetée à la fin du Mémoire.

Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXII (1906). — Stampato il 28 maggio 1906. 1

Figura 2.1: Portada de la tesi de Fréchet publicada l'any 1906.

La primera part tracta principalment sobre el que anomena l'estudi dels espais abstractes (els espais que ell anomena de classe L) i intenta seguir amb el desenvolupament d'una nova teoria de conjunts. La idea central és la d'element límit d'un conjunt que sempre basa en la noció del límit d'una successió d'elements. A la tesi, deixa clar que aquest límit ha de ser únic, ja que en la primera nota en la qual introdueix el concepte no ho escriu explícitament tot i que es pot entendre que ho és.

En el segon capítol de la primera part abandona els espais de classe L com a base per a la seva teoria per considerar-los massa generals, ja que hi ha propietats dels conjunts lineals de Cantor que no es poden estendre, com per exemple que el conjunt derivat d'un conjunt de la classe L sigui tancat.

Davant d'aquesta dificultat, defineix dues classes més d'espais, que anomena classe V i classe E, en els quals imposa algunes restriccions als de classe L. En un llibre publicat l'any 1928 i titulat *Les espaces abstraites*, Fréchet fa una reflexió sobre el tractament que li donava en la seva tesi als espais de classe L i com va canviar la idea sobre ells en els anys posteriors:

A la meva tesi, les classes L constituïen una generalització dels espais de classe E, la majoria dels quals havia estudiat en aquesta època. Des de llavors, m'han portat a considerar la definició de les classes L només com una de les etapes cap a una *noció més general.*[8]

La tesi es concentra en aquestes noves dues classes que ha definit. La classe V correspon a conjunts d'elements de qualsevol naturalesa amb una funció binària que a cada parella d'elements A i B li assigna un nombre (A, B) anomenat entorn (voisinage). De fet, designar-los com classe V prové de la inicial del mot *voisinage*.

L'estructura d'aquests espais és molt similar a la que havia donat als espais que estudiava a la seva nota de 1905, i compleix les següents propietats:

1. $(A, B) = (B, A) > 0$ si A és diferent de B.
2. $(A, B) = (B, A) = 0$ si, i només si, $A = B$.
3. Si $(A, B) < \epsilon$ i $(B, C) < \epsilon$, llavors existeix una funció real $f(\epsilon)$ tal que $(C, B) < f(\epsilon)$ tendeix a 0 quan ϵ i f és independent de A,B i C.

Aquesta classe V és una classe L en la qual tota successió d'elements A_n d'elements de V tenen com a límit A, si la distància (A_n, A) tendeix a 0 quan n tendeix a l'infinit. Aquesta definició, a més, garanteix la unicitat del límit i té com a conseqüència que els conjunts derivats són tancats.

Per a la classe V, Fréchet va definir la separabilitat: una classe V és separable si conté un conjunt numerable tal que el seu conjunt derivat és la mateixa classe.

Va introduir la noció de completesa, tot i que no la va anomenar així, si no que va usar l'expressió de que una classe V admet una generalització del teorema de Cauchy. Va dir que una successió A_n en un espai de classe V satisfà la condició de Cauchy quan per cada ϵ hi ha un n tal que $(A_n, A_{n+p}) < \epsilon$ per $p = 1, 2, ...$ Llavors, un espai de classe V admet una generalització del teorema de Cauchy si tota successió que satisfà aquesta condició té un límit en l'espai.

En aquest desenvolupament de la classe V va enunciar i demostrar alguns teoremes que van suposar un gran progrés en el que ara coneixem com topologia general, que es trobava en els primers albors, i especialment va treballar amb les classes V que eren completes i separables (que ell va anomenar classe V normals).

Concretament, va definir el concepte de compacitat (remarcar que aquesta definició seria l'actual compacitat relativa) per a les classes V que eren completes i separables. Partint de la idea de recobrir un conjunt E de la classe V mitjançant una família M de conjunts, on es considera que E està recobert si cada element de E és interior a algun dels conjunts M, Fréchet va demostrar per un $\epsilon > 0$ que tota classe V separable es pot considerar com la unió d'una família numerable $K(\epsilon)$ de conjunts tals que l'entorn de dos conjunts qualssevol A i B d'aquesta família compleix $(A, B) < \epsilon$. Fréchet va definir que un conjunt E d'una classe V separable i completa és compacte si, i només si, per qualsevol $\epsilon > 0$, E és la unió d'una família finita que compleix l'anterior esmentada propietat.

La introducció dels espais de classe E, que són el que actualment es coneixen com

[8] De l'original [Fréchet, 1928, p.166] : *Dans ma Thése, les classes L constituaient la généralisation des espaces E la plus ètendue de celles que j'avois ètudiées à cette èpoque. Depuis lors, j'ai été conduit à ne considerer la conception des classes L que comme une des ètapes vers une conception plus général.*

espais mètrics, és un dels punts més importants de tota la tesi de Fréchet. Els espais de classe E, anomenats així per la paraula *écart*, estan dotats d'una operació tal que a cada parella d'elements A i B assigna un nombre que verifica:

1. $(A, B) = (B, A) > 0$ si A és diferent de B.
2. $(A, B) = (B, A) = 0$ si, i només si, $A = B$.
3. Per tres elements A, B i C, sempre es compleix $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$.

Aquesta és la darrera definició que Fréchet va donar de la funció *écart*. Es pot veure una evolució en les tres que s'han enunciat. En el tercer axioma s'identifica una idea de proximitat entre elements d'un conjunt. La primera versió que va donar en la nota de 1905 és la menys restrictiva, simplement denota la idea bàsica de proximitat entre tres punts quan la imposes en dues parelles entre ells. La segona versió es podria considerar la que dóna en els espais de classe V, l'anomenada *voisinage*, on la restricció és més forta. I finalment, en els espais de classe E imposa la desigualtat triangular, que simplement és triar en aquest darrer axioma de l'operació voisinage la funció $f(\epsilon) = 2\epsilon$. Així, va veure que tot espai de classe E és de classe V, ja que els entorns es poden definir a partir de la distància.

Tots els teoremes d'aquest segon capítol tracten sobre espais d'una classe V arbitrària, amb excepció d'un teorema en la secció 51 en la qual Fréchet necessita la desigualtat triangular. En aquest teorema excepcional que es troba enunciat a continuació, utilitza el concepte de conjunt extremal, que és un conjunt compacte (en el sentit de Fréchet) i tancat:

Donada una operació U en un conjunt extremal E, existeix almenys un element A de E tal que el límit superior μ (finit o no) de U en E és igual al límit superior de U en qualsevol conjunt K d'elements de E que A és interior en sentit estricte[9]

Fréchet va suposar que aquest teorema també es complia per a les classes V, però aquesta conjectura no es va demostrar fins 1908 per Hans Hahn (1879 – 1934). Anys més tard, el 1917, E.W. Chittenden va publicar el llibre *On the equivalence of écart and voisinage*, en el qual va veure que en una classe V es pot introduir una funció distància, és a dir l' *écart*, fent que la classe V sigui una classe E de manera que la noció d'element límit que es va donar amb el *voisinage* és el mateix que el derivat de l'*écart*. És a dir, va mostrar que tot espai de classe V és metritzable.

Cap al final d'aquesta primera part, va donar alguns resultats per als espais de classe V i de classe E. Per exemple, trobem la generalització del teorema de Heine-Borel:

Sigui E un conjunt extremal format per elements d'una classe V. Si existeix una successió indefinida G de conjunts $I_1, I_2, ...$ tal que tot element de E és interior en sentit estricte a almenys un dels conjunts I_n, es pot extreure de G un nombre finit d'aquests conjunts formant una família H amb la mateixa propietat que G.[10]

[9]Els originals de [Fréchet, 1906] s'han extret de la tesi de Márquez García, G., aquest concretament [Márquez García, 2018, p.50]: *Étant donnée une opération U uniforme dans un ensemble extrémal E, il existe au moins un élément A de E tel que la limite supérieure μ (finie ou non) de U dans E soit égal à la limite supérieure de U dans tout ensemble K d'éléments de E auquel A est intérieur au sens étroit.*

[10]De l'original [Fréchet, 1906] extret de [Márquez García, 2018, p.94]: *Soit E un ensemble*

I també el seu recíproc:

Sigui E un conjunt d'elements d'una classe V normal. Per a que de cada família H, sigui numerable o no, de conjunts I tal que cada element de E sigui interior en el sentit estricte a almenys un d'ells, podem extreure un número finit de conjunts I formant una família G amb la mateixa propietat que H, és necessari i suficient que E sigui extremal.[11]

En la segona part de la tesi es va dedicar a donar exemples concrets de la seva teoria abstracta.

La tesi de Fréchet va influenciar de manera immediata en el treball d'altres matemàtics. Els aspectes més significants d'aquesta obra són l' inici d'una de la topologia de conjunts puntuals abstractes, el desenvolupament d'una teoria abstracta així com les contribucions que va fer en l'anàlisi. En el llibre *History of Analysis* de Jean Dieudonné (1906 – 1992), es troba el fragment següent, on remarca la importància que va tenir la tesi en l'anàlisi funcional:

El gran mèrit de Fréchet està en l'èmfasi que ell dóna en tres nocions que van jugar un paper fonamental en tots els desenvolupaments posteriors de l'anàlisi funcional: compacitat, completesa i separabilitat. [12]

És destacable el treball de Frigyes Riesz (1880 – 1956). L'any 1908, va presentar un treball en el *IV Congrés Internacional de Matemàtiques* titulat *Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre (Continuïtat i teoria abstracte de conjunts)* on donava una nova formulació dels espais abstractes prenent com a noció central la de "punt de condensació". Un punt de condensació d'un conjunt E és un punt límit de E que també és element límit de tot conjunt que s'obté eliminant de E una infinitat numerable d'elements.

Els espais abstractes de Riesz complien les següents restriccions:

1. Tot element que es punt de condensació d'un conjunt M ho és també de tot conjunt de conté M.
2. Si es divideix un conjunt en dos subconjunts, cada punt de condensació de l'original ho és d'almenys d'un dels dos que ho constitueixen.
3. Un conjunt d'un únic element no té punts de condensació.
4. Tot punt de condensació d'un conjunt està unívocament determinat per la totalitat dels subconjunts del mateix que el tenen com a punt de condensació.

---

extrémal formé d'éléments d'une clase (V). S'il existe une suite indéfinie G d'ensembles $I_1, I_2, ...$ telle que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à l'un au moins de ces ensembles I_n, on peut extraire de G un nombre fini de ces ensembles formant une famille H jouissant de la même propieté que G.

[11] De l'original [Fréchet, 1906] extret de [Márquez García, 2018, p.103]: *Soit E un ensemble d'éléments d'une clase normale (V). Pour que de toute famille H dénombrable ou non, d'ensembles I tels que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles I formant une famille G jouissant de la même propiété que H, il faut et il suffit que E soit extrémal.*

[12] De l'original [Dieudonné, 1981, p.117]: *The greatest merit of Fréchet lies in the énfasis he put on three notions which were top lay a fundamental part in all later developments of Functional Analysis: compactness, completeness and separability.*

El quart axioma és independent dels tres anteriors, ja que en un inici volia desenvolupar la seva teoria només a partir dels tres primers però va notar que no podia avançar.

Va desenvolupar una teoria anàloga a la de Cantor o a la de Fréchet, prenent com a conjunt derivat el de tots els seus punts de condensació i en la que es compleix que els conjunts derivats són tancats.

2.4 La figura de Felix Haudorff

Felix Hausdorff va néixer el 8 de novembre de 1868 a Breslau, Prússia, que és l'actual Breslavia a Polònia, en el si d'una família jueva i benestant. El seu pare, Louis Hausdorff, era mercader de tèxtils. La situació financera familiar va influenciar en la vida i en la carrera de Felix, ja que sense la preocupació de mantenir-se, al llarg dels anys va tenir més llibertat per decidir a què i quan es dedicava.

Quan era molt petit, la família Hausdorff es va mudar a Leipzig, on va passar la seva infància i joventut. Tot i que en la universitat es va centrar en les matemàtiques, els seus interessos principals eren la literatura, la música i la filosofia. De fet, el seu cercle d'amistats estava format principalment per escriptors i músics i ell mateix va intentar fer-se un lloc primer en el món de la música i després en el de la literatura.

Va estudiar a la Universitat de Lepizig amb Heinrich Bruns (1848 – 1919) i Adolph Mayer (1839 – 1908) com a professors. Es va graduar el 1891 i la seva tesi titulada *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung (Sobre la teoria de la refracció astronòmica)* estudiava la refracció de la llum a l'atmosfera, ja que el seu doctorat el va fer en aplicacions de les matemàtiques a l'astronomia. Va redactar dos treballs més sobre el mateix tema de la seva tesi, la refracció, l'any 1895 va presentar la seva Habilitació, una qualificació necessària per donar classes a les universitats alemanyes, centrada en l'extinció de la llum a l'armosfera. En els anys després d'obtenir-la va publicar alguns articles que tractaven diferents temes com òptica, geometria no euclidiana o teoria de probabilitat i es va quedar a Leipzig donant cursos de matemàtiques. Mentre estudiava, a part d'assistir a cursos de ciències, també va assistir a alguns de filosofia, d'història de la filosofia i literatura.

El 1899 es va casar amb Charlotte Goldschimidt, que provenia d'una família jueva convertida al luteranisme, amb qui va tenir una filla anomenada Nora, que va sobreviure a la època nazi.

Abans de 1904 va publicar tot el seu treball literari sota el pseudònim de Paul Mongré. El 1897, va publicar el seu primer llibre titulat *Sant'Ilario*, l'any següent un llibre de filosofia, el 1900 un recull de poemes que versaven sobre la vida, la mort, la natura i la passió eròtica. A part d'aquestes obres importants, també va publicar nombrosos articles de literatura i filosofia. Una prova de que en aquella època estava més interessat en fer progressar la seva carrera literària que la matemàtica és que va rebutjar una oferta per ser professor a la Universitat de Göttingen. El 1904 va publicar una obra de teatre titulada *Der Arzt seiner Ehre (El metge del seu honor)*, representada el 1912 amb un èxit notable, que va marcar el final d'aquesta etapa.

A partir de l'any 1904 es va centrar en l'estudi de la topologia i la teoria de conjunts, l'àrea per la qual és més conegut. Va introduir el concepte d' ordre parcial i entre 1901 i 1909 va demostrar resultats dels conjunts ordenats. El 1907 va introduir casos especials d'ordinals en un intent per demostrar la hipòtesi del continu de Cantor i el 1916 va provar resultats addicionals de la cardinalitat dels conjunts de Borel.

Motivat per Eduard Study (1862 – 1930) per a que s'involucrés més en la investigació matemàtica i en desenvolupar la seva carrera, el 1910 va anar a Bonn com a professor associat. El 1913 va mudar-se per ser professor a Greifswalf. L'any següent va publicar el seu famós llibre *Grundzüge der Mengenlehre*, en el qual crea una teoria d'espais topològics i mètrics, basant-se, entre d'altres, en el treball de Fréchet. Aquesta obra va ser publicada en una versió reescrita el 1927 i el 1937, en la qual el tema central són els espais mètrics i els espais topològics queden relegats a un segon pla. La primera versió es va reimprimir el 1945 i el 1965, la de 1927 va ser publicada deu anys més tard en rus, i la de 1937 en anglès el 1957.

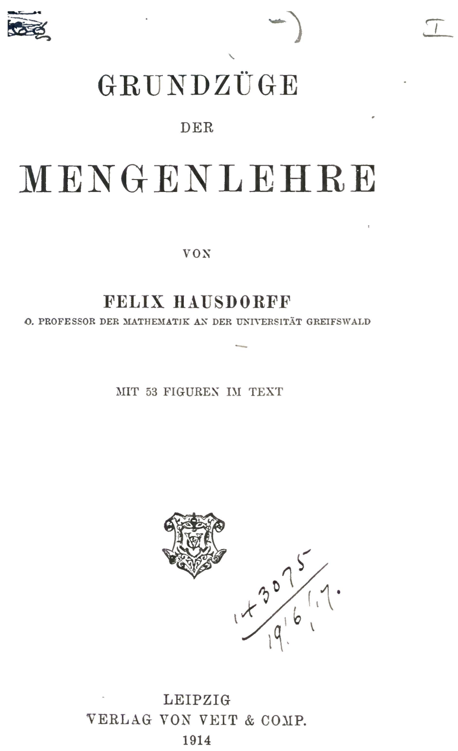
Va tornar a Bonn el 1921, ja com una eminència matemàtica, i va treballar-hi fins el 1935 que es va haver de retirar per culpa del règim nazi. Va intentar evitar emigrar fins que va poder, fins i tot el 1934 va fer el jurament necessari a Hitler, però l'any següent una nova llei el va obligar a renunciar al seu càrrec. Tot i que va seguir fent investigacions en topologia i teoria de conjunts, els resultats no es van poder publicar a Alemanya. Ell volia seguir investigant i va intentar emigrar el 1939 i va escriure a Courant per si podia trobar una beca d'investigació per a ell, però no va ser possible.

Com a jueu, la seva posició a Alemanya es va anar complicant. El 1941 l'havien d'enviar a un camp de concentracio però la universitat de Bonn va sol·licitar que la família Hausdorff pogués estar a casa seva i ho van acceptar, tot i que a l'octubre de 1941 es van veure obligats a utilitzar l' "estrella groga" i a finals d'any els van informar que els enviaven a Colònia.

Però en realitat, no van anar a Colònia i al gener de 1942 els van informar de que els anaven a internar a Endenich. Es va suïcidar prenent barbitúrics el 26 de gener, juntament amb la seva esposa i la germana d'aquesta.

2.5 *Grundzüge der Mengenlehre*

El llibre de Felix Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre (Fonaments de la Teoria de Conjunts)* és una de les obres més emblemàtiques de les matemàtiques del segle XX. Es va publicar a l'abril de 1914, quan Hausdorff era professor a la Universitat de Greifswald, i estava pensat com a un manual per als estudiants de matemàtiques avançades. Al seu moment va ser la contribució més important a la teoria de conjunts des dels treballs de Georg Cantor i es considera que la topologia de conjunts va néixer amb aquesta obra.



GRUNDZÜGE

DER

MENGENLEHRE

VON

FELIX HAUSDORFF

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GREIFSWALD

MIT 53 FIGUREN IM TEXT

143075
19.6.17.

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1914

Figura 2.2: Portada del llibre de Hausdorff publicat l'any 1914.

El llibre està dividit en deu capítols. Els sis primers estan dedicats a la teoria de conjunts: es defineixen les operacions elementals entre conjunts, tracta els nombres cardinals, els conjunts ordenats, els nombres ordinals... Va tractar de manera sistemàtica la teoria de Cantor i va aportar nous resultats i definicions, sobretot en els conjunts parcialment ordenats. Del setè al novè versen sobre la teoria de conjunts de punts i el darrer capítol tracta qüestions de la teoria de la mesura i integració.

És en aquests capítols intermedis, VII, VIII i IX, en els quals es defineix per primera vegada el concepte d'espai topològic en termes d'entorns. Hausdorff va decidir prendre com a objecte central de la seva teoria d'espais abstractes aquest concepte d'entorn d'un punt. Aquesta primera definició no és igual a la que es considera avui; de fet, el quart axioma dóna lloc al que ara s'anomenen espais de Hausdorff.

Per a la utilització del concepte d'entorn, Hermann Weyl (1885 – 1955) va jugar un rol fonamental. Ni en els axiomes que havia donat Fréchet ni en els de Riesz apareix la noció d'entorn, que era imprescindible en la teoria de conjunts de Cantor. Weyl va ser qui el 1913 va veure la conveniència d'utilitzar aquest concepte a l'hora de definir els espais abstractes. Estudiava les superfícies de Riemann i va donar les definició d'entorn d'un conjunt de naturalesa desconeguda en varietats bidimensionals i que depenia de l'estructura euclídea del pla.

Va ser Hausdorff qui va fer el pas definitiu utilitzant el concepte d'entorn per a donar una teoria que fos prou general. Es troba la primera definició del terme espai topològic:

Per espai topològic ens referim a un conjunt E en el qual als seus elements (que són punts) x se'ls assigna determinats subconjunts U_x, que reben el nom d'entorns de x i que han de complir:

a) A cada punt x li correspon almenys un entorn U_x. Tot entorn U_x conté el punt x.

b) Si U_x i V_x són dos entorns del mateix punt x, llavors hi ha un entorn W_x que és un subconjunt dels dos.

c) Si el punt y està a U_x, llavors existeix un entorn U_y, que és un subconjunt de U_x.

d) Per a dos punts diferents x i y hi ha dos entorns U_x i U_y amb intersecció buida. [13]

Va afegir que tot espai mètric és un espai topològic, ja que tot entorn d'un espai mètric satisfà els axiomes donats per ell mateix, i que el concepte d'espai topològic és més general.

Aquest és el punt de partida de la teoria dels espais abstractes, que ara es coneix com a teoria dels espais topològics o topologia general.

Després de donar aquests quatre axiomes, Hausdorff va donar un conjunt de definicions corresponents a un subconjunt A d'un espai topològic:

- x és interior a A si existeix un entorn U_x que és subconjunt de A.
- x és de la frontera de A si pertany a A però no és interior.
- A és un conjunt obert si tots els seus punts són interiors.

Va mostrar que la unió de qualsevol família de conjunts oberts (ja sigui numerable o no numerable) és també un conjunt obert i que la intersecció finita de conjunts oberts també és un obert.

A continuació, va passar a estudiar els complementaris d'aquests conjunts oberts que havia definit i va donar algunes nocions clau:

- x és un punt d'acumulació de A si cada entorn del punt conté infinits punts de A (que coincideix amb la que havia donat Cantor de punt límit).
- A és un conjunt tancat si conté tots els seus punts d'acumulació.

Després va mostrar els resultats anàlegs als anteriors amb els conjunts tancats: que la intersecció de qualsevol família de conjunts tancats és un conjunt tancat i que la unió finita de tancats és un conjunt tancat.

[13] De l'original [Hausdorff, 1914, p.213]: *Unter einem topologischen Raum verstehen wir eine Menge E, worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen , und zwar nach Massgabe der folgenden:*

a) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.

b) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x die Teilmenge von beiden ist.

c) Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist.

d) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt.

La definició que Hausdorff va donar de conjunt compacte la va adoptar de la que havia donat Maurice Fréchet, usant el concepte de conjunt divergent com aquell sense punts d'acumulació:

Anomenarem a un conjunt sense cap subconjunt divergent compacte (segons Fréchet); per suposat, també comptem les quantitats finites incloent el conjunt buit. Cada subconjunt infinit d'un conjunt compacte A té, per tant, almenys un punt d'acumulació (que no necessàriament pertany a A).[14]

Seguidament va afirmar que tot subconjunt d'un conjunt compacte també és compacte i que la unió de compactes també ho és.

Després de donar la definició, va exposar tres resultats sobre els conjunts que tancats i compactes, que són els conjunts als quals en l'actualitat se'ls coneix com numerablement compacte o seqüencialment compacte en els espais topològics definits per Hausdorff, ja que ni Fréchet ni Hausdorff incloïen en la definició la hipòtesi de que el conjunt fos tancat i tractaven amb recobriments numerables.

I. *(Teorema de la intersecció de Cantor): Una successió descendent de conjunts* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ *compactes, tancats, que no són el conjunt buit, tenen intersecció no buida.*[15]

   Demostració:

   Escollim un punt a_n de cada conjunt A_n; denotem per $B_n \subseteq A_n$ al conjunt format pels punts $a_n, a_{n+1}, ...$

   Si B_1 és finit, es tindrà per a infinits índexs $a_n = a$; per tant, el punt a pertany per tant a una infinitat dels conjunts A_n i també a la seva intersecció $D = D(A_1, A_2, ...)$.

   Si B_1 és infinit, B_1 admet un punt d'acumulació a, ja que A_1 és compacte; per cada n, a també és punt d'acumulació de B_n i, per tant, també de A_n. Com els A_n són tancats, a pertany a A_n i també a D.

II. *(Teorema de Borel). Un conjunt compacte i tancat que està contingut en la unió d'una successió de conjunts oberts, també ho estarà en una subfamília finita d'aquest mateix conjunt d'oberts.*[16]

   Demostració:

   Sigui A compacte i tancat i $A \subseteq S = S(G_1, G_2, ...)$. El que es vol demostrar és que existeix un nombre n a partir del qual es complirà $A \subseteq S_n = S(G_1, G_2, ..., G_n)$.

[14] De l'original [Hausdorff, 1914, p.230]: *Eine Menge ohne divergente Teilmenge nennen wir (nach Fréchet) kompakt; dazu rechnen wir natürlich auch die endlichen Mengel inkl der Nullmenge. Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge A hat also mindestens einen (nicht notwendig zu A gehörigen) Häufungspunkt.*

[15] De l'original [Hausdorff, 1914, p.230] *I. (Durchschnittssatz von Cantor). Eine absteigende Folge* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ *kompakter, abgeschlossener, von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.*

[16] De l'original [Hausdorff, 1914, p.231]: *II. (Satz von Borel). Ist eine kompakte abgeschlossene Menge in der Summe einer Folge von Gebieten enthalten, so ist sie bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieser Folge enthalten.*

Posem $B_n = D(A, S_n)$ i $A_n = A - B_n$ de tal manera que es compleix $S_1 \subseteq S_2 \subseteq ..., B_1 \subseteq B_2 \subseteq ...$ i $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ....$

A més, $S(S_1, S_2, ...) = S(G_1, G_2, ...) = S$ S i per tant, la intersecció amb A és $S(B_1, B_2, ...)D(A, S) = A$ i $D(A_1, A_2, ...) = A - S(B_1, B_2, ...) = 0$.

Com els G_n i els S_n són oberts, $E - S_n$ és tancat i $A_n = D(A, E - S_n)$ és compacte i tancat. Si tots els A_n contenen 0, pel teorema anterior la seva intersecció no serà nul·la. Per tant, hi ha un n tal que $A_n = 0$, és a dir, $A = B_n$ i $A = D(A, S_n)$, altrament $A \subseteq S_n$.

III. *(Recíproc del teorema de Borel). Si per cada sistema de conjunts oberts, en la unió dels quals el conjunt A està contingut, A ja està contingut en la unió finita d'alguns oberts d'aquest sistema, llavors A és compacte i tancat.*[17]

Demostració

Sigui A conjunt no compacte i provem que té un subconjunt B divergent. Per cada punt a de A existeix un entorn U_a, que no conté un nombre finit de punts de B.

$A = \cup U_a$ que és un recobriment finit. Per tant B és finit i per tant A és compacte.

Si suposem A tancat, llavors sigui x un punt adherent (d'acumulació).

Per qualsevol a que pertany a A, per l'axioma de separació existeix U_a i un entorn de x que no té cap punt en comú amb U_a i per tant x no pertany a l'adherència de U_a. Per tant, x no és punt de l'adherència ni per una unió de molts U_a, i per tant la unió no pot incloure A ja que x ha de ser punt d'acumulació de A. Així que A ha de ser tancat.

A partir d'aquest punt, el llibre se centra més en l'estudi d'espais mètrics.

Aquesta obra suposa l' inici del veritable desenvolupament de la teoria dels espais topològics, que va prendre com a punt de partida aquests axiomes formulats per Hausdorff. Va ésser una obra pionera en la branca de la topologia i va contribuir al desenvolupament de l'estructura de les matemàtiques modernes.

2.6 Tractaments alternatius

En els anys després de la publicació del llibre de Hausdorff, altres matemàtics van estudiar en com s'havia de donar la definició dels espais topològics. No hi havia consens sobre si la topologia havia de tractar sobre aquests espais d'entorns que havia definit Hausdorff o si era un altre concepte el que havia de ser la base d'aquesta branca de les matemàtiques. A més, tampoc se sabia quin era el grau de generalitat que s'havia de considerar a l'hora de definir els conceptes i de donar els resultats.

[17] De l'original [Hausdorff, 1914, p.231]: *III. (Umkehrung des Borelschen Satzes). Wenn für jedes System von Gebieten, in deren Summe die Menge A enthalten ist, A bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieses Systems enthalten ist, so is A kompakt und abgeschlossen*

A continuació s'exposaran breument les investigacions més rellevants que es van dur a terme i que van acabar donant fruit al que actualment coneixem com espais topològics.

El 1922 Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980) va publicar un article titulat *Sur l'opération $\overline{A}$ de l'analysis situs* basat en la seva tesi doctoral en el qual introduïa una operació que va anomenar "clausura" i l'utilitzava com a idea fonamental per al desenvolupament dels espais abstractes.

Aquests espais, als quals no va donar nom, els va definir com un conjunt X amb una funció clausura que va de subconjunts de X a subconjunts de X que per qualssevol subconjunts A i B de X compleix quatre axiomes:

i) La clausura de la unió $(A \cup B)$ és la unió de la clausura de A i la clausura de B.

ii) A és un subconjunt de la clausura de A.

iii) La clausura del conjunt buit és el conjunt buit.

iv) La clausura de la clausura de A és la clausura de A.

Va definir conjunt tancat com aquell conjunt que era exactament igual a la seva pròpia clausura i conjunt obert com aquell conjunt que era igual al complementari de la clausura del seu complementari.

En aquesta primera versió de l'article Kuratowski fa referència a Fréchet i puntualitza que aquests espais són més generals que els espais abstractes de classe L, però no fa cap tipus de menció a Hausdorff tot i que aquests espais abstractes són equivalents als espais d'entorn de Hausdorff si es treu l'últim axioma. De fet, aquests espais de clausura són una primera forma del que actualment es coneixen com espais topològics expressada amb aquesta funció clausura.

En la mateixa publicació, Kuratowski va donar una caracterització diferent per als espais abstractes, en la qual el concepte primitiu es el conjunt derivat A' que va definir Cantor. Així, defineix els espais abstractes com un conjunt X tal que per qualssevol subconjunt A i B de X s'ha de complir:

i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

ii) $X' = X$

iii) $0' = 0$

iv) A'' és un subconjunt de A'

És evident que qualsevol espai amb els axiomes utilitzant el conjunt derivat és un espai clausura si la funció clausura es pren com $A \cup A'$.

Uns anys més tard, el 1933, en un llibre que Kuratowski va publicar sobre topologia, va incloure referències tant al treball de Hausdorff com al de Fréchet.

El 1923, Heinrich Tietze (1880 – 1964) va publicar un article titulat *Beiträge zur allgemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs (Contribucions a la Topologia General. Axiomes per a diferents versions del concepte d'entorn)* a la famosa revista *Mathematische Annalen*, l'objectiu principal del qual és donar axiomes per a expressar els espais d'entorns de Hausdorff en termes de conjunts oberts. És a dir, que el concepte principal fossin els conjunts oberts i no els entorns.

Intentant mantenir analogia amb els quatre axiomes que va enunciar Hausdorff, defineix aquests espais com un conjunt E tal que els seus elements són punts i que han de complir les condicions:

i) Cada punt x pertany a almenys un conjunt obert.

ii) Si U i V són dos oberts que tenen almenys un punt en comú, llavors la seva intersecció és un conjunt obert.

iii) Si cada punt x de A està en algun subconjunt oberts de A, llavors A és un obert.

iv) Si x i y són dos punts diferents, llavors existeixen dos oberts U i V que els contenen, respectivament, i tals que la seva intersecció és buida.

En la seva obra *Grundzüge der Mengenlehre*, Hausdorff no utilitza en cap moment el l'adjectiu *'offen'* (que és obert) si no que usa el terme *'Gebiet'*. Tietze va adoptar el terme 'obert' del llibre *Vorlesungen über reelle Funktionen (Conferències sobre funcions reals)* de Constantin Carathéodory (1873 – 1950) publicat el 1918. En aquesta obra, Carathéodory va veure que en els espais euclidians i conjunt és tancat si, i només si, el seu complementari només conté punts interiors. Aquesta estreta relació entre els conjunts que només contenen punts interiors i els conjunts tancats tan evident va fer que es decidís a utilitzar l'antònim a tancat, és a dir, obert.

Dos anys més tard, el 1925, el matemàtic rus Pavel Alexandroff (1896 – 1982) va publicar un article en la mateixa revista *Mathematische Annalen* sobre la topologia en els espais euclidians, en el qual va donar la definició dels espais d'entorn de Hausdorff en termes dels conjunts oberts només amb dos axiomes:

i) La intersecció de dos conjunts oberts és un obert, i la unió de qualsevol conjunt d'oberts és un obert.

ii) Dos punts diferents estan continguts en dos oberts disjunts.

El 1926, Waclaw Sierpinski (1882 – 1969) va publicar també al *Mathematische Annalen* un article titulat *La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits*, l'objectiu principal del qual era utilitzar els conjunts derivats com a concepte primitiu del desenvolupament de la topologia, enlloc dels entorns com Hausdorff, el límit com Fréchet o la clausura com Kuratowski.

Donat un conjunt E, volia mostrar que amb l'operació 'conjunt derivat' arbitrària i que és una funció dels subconjunts de E als subconjunts de E, es podien obtenir bastants resultats de topologia. Amb aquesta funció arbitrària va definir conjunt tancat, conjunt dens, conjunt perfecte, conjunt connex, va donar el significat de que una funció fos contínua en un punt o un homeomorfisme i va mostrar alguns resultats relacionats amb aquestes idees.

En els últimes seccions de l'article, va prendre una altra direcció i va intentar mostrar com a idea central la de conjunt tancat. Va definir un $F-espai$ com un conjunt E amb un conjunt F de subconjunts de E que havien de complir tan sols dos axiomes:

que el conjunt E és tancat i que la intersecció de qualsevol conjunt de tancats és tancat.

Aquests $F-espais$ de Sierpinski són més generals que els espais d'entorn de Hausdorff i els espais clausura de Kuratowski.

Dos anys més tard, va publicar un llibre titulat *Topologia ogólna (Topologia general)* en el qual posava com a concepte primitiu els conjunts oberts, ja que com ell mateix escriu al pròleg va trobar que era més simple i intuïtiu. Al llarg del volum, va donant una sèrie d'axiomes sobre els conjunts oberts per a un conjunt arbitrari K entre els quals es troben els que van esdevenir la definició estàndard d'espai topològic.

El grup de matemàtics coneguts com Nicolas Bourbaki va decidir formular la topologia general amb rigor i trobar els fonaments entre 1935 i 1940.

En un inici, hi va haver discussions entre ells sobre com començar. André Weil (1906 – 1998) proposava començar pels espais mètrics i després arribar als espais més generals formulats amb la funció clausura definida per Kuratowski, mentre que Claude Chevalley (1909 – 1984) creia que era necessari crear les bases dels espais topològics generals abans que les dels espais mètrics. A més, tampoc estaven d'acord sobre quins objectes havien de ser el concepte central ni quins axiomes s'havien d'imposar.

A [Bourbaki, 1969, p.197] es pot veure el reconeixement que li van donar a Fréchet de ser el primer en intentar separar allò comú en les propietats entre els conjunts de punts i de funcions, però van considerar que tot i les contribucions que no se li poden negar, com l'establiment de la relació entre el teorema de Bolzano-Weierstrass i el de Heine-Borel (o Borel-Lebesgue) o la introducció del terme *compacte*, no va aconseguir donar un sistema còmode i útil. Li van donar la major part del mèrit a Hausdorff, ja que és la seva axiomatització la que va donar els resultats amb la generalitat i la precisió desitjades i va ser el punt de partida per als treballs posteriors de la topologia general.

Aquestes declaracions no van estar exemptes de controvèrsia, ja que el propi Fréchet va jutjar que el valor que se li havia donat a les seves investigacions no era el que es mereixia, ja que es considerada el creador de la primera teoria sistemàtica de conjunts puntuals en espais abstractes.

En la primera publicació de 1940 van decidir usar els conjunts oberts com a idea primitiva i com a axiomes una variant del primer de la publicació d'Alexandroff de l'any 1925:

1. La intersecció finita d'oberts és un obert.
2. La unió de qualsevol conjunt d'oberts és un obert.

   Llavors, van considerar que era necessari afegir dos axiomes més:

3. El conjunt buit és un obert.
4. El conjunt total és un obert.

En la segona edició d'aquest capítol de topologia general ja es van incloure els quatre axiomes, així com en la publicació posterior en un llibre complet.

Aquests quatre axiomes expressats en relació als conjunts oberts es van estendre al llarg de les següents dècades i van aparèixer en múltiples llibres de text, com el publicat per John L. Kelley (1916 – 1999) als Estats Unit l'any 1955 titulat *General Topology*, que va ser durant molts anys el llibre més important de topologia del seu país. Així, van esdevenir la definició estàndard dels espais topològics que és l'emprada actualment.

En el següent capítol s'estudiarà el treball que van dur a terme alguns matemàtics de la Universitat de Moscou en la construcció d'una teoria unificada i simple, centrada en la compacitat i prenent com a base els espais topològics definits per Hausdorff. Principalment s'analitzaran estudis de Pavel Seergevich Alexandroff (1896 - 1982), Pavel Samuilovich Urysohn (1898 - 1924) i Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906 - 1993).

Capítol 3

L'assentament de la compacitat per l'escola russa

3.1 Introducció

Durant la segona dècada del segle XIX hi va haver un canvi en el mètode d'ensenyament a les matemàtiques a la universitat a Rússia. En aquesta transformació hi va haver dos personatges que van tenir un rol molt important en la Universitat de Moscou, Dimitri Fedorovich Egorov (1869 – 1931) i Nikolai Nikolaevich Luzin (1883 – 1950).

Van potenciar la creativitat dels seus alumnes i mostraven les matemàtiques en la seva forma incompleta, per despertar el desig dels seus alumnes de formar part del desenvolupament, en lloc d' exposar-la com una estructura ja completa.

Un grup d'alumnes matemàtics interessats en les idees de Luzin, van buscar un nom per designar-se a ells mateixos i el seu mentor, i van triar "Luzitania".

En aquest grup es trobaven Pavel Sergeevich Alexandroff (1896 – 1982) i Pavel Samuilovich Urysohn (1898 – 1924). Continuant amb les idees introduïdes per Felix Hausdorff al llibre *Grundzüge der Mengenlehre*, l'obra conjunta que van publicar l'any 1929 titulada *Mémoire sur les espaces compactes* (veure figura 3.1, p. 46), de la qual s'analitzarà una part en aquest capítol, va suposar el primer estudi profund de la compacitat i és en ella en la qual es va definir per primera vegada la noció compacitat tal com l'entenem actualment, que van anomenar bicompacitat.

En el desenvolupament de la topologia, i més concretament, de les nocions i els resultats relacionats amb els espais compactes també va destacar el treball de Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906 – 1993), deixeble d'Alexandroff, que va introduir la topologia producte i va demostrar que la compacitat es conservava per a un producte arbitrari d'espais.

La dècada dels anys 20 del segle XX és l'etapa més fructífera de l'escola de topologia de la Universitat de Moscou i li devem a algunes de les seves figures més rellevants resultats imprescindibles avui en dia.

3.2 Pavel Seergevich Alexandroff i Pavel Samuilovich Urysohn

Pavel Sergeevich Alexandroff va nèixer l'any 1896 a Bogordskii, Rússia. El seu pare, Sergej Alexandrovich Alexandroff, era metge i quan Pavel Sergeevich tenia només un any, es van mudar a Smolensk, una ciutat a uns 420 km de Moscou, ja que va començar a treballar a l'hospital d'aquesta ciutat.

Durant els primers anys Pavel Sergeevich va ser educat a casa per la seva mare, amb la qual va aprendre francès i alemany, i a la secundària va ser un alumne excel·lent, destacant des de jove en les matemàtiques.

Es va graduar de la secundària el 1913 amb medalla d'or pel seu expedient. En aquell moment ja havia decidit fer la carrera en matemàtiques; el seu professor de la secundària en la matèria, Alexander Romanovich Eiges, va ser una gran influència en ell, no només en l'àmbit de les matemàtiques si no també en la literatura i l'art.

Aquell mateix any va entrar a la Universitat de Moscou i de seguida es va relacionar amb Vyacheslaw Vassilievich Stepanov (1889 – 1959) que era set anys més gran que ell i que va ser una influència important per a Pavel Sergeevich. Ell el va motivar a que assistís en el seu primer any a un seminari de Dimitri Fedorovich Egorov. En el segon any a la universitat, Alexandroff va entrar en contacte amb Nikolai Luzin i va passar a ser el seu alumne.

El 1915, Alexandroff va publicar el seu primer gran resultat: proposat per Luzin, Alexandroff va demostrar que tot conjunt no numerable de Borel conté un subconjunt perfecte. En la demostració utilitzava mètodes que destacaven per ser innovadors i d'aplicació de més abast que només aquesta demostració.

És aquell mateix any, a una trobada d'alumnes a l'octubre, en el que Alexandroff coneix a Pavel Samuilovich Urysohn.

Urysohn va néixer el 1898 a Odessa, Ucraïna, en el sí d'una família benestant d'ascendència jueva. El seu pare era un home dedicat al món financer i ell era l'últim fill de la família, amb una diferència considerable d'edat amb les seves germanes grans. Va començar a estudiar més aviat que la majoria de nens de la seva edat, i des de jove va mostrar interès en la física i la química.

La seva mare va morir l'any 1909 i l'any següent Pavel Samuilovich, el seu pare i la seva germana més jove es van mudar a Moscou.

Urysohn va estudiar la secundària a Moscou a una escola privada, i el 1915 va entrar a la Universitat de Moscú a estudiar física. Després de començar a anar a conferències de Luzin i Egorov, va decidir centrar-se en les matemàtiques i deixar la física relegada a un segon pla.

Mentre Urysohn estava centrat en els seus estudis a la universitat i en investigació, Alexandroff va tenir un moment difícil en la seva carrera. Després de l'èxit que havia tingut amb els conjunts no numerables de Borel, Luzin va veure el potencial que tenia i li va proposar resoldre la hipòtesi del continu, un dels grans problemes sense resoldre de la teoria de conjunts. Va ser incapaç de resoldre-la, fet que va fer que pensés que no valia per tenir una gran carrera matemàtica, i es va mudar a Novgorod-Severskii, on va ser productor de teatre. Després, va estar a Chernikov on va donar conferències en rus i altres llengües i va establir amistat amb tot tipus d'artistes.

Per la revolució russa, va passar un període a la presó durant 1919 acusat de col·laborar amb els Bolxevics, però algunes persones influents van intervenir per a què fos alliberat. En sortir va estar una època entre 1920 i 1921 vivint a Smolensk i ensenyant a la Universitat de Smolensk, mentre anava a Moscou un cop al mes per estar en contacte amb altres matemàtics i preparar-se els seus exàmens. Luzin i Egorov havien fet llavors un grup de recerca a la Universitat de Moscou que els estudiants anomenaven Luzitania i van acceptar a Alexandroff quan va tornar.

Urysohn s'estava preparant també els mateixos exàmens de la universitat i van començar a estudiar junts i van establir una gran amistat durant l' hivern de 1920-1921.

Durant l'estiu de 1921, alguns estudiants que formaven part de Luzitania van llogar una casa a un poble de Burkovo. Urysohn estava centrat en un problema que Egorov li havia plantejat: determinar una definició intrínseca de la dimensió que fos aplicable a corbes i a superfícies. Un matí d'agost, li va revelar a Alexandroff que havia trobat la solució i va completar l'article relatiu al problema a la primavera de 1922. El va enviar a la revista *Fundamenta Mathemaicae* on el van publicar en dos volums, un l'ant 1925 i l'altre el 1926.

Al juliol de 1922, Alexandroff i Urysohn van anar a passar l'estiu a Bolshev on, basant-se en el llibre *Grundzüge der Mengenlehre* de Hausdorff, van començar a estudiar conceptes de topologia, treballant amb espais compactes i exposant resultats de gran importància. El resultat d'aquest treball conjunt va ser el famós *Mémoire sur les espaces compactes* que van completar al gener de 1923 però que no va ésser publicat fins l'any 1929.

En els estius de 1923 i 1924 van visitar Göttingen i van mostrar els seus resultats, entre d'altres, a Emmy Noether (1882 – 1935), Richard Courant (1888 – 1972) i David Hilbert (1862 – 1943), que van quedar molt impressionats. Van visitar a Hausdorff a Bonn i va quedar fascinat per la direcció que havien près en la topologia.

Alexandroff i Urysohn van anar a visitar LEJ Brouwer (1881 – 1966) a Holanda i a París a l'agost de 1924, i després van decidir estar de vacances a la Bretanya, concretament al poble de Batz. El 17 d'agost, mentre nedaven a l'Atlàntic, van anar a una cova a l'oceà. Una gran onada els va arrossegar, provocant la mort de Urysohn. Alexandroff va pensar que estava inconscient i el va portar fins a la platja, però el metge que va arribar va confirmar la seva mort. Alexandroff es va encarregar de que li fessin un enterrament jueu, i al setembre va tornar a Moscou.

Alexandroff va anar a Göttingen tots els estius entre 1925 i 1926 i va establir una gran amistat amb Heinz Hopf (1894 – 1971) amb el qual van donar un seminari de topologia a Göttingen. També va treballar amb Emmy Noether, i sempre va considerar Noether, Hilbert i Brouwer com els seus professors, a més de Luzin i Egorov. Alexandroff també va ensenyar a la Universitat de Moscú des de 1924 on va organitzar un seminari de topologia.

Durant el curs 1927 – 1928 va anar amb Hopf a Princeton al Estats Units, on va col·laborar amb Solomon Lefschetz (1884 – 1972), Oswald Veblen (1880 – 1960) i James Alexander (1888 – 1971) i van fer grans avenços en la topologia. Van planejar amb Hopf publicar conjuntament una gran obra de diversos volums sobre topologia, el primer dels quals es va publicar el 1935, i va ser l'únic ja que la Segona Guerra Mundial va impedir que continués la col·laboració.

El 1929 va ser l'any en el qual va ser nomenat professor a la Universitat de Moscou i en el qual va iniciar la seva amistat amb Andrey Kolmogorov (1903 – 1987). Junts van comprar una casa el 1935 a Komarovka, un poble proper a Moscú, on van rebre als matemàtics més importants com Hadamard, Fréchet, Banach, Hopf o Kuratowski.

El 1938 Alexandroff es va unir a l' Institut Setklov de Matemàtiques sense deixar de donar classes a la universitat. Va escriure uns 300 treballs al llarg de la seva carrera, entre els quals destaquen els avenços en la teoria de l'homologia o en topologia algebraica.

Va treballar molt en l'educació dels seus alumnes, en els quals sempre va tenir una influència més enllà de les matemàtiques.

Alexandroff sempre va ser molt ben valorat i va obtenir grans reconeixements. Va ser el president de la Societat Matemàtica de Moscou entre 1932 i 1964, vice president del Congrés Internacional de Matemàtics entre 1958 i 1962, i membre de diverses societats, com l'Acadèmia de Ciències de la URSS, l'Acadèmia de Ciències de Göttingen o l' Acadèmia Nacional de Ciències dels Estats Units.

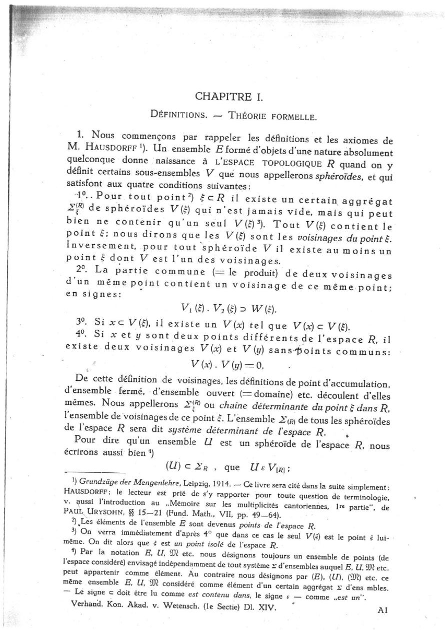
Va editar diverses revistes sobre matemàtiques, com la famosa Uspekhi Matematicheskikh Nauk, i va rebre molts premis en la Unió Soviètica, com el premi Stalin l'any 1943.

Va morir el 1982 a Moscou.

3.3 La memòria d'Alexandroff i Urysohn

Durant l'estiu de 1922, Pavel Sergeevich Alexandroff i Pavel Samuilovich Urysohn van llogar una casa de camp i van començar el seu estudi conjunt en topologia, el resultat del qual va ser el famós *Mémoire sur les espaces compactes.*

Al gener de 1923 el manuscrit ja estava preparat per a la seva publicació i el van enviar a la revista *Fundamenta Mathematicae*, on el van acceptar, però com feia poc que havien rebut l'extens article de Urysohn titulat *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes*, que van publicar en dos volums, l'editor de la revista no era capaç de publicar en un futur proper el manuscrit que havien enviat. L.E.J. Brouwer va suggerir enviar-la a la revista *Verhandelingen der Kon Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* per accelerar la seva publicació, però per la necessitat d'enviar els documents i les proves corresponents entre Moscou i Amsterdam, la publicació de la memòria es va endarrerir fins l'any 1929.



CHAPITRE I.

DÉFINITIONS. — THÉORIE FORMELLE.

1. Nous commençons par rappeler les définitions et les axiomes de M. HAUSDORFF [1]). Un ensemble E formé d'objets d'une nature absolument quelconque donne naissance à L'ESPACE TOPOLOGIQUE R quand on y définit certains sous-ensembles V que nous appellerons *sphéroïdes*, et qui satisfont aux quatre conditions suivantes:

1°. Pour tout point [2]) $\xi \subset R$ il existe un certain aggrégat $\Sigma_\xi^{(R)}$ de sphéroïdes $V(\xi)$ qui n'est jamais vide, mais qui peut bien ne contenir qu'un seul $V(\xi)$ [3]). Tout $V(\xi)$ contient le point ξ; nous dirons que les $V(\xi)$ sont les *voisinages du point* ξ. Inversement, pour tout sphéroïde V il existe au moins un point ξ dont V est l'un des voisinages.

2°. La partie commune (= le produit) de deux voisinages d'un même point contient un voisinage de ce même point; en signes:

$$V_1(\xi) \,.\, V_2(\xi) \supset W(\xi).$$

3°. Si $x \subset V(\xi)$, il existe un $V(x)$ tel que $V(x) \subset V(\xi)$.

4°. Si x et y sont deux points différents de l'espace R, il existe deux voisinages $V(x)$ et $V(y)$ sans points communs:

$$V(x) \,.\, V(y) = 0.$$

De cette définition de voisinages, les définitions de point d'accumulation, d'ensemble fermé, d'ensemble ouvert (= domaine) etc. découlent d'elles mêmes. Nous appellerons $\Sigma_\xi^{(R)}$ ou *chaîne déterminante du point* ξ *dans* R, l'ensemble de voisinages de ce point ξ. L'ensemble $\Sigma_{(R)}$ de tous les sphéroïdes de l'espace R sera dit *système déterminant de l'espace* R.

Pour dire qu'un ensemble U est un sphéroïde de l'espace R, nous écrirons aussi bien [4])

$$(U) \subset \Sigma_R \ , \quad \text{que} \quad U \,\varepsilon\, V_{[R]} \,;$$

[1]) *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914. — Ce livre sera cité dans la suite simplement: HAUSDORFF; le lecteur est prié de s'y rapporter pour toute question de terminologie, v. aussi l'introduction au „Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, 1re partie", de PAUL URYSOHN, §§ 15—21 (Fund. Math., VII, pp. 49—64).

[2]) Les éléments de l'ensemble E sont devenus *points de l'espace* R.

[3]) On verra immédiatement d'après 4° que dans ce cas le seul $V(\xi)$ est le point ξ lui-même. On dit alors que ξ est *un point isolé* de l'espace R.

[4]) Par la notation E, U, $\mathfrak{M}$ etc. nous désignons toujours un ensemble de points (de l'espace considéré) envisagé indépendamment de tout système Σ d'ensembles auquel E, U, $\mathfrak{M}$ etc. peut appartenir comme élément. Au contraire nous désignons par (E), (U), $(\mathfrak{M})$ etc. ce même ensemble E, U, $\mathfrak{M}$ considéré comme élément d'un certain aggrégat Σ d'ens mbles. — Le signe $\subset$ doit être lu comme *est contenu dans*, le signe ε — comme „*est un*".

Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie) Dl. XIV. A1

Figura 3.1: Primera pàgina de la memòria d'Alexandroff i Urysohn publicada l'any 1929.

La memòria estava dedicada a Egorov. En un llibre autobiogràfic publicat l'any 1979, citat per [Cameron, 1982], Alexandroff narra un episodi que justifica aquesta menció a Egorov: una discussió entre Luzin i Egorov sobre la teoria dels espais topològics en la qual Luzin tenia la visió de que era una teoria poc útil i sense gaire interès, una teoria ideal, mentre que Egorov sempre havia considerat que la teoria ideal era necessària i important.

En la tercera edició russa de la memòria publicada l'any 1971, citada també a [Cameron, 1982],Alexandroff va descriure en el pròleg les motivacions que van tenir ell i Urysohn per dur a terme aquest estudi. Consideraven a Fréchet i a Hausdorff els fundadors de la topologia general. Li atorgaven a Fréchet, principalment a la seva tesi doctoral, la introducció d'alguns conceptes fonamentals com la compacitat i la completesa, però Fréchet sempre ho va considerar com una component de l'anàlisi i el resultat que va obtenir va ser un catàleg de diferents espais abstractes i no una teoria sistemàtica del que es podia treure en comú de tots ells. Alexandroff i Urysohn consideraven que Hausdorff era qui havia donat les bases de la teoria de conjunts en el llibre Grundzüge der Mengenlehre i hi van veure una nova branca en la qual investigar començant amb el que els va semblar el concepte més prometedor en el qual avançar: la compacitat.

Mémoire sur les espaces compactes representa el primer tractament sistemàtic de la compacitat i l'assentament de la definició que s'utilitza avui. Conté definicions i resultats nous i que van ser la base d' investigacions posteriors.

Es troba definida la noció de punt regular com aquell tal que per qualsevol entorn del punt, existeix un altre entorn que la seva adherència està continguda en el primer entorn. Un espai R el van anomenar espai regular si tots els seus punts són regulars. Aquest tipus d'espai topològic l'utilitzarien nombroses vegades al llarg de la memòria i van remarcar que aquests espais es poden definir de manera axiomàtica amb els tres primers axiomes donats per Hausdorff i substituint el quart pels dos següents:

IV. *Per dos punts qualssevol x i y de l'espai R, existeix un entorn $U(x)$ tal que $U(x) \cdot y$ és buida.*

V. *Per qualsevol punt ξ de l'espai R i el seu entorn $V(\xi)$, existeix un entorn $U(\xi)$ tal que si $x \subset R \setminus V(\xi)$, existeix un entron $U(x)$ tal que $U(\xi) \cdot U(x)$ és buida.* [1]

Cal remarcar una diferència de notació en la memòria respecte la utilitzada actualment: per expressar intersecció utilitzen un punt $\cdot$.

Per aquests dos axiomes, van referenciar a Maurice Fréchet i a Leopold Vietoris (1891 – 2002). Vietoris va investigar en topologia des de la dècada de 1910 i, tot i que no en aquest treball no s'ha entrat en l'estudi de la seva obra, Alexandroff i Urysohn coneixien els seus escrits.

Van estudiar en profunditat els espais *normals*, que són els espais topològics en els quals per dos tancats disjunts qualssevol existeixen dos entorns respectivament també disjunts.

Van introduir el concepte d'espai *H-tancat*, que és l'espai que és tancat en qualsevol espai Hausdorff que el conté, i van mostrar que els espais H-tancats i Hausdorff no tenen perquè ser compactes i ho són si, i només si, són regulars.

En els espais H-tancats, és destacable una propietat de separació definida per Urysohn que se situaria entre l'axioma de separació de Hausdorff i la regularitat: un espai X s'anomena *espai de Urysohn* si dos punts diferents qualssevol de X estan continguts en dos entorns amb adherència disjunta.

La memòria conté l' inici de la teoria dels cardinals invariants, on destaca la presentació del mètode de ramificació en espais topològics generals que utilitzen per demostrar, per exemple, que la cardinalitat d'un espai Hausdorff no compacte sense punts aïllats no és menor que 2^{ω}, i que va esdevenir una de les tècniques més efectives en diverses branques de les matemàtiques [Anrkhangelskii, i Tikhomirov,1998].

En la pàgina 7 de la memòria es troba la definició de compacitat, referint-se a l'actual compacitat seqüencial, que mantenen que un espai R és compacte si tot conjunt infinit contingut en R té almenys un punt d'acumulació.

Seguidament es troba la definició d'una nova noció, la de punt d'acumulació completa:

Un punt ξ s'anomena punt d'acumulació completa del conjunt A si, per qualsevol

[1] De l'original [Alexandroff i Urysohn, 1929, p.5]:

IV. *Quel que soient les deux points x et y de l'espace R, il existe un voisinage $U(x)$ tel que $U(x) \cdot y = 0$*

V. *Quel que soit le point ξ de l'espace R et son voisinage $V(\xi)$, il existe un voisinage $U(\xi)$ tel que si $x \in R - V(\xi)$,* on a un $U(x)$ vérifiant la relation $U(\xi) \cdot U(x) = 0$.

entorn $V(\xi)$, el cardinal de $A \cap V(\xi)$ és el mateix que el cardinal de A[2]

Aquest concepte l'utilitza com una de les caracteritzacions de la compacitat dels espais topològics:

1. Cadascuna de les propietats següents és necessària i suficient per la compacitat de l'espai topològic R:

a) *Tot conjunt numerable dins de R té almenys un punt d'acumulació completa.*

b) *(Teorema de Cantor): tota successió decreixent numerable de conjunts tancats $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ...$ no buits i situats dins de R, té almenys un punt pertanyent a tots els conjunts F_n.*

c) *(Teorema de Heine-Borel): De tota infinitat numerable de conjunts recobrint l'espai R de tal manera que tot punt $\xi \subset R$ és interior a un (o més) dels conjunts, un pot extreure un nombre finit que compleixen la mateixa propietat.*[3]

Cal notar que la necessitat d'aquestes propietats ja apareix al treball de Hausdorff, però la suficiència no havia aparegut en la literatura científica tot i la senzillesa de demostració.

El que Alexandroff i Urysohn anomenaven compacitat en aquestes caracteritzacions és, com ja s'ha dit, el que actualment es coneix com compacitat numerable.

Van remarcar que el resultat anterior fa que la propietat d'un espai de ser compacte sigui possible reduir-la a propietats de formacions numerables, ja fossin successions numerables de conjunts tancats o conjunts numerables de punts. Però basant-se en el que era una idea intuïtiva inherent a la paraula compacitat, la idea de tenir una 'clausura absoluta', consideraven que el rol fonamental que jugava la numerabilitat no era un punt de partida adequat.

Amb aquestes consideracions en ment per deslliurar-se de les imposicions de numerabilitat, van donar el següent teorema:

I. Les tres propietats següents d'un espai topològic R són equivalents:

A) *Tot conjunt infinit dins de R posseeix almenys un punt d'acumulació complet.*

B) *Tota successió infinita ben ordenada de conjunts tancats decreixents posseeix almenys un punt pertanyent a tots els conjunts de la successió.*

---

[2]De l'original [Alexandroff i Urysohn, 1929, p.7]: *Un point ξ est dit point d'accumulation complète de l'ensemble A, si quel-que soit le voisinage $V(\xi)$, la puissance de $A \cap V(\xi)$ est égale à celle de A tout entier.*

[3]De l'original [Alexandroff i Urysohn, 1929, p.7]:

1. Chacune des propiétés ci-dessous est nécessaire et suffisante pour la compacité de l'espace topologique R:

a) *Tout ensemble dénombrable situé dans R possède au moins un point d'accumulation complète.*

b) *(Théorème de Cantor): toute suite décroissante dènombrable d'ensembles fermés $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ...$ non vides situés dans R, possède au moins un point appartenant à tous les ensembles F_n.*

c) *(Théorème de Heine-Borel): de toute infinité dénombrable de domaines recouvrant l'espace R de façon que tout $\xi \subset R$ est intérieur à un (ou plusieurs) de ces domaines, on peut extraire un nombre fini jouissant de la même propieté.*

C) *De qualsevol infinitat de dominis que recobreixen l'espai R, un pot extreure un nombre finit de dominis amb la mateixa propietat.*[4]

Van denominar *bicompacte* a un espai que complia qualsevol d'aquestes tres condicions. La idea del nom prové de que per a ells la bicompacitat era la conjunció de dues propietats: la compacitat (l'actual compacitat numerable) i la compacitat final (que actualment es coneix com propietat de Lindelöf, que es caracteritza per l'existència d'un subrecobriment numerable en qualsevol recobriment obert). Aquesta és la primera caracterització de l'actual compacitat.

En la demostració d'aquest resultat, que no s'analitzarà aquí i es pot trobar a [Alexandroff i Urysohn, 1929, p.9], utilitza alguns conceptes pertanyents a la teoria de conjunts, com per exemple els cardinals regulars.

Cal esmentar que l' indexació utilitzada en la presentació d'aquests dos resultats que donen caracteritzacions de, expressades en termes moderns, la compacitat numerable i la compacitat, és la mateixa que apareix a la memòria. Alexandroff i Urysohn van utilitzar les lletres minúscules per a la compacitat numerable i les lletres majúscules per a la compacitat.

En l'obra es troba un inici de la teoria dels espais localment compactes. Començant amb un exemple d'un espai Hausdorff no compacte, numerablement compacte, localment compacte i localment metritzable, l' espai ω_1 de tots els ordinals numerables, van estudiar les seves propietats.

Van veure que un espai numerablement compacte no té per què ser tancat en qualsevol espai Hausdorff que el conté i que la conjunció de numerablement compacte i localment metritzable no implica ni compacitat ni metritzabilitat. Van estudiar especialment els casos en els quals un espai localment compacte i localment metritzable és metritzable, i van arribar a que depenia de certes propietats de recobriments.

La memòria d'Alexandroff i Urysohn presenta la primera definició de la compacitat tal i com la coneixem avui en dia i molts resultats dels espais Hausdorff compactes van néixer en aquesta obra. Els resultats i definicions estan donats amb el nivell d'abstracció precís per la generalitat que requerien i va suposar la llavor per a que altres matemàtics avancessin en les diferents direccions que plantegen.

Un fet que destaca és que no van treballar el problema de la preservació de la compacitat per al producte d'espais topològics i va ser Andréi Nikoláievich Tychonoff (1906 – 1993) qui va definir l'operació de producte arbitrari d'espais topològics i va completar aquest estudi.

---

[4] De l'original [Alexandroff i Urysohn, 1929, p. 8]:

I. Les trois propietés suivantes d'un espace topologique R, sont équivalents:

A) *Tout ensemble infini situé dans R possède au moins un point d'accumulation complète.*

B) *Toute suite infinie bien ordonnée d'ensembles fermés decroissants possède au moins un point appartenant à tous les ensembles de la suite.*

C) *De toute infinité de domaines recouvrant l'espace R, on peut extraire un nombre fini de domaines jouissant de la même propieté.*

3.4 La figura de Andrey Nikolayevich Tychonoff

Andrey Nikolayevich Tychonoff va nèixer a Gzhatsk, a la regió de Smolensk. Va aprovar els exàmens de l'educació secundària sense anar a classe i va entrar a la Universitat de Moscou l'any 1922, al departament de matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Física.

L'any 1923 va assistir a un curs de topologia del continu que donava Alexandroff i va començar a interessar-se per aquesta branca de les matemàtiques. Des del principi va ser un alumne destacat, i el primer article el va publicar l'any 1925 sense haver-se graduat, en el qual tractava els resultats d'Alexandroff i Urysohn sobre les condicions d'un espai topològic per a que fos metritzable.

El 1926 va donar la definició del que es coneix com la topologia producte, que li va permetre fer molts avenços. Els resultats que va obtenir li van donar reconeixement internacional abans de graduar-se i, el 1927, va prosseguir els seus estudis com a estudiant d'investigació en la mateixa Universitat de Moscou.

A més del talent demostrat en la topologia, Tychonoff també va tractar altres àrees de les matemàtiques en les quals va obtenir importants resultats, com per exemple l'anàlisi funcional, la teoria d'equacions diferencials ordinàries i en derivades parcials, la matemàtica computacional o la física matemàtica. El seu treball científic abastava camps abstractes, considerats de matemàtiques pures, i d'altres totalment aplicats.

El 1935 va defensar la seva tesi d'habilitació, que tractava sobre les equacions funcionals de Volterra i les seves aplicacions en la física matemàtica. En ella, donava una extensió del mètode d' Émile Picard per aproximar la solució d'una equació diferencial. Aquell mateix any va ser nomenat professor de la Universitat de Moscou.

Durant la dècada de 1940 va seguir el seu estudi en física matemàtica i pel seu treball durant aquells anys va rebre el Premi Estatal l'any 1953. L'any 1948 va començar a estudiar un altre tipus de problemes, en els quals hi havia un paràmetre en el terme de la derivada més alta.

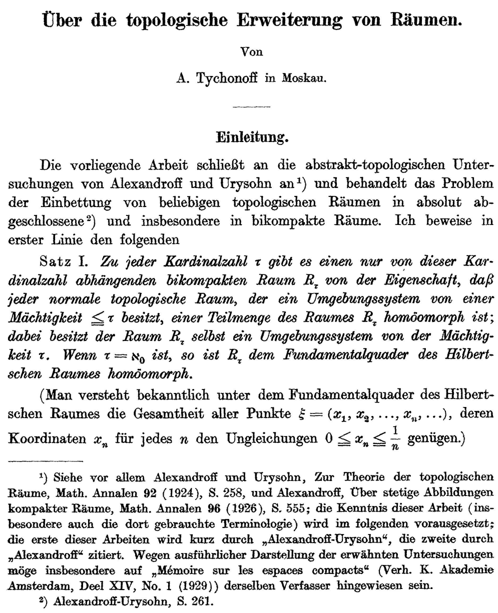
En els anys 60 va publicar una sèrie d'articles sobre problemes mal posats, i amb les seves capacitats computacionals va donar algoritmes per a poder resoldre'ls. Pel seu treball en aquests problemes va rebre el Premi Lenin l'any 1966 i aquell mateix any va ser elegit membre de l' Acadèmia de Ciències de la URSS.

Durant la seva vida va ocupar diferents posicions a la Universitat de Moscou, com la càtedra a la Facultat de Física Matemàtica o la càtedra de matemàtiques computacionals a la Facultat d'Enginyeria Matemàtica. Va ser el primer degà de la Facultat d'Informàtica i Cibernètica i director adjunt de l'Institut de Matemàtica Aplicada de l'Acadèmia de Ciències de la URSS.

Va morir a Moscou l'any 1993.

3.5 Sobre el teorema de Tychonoff

En l'article *Über die topologische Erweiterung von Räumen (Sobre l'extensió topològica dels espais)* publicat l'any 1929 a *Mathematische Annalen* (veure Figura 3.2), Andrey Nikoláye- vich Tychonoff analitza sota quines condicions un espai topològic X (prenent com a definició la donada per Hausdorff, és a dir, els actuals espais Hausdorff) admeten un submergiment (o sigui, una aplicació contínua i injectiva tal que indueix un homeomorfisme entre X i la seva imatge) en un espai Hausdorff compacte.



Über die topologische Erweiterung von Räumen.

Von

A. Tychonoff in Moskau.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schließt an die abstrakt-topologischen Untersuchungen von Alexandroff und Urysohn an [1]) und behandelt das Problem der Einbettung von beliebigen topologischen Räumen in absolut abgeschlossene [2]) und insbesondere in bikompakte Räume. Ich beweise in erster Linie den folgenden

Satz I. *Zu jeder Kardinalzahl τ gibt es einen nur von dieser Kardinalzahl abhängenden bikompakten Raum R_τ von der Eigenschaft, daß jeder normale topologische Raum, der ein Umgebungssystem von einer Mächtigkeit $\leqq \tau$ besitzt, einer Teilmenge des Raumes R_τ homöomorph ist; dabei besitzt der Raum R_τ selbst ein Umgebungssystem von der Mächtigkeit τ. Wenn $\tau = \aleph_0$ ist, so ist R_τ dem Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes homöomorph.*

(Man versteht bekanntlich unter dem Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes die Gesamtheit aller Punkte $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, deren Koordinaten x_n für jedes n den Ungleichungen $0 \leqq x_n \leqq \frac{1}{n}$ genügen.)

[1]) Siehe vor allem Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen **92** (1924), S. 258, und Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Annalen **96** (1926), S. 555; die Kenntnis dieser Arbeit (insbesondere auch die dort gebrauchte Terminologie) wird im folgenden vorausgesetzt; die erste dieser Arbeiten wird kurz durch „Alexandroff-Urysohn“, die zweite durch „Alexandroff“ zitiert. Wegen ausführlicher Darstellung der erwähnten Untersuchungen möge insbesondere auf „Mémoire sur les espaces compacts“ (Verh. K. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1 (1929)) derselben Verfasser hingewiesen sein.

[2]) Alexandroff-Urysohn, S. 261.

Figura 3.2: Primera pàgina de l'article de Tychonoff publicat l'any 1929.

S'exposaran a continuació les definicions i els resultats clau que van motivar aquest article de Tychonoff.

Aquest problema del submergiment té l'origen en el teorema de metritzabilitat donat per Urysohn l'any 1925 en l'article *Zum Metritzationsproblem* i que enunciat en termes moderns el podem trobar a [Pascual i Roig, 2004, p. 158]:

Teorema: Tot espai X normal amb una base numerable d'oberts (és a dir, que compleix el segon axioma de numerabilitat) és metritzable.

Per a la demostració del teorema, és necessari conèixer un resultat previ [Pascual i Roig, 2004, p.151]:

Lema d'Urysohn: Sigui X un espai normal, i siguin A, B tancats disjunts de X. Llavors, existeix una funció contínua $f \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$, per a tot $x \in A$ i $f(x) = 1$, per a tot $x \in B$.

Aquest lema dóna una nova caracterització dels espais normals, ja que en realitat es tracta d'una doble implicació.

De fet, el que Urysohn va demostrar és que sota les hipòtesis del teorema, és possible trobar un submergiment a I^ω és compacte, que es pot demostrar amb successions per una mena de procés diagonal amb successions de successions. Com que és un espai mètric, és suficient veure que tota successió de I^ω té una parcial convergent. Cada element de la successió α_i és de la forma $(x_{i1}, x_{i2}, ...) , \dots)$, i si es considera el primer terme de cada elements de la successió, s'obté la successió (x_{i1}), que és una successió d'elements de l' interval unitat que és compacte i, per tant, admet una parcial convergent. És a dir, existeix un subconjunt infinit A_1 dels naturals tal que la successió d'aquests primers termes convergeix a un element $a_1 \in I$. Repetint per a la successió $x_{i2})$, hi ha un subconjunt $A_2 \subseteq A_1$ tal que convergeix a un element $a_2 \in I$. Iterant el procés, s'obté una successió de subconjunts infinits de $\mathbb{N}$ que compleixen $A_{j+1} \subseteq A_j$, i un punt $a = (a_1, a_2, \dots)$, on cada a_n és el límit de la successió (x_{in}) per $i \in A_i$. Si es defineix el conjunt A com aquell que en l'element n-èssim té l'element n-èssim de A_i, aquest conjunt és infinit i defineix una parcial $(\alpha_n)_n$ que la seva columna n-èssima convergeix a a_n.

Tychonoff comença definint els espais completament regulars:

Un espai topològic s'anomena completament regular, si per a cada punt x_0 i per cada conjunt tancat A que no el conté es pot definir una funció $f(x)$ que és contínua en tot l'espai, que satisfà $0 \leq f(x) \leq 1$ en tot l'espai i que, a més, és igual a 0 en x_0 i en tots els punts de A és igual a 1.[5]

Tychonoff pren $R_\tau = I^\tau$. Utilitza implícitament el teorema de Zermelo, que és equivalent a l'axioma de l'elecció, per escollir un representant completament ordenat de τ, i així les construccions es poden fer per inducció transfinita. Els elements de τ són $1 < 2 < ... < \alpha < \alpha + 1 < ...$

En general, R_τ és un espai mètric. Per tant, el primer pas és definir una topologia a R_τ, i així en la pàgina 546 es troba la introducció a la topologia producte:

Sigui J_α un conjunt d'intervals de cardinal τ. Un punt x de l'espai R_τ està definit per l'expressió $t_1, t_2, ..., t_\alpha, ...$ de les çoordenades"t_α, on t_α és un punt de J_α, és a dir, un nombre real $0 \leq t_\alpha \leq 1$. Es defineixen els entorns de la següent forma: Sigui $x_0 = t_1^0, t_2^0, ..., t_\alpha^0$ un punt de R_τ. Triem un nombre finit d'intervals $J_{\alpha_1}, ..., J_{\alpha_k}$ i per cadascun d'aquests intervals J_{α_i}, dos nombres racionals $\tau'_{\alpha_i} < t^0_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$; un entorn de $x_0 = t_1^0, t_2^0, ..., t_\alpha^0$ és per definició el conjunt de punts $x = t_1, t_2, ..., t_\alpha, ...$ que satisfan $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$.[6]

[5]De l'original [Tychonoff, 1929, p. 545]: *Ein topologischer Raum heißt vollständig regulär, wenn zu jedem Punkte x_0 und zu jeder ihn nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge A eine im ganzen Raume stetige Funktion $f(x)$ definiert werden kann, die im ganzen Raume der Bedingung genügt und die überdies in x_0 gleich 0 und in sämtlichen Punkten von A gleich 1 ist.*

[6]De l'original [Tychonoff, 1929, p.546]: *Es sei J_α eine Menge von der Mächtigkeit von abstrakt gegebenen zueinander fremden Einheitsstrecken $0 \leq t \leq 1$. Ein Punkt x des Raumes R_τ is definitionsgemä der Inbegriff $t_1, t_2, ..., t_\alpha, ...$ von "Koordinaten" t_α ein Punkt von J_α also einen reelle Zahl $0 \leq t_\alpha \leq 1$ ist. Die Umgebungsdefintion geschieht folgendermaen: Es sei $x_0 = t_1^0, t_2^0, ..., t_\alpha^0$ ein Punkt von R_τ. Wir wählen beliebig endlichviele $J_{\alpha_1}, ..., J_{\alpha_k}$ und auf jedem dieser Intervalle J_{α_i} zwei rationale Zahlen $\tau'_{\alpha_i} < t^0_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$; eine Umgebung von $x_0 = t_1^0, t_2^0, ..., t_\alpha^0$ besteht dann*

Aquest sistema d'entorns definit determina, en efecte, un espai topològic Hausdorff. Tychonoff imposa la racionalitat dels nombres τ'_{α_i} i τ''_{α_i} perquè així pot mantenir el control sobre el cardinal de I^τ, ja que llavors $\aleph_0 \cdot \tau = \tau$.

Per demostrar el teorema principal, Tychonoff també necessita que I^τ sigui compacte, que és un cas particular del que en l'actualitat es coneix com a teorema de Tychonoff [Pascual i Roig, 2004, p. 110]:

Teorema de Tychonoff: Sigui $X_{\alpha\alpha\in J}$ una família arbitrària d'espais topològics. Aleshores:

$$X = \prod(X_\alpha) \text{ és compacte } \iff X_\alpha \text{ són compactes per a tot } \alpha \in J$$

A continuació s'exposa l'esquema de la demostració que Tychonoff va utilitzar per provar que el producte arbitrari d'intervals és compacte.

Pel teorema d'Alexandroff-Urysohn, per veure que R_τ és compacte és suficient provar que tot conjunt infinit $E \subset R_\tau$ té un punt d'acumulació complet. El que fa és definir-lo determinant inductivament les seves coordenades.

Projectant E sobre J_1, s'obté el conjunt $E^1 \subset J_1$, i com que J_1 és compacte, escull un punt d'acumulació complet $t_1^0 \in J_1$. Amb el mateix procediment, escull punts d'acumulació de cada J_i i té $t_1^0, t_2^2, ..., t_\alpha^0, ...$ per $\alpha < \alpha_0$.

Denota $E_{n_i}^{\alpha_i}$ al conjunt de punts de E que compleixen que la seva coordenada t_{α_i}, compleix $|t_{\alpha_i} - t_{\alpha_i}^0| < \frac{1}{n_i}$, per $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k < \alpha_0$, que ho denota $E_{n_i}^{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}(|t_{\alpha_i} - t_{\alpha_i}^0| < \frac{1}{n_i})$.

Aleshores, la intersecció $E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot E_{n_k}^{\alpha_k}$ (com Alexandroff i Urysohn, Tychonoff utilitza $\cdot$ per expressar la intersecció) té el mateix cardinal que E.

El que vol ara és definir la coordenada $t_{\alpha_0}^0$ per a que sigui possible estendre la condició anterior per $\alpha_i \leq \alpha_0$. Per fer-ho, observa que per dos conjunts qualssevol A, B de I^τ i β un índex qualsevol, es compleix que $\pi_\beta(A \cdot B) \subset \pi_\beta(A) \cdot \pi_\beta(B)$.

Llavors, si es consideren els conjunts de la forma $F_{n_1 n_2 ... nk}^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k} = \pi_{\alpha_0}(E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot E_{n_k}^{\alpha_k})$, per $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k < \alpha_0$, aleshores

$$\prod_{i=1}^k F_{n_1 n_2 ... nk}^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k} = \prod_{i=1}^k \pi_{\alpha_0} \left[E_{n_1^i ... n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i ... \alpha_{k_i}^i} \right] \supset \pi_{\alpha_0} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i} \right)$$

i, com aquest té el mateix cardinal que E, llavors $\prod_{i=1}^k F_{n_1 n_2 ... nk}^{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k} \neq \phi$ i per tant, conté com a mínim un punt $t_{\alpha_0}^0 \in J_{\alpha_0}$ i construeix així un punt $x_0 = t_1^0, t_2^0, ..., t_\alpha^0, ...$ que és un punt d'acumulació complet de E.

Així doncs, Tychonoff demostra la compacitat per al producte infinit d'intervals.

En un article posterior titulat *Ein Fixpunksatz* publicat l'any 1935, en determinat punt necessita aquest teorema per a un producte arbitrari d'espais topològics arbitraris, no per intervals, i a la pàgina 772 es troba:

El producte d'espais bicompactes és també bicompacte. Aquest teorema es demostra literalment com la bicompacitat dels productes d'intervals. [7]

---

definitionsgemä aus allen Punkten $x = t_1, t_2, ..., t_\alpha, ...$, die den Bedingungen $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$.

[7] De l'original [Tychonoff, 1935, p. 772]: *Das Produkt von bikompakten Räumen ist wieder*

L'any 1937 el matemàtic txec Eduard Cech (1893 – 1960) va publicar a *Annals of Mathematics* l'article titulat *On bicompact spaces* en el qual va introduir nous conceptes com el que es coneix com la compactificació de Stone-Cech. En la primera part de l'article, exposa les idees i definicions que utilitzarà en el seu treball i estudia en profunditat el teorema de Tychonoff. En la pàgina 830 es troba enunciat:

El producte cartesià $S = B_i S_i$ de qualsevol conjunt d'espais bicompactes és un espai bicompacte.[8]

La demostració que planteja a continuació és essencialment la mateixa que havia fet Tychonoff anys enrere, llevat de modificacions menors i de notació ja que Tychonoff la va escriure per a intervals, però no cita en cap moment al matemàtic rus.

Aquest fet ha provocat certa controvèrsia sobre la veritable autoria del teorema de Tychonoff. En l'apèndix del famós llibre *Functional Analysis*, el conegut matemàtic Walter Rudin (1921 – 2010) escriu un apèndix amb algunes notes històriques en el qual es troba al final:

A.Tychonoff va provar això per al producte cartesià d'intervals i el va utilitzar per construir el que ara es coneix com la compactificació de Cech (o de Stone- Cech) d'un espai completament regular. E.Cech va provar el cas general del teorema de Tychonoff i va estudiar propietats generals de la compactificació. Per tant, sembla ser que Cech va provar el teorema de Tychonoff, mentre que Tychonoff va trobar la compactificació de Cech; una bona il·lustració de la fiabilitat històrica de la nomenclatura matemàtica.[9]

No es pot donar totalment la raó a Rudin en aquesta afirmació, ja que el mateix Tychonoff en el seu article de 1935 exposa que la demostració que correspondria al cas general és anàloga a la que va mostrar per al cas del producte cartesià d'intervals i, de fet, si s'analitza en profunditat la demostració de Cech es pot observar que és essencialment la mateixa que va fer Tychonoff.

A més, la compactificació que buscava Tychonoff era una que fos de la mateixa mida (en el sentit cardinal) que l'espai original, un problema que estava molt present en l'escola russa, mentre que l'objectiu de Cech era una compactificació maximal de X i les propietats que aquesta maximalitat provocava. Per tant, considero que el mèrit de la compactificació de Stone – Cech se li ha de donar a Cech i a Marshall Stone (1903 – 1989), que la va introduir en un article publicat el mateix any 1937 independentment del treball de Cech. Una anàlisi meticulosa d'aquesta part però, s'escapa dels objectius d'aquest treball.

---

bikompakt. Diesen Satz beweist man wörtlich so wie die Bikompaktheit des Produktes von Strecken.

[8] De l'original [Cech, 1937, p. 830]: *The cartesian product $S = B_i S_i$ of any family of bicompact spaces is a bicompact space.*

[9] De l'original [Rudin, 1991, p. 411]: *A. Tychonoff proved this for cartesian product of intervals and used it to construct what is now knon as the Cech (or Stone-Cech) compactification of a completely regular space. E. Cech proved the general case of the theorem and studied properties of the compactification. Thus it appers that Cech proved the Tychonoff theorem, whereas Tychonoff found the Cech compactification – a good illustration of the historical reliability of mathematical nomenclature.*

Conclusions

L'estudi de la gènesi i del desenvolupament d'una branca de les matemàtiques com la topologia general o d'un concepte tan valuós com és la compacitat és quelcom certament difícil, sinó impossible. En aquest treball, s'ha seguit l'evolució de les nocions i els desenvolupaments que van ser factors clau fins a l'assentament de la compacitat.

És indiscutible que els treballs publicats durant la segona meitat del segle XIX van ser la base de la transformació que es va produir en les matemàtiques a finals d'aquell segle i principis del segle XX. La rigorositat buscada per Bolzano o Weierstrass i els conceptes trencadors introduïts per Cantor van tenir gran repercussió en la forma que s'entenia que s'havien d'estudiar els resultats en matemàtiques.

Primerament, s'ha analitzat en profunditat el teorema de Heine-Borel. La importància d'aquest teorema rau en que marca l'inici d'aquest canvi de pensament en les matemàtiques. Aquesta nova noció d'extreure un subrecobriment finit d'un recobriment infinit, frase que se li atribueix plenament a Émile Borel, esdevindrà una idea bàsica de la topologia general.

Aquesta rellevància, més enllà del valor que ha tingut en la posteritat, s'evidencia en el que va comportar just després de que Borel l'enunciés usant els recobriments: l'interès que va despertar en els matemàtics contemporanis i les discussions que es van generar respecte quins noms mereixien aparèixer en el nom del teorema.

En general, el nom que majoritàriament s'accepta en l'actualitat a l'hora de referirnos a aquest resultat és Heine-Borel, tot i que Borel-Lebesgue també s'utilitza sobretot per referir-se als casos no unidimensionals. Han existit diferents opinions i justificacions sobre quins noms haurien d'aparèixer, però citant a Paul Montel en la carta de 1907 dirigida a Lebesgue, *un afegeix una valència cada vegada que algú utilitza un teorema, els noms dels teoremes de seguida s'assemblaran a fórmules de química orgànica.*[10] És a dir, cadascun dels raonaments es podrien considerar vàlids depenent del que es cregui que forma part del teorema, però no es pot afegir el nom de tots i cadascun dels autors que troba una aplicació o una ampliació, ja que no té sentit denominar-lo Teorema de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schonflies-Lebesgue.

L'increment de l'interès pels espais més generals que els espais mètrics que es va començar a produir a finals del segle XIX va desembocar al que posteriorment es

[10] De [Dugac, 1989, p.106]: *Si on ajoute une valence chaque fois que quelq'un se ser d'un théorème, les noms des théorèmes ressembleront bientôt à des formules de chimie organique.*

va conèixer com espais topològics. L'axiomatització dels espais abstractes va ser un punt de molta importància per al desenvolupament de les matemàtiques.

És innegable el paper fonamental que va tenir Maurice Fréchet en aquesta caracterització dels espais més generals i que va tractar com a part de l'anàlisi general, però la presentació axiomàtica que s'utilitza actualment li devem a Felix Hausdorff.

Hausdorff reconeixia que podien utilitzar-se indistintament diferents nocions com a fonaments dels espais topològics, però va triar el concepte d'entorn per ser el que considerava més general i que li va permetre una axiomàtica més senzilla i la precisió que buscava.

Quan la seva obra *Grundzüge der Mengenlehre* va començar a circular lliurement, que va ser en finalitzar la Primera Guerra Mundial, es va constatar el seu impacte. Durant els següents anys, es van presentar alternatives per a la definició d'espai topològic fins arribar a la que es coneix actualment.

En els anys 20 es produeix l'assentament definitiu de la definició de compacitat com la coneixem en l'actualitat, una de les idees més importants i més útils en les matemàtiques.

Una de les escoles on més es va notar la influència del llibre de Hausdorff va ser a Moscou, en la qual partint de les idees de Hausdorff i de Fréchet, els joves matemàtics russos Pavel Sergeevich Alexandroff i Pavel Samuilovich Urysohn van desenvolupar la topologia en noves i avantatjoses direccions. És principalment en la seva famosa obra *Mémoire sur les espaces compactes* on es fa patent el seu talent i on apareix la definició definitiva de la compacitat.

Seguint el camí d'Alexandroff i Urysohn, un dels seus millors alumnes, Andrey Nikolayevich Tychonoff, va estudiar en profunditat les investigacions anteriors i va trobar grans resultats, com la definició de la topologia producte i el famós teorema que porta el seu nom: el producte d'espais compactes és compacte.

Ens trobem en un punt de la història de les matemàtiques, més concretament, de la topologia, en el qual les seves bases es consideren més sòlides i es construeixen noves nocions amb la generalitat que es buscava en els anys anteriors.

Si comparem l'evolució del concepte de la compacitat amb la manera en la que es presenta quan s'ensenya actualment, veiem que en general quan s'estudien els espais topològics s'exposen les diferents caracteritzacions de manera inversa a la que correspondrien si seguissin l'ordre històric. Es presenta primerament la de la propietat del recobriment finit, que és la més general, per després donar les caracteritzacions que en els espais mètrics són equivalents.

D'aquesta forma, se segueix una manera bastant generalitzada de presentar les matemàtiques segons la qual alguns resultats esdevenen definicions per a que l'exposició dels temes sigui més clara, però amb la qual es perd la intuïció original.

Bibliografia

Alexandroff, P.S. i Urysohn, P.S. (1929). Mémoire sur les espaces compactes. *Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* 14, p.1-96.

Andre, N.R., Engdahl, S.M. Parker, A.E. (2013). An Analysisi of the Proofs of the Heine-Borel Theorem. *Mathematical Association of America.*

Arboleda, L.C. (2017). Introducción de la topología de vecindades en los trabajos de Fréchet y Hausdorff. *Rev. Acad. Colomb. Ex. Fis. Nat.* 41 (161), p. 528-537.

Arkhangelskii, A.V. Tikhomirov. (1998). Pavel Samuilovich Urysohn (1898 – 1924). *Russian Mathematical Surveys* 53:5 p.875-892.

Bernard, M. Tacchi, J.P. (2005). La genèse du théorème de recouvrement de Borel. *Revue d'histoire des mathématiques*, p.163-204.

Borel, É. (1895). Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Annales Scientifiques de l'École Normale Superieure,* 3e série, p.9-55.

Borel, É. (1898). Leçons sur la théorie des fonctions. *Gauthier-Villars et fils,* p.1-136.

Borel, É. (1903). Contribution à l'analyse arithmétique du continu. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 5e série, tome 9, p. 329-375.

Bourbaki, N. (1969) Eléments d'histoire des mathématiques. *Hermann.* Traducció al castellà per Jesús Hernández, (1972).

Cameron, D. E. (1982). The birth of Soviet Topology. *Topology Proceedings,* p. 329- 378.

Cantor, G. (1895-1897). Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Traducció de Philip E.B. J., (1955). *Dover publications.*

Dieudonné, P. (1981). History of Functional Analysis. *North-Holland Publ. Co. Amsterdam.*

Dugac, P. (1985). Le théorème des valeurs intermédiaires et la préhistoire de la topologie générale. *Riv. Stor. Sci.,* 2, p.51-70.

Dugac, P. (1989). Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schönflies-Lebesgue. *Arch. Internat. Hist. Sci.,* 39, p.69-110.

Cech, E. (1937). On bicompact spaces. *Annalen of Mathematics,* 38, p.823-844.

Fréchet, M. (1904). Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *C.R. Acad. Sci. Paris.* 139, p.848-850.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points de calcul fonctionnel. *Rendiconti Circolo Mat. Palermo* 22, p.1-74.

Fréchet, M. (1928). Les espaces abstraits. *Gauthier Villars.* (Reedició: 1989, *Éditions Jacques Gabay).*

Hadamard, M.J. (1912). Le calcul fonctionnel. *L'enseignement mathématique* 14, p.5-18.

Hadamard, M.J. (1897). Proc,. First International Congress of Mathematicians, Zurich. *Teubner Verlag* 1989.

Hallet, M. (1979). Towards a Theory of Mathematical Research Programmes (I). *Brit. I. Phil. Sci.* 30, p.1-25.

Hausdorff, F. (1914). Grundzüge der Mengenlehre. *Leipzig Verlag Von Veit.*

Hildebrandt, T.H. (1926). The Borel Theorem and its generalizations. *Bulletin of AMS,* p.423-474.

Lebesgue, H.L. (1904). Leçons sur l'intégration, 1er. Édition. p.104-105.

Márquez García, G. (2018). Una problematización del concepto de topològía en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet. *Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional,* Ciudad de México.

Maurey, B i Tacchi, J. (2005). La gènese du théorème de recouvrement de Borel. *Revue d'histoire des mathématiques* 11, p.163-204.

Moore, G.H. (2008). The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysisi and topology. *Historia Mathematica* 35, p.220 – 241.

Pascual, P. i Roig, A. (2004). Topologia. *Edicions UPC.*

Pier, J. (1980). Historique de la notion de compacite. *Historia Mathematica 7.* p.425-443.

Raman-Sundström, M. (2015). A pedagogical history of compactness. *The American Mathematical Monthly* 122(7), p. 619-635.

Rudin, W. (1991). Functional Analysis. *McGraw-Hill Inc.*

Schönflies, A. (1899). Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* VIII, p. 1-250.

Schönflies, A. (1907). Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel. Nota presentada per P.Appel. *Annalyse Mathématique*, p.22-23.

Tarrés Freixenet, M. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. Historia de la matemática del siglo XIX (2ª Parte). Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Tarrés Freixentet, J. (2014). Cien años de los "Grundzüge der Mengelehre" de Hausdorff. Ponencia presentada en el seminario de Historia de las Matemáticas en la Facultad de C. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid el 23 de abril de 2014.

Taylor, A.E. (1982). A Study of Maurice Fréchet: 1. His Early Work on Point Set

Theory and the Theory of Functionals. *Archive for History of Exact Sciences* 27, p.233-295.

Tychonoff, A.N. (1929). Über die Topologische Erweiterung von Räumen. *Mathematische Annalen* 102, p.544-561.

Tychonoff, A.N. (1935). Ein Fixpunktsatz. *Mathematische Annalen* 111 p. 767-776.