Relaciones de Indistinguibilidad Definidas Positivas

J. Recasens
Depto. Tecnología de la Arquitectura
Universidad Politécnica de Cataluña
Sant Cugat del Vallès
j.recasens@upc.edu

M. Santos Tomás
Depto. Tecnología de la Arquitectura
Universidad Politécnica de Cataluña
Barcelona
maria.santos.tomas@upc.edu

***Resumen*—Se proporcionan dos caracterizaciones geométricas de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas basadas en la inmersión isométrica de sus pseudodistancias naturalmente asociadas respecto a las t-normas arquimedianas continuas con generadores aditivos $t(x) = \arccos x$ y $t(x) = \sqrt{1-x}$.**

Dada la importancia de la t-norma $T_{\arccos x}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ en estas caracterizaciones, también se caracterizará dicha t-norma.

Palabras clave: t-norma, t-norma arquimediana continua, generador aditivo, relación de T-indistinguibilidad, distancia, matriz definida positiva, determinante de Cayley-Menger.

I. Introducción

En el volumen 157 de la revista Fuzzy Sets and Systems aparecen publicados dos artículos ([8], [13]) que estudian la relación entre la propiedad de ser definida positiva y la transitividad de una relación borrosa reflexiva y simétrica desde dos puntos de vista diferentes. En [13] el interés está en el estudio de medidas de similitud usualmente usadas en, por ejemplo, química combinatoria mientras que en [8] el foco está puesto en la caracterización de kernels (ver también [9]). Uno de los resultados más importantes compartidos por ambos artículos es que una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres-definida semipositiva (ver Definición III.2) si, y sólo si, es $T_{\arccos}$-transitiva (es decir, una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibildad) donde $T_{\arccos}$ es la t-norma arquimediana continua con generador aditivo $t(x) = \arccos x$. En [13] también se analiza la relación entre ser definida positiva y la t-norma con generador aditivo $t(x) = \sqrt{1-x}$. La transitividad respecto a esta t-norma también se considera en el estudio de particiones borrosas en otro artículo del mismo volumen de Fuzzy Sets and Systems [4]. Más tarde, también en esta revista, [3] insiste en considerar el problema abierto de caracterizar las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas.

Es, en efecto, un problema interesante y el presente trabajo proporciona dos caracterizaciones geométricas de dichas relaciones. Tras una sección de cuestiones preliminares, la sección III estudia y caracteriza la importante t-norma arquimediana continua $T_{\arccos}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ al relacionarlo con la anulación del determinante de relaciones de T-indistinguibilidad unidimensionales (ver Definición III.5). Los resultados de la sección IV proporcionan caracterizaciones de una relación borrosa reflexiva y simétrica definida positiva A basadas en la inmersión isométrica de pseudodistancias asociadas a A (Proposición II.9) mediante $T_{\sqrt{1-x}}$ y $T_{\arccos}$ en un espacio euclídeo y en una hiperesfera.

II. Preliminares

Esta sección contiene las definiciones y propiedades básicas relativas a t-normas, relaciones de T-indistinguibilidad y matrices definidas positivas que se necesitarán a lo largo del trabajo. Empecemos recordando la caracterización de las t-normas arquimedianas continuas por sus generadores aditivos.

Proposición II.1. *[7] Una t-norma T es arquimediana continua si, y sólo si, existe una función $t : [0,1] \to [0,\infty]$ decreciente y continua con $t(1) = 0$ tal que para todo $x,y \in [0,1]$*

$$T(x,y) = t^{[-1]}(t(x)+t(y))$$

donde $t^{[-1]}$ es la pseudo inversa de t definida por

$$t^{[-1]}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{si } x \in [0,t(0)] \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

T es estricta si $t(0) = \infty$ y no estricta en caso contrario. t se denomina un generador aditivo de T y dos generadores aditivos de la misma t-norma difieren sólo en una constante multiplicativa positiva.

A partir de una t-norma continua por la izquierda se puede definir su residuación y birresiduación. Si la t-norma se usa para modelizar la conjunción lógica, entonces su residuación y birresiduación representan la implicación y biimplicación lógicas respectivamente.

Definición II.2. *[7] Sea T una t-norma continua por la izquierda.*

- *La residuación $\overrightarrow{T}$ de T es la aplicación $\overrightarrow{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida para todo $x,y \in [0,1]$ por*
$$\overrightarrow{T}(x,y) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid T(x,\alpha) \leq y\}.$$
- *La birresiduación $\overleftrightarrow{T}$ de T es la aplicación $\overleftrightarrow{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida para todo $x,y \in [0,1]$ por*
$$\overleftrightarrow{T}(x,y) = \text{mín}(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)).$$

Proposición II.3. *[7] Sea T una t-norma arquimediana continua y t un generador aditivo de T. Entonces para todo $x,y \in [0,1]$*

- $$\overrightarrow{T}(x,y) = t^{[-1]}(t(y)-t(x)).$$
- $$\overleftrightarrow{T}(x,y) = t^{-1}(|t(x)-t(y)|).$$

Necesitaremos el siguiente resultado que afirma que una t-norma continua por la izquierda puede recuperarse de su residuación.

Proposición II.4. *[1] Una t-norma es continua por la izquierda si, y sólo si,* $\inf\{\alpha \in [0,1] \mid \overrightarrow{T}(x,\alpha) \geq y\} = T(x,y)$ *para todo* $x,y \in [0,1]$.

Gracias a esta proposición, una t-norma continua por la izquierda puede recuperarse a partir de su residuación y por tanto la t-norma está caracterizado por ella. No es el caso cuando T no es continua por la izquierda tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo II.5. *[1] Consideremos las dos t-normas (no continuas por la izquierda)* T_1 *y* T_2 *definidas por*

$$T_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}). \end{cases}$$

$T_1 \neq T_2$ *pero* $\overrightarrow{T}_1 = \overrightarrow{T}_2$.

Las relaciones de indistinguibilidad son uno de los tipos de relaciones borrosas más importantes porque borrosifican les conceptos de equivalencia e igualdad. Han sido estudiadas extensivamente tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. En [10] el lector puede hallar un panorama general de dichas relaciones.

Definición II.6. *[10], [15] Sea* T *una t-norma y* X *un conjunto. Una relación borrosa* E *en* X *es una relación de* T*-indistinguibilidad si, y sólo si, para todo* $x,y,z \in X$

- $E(x,x) = 1$ *(Reflexividad)*
- $E(x,y) = E(y,x)$ *(Simetría)*
- $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$ *(*T*-transitividad).*

Si $E(x,y) = 1$ *si, y sólo si,* $x = y$*, entonces se dice que* E *separa puntos.*

Definición II.7. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica* E *en* X *se llama un relación de proximidad o de tolerancia.*

Las relaciones de indistinguibilidad están relacionadas con distancias desde diferentes puntos de vista. Uno que se necesitará en la sección IV es el resultado enunciado en la Proposición II.9.

Definición II.8. *Sea* X *un conjunto. Una aplicación* $d : X \times X \to [0,\infty]$ *es una pseudodistancia o pseudométrica si, y sólo si, para todo* $x,y,z \in X$

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) + d(y,z)) \geq d(x,z)$

Si $d(x,y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$*, entonces* d *es una distancia o métrica en* X.

Proposición II.9. *[14] Sea* T *una t-norma arquimediana continua,* t *un generador aditivo de* T *y* X *un conjunto. Una relación borrosa* E *en* X *es una relación de* T*-indistinguibilidad si, y sólo si,* $t(E)$ *es una pseudodistancia en* X*.* E *separa puntos si, y sólo si,* $t(E)$ *es una distancia.*

Recordemos finalmente la definición de matriz definida positiva.

Definición II.10. *Una matriz real* A *simétrica* $n \times n$ *es definida positiva si* $\vec{u}^t A \vec{u} > 0$ *para todo vector no nulo* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *y definida semipositiva si* $\vec{u}^t A \vec{u} \geq 0$.

Hay muchas caracterizaciones de las matrices definidas positivas. La siguiente proposición recuerda un par de ellas.

Proposición II.11. *Sea* A *una matriz real simétrica* $n \times n$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- *A es definida definida positiva.*
- *Todos los valores propios de A son positivos.*
- *Todos los menores principales de A son positivos, donde el k-ésimo menor principal de A es el determinante de su submatriz compuesta por sus k primeras filas y k primeras columnas.*

III. Caracterización de $T_{\arccos}$

Tal como se mencionó en la sección introductoria, la t-norma arquimediana continua $T_{\arccos}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ desempeña un papel importante en la caracterización de las relaciones borrosas definidas semipositivas. Por ejemplo, una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres definida positiva (Definición III.2) si, y sólo si, es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad. Esto hace especial a esta t-norma y merece la pena estudiarla con detalle. Además, en la subsección IV.1, $T_{\arccos}$ se usará para caracterizar geométricamente las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas. En esta sección se dará una caracterización de esta t-norma a partir de relaciones de indistinguibilidad unidimensionales (ver Definición III.5).

La siguiente proposición describe explícitamente la t-norma $T_{\arccos}$ y sus residuación y birresiduación.

Proposición III.1. *Para todo* $x,y \in [0,1]$,

- $$\begin{aligned} T_{\arccos}(x,y) &= \text{máx}(\cos(\arccos x + \arccos y), 0) \\ &= \text{máx}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, 0) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_{\arccos}(x,y) &= \cos(\text{máx}(0, \arccos y - \arccos x)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} & \text{si } x > y. \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}_{\arccos}(x,y) &= \cos(|\arccos x - \arccos y|) \\ &= \cos(\arccos x - \arccos y) \\ &= xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

Definición III.2. *[13] Una relación borrosa* A *reflexiva y simétrica en un conjunto* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *de cardinal* $n > 2$

es tres-definida semipositiva si para todo $0 \leq i,j,k \leq n$, $i \neq j \neq k \neq i$ la submatriz de A

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ij} & 1 & a_{jk} \\ a_{ik} & a_{jk} & 1 \end{pmatrix}$$

es definida semipositiva, donde $A(x_i,x_j) = a_{ij}$.

En [8], [13] se da la siguiente caracterización de las relaciones de tolerancia tres-definidas semipositivas.

Proposición III.3. *[8], [13] Una relación borrosa A reflexiva y simétrica en un conjunto X es tres definida semipositiva si, Y sólo si, es $T_{\mathrm{arc\,cos}}$-transitiva (i.e.: es una relación de $T_{\mathrm{arc\,cos}}$-indistinguibilidad).*

La proposición anterior tiene esta bonita interpretación geométrica.

- Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ es una matriz 3×3 definida positiva, entonces es la matriz de un producto escalar $< \cdot,\cdot >$ y se pueden hallar tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ linealmente independientes con $a_{ij} =< \vec{u}_i, \vec{u}_j >$. $a_{ii} = 1$ significa qhe estos vectores son unitarios y el ángulo determinado por $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ es por tanto $\arccos a_{ij}$. La Proposición III.3 dice que para que estos vectores existan estos ángulos deben verificar la desigualdad triangular; en otras palabras, la suma de dos de ellos debe ser mayor o igual que el otro.
- Se puede obtener otra interpretación geométrica teniendo en cuenta que $\arccos a_{ij}$ también es la longitud del arco que une los extremos de los vectores $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ con sus orígenes en el origen de coordenadas en la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 1. Así la matriz A es tres-definida semipositiva si, y sólo si, las longitudes de los tres ángulos satisfacen la desigualdad triangular. Esto se generalizará en la subsección IV.2.

La siguiente proposición presenta la forma más natural de generar una relación de T-indistinguibilidad a partir de un subconjunto borroso de un universo X. Generaliza (borrosifica) el hecho de que, en el caso crisp, un subconjunto (crisp) $A \subseteq X$ particiona X en dos partes: A y su complementario $X - A$.

Proposición III.4. *[10], [14] Sea μ un subconjunto borroso de X y T una t-norma continua por la izquierda. La relación borrosa E_μ de X definida para todo $x,y \in X$ por*

$$E_\mu(x,y) = \overleftrightarrow{T}(\mu(x),\mu(y))$$

es una relación de T-indistinguibilidad.

Definición III.5. *[5], [10] Una relación de T-indistinguibilidad de X de la forma E_μ para algún subconjunto borroso μ de X se llama unidimensional.*

Lema III.6. *Sea T una t-norma arquimediana continua no estricta, t un generador aditivo de T y μ un subconjunto borroso de un conjunto X de cardinal finito. Entonces existe un subconjunto borroso ν normalizado tal que $E_\mu = E_\nu$.*

Demostración. Considérese $k = \text{máx}\{-t(\mu(x)) \mid x \in X\}$ y ν definido para todo $x \in X$ por

$$\nu(x) = t^{-1}(t(\mu(x)) + k).$$

- ν es normalizado: Sea $x_0 \in X$ tal que $k = -t(\mu(x_0))$. Entonces $\nu(x_0) = t^{-1}(t(\mu(x_0)) - t(\mu(x_0))) = t^{-1}(0) = 1$.
- $E_\nu = E_\mu$:

$$\begin{aligned} &E_\nu(x,y) \\ &\quad = t^{-1}(|t(t^{-1}(t(\mu(x))+k)) - t(t^{-1}(t(\mu(y))+k))|) \\ &\quad = t^{-1}(|t(\mu(x)) - t(\mu(y))|) = E_\mu(x,y). \end{aligned}$$

□

Lema III.7. *Sea T una t-norma continua por la izquierda, X un conjunto de cardinal finito y μ un subconjunto borroso de X constante. Entonces $E_\mu(x,y) = 1$ para todo $x,y \in X$ y por consiguiente el rango de E_μ es 1 ($\mathrm{rg}(E_\mu) = 1$).*

Demostración. Trivial. □

La siguiente proposición caracteriza la t-norma $T_{\mathrm{arc\,cos}}$ como la única para la cual $det(E_\mu) = 0$ para todo subconjunto borroso de un conjunto de cardinal 3.

Proposición III.8. *Sea $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ un conjunto de cardinal 3 y T una t-norma continua por la izquierda. $\det(E_\mu) = 0$ para todo subconjunto borroso μ de X si, y sólo si $T = T_{\mathrm{arc\,cos}}$.*

Demostración. Gracias al lema anterior podemos considerar que el subconjunto μ de X está normalizado y, sin pérdida de generalidad, de la forma $\mu = (1,x,y)$ con $x,y \in [0,1]$ y $1 \geq x \geq y$. Entonces,

$$\begin{aligned} E_\mu &= \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & \overleftrightarrow{T}(x,y) \\ y & \overleftrightarrow{T}(x,y) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & \overrightarrow{T}(x,y) \\ y & \overrightarrow{T}(x,y) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\det(E_\mu) = 1 + 2xy\overrightarrow{T}(x,y) - x^2 - y^2 - (\overrightarrow{T}(x,y))^2 = 0$ si, y sólo si, $\overrightarrow{T}(x,y) = xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

Siendo esto cierto para todo $x,y \in [0,1]$ con $x \geq y$, y gracias a la Proposición II.4 se tiene que $T = T_{\mathrm{arc\,cos}}$. □

Otro forma de expresar este resultado es la siguiente proposición.

Proposición III.9. *Sea $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ un conjunto de cardinal 3 y T una t-norma continua por la izquierda. $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$ para todo subconjunto borroso μ de X no constante si, y sólo si $T = T_{\mathrm{arc\,cos}}$.*

El siguiente resultado generaliza la proposición anterior en una dirección.

Proposición III.10. *Sea $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n \geq 2$, μ un subconjunto borroso no constante de X y E_μ la relación de $T_{\mathrm{arc\,cos}}$-indistinguibilidad unidimensional de X generada por μ. Entonces $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mu = (1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ con $1 \geq a_2 \geq a_3, \geq \ldots \geq a_n$ y podemos escribir $\mu = (1, \cos b_2, \cos b_3, \ldots, \cos b_n)$. Dado que μ es no constante, $a_n \neq 1$ y por tanto $\cos b_n \neq 1$ y $\sin b_n \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{rg}(E_\mu) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & 1 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & \ldots & \overrightarrow{T}(a_2,a_n) \\ a_3 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 & \ldots & \overrightarrow{T}(a_3,a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \overrightarrow{T}(a_2,a_n) & \overrightarrow{T}(a_3,a_n) & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos b_2 & \cos b_3 & \ldots & \cos b_n \\ \cos b_2 & 1 & \cos(b_3 - b_2) & \ldots & \cos(b_n - b_2) \\ \cos b_3 & \cos(b_3 - b_2) & 1 & \ldots & \cos(b_n - b_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos b_n & \cos(b_n - b_2) & \cos(b_n - b_3) & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Restando a la i-ésima columna, $i > 1$, la primera multiplicada por $\cos b_i$ se obtiene que el rango es

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cos b_2 & 1 - \cos^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ \cos b_3 & \sin b_3 \sin b_2 & 1 - \cos^2 b_3 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos b_n & \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & \ldots & 1 - \cos^2 b_n \end{pmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 - \cos^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ \sin b_3 \sin b_2 & 1 - \cos^2 b_3 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & \ldots & 1 - \cos^2 b_n \end{pmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \sin^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ \sin b_3 \sin b_2 & \sin^2 b_3 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & \ldots & \sin^2 b_n \end{pmatrix}$$

Restando a la i-ésima columna, $i < n$, la última multiplicada por $\frac{\sin b_i}{\sin b_n}$ (recuérdese que $\sin b_n \neq 0$) se obtiene que el rango de E_μ es

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ 0 & 0 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sin^2 b_n \end{pmatrix} = 2.$$

□

Como corolario se obtiene la siguiente caracterización de la t-norma $T_{\arccos}$.

Proposición III.11. *Sea T una t-norma continua por la izquierda y X un conjunto finito de cardinal $n > 2$. $T = T_{\arccos}$ si, y sólo si, $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$ para todo subconjunto borroso μ no constante de X.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Proposición III.10.

$\Leftarrow$) Consideremos una t-norma T diferente de $T_{\arccos}$ y μ un subconjunto borroso de X de la forma $(1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ con $1 > a_2 > a_3$ y con $\overrightarrow{T}(a_2, a_3) \neq \overrightarrow{T}_{\arccos}(a_2, a_3)$. (Tales a_2, a_3 existen gracias a la Proposición II.4). Entonces

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & \overleftrightarrow{T}(a_2,a_3) \\ a_3 & \overleftrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) \\ a_3 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 \end{pmatrix}.$$

Este determinante es diferente de 0 gracias a la Proposición III.8 y por tanto $\mathrm{rg}(E_\mu) \geq 3$.

□

IV. Dos Caracterizaciones Geométricas de las Relaciones Borrosas Reflexivas y Simétricas Definidas Positivas

De la sección anterior se tiene que una relación borrosa reflexiva y simétrica en un conjunto X de cardinal 3 es $T_{\arccos}$-transitiva si, y sólo si, es definida semipositiva. Si X es de cardinal mayor que 3, la condición es necesaria, pero no suficiente como se muestra en [8] mediante un contraejemplo.

Esta sección contiene dos caracterizaciones de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas: en la subsección IV-A relacionada con la inmersión isométrica en un espacio euclídeo y en la subsección IV-B relacionada con la inmersión isométrica en la hiperesfera $\mathbb{S}^n = \{\vec{v} = (x_0, x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro el origen de coordenadas $\vec{0}$ y radio 1.

IV-A. Inmersión en $\mathbb{R}^n$

Definición IV.1. *Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \leq i, j \leq n$, el determinante de Cayley-Menger $CM(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \ldots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

La importancia de este determinante estriba en el hecho de que si el conjunto X está contenido en $\mathbb{R}^n$ y d es la distancia euclídea, entonces está relacionado con el volumen del $n+1$-simplex generado por los puntos de X del siguiente modo.

Proposición IV.2. *Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$ y d la distancia euclídea. Entonces el volumen $v(X)$ del $n+1$-simplex con vértices los elementos de X es*

$$v(X) = \sqrt{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(x_0, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Este resultado se puede consultar en cualquier libro y artículo que estudie las inmersiones en un espacio euclídeo. Uno de los primeros, citado en [6], es [12]. En particular, el determinante de Cayley-Menger de un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ debe tener el mismo signo que $(-1)^{n+1}$. De aquí se obtiene la siguiente caracterización de los espacios métricos finitos que se pueden inyectar isométricamente en un espacio euclídeo.

Proposición IV.3. *[6] Sea $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ by d_{ij} para todo $0 \le i, j \le n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si, para todo $k = 1, 2, ..., n$ el signo de $CM(x_0, x_1, ..., x_k)$ es igual a $(-1)^{k+1}$.*

Proposición IV.4. *[11] Sea $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \le i, j \le n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$ si, y sólo si, la matriz $n \times n$ con valores $x_{ij} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2}{2}$ $(1 \le i, j \le n)$ es definida positiva.*

En el caso de una relación borrosa reflexiva y simétrica, su matriz A asociada $n \times n$ tiene unos en la diagonal, así que para todo $i = 1, 2, ..., n$, se tiene

$$1 = x_{ii} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0i}^2 - d_{ii}^2}{2} = \frac{2d_{0i}^2}{2} = d_{0i}^2.$$

y, por lo tanto,

$$d_{0i} = 1.$$

Así en este caso el determinante de Cayley-Menger de d es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d_{12}^2 & ... & d_{1n}^2 \\ 1 & 1 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Además, de

$$x_{ij} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2}{2} = \frac{2 - d_{ij}^2}{2}$$

se obtiene

$$d_{ij} = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_{ij}} \quad \textit{para todo } 1 \le i, j \le n.$$

En términos de los elementos de A, entonces

$$CM(x_0, x_1, ..., x_n) \\ = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2(1-x_{12}) & ... & 2(1-x_{1n}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{12}) & 0 & \dots & 2(1-x_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2(1-x_{1n}) & 2(1-x_{2n}) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

y se obtiene la siguiente caracterización geométrica de las relaciones borrosas reflexivas y simétrica con matriz asociada definida positiva.

Proposición IV.5. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica A en un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ finito es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\sqrt{1-x}}$-indistinguibilidad y en $X' = X \cup \{x_0\}$ la distancia asociada d (i.e.: $d_{ij} = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_{ij}}$ si $i, j > 0$ y $d_{0i} = 1$ para $i > 0$) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$.*

En la inmersión, x_0 puede enviarse al origen de coordenadas x_0' y las imágenes x_i' de $x_i, i > 0$ corresponden a los extremos de los vectores $\overrightarrow{x_0' x_i'}$ con lo que la proposición anterior se puede enunciar de modo más claro.

Proposición IV.6. *Una relación borrosa $A = (x_{ij})$ reflexiva y simétrica en un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de cardinal finito n es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\sqrt{1-x}}$-indistinguibilidad y X con la distancia $d(x_i, x_j) = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_{ij}}$, $1 \le i, j \le n$, se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^n$ de tal modo que las imágenes de los puntos de X están situados sobre la hiperesfera $\mathbb{S}^{n-1}$.*

En particular, para un conjunto X de cardinal 3 esto significa que el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2(1-x_{12}) & 2(1-x_{13}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{12}) & 0 & 2(1-x_{23}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{13}) & 2(1-x_{23}) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$8(x_{12}x_{13}x_{23} - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 + 1)$$

debe ser mayor que 0. Esto es equivalente a que A sea $T_{\arccos}$-transitiva y la Proposición III.3 se puede reinterpretar del siguiente modo.

Proposición IV.7. *Las siguientes afirmaciones sobre una relación borrosa reflexiva y simétrica R en un conjunto X son equivalentes.*

- *R es tres-definida semipositiva.*
- *R es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad.*
- *$\sqrt{1-R}$ es una pseudodistancia en X y todo subconjunto de cardinal 3 de X se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que las imágenes de los puntos de X están situados en la esfera $\mathbb{S}^2$.*

Esta última proposición también muestra la relación entre $T_{\arccos}$ y $T_{\sqrt{1-x}}$. En [13] se demostró que si una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres-definida semipositiva, entonces es $T_{\sqrt{1-x}}$-transitiva. Es un resultado interesante que no se sigue de forma directa de la $T_{\arccos}$-transitividad porque las dos t-normas no son comparables: $T_{\arccos}(0{,}7, 0{,}8) = 0{,}13 > 0{,}10 = T_{\sqrt{1-x}}(0{,}7, 0{,}8)$ y $T_{\arccos}(0{,}8, 0{,}8) = 0{,}28 < 0{,}45 = T_{\sqrt{1-x}}(0{,}8, 0{,}8)$. El resultado anterior clarifica la situación.

IV-B. Inmersión en $\mathbb{S}^n$

Mientras que en la subsección anterior se ha obtenido la caracterización de una relación de tolerancia definida positiva A mediante el estudio de la inyectabilidad de la métrica generada por A y el generador aditivo $t(x) = \sqrt{1-x}$ de la t-norma $T_{\sqrt{1-x}}$ en un espacio euclídeo, en esta subsección la caracterización se obtendrá por el estudio de la inyectabilidad de la métrica generada por el generador aditivo $t(x) = \arccos x$ de la t-norma $T_{\arccos}$ en una hiperesfera. Esto generaliza las interpretaciones geométricas de la Proposición III.3.

Sea $\mathbb{S}^n = \{\vec{v} = (x_0, x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ la hiperesfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro el origen de coordenadas $\vec{0}$ y radio 1. La métrica esférica d es la métrica en $\mathbb{S}^n$ definida para todo $\vec{u} = (x_0, x_1, \ldots x_n), \vec{v} = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{S}^n$ por

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(|\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i|) = \arccos < \vec{u}, \vec{v} >$$

donde $< \vec{u}, \vec{v} >$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Es la longitud del mayor arco de círculo que une $\vec{u}$ con $\vec{v}$.

Proposición IV.8. *Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \le i, j \le n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{S}^n$ si, y sólo si, la matriz $n \times n$ con valores $x_{ij} = \cos d_{ij}$ es definida positiva.*

En este caso, la matriz A con valores x_{ij} es la matriz de una relación borrosa reflexiva y simétrica.

El determinante de Cayley-Menger de d es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \arccos^2 x_{12} & \cdots & \arccos^2 x_{1n} \\ 1 & 1 & \arccos^2 x_{12} & 0 & \cdots & \arccos^2 x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \arccos^2 x_{1n} & \arccos^2 x_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Además,

$$x_{ij} = \cos d_{ij}.$$

De aquí que la siguiente proposición presenta una caracterización geométrica alternativa de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas con la matriz asociada definida positiva.

Proposición IV.9. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica A en un conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ finito es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad y X con la distancia $d(x_i, x_j) = \arccos x_{ij}$, $1 \le i, j \le n$ se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{S}^{n-1}$ con la métrica esférica.*

V. Conclusiones

En este trabajo se han dado dos caracterizaciones métricas de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas mediante el uso de resultados conocidos de inyectabilidad en espacios euclídeos e hiperesferas con las distancias asociadas generadas por el generador aditivo de $T_{\arccos}$ y $T_{\sqrt{1-x}}$ según la Proposición II.9.

Los resultados obtenidos en la subsección IV-B permiten una elegante demostración geométrica de las Proposiciones III.8 y III.10. De forma esquemática: Es sabido que una relación de indistinguibilidad E que separe puntos en un conjunto X con $E(x, y) \neq 0$ para todo $x, y \in X$ transitiva respecto a una t-norma arquimediana continua determina una relación de estar entre métrica (metric betweenness relation) [6] en X que es lineal si, y sólo si, E es unidimensional [10]. En particular una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad unidimensional E en $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ determina una relación de estar entre lineal en X. Entonces $t(E) = \arccos(E)$ es una distancia que también determina una relación de estar entre lineal en X [2] y por lo tanto los puntos de X se pueden inyectar isométricamente en un arco de una hiperesfera. Junto al centro de dicha hiperesfera determinan un $n+1$-simplex contenido en un plano y por consiguiente cualquier terna de vectores $\overrightarrow{x_0x_1}$, $\overrightarrow{x_0x_2}$,...,$\overrightarrow{x_0x_n}$ son linealmente dependientes. (Esto también puede interpretarse como que todos los volúmenes de este simplex de dimensión mayor que 2 son 0).

Referencias

[1] D. Boixader, Some Properties Concerning the Quasi-inverse of a t-norm Mathware & Soft Computing 5 (1998) 5–12.

[2] D. Boixader, J. Recasens, Indistinguishability Operators with Respect to Different t-norms. Int. J. Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based Systems 20 (2012) 167–183.

[3] C. Degang, Z. Deli, Structure of feature spaces related to fuzzy similarity relations as kernels. Fuzzy Sets and Systems 237 (2014) 90–95.

[4] L. Foulloy, E. Benoit, Building a class of fuzzy equivalence relations Fuzzy Sets and Systems 157(11) (2006) 1417–1437.

[5] J. Jacas, On the generators of T-indistinguishability operators. Stochastica 12 (1988) 49–63.

[6] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Ann. 100 (1928) 75–113.

[7] E.P., Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[8] B. Moser, On the T-transitivity of kernels Fuzzy Sets and Systems 157(13) (2006) 1787–1796.

[9] B. Moser, On representing and generating kernels by fuzzy equivalence relations, J. Mach. Learn. Res. 7 (2006) 2603–2620.

[10] J. Recasens, Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2011.

[11] I. J. Schoenberg, Remarks to Maurice Fréchet's article 'Sur la définition axiomatique d'une classe d'espace distanciés vectoriellement applicable sur l'espace de Hilbert', Ann. Math. 36 (1935) 724–732.

[12] P.H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie 2 (Die Polytope). Sammlung Schubert XXXVI, Leipzig (1905).

[13] M.S. Tomás, C. Alsina, J. Rubio-Martinez, Pseudometrics from three-positive semidefinite similarities Fuzzy Sets and Systems 157(17) (2006) 2347–2355.

[14] L. Valverde, On the Structure of F-indistinguishability Operators. Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 313–328.

[15] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings. Inform. Sci. 3 (1971) 177–200.