ÀLGEBRA I CÀLCUL MULTIVARIABLE

Curs 2017-2018

SOLUCIÓ DEL PARCIAL 1, Q2

Problema 1. Considereu $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal amb matriu associada en la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considereu $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, on $\vec{u}_1 = (0, 1, 4)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1, 2)$, $\vec{u}_3 = (3, 1, 2)$.

(i) Calculeu $\vec{w} = 3f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) - 4f(\vec{e}_3)$.

(ii) Proveu que $\mathcal{B}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Obteniu $f(\vec{u})$ en la base canònica, on $[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 3)$ (o bé $\vec{u} = (1, 2, 3)_{|\mathcal{B}}$).

(iv) És f diagonalitzable? En cas afirmatiu, doneu una base de vectors propis, $\mathcal{D}$, i la matriu diagonal associada a f en aquesta base.

Solució: (i) A partir de la matriu, resulta $f(\vec{e}_1) = (0, 0, 1)$, $f(\vec{e}_2) = (0, 1, 0)$ i $f(\vec{e}_3) = (1, 0, 0)$ (en base canònica). Substituint,

$$\boxed{\vec{w} = 3f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) - 4f(\vec{e}_3) = 3(0, 0, 1) + 2(0, 1, 0) - 4(1, 0, 0) = (-4, 2, 3).}$$

(ii) Provem que els vectors són linealment independents veient que el seu determinant és diferent de 0. En efecte,

$$\boxed{\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.}$$

Ara bé, 3 vectors linealment independents de $\mathbb{R}^3$ són generadors. Per tant, són base.

(iii) Sigui $Q = [I_E]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ la matriu de canvi de base, de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$; és a dir,

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Atès que la matriu de f està expressada en la base canònica, primer cal expressar el vector en la base canònica, aplicant la fórmula del canvi de base.

$[\vec{u}]_{\mathcal{C}} = Q[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$.

Així,

$$\boxed{[\vec{u}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}.}$$

Per tant,

$$\boxed{f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.}$$

(iv) Denotem per $A = [f]_c$, i calculem el polinomi característic de f:

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Per tant, l'equació característica de f és

$$\boxed{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0,}$$

i l'espectre és

$$\boxed{\sigma(f) = \{-1, 1\} \text{ amb } m_1 = 1 \text{ i } m_2 = 2.}$$

Per a determinar si l'aplicació lineal és diagonalitzable hem de trobar els subespais de vectors propis associats a cadascun dels valors propis i analitzar la seva dimensió.

(a) $\ker(A+I) = \langle(1,0,-1)\rangle$, ja que si $\vec{u}=(x,y,z)$

$$\boxed{(A+I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+z\\2y\\x+z\end{bmatrix} = \vec{0} \iff z=-x,\ \ y=0.}$$

De manera que el vector $\vec{w}_1 = (1,0,-1)$ és base del nucli $\ker(A+I)$ i $\dim\ker(A+I) = 1 = m_1$.

(b) $\ker(A-I) = \langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$, ja que si $\vec{u}=(x,y,z)$

$$\boxed{(A-I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x+z\\0\\x-z\end{bmatrix} = \vec{0} \iff x=z.}$$

De manera que els vectors $\vec{w}_2=(1,0,1)$ i $\vec{w}_3=(0,1,0)$ són generadors del nucli $\ker(A-I)$. A més, són linealment independents, ja que $\alpha\vec{w}_2+\beta\vec{w}_3=(0,0)\Rightarrow\alpha=\beta=0$.

Per tant, $\{\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ és base de $\ker(A-I)$ i $\dim\ker(A-I)=2=m_2$.

En conseqüència, f és diagonalitzable.

Base de diagonalització: $\mathcal{D}=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$.

La matriu diagonal corresponent és

$$\boxed{[f]_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = [f]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

i la matriu de canvi de base és

$$\boxed{P = [I_E]_{\mathcal{D}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}}.$$

Problema 2. Donada la funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + 3y^2}.$$

(i) Doneu el domini de f i representeu-lo gràficament.

(ii) Calculeu les derivades parcials de f en el punt $(-2, 2)$ i la derivada direccional de f en el punt $(-2, 2)$ i en la direcció del vector $(3, 4)$.

(iii) Doneu l'equació del pla tangent i de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $\big(-2, 2, f(-2, 2)\big)$.

(iv) Obteniu el polinomi de Taylor d'ordre 2 de la funció f entorn del punt $(-2, 2)$.

Solució:

(i) Com que és una arrel quadrada, el seu domini serà

$$\boxed{D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 \leq 1\big\}.}$$

A la Figura 1 hem representat el domini. Observeu que la corba que delimita el domini és una hipèrbola.

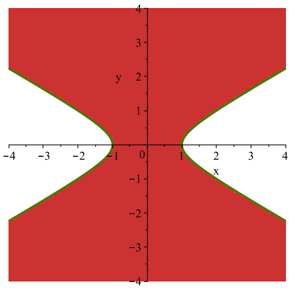


Figure 1: Domini de f

(ii) La funció f és derivable de tots els ordres en el conjunt

$$\boxed{B = \overset{\circ}{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 < 1\big\}}$$

per ser l'arrel quadrada d'un polinomi. Les derivades parcials en B són

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2+3y^2}},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3y}{\sqrt{1-x^2+3y^2}}.\end{aligned}}$$

Per tant, el vector gradient de f és

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2+3y^2}} \\ \dfrac{3y}{\sqrt{1-x^2+3y^2}} \end{pmatrix}.}$$

En particular,

$$\boxed{\nabla f(-2,2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

Per a calcular la derivada direccional tindrem en compte que el vector normalitzat és $v = \dfrac{1}{5}(3,4)$, i que la funció es diferenciable, per tant

$$\boxed{D_v(f)(-2,2) = \langle \nabla f(x,y), v\rangle = \langle \left(\frac{2}{3}, 2\right), \frac{1}{5}(3,4)\rangle = 2.}$$

(iii) L'equació del pla tangent a una superfície donada en forma explícita $z = f(x,y)$ en el punt $(a, b, f(a,b))$ és

$$\begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-f(a,b) & D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{vmatrix} = 0.$$

En el nostre cas, tindrem

$$\boxed{0 = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-3 & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} = z - 2y - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.}$$

Per tant, l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $\big(-2, 2, f(-2, 2)\big)$ és

$$\boxed{2x + 6y - 3z = -1.}$$

Tenint en compte que el vector normal és

$$\boxed{\mathsf{n} = (2, 6, -3),}$$

l'equació de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $\big(-2, 2, f(-2, 2)\big)$ en forma contínua és

$$\boxed{\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-3}.}$$

Una manera alternativa és donar l'equació de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $\big(-2, 2, f(-2, 2)\big)$ en forma paramètrica

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.}$$

(iii) En aquest cas, el polinomi de Taylor d'ordre 2 de f en el punt $(-2, 2)$ és:

$$\boxed{\begin{aligned} P_f(-2,2)(x,y) = f(-2,2) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(-2,2)(x+2) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2,2)(y-2) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,2)(x+2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)(x+2)(y-2) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,2)(y-2)^2. \end{aligned}}$$

Hem de calcular les derivades parcials d'ordre u i dos i valorar-les en el punt $(-2, 2)$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-(1+3y^2)}{(1-x^2+3y^3)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{3(1-x^2)}{(1-x^2+3y^3)^{3/2}}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3xy}{(1-x^2+3y^3)^{3/2}} \end{aligned}}$$

i en particular

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(-2,2)=3, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)=\dfrac{2}{3}, & \dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)=2, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,2)=-\dfrac{13}{27}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,2)=-\dfrac{1}{3}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)=-\dfrac{4}{9}. \end{array}}$$

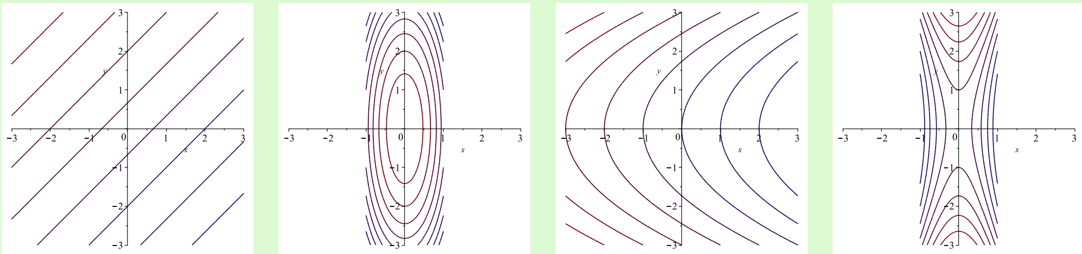
Per tant, el polinomi de Taylor dordre 2 de f en el punt $(-2,2)$ és:

$$\boxed{\begin{aligned} P_f(-2,2)(x,y) &= 3+\frac{2}{3}(x+2)+2(y-2)-\frac{13}{54}(x+2)^2 \\ &\quad -\frac{4}{9}(x+2)(y-2)-\frac{1}{6}(y-2)^2 \\ &= -\frac{13}{54}x^2-\frac{4}{9}yx-\frac{1}{6}y^2+\frac{16}{27}x+\frac{16}{9}y+\frac{13}{27}. \end{aligned}}$$

Problema 3. Es considereu les funcions $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definides per

$$f_1(x,y) = x^2 - \frac{y^2}{9}; \qquad f_2(x,y) = x - y; \qquad f_3(x,y) = \frac{y^2}{9} + x^2; \qquad f_4(x,y) = 3x - y^2.$$

Les corbes de nivell d'aquestes funcions estan representades en la Figura 1.



(A) (B) (C) (D)

En la taula següent associeu les funcions i les corbes de nivell. Justifiqueu les respostes.

Funció	Corbes de nivell
f_1	(D)
f_2	(A)
f_3	(B)
f_4	(C)

Solució: The level curves of function f_1 are those points (x,y) such that $f_1(x,y)$ =constant. That is,

$$\boxed{x^2 - \frac{y^2}{9} = k.}$$

Thus the level curves of f_1 for $k \neq 0$ are hyperboles and two lines for $k = 0$ and correspond to (D), since

$$\begin{aligned}
&x^2 - \frac{y^2}{9} = k \Longleftrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{k}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{3k}\right)^2} = 1 \text{ for } k > 0,\\
&3x - y = 0, \quad 3x + y = 0 \text{ for } k = 0,\\
&x^2 - \frac{y^2}{9} = k \Longleftrightarrow -\frac{x^2}{\left(\sqrt{|k|}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{3|k|}\right)^2} = 1 \text{ for } k < 0.
\end{aligned}$$

The level curves of function f_2 are those points (x, y) such that $f_2(x, y)$ =constant. That is,

$$\boxed{x - y = k \Longleftrightarrow y = x - k.}$$

Thus the level curves of f_2 are lines with slope 1 and correspond to (A).

The level curves of function f_3 are those points (x, y) such that $f_3(x, y)$ =constant. That is,

$$\boxed{\frac{y^2}{9} + x^2 = k \text{ for different values of } k.}$$

Thus the level curves of f_3 are ellipses for $k > 0$ and the point $(0, 0)$ for $k = 0$. Whereas for $k < 0$ the level curves are empty sets. Hence, they correspond to (B).

The level curves of function f_4 are those points (x, y) such that $f_4(x, y)$ =constant. That is

$$\boxed{3x - y^2 = k \text{ which implies that } y^2 = 3\left(x - \frac{k}{3}\right) \text{ for different values of } k.}$$

Thus the level curves of f_4 are paraboles which vertex is the point $\left(\frac{k}{3}, 0\right)$ and correspond to (C).