ÀLGEBRA I CÀLCUL MULTIVARIABLE

Curs 2017-2018

INTEGRACIÓN DE LINEA Y SUPERFICIE

OBJETIVOS

- Conocer el concepto de curva regular.
- Parametrizaciones de curvas notables.
- Calcular integrales de línea y circulaciones de campos.
- Conocer los operadores diferenciales clásicos y sus relaciones.

1 CURVAS PARAMETRIZADAS EN $\mathbb{R}^n$

1.1 DEFINICIONES GENERALES

En este apartado estudiamos algunas propiedades de las curvas parametrizadas. Los intervalos de parametrización de las curvas suelen coincidir con los dominios de definición de las funciones involucradas salvo que, por interés del desarrollo, se especifique un subconjunto dado. De todas formas, para establecer propiedades de regularidad supondremos los intervalos abiertos. Por tanto, en todo el capítulo la denominación intervalo designará al conjunto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

DEFINICIÓN. Llamamos **curva parametrizada** a una función $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\alpha(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, $t \in (a, b)$. Usualmente se denomina a t el **parámetro de la curva**. Llamamos **traza de la curva** al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha((a, b))$.

EJEMPLO.La función $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, 2t)$, es una curva parametrizada cuya traza es la recta $y = 2x$.

Desde luego es una curva parametrizada. Para ver cual es su traza tenemos que encontrar qué ecuación verifican las variables cartesianas x e y. En este caso, una simple observación de la expresión nos lleva a concluir que

$$\boxed{y = 2x.}$$

Hay propiedades que deben ser analizadas a la hora de considerar curvas parametrizadas. La primera es determinar si la curva tiene vector tangente no nulo en cada punto de su traza. Utilizando el símil cinemático de asimilar la traza de una curva parametrizada a la trayectoria de una partícula, la anulación del vector tangente se corresponde con la anulación de la velocidad de la partícula. Otro aspecto a analizar es distinguir cuándo la aplicación es inyectiva, es decir, cuándo distintos valores del parámetro se corresponden con puntos distintos de la traza.

Decimos que una curva parametrizada $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **simple** si es inyectiva.

Decimos que la curva α es **regular** si existe $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$ y $||\alpha'(t)|| \neq 0$. En este caso llamamos **vector tangente a la curva α en el punto t al vector** $\alpha'(t)$, y **vector tangente unitario a la curva α en el punto t al vector** $\vec{t} = \dfrac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$.

Hasta ahora hemos restringido el dominio de definición de las curvas parametrizadas a intervalos abiertos, pero en algunos casos será conveniente extender nuestro estudio a curvas definidas en intervalos cerrados. En este caso, si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, exigiremos que como mínimo α sea continua y que su restricción al intervalo abierto (a,b) sea una curva regular.

Decimos que $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una **curva cerrada** si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Llamamos **longitud de una curva regular α en el intervalo** $[a,b]$ al valor de la integral

$$\boxed{\ell(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt.}$$

Decimos que una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con parámetro s, está **parametrizada por la longitud de arco** si $||\alpha'(s)|| = 1$. En este caso, la longitud de α es igual a la longitud de I.

Ejemplo. Demostrar que la circunferencia $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ es una curva regular y calcular su longitud.

Primero daremos una parametrización de la circunferencia. En general, teniendo en cuenta la fórmula fundamental de la trigonometría podremos parametrizar una circunferencia de ecuación implícita

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2,}$$

utilizando las coordenadas polares; es decir,

$$\boxed{\alpha(\theta) = \big(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\mathrm{sen}(\theta)\big), \qquad \theta \in [0, 2\pi).}$$

En nuestro caso

$$\boxed{\alpha(\theta) = \big(2 + 2\cos(\theta), -1 + 2\operatorname{sen}(\theta)\big), \quad \theta \in [0, 2\pi).}$$

Para probar que es una curva regular basta calcular el módulo del vector tangente a α en cualquier θ, y comprobar que es no nulo

$$\boxed{\alpha'(\theta) = \big(- 2\operatorname{sen}(\theta), 2\cos(\theta)\big) \implies ||\alpha'(\theta)|| = 2 \neq 0.}$$

Por tanto, α es una curva regular, cuya longitud será

$$\boxed{\ell(\alpha) = \int_0^{2\pi} ||\alpha'(\theta)||\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 4\pi.}$$

1.2 Parametrizaciones de curvas notables

Vamos a describir la forma de parametrizar las cónicas y otras curvas notables.

(i) Curvas dadas de forma explícita. En primer lugar si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en $A = \mathring{A}$. La curva dada de forma explícita por

$$\boxed{y = f(x),}$$

puede parametrizarse mediante la expresión

$$\boxed{\alpha(x) = \big(x, f(x)\big), \quad x \in A.}$$

(ii) Circunferencia. Consideramos la circunferencia de ecuación implícita

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,}$$

entonces

$$\boxed{\alpha(\theta) = \big(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\operatorname{sen}(\theta)\big), \quad \theta \in [0, 2\pi),}$$

es una parametrización de dicha curva.

(iii) Elipse. Consideramos la elipse de ecuación implícita

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,}$$

entonces

$$\boxed{\alpha(\theta)=\big(x_0+a\cos(\theta),y_0+b\operatorname{sen}(\theta)\big),\qquad \theta\in[0,2\pi),}$$

es una parametrización de dicha curva.

(iii) Hipérbola. Consideramos la rama hipérbola de ecuación implícita

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\ x\geq x_0+a}$$

entonces

$$\boxed{\alpha(t)=\big(x_0+a\cosh(t),y_0+b\sinh(t)\big),\qquad t\in\mathbb{R},}$$

es una parametrización de dicha curva.

(iv) Hélice. Sean, $a,b>0$, entonces la hélice es una curva en $\mathbb{R}^3$ de ecuación paramétrica

$$\boxed{\alpha(t)=\big(a\cos(t),a\operatorname{sen}(t),bt\big),\qquad t\in\mathbb{R}.}$$

Ver Figura 1.

1.3 Conceptos geométricos: Curva en $\mathbb{R}^2$ dada de forma explícita

En el caso de curvas en $\mathbb{R}^2$ los conceptos geométricos que aparecen son los de recta tangente y recta normal a la curva en un punto dado, ver Figura 1. Dependiendo de como esté dada la curva la manera de obtener las ecuaciones de dichos objetos es distinta.

Sea $f: A\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y derivable. Consideramos la curva dada de forma explícita por

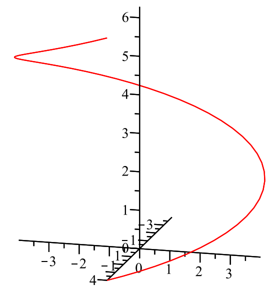

Figure 1: Hélice en $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{y = f(x).}$$

(i) Ecuación de la recta tangente

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)\Big(x - a\Big).}$$

El vector tangente es $\boxed{v_t = (1, f'(a)).}$

(ii) Ecuación de la recta normal

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\Big(x - a\Big) \quad \text{si} \quad f'(a) \neq 0 \quad \text{y} \quad y = f(a) \quad \text{si} \quad f'(a) = 0.}$$

El vector normal es $\boxed{v_n = (-f'(a), 1).}$

1.4 Conceptos geométricos: Curva en $\mathbb{R}^2$ dada de forma paramétrica

Sea $\alpha : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua y derivable. Consideramos la curva dada de forma paramérica por

$$\boxed{\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in A.}$$

(i) Ecuación de la recta tangente

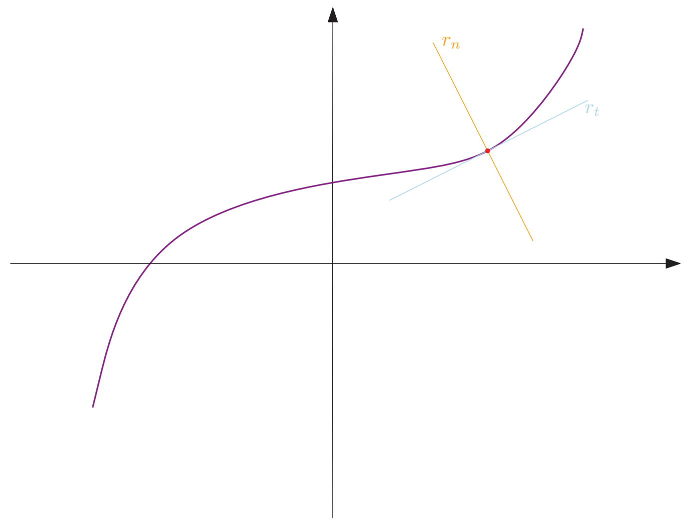

Figure 2: Curvas en $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{x'(t_0)\Big(y-b\Big) = y'(t_0)\Big(x-a\Big),}$$

donde $\alpha(t_0) = (a,b)$. El vector tangente es $\boxed{v_t = (x'(t_0), y'(t_0)).}$

(ii) Ecuación de la recta normal

$$\boxed{y'(t_0)\Big(y-b\Big) = -x'(t_0)\Big(x-a\Big).}$$

El vector normal es $\boxed{v_n = (-y'(t_0), x'(t_0)).}$

1.5 Conceptos geométricos: Curva en $\mathbb{R}^2$ dada de forma implícita

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable. Consideramos la curva dada de forma implícita por

$$\boxed{f(x,y) = k, k \in \mathbb{R}.}$$

(i) Ecuación de la recta normal

El vector normal es $\boxed{v_n = \nabla f(a,b) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).}$

Por tanto, la ecuación de la recta normal es

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(y-b) = 0.}$$

(ii) Ecuación de la recta tangente La ecuación de la recta tangente es

$$\boxed{\langle \nabla f(a,b) | (x-a, y-b) \rangle = 0.}$$

El vector tangente es $\boxed{v_t = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right).}$

1.6 Conceptos geométricos: Curvas en $\mathbb{R}^3$ dada de forma paramétrica

Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable. La expresión de la curva parametrizada regular es

$$\boxed{\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)).}$$

(i) Ecuación de la recta tangente

El vector tangente en un punto $\alpha(t_0) = (a, b, c)$, es

$$\boxed{v_t = \alpha'(t_0).}$$

Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta tangente a α en el punto (a, b, c) será

$$\boxed{(x, y, z)^T = \alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0).}$$

(ii) Ecuación del plano normal La ecuación del plano normal a la curva α en el punto $\alpha(t_0) = (a, b, c)$ será

$$\boxed{\langle\alpha'(t_0)|(x - a, y - b, z - c)\rangle = 0,}$$

donde se ha tenido en cuenta que el plano normal es un plano que pasa por el punto y que tiene como vector director el vector tangente.

1.7 Conceptos geométricos: Curvas en $\mathbb{R}^3$ dada como intersección de superficies

En el caso de curvas en $\mathbb{R}^3$ los conceptos geométricos que aparecen son los de recta tangente y plano normal a la curva en un punto dado, ver Figura 2. Dependiendo de como esté dada la curva, la manera de obtener las ecuaciones de dichos objetos es distinta.

Dadas dos funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. La expresión de una curva dada como intersección de dos superficies es

$$\boxed{C \equiv \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}}$$

(i) Ecuación de la recta tangente

El vector tangente en un punto (a, b, c) tal que $f_1(a, b, c) = f_2(a, b, c) = 0$, es

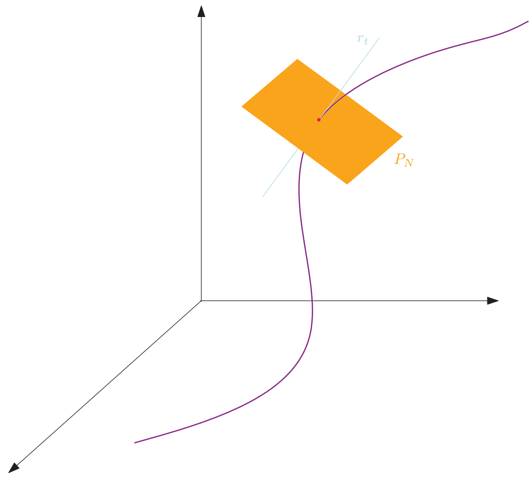

Figure 3: Curvas en $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{v_t = \nabla f_1(a,b,c) \times \nabla f_2(a,b,c).}$$

Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta tangente a C en el punto (a,b,c) será

$$\boxed{(x,y,z)^T = (a,b,c)^T + \lambda v_t.}$$

(ii) Ecuación del plano normal La ecuación del plano normal a la curva C en el punto (a,b,c) será

$$\boxed{\langle \nabla f_1(a,b,c) \times \nabla f_2(a,b,c) | (x-a, y-b, z-c)\rangle = 0,}$$

donde se ha tenido en cuenta que el plano normal es un plano que pasa por el punto y que tiene como vector director el vector tangente.

Ejercicios

Problema 1. Encontrar los valores de t para los cuales la curva C parametrizada por:

$$\alpha(t) = \big(2t^3 - 3t^2, t - 2\arctan t\big)$$

(i) Tiene tangente horitzontal.

(ii) Tiene tangente vertical.

(iii) No tiene tangente; es a dir, no es regular.

La curva α es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, y su vector tangente está dado por

$$\boxed{\alpha'(t) = \left(6t(t-1), \frac{t^2-1}{1+t^2}\right).}$$

(i) La tangente es horizontal cuando la pendiente es nula; es decir, $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$ sii

$$\boxed{y'(t) = 0 \text{ y } x'(t) \neq 0 \Longrightarrow t = -1.}$$

(ii) La tangente es vertical cuando la pendiente es infinito; es decir, $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \infty$ sii

$$\boxed{y'(t) \neq 0 \text{ y } x'(t) = 0 \Longrightarrow t = 0.}$$

(ii) La tangente no existe cuando

$$\boxed{y'(t) = 0 \text{ y } x'(t) = 0 \Longrightarrow t = 1.}$$

Problema 2. Demostrar que las siguientes curvas son regulares y hallar la recta tangente y el plano normal en cualquier punto t:
(i) $\alpha(t) = (e^t\mathrm{cos}t, e^t\mathrm{sen}t, e^t)$.
(ii) $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$.

(i) La curva es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ por ser producto de funciones elementales. Calculamos el vector tangente y su norma,

$$\boxed{\alpha'(t) = \big(e^t(\cos t - \operatorname{sen} t), e^t(\operatorname{sen} t + \cos t), e^t\big), \text{ y } |\,\alpha'(t)| = e^t\sqrt{3} \neq 0.}$$

Por tanto, la curva es regular y la recta tangente en cualquier punto tiene por ecuación

$$\boxed{(x, y, z) = e^t\Big[\big(\cos t, \operatorname{sen} t, 1\big) + \lambda(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1)\Big].}$$

Por otro lado, el plano normal es

$$\boxed{(\cos t - \operatorname{sen} t)(x - e^t\cos t) + (\operatorname{sen} t + \cos t)(y - e^t\operatorname{sen} t) + (z - e^t) = 0,}$$

o de forma equivalente

$$\boxed{(\cos t - \operatorname{sen} t)x + (\operatorname{sen} t + \cos t)y + z = 2e^t.}$$

(ii) La curva es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ por ser funciones elementales. Calculamos el vector tangente y su norma,

$$\boxed{\alpha'(t) = \big(\sinh(t), \cosh(t), 1)\big), \text{ y } |\,\alpha'(t)| = \cosh(t)\sqrt{2} =\neq 0.}$$

Por tanto, la curva es regular y la recta tangente en cualquier punto tiene por ecuación

$$\boxed{(x, y, z) = \big(\cosh(t), \sinh(t), t) + \lambda(\sinh(t), \cosh(t), 1\big).}$$

Por otro lado, el plano normal es

$$\boxed{\sinh(t)(x - \cosh(t)) + \cosh(t)(y - \sinh(t)) + (z - t) = 0,}$$

o de forma equivalente

$$\boxed{\sinh(t)x + \cosh(t)y + z = 2\cosh(t)\sinh(t) + t.}$$

Problema 3. (i) Sea $\alpha(s) \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ una curva regular. Probar que si $|\alpha(s)|$ tiene un mínimo para $s = s_0$, entonces $\alpha(s_0)$ y $\alpha'(s_0)$ son ortogonales.

(ii) Sean $\alpha(s) \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular y v un vector fijado. Si, para todo s, $\alpha'(s)$ y v son ortogonales, y $\alpha(0)$ es también ortogonal a v, probar que la curva es perpendicular al vector en todos los puntos.

(iii) Sea $\alpha(s) \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular. Probar que $|\alpha(s)|$ es constante si y sólo si α y α' son ortogonales.

(i) En primer lugar observamos que la función $|\alpha(s)|$ es derivable, ya que $\alpha(s) \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y hacemos notar que una función y su cuadrado tienen los mismos puntos extremos. Por tanto, podemos imponer la condición suficiente de mínimo al cuadrado de la función, lo que nos simplificará los calculos.

$$\boxed{(|\alpha|^2)'(s_0) = \langle \alpha, \alpha \rangle'(s_0) = 2\langle \alpha(s_0), \alpha'(s_0) \rangle = 0.}$$

Lo que implica la ortogonalidad entre los vectores.

(ii) Consideramos la función $f(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$ y calculamos su derivada,

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), v \rangle = 0,$$

ya que $\alpha'(s)$ y v son ortogonales. Por tanto, $f(s)$ es una función constante. Por otro lado $f(0) = 0$, ya que $\alpha(0)$ es ortogonal a v, lo que implica que $f(s) = \langle \alpha(s), v \rangle = 0$, para todo s, por lo tanto la curva es perpendicular al vector en todos los puntos.

(iii) $|\alpha(s)| = c = \text{cte.} \iff |\alpha(s)|^2 = c^2 = \text{cte.} \iff (|\alpha|^2)'(s) = 0 \iff \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$

Problema 4. Demostrar que las rectas tangentes a la curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman ángulo constante con la recta $y = 0, z = x$.

El vector tangente a la curva α es $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ y el vector director de la recta $y = 0, z = x$ es $v = (1, 0, 1)$. Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{||\alpha'(t)|| \cdot ||v||} = \frac{3(1 + 2t^2)}{3\sqrt{2}\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

es decir, las rectas tangentes a α cortan a la recta $y = 0, z = x$ formando un ángulo de 45^o.

Problema 5. Dada la curva parametrizada (**hélice**)

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right), s \in \mathbb{R},$$

donde $a^2 + b^2 = c^2$, $a > 0$. Demostrar que el parámetro s es la longitud de arco.

Para demostrar que s es el parámetro arco de la curva basta calcular α' y probar que su norma es 1.

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\mathrm{sen}\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right) \Longrightarrow ||\alpha'(s)|| = 1.$$

2 Gradiente, divergencia, laplaciano y rotacional

En este apartado vamos a estudiar los operadores diferenciales clásicos que son aquellos en los que se formulan las ecuaciones de estado de diferentes modelos físicos. Dichos operadores son gradiente, divergencia, laplaciano y rotacional.

Gradiente de una función Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, donde A es un subconjunto abierto $\mathbb{R}^n$, se denomina en ocasiones **campo escalar en $\mathbb{R}^n$**. En Física, un campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ describe una magnitud con valores escalares, es decir, a cada punto del espacio le asocia un valor numérico. Por ejemplo, el campo de temperaturas. Si

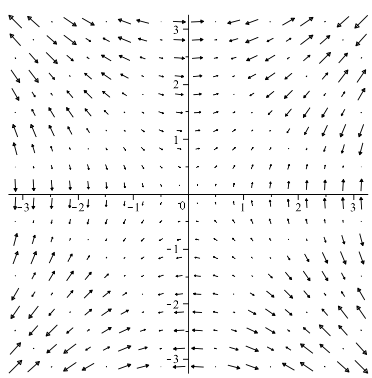

Figure 4: Campo gradiente de $f(x, y) = \mathrm{sen}(xy)$.

$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es diferenciable en A llamamos **Campo gradiente de f** al campo $\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido para cada $x \in \mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}}$$

En la Figura 4 hemos representado el campo gradiente a la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

DIVERGENCIA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL Una función $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \subset \mathbb{R}^n$, donde A es un subconjunto abierto $\mathbb{R}^n$, se denomina en ocasiones **campo vectorial en $\mathbb{R}^n$**. En Física, un campo vectorial $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ describe una magnitud con valores vectoriales, es decir, a cada punto del espacio le asocia un vector. Por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido, Figura 2.

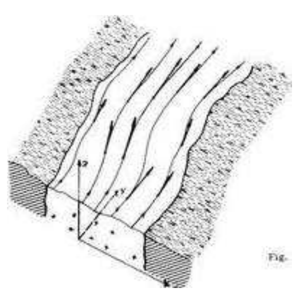

Figure 5: Campo de velocidades.

Si $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es diferenciable en A llamamos **divergencia de F** al campo escalar $\mathsf{div}(F) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido para cada $x \in \mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{\mathsf{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).}$$

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" o "sumideros" la divergencia de dicho campo será diferente de cero.

LAPLACIANO DE UNA FUNCIÓN Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es diferenciable en A llamamos **Laplaciano de f** al campo escalar $\Delta f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido para cada $x \in \mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{\Delta f(x) = \mathsf{div}(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x)}$$

En física, el laplaciano aparece en múltiples contextos como la teoría del potencial, la propagación de ondas, la conducción del calor, la distribución de tensiones en un sólido deformable, etc. Pero de todas estas situaciones ocupa un lugar destacado en la electrostática y en la mecánica cuántica. En la electrostática, el operador laplaciano aparece en la ecuación de Laplace y en la ecuación de Poisson. Mientras que en la mecánica cuántica el laplaciano de la función de onda de una partícula da la energía cinética de la misma. En matemáticas, las funciones tales que su laplaciano se anula en un determinado dominio, se llaman funciones armónicas sobre el dominio.

Figure 6: Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

ROTACIONAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL EN $\mathbb{R}^3$ Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $F : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable en A con funciones componentes $F = (F_1, F_2, F_3)$, llamamos **rotacional de F** al campo vectorial $\mathsf{rot}(F) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido para cada $x \in \mathbb{R}^3$ como

$$\boxed{\mathsf{rot}(F)(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)(x).}$$

El rotacional es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $F = (F_1, F_2)$, podemos identificar F con un campo en $\mathbb{R}^3$ considerando $F = (F_1, F_2, 0)$. Entonces,

$$\boxed{\operatorname{rot} F = \Big(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big).}$$

PROPIEDADES Y RELACIONES ENTRE OPERADORES

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables y $F, G : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos diferenciables. Entonces, se satisfacen las siguientes relaciones:

(i) $\mathsf{rot}(\nabla f) = 0$, cuando $n = 2, 3$.

(ii) $\mathsf{div}\,(\mathsf{rot}(F)) = 0$, cuando $n = 2, 3$.

(iiii) $\mathsf{div}\,(fF) = \langle \nabla f, F \rangle + f\mathsf{div}\,(F)$.

(iv) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Se dice que un campo escalar F es irrotacional sii $\mathsf{rot}(F) = 0$. Mientras que un campo vectorial tal que $\mathsf{div}\,(F) = 0$, se denomina solenoidal. En particular, todo campo gradiente es irrotacional y todo campo que es rotacional de otro es solenoidal.

El campo F se denomina conservativo o gradiente si existe una función $u \in \mathcal{C}^1(A)$ tal que $F = \nabla u$, es decir tal que $F_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$. En este caso la función u se denomina potencial de F. Todo campo conservativo es irrotacional.

Si dado un campo $G : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, existe un campo $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$ tal que $G = \operatorname{rot} F$, entonces F se denomina potencial vector de G.

La pregunta que nos podemos plantear ahora es si todo campo que sea irrotacional es un campo conservativo o si todo campo solenoidal es rotacional de otro. La respuesta, en general, es no. Para que la respuesta sea afirmativa debemos restringir el tipo de dominios en el que trabajamos.

Lema de Poincaré. Supongamos que $A = \mathbb{R}^3$.

▶ Si $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo solenoidal, es decir $\operatorname{div} F = 0$, entonces F tiene un potencial vector; es decir, existe $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $F = \operatorname{rot} G$.

▶ Si $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es un campo irrotacional, es decir tal que $\operatorname{rot} F = 0$, entonces es conservativo, es decir existe $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $F = \nabla u$.

El Lema de Poincaré es válido para abiertos $A \subset \mathbb{R}^3$ que, por expresarlo en términos coloquiales, *no tienen agujeros*. Más concretamente, el resultado es cierto para abiertos convexos, que son abiertos tales que si $x, y \in A$, entonces el segmento que une x e y está contenido en A, es decir $tx + (1-t)y \in A$, para cada $x, y \in A$ y cada $t \in [0,1]$.

El siguiente resultado nos permite encontrar un potencial vector para un campo solenoidal.

PROPOSICIÓN. Si $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo solenoidal, es decir $\operatorname{div}(F) = 0$, entonces

$$\boxed{G(x,y,z) = \int_0^1 tF(tx,ty,tz) \times (x,y,z)\, dt}$$

es un potencial vector de F. Por tanto, si $G = (G_1, G_2, G_3)$ se tiene que

$$\boxed{\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \int_0^1 t\Big(zF_2(tx,ty,tz) - yF_3(tx,ty,tz)\Big)dt,\\ G_2(x,y,z) &= \int_0^1 t\Big(xF_3(tx,ty,tz) - zF_1(tx,ty,tz)\Big)dt,\\ G_3(x,y,z) &= \int_0^1 t\Big(yF_1(tx,ty,tz) - xF_2(tx,ty,tz)\Big)dt. \end{aligned}}$$

EJERCICIOS

Problema 6. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables y $F, G : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos diferenciables. Demostrar que se satisfacen las siguientes relaciones:

(i) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$, cuando $n = 2, 3$.

(ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$, cuando $n = 2, 3$.

(iiii) $\operatorname{div}(fF) = \langle \nabla f, F\rangle + f\operatorname{div}(F)$.

(iv) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

En todos los casos basta aplicar las definiciones y realizar las operaciones adecuadas. Supondremos que $n = 3$, y para el caso $n = 2$, procederíamos de forma análoga.

(i) Teniendo en cuenta que

$$\boxed{\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),}$$

obtenemos que

$$\boxed{\mathsf{rot}(\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = 0.}$$

(ii)

$$\boxed{\mathsf{div}\,(\mathsf{rot}(F)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = 0.}$$

(iii)

$$\boxed{\mathsf{div}\,(fF) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (fF_i)}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) F_i(x) + f \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)\right) = \langle \nabla f, F\rangle + f \mathsf{div}\,(F).}$$

(iv)

$$\boxed{\nabla(fg) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial (fg)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial (fg)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x) + g\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ f\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x) + g\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} f\nabla g + g\nabla f.}$$

Problema 7. Calcular la divergencia y el rotacional del campo $F(x, y) = (x, -y)$. Demostrar que se trata de un campo conservativo. ¿Es un campo solenoidal? Hallar en su caso un potencial y un potencial vector.

Teniendo en cuenta que $F_1(x, y) = x$ y $F_2(x, y) = -y$, la divergencia del campo F es

$$\boxed{\operatorname{div}(F)(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = 1 - 1 = 0.}$$

Por otro lado el rotacional es

$$\boxed{\operatorname{rot}(F)(x,y) = \Big(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\Big) = (0,0,0).}$$

Como el campo está definido en $\mathbb{R}^2$ y tiene $\operatorname{rot}(F)$ nulo, por el Lema de Poincaré se trata de un campo conservativo. Además, como la divergencia se anula es un campo solenoidal. Procedemos a hallar los potenciales.

En primer lugar la función potencial, $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, debe verificar $\nabla u = F$. Por tanto,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = x \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -y \quad \Longrightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + k.}$$

El potencial vector será un campo $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\operatorname{rot}(G) = F$. Por tanto, si $G = (G_1, G_2, G_3)$ se tiene que

$$G_1(x,y,z) = \int_0^1 t\Big(zF_2(tx,ty,tz) - yF_3(tx,ty,tz)\Big)dt = \int_0^1 -t^2 zy = -zy\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{zy}{3},$$

$$G_2(x,y,z) = \int_0^1 t\Big(xF_3(tx,ty,tz) - zF_1(tx,ty,tz)\Big)dt = \int_0^1 -t^2 zx = -zx\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{zx}{3},$$

$$G_3(x,y,z) = \int_0^1 t\Big(yF_1(tx,ty,tz) - xF_2(tx,ty,tz)\Big)dt = \int_0^1 2t^2 xy = 2xy\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2xy}{3}.$$

Por lo que el campo

$$\boxed{G(x,y,z) = \Big(-\frac{zy}{3}, -\frac{zx}{3}, \frac{2xy}{3}\Big),}$$

es un potencial vector del campo F.

Problema 8. Calcular una función potencial para el campo $F(x,y) = (3x^2 + y, e^y + x)$ definido en $\mathbb{R}^2$.

Teniendo en cuenta que $F_1(x,y) = 3x^2 + y$ y $F_2(x,y) = e^y + x$, el rotacional del campo F es

$$\mathrm{rot}(F)(x,y) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) = (0,0,0).$$

Como el campo está definido en $\mathbb{R}^2$ y tiene $\mathrm{rot}(F)$ nulo, por el Lema de Poincaré se trata de un campo conservativo. Para hallar un potencial, u, tenemos que resolver las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x.$$

De la primera ecuación,

$$u(x,y) = x^3 + yx + g(y),$$

derivando dicha función respecto de la y y teniendo en cuenta la segunda ecuación tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + g'(y) = e^y + x \implies g'(y) = e^y \implies g(y) = e^y + k.$$

Por tanto,

$$u(x,y) = x^3 + yx + e^y + k, \text{ donde } k \in \mathbb{R}.$$

Problema 9. Demostrar que el campo $F(x,y,z) = \big(y - z, z - x, x - y\big)$ definido en $\mathbb{R}^3$ es soneloidal y hallar un potencial vector.

Teniendo en cuenta que $F_1(x,y,z) = y - z$, $F_2(x,y,z) = z - x$ y $F_3(x,y,z) = x - y$, la divergencia del campo F es

$$\mathrm{div}(F)(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

Por tanto, F es un campo solenoidal y el potencial vector será un campo $G:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathrm{rot}(G)=F$. Además, si $G=(G_1,G_2,G_3)$ se tiene que G debe verificar las ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}&=y-z\\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}&=x-z\\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}&=x-y. \end{aligned}}$$

Podemos utilizar la expresión general para hallar el potencial vector:

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z)&=\int_0^1 t\Big(zF_2(tx,ty,tz)-yF_3(tx,ty,tz)\Big)dt\\ &=\int_0^1 t^2\big[z(z-x)-y(x-y)\big]\,dt=\big[z(z-x)-y(x-y)\big]\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\big[z(z-x)-y(x-y)\big]}{3}\\ &=\frac{\big[z^2+y^2-x(y+z)\big]}{3}\\ G_2(x,y,z)&=\int_0^1 t\Big(xF_3(tx,ty,tz)-zF_1(tx,ty,tz)\Big)dt\\ &=\int_0^1 t^2\big[x(x-y)-z(y-z)\big]\,dt=\big[x(x-y)-z(y-z)\big]\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\big[x(x-y)-z(y-z)\big]}{3},\\ &=\frac{\big[x^2+z^2-y(x+z)\big]}{3}\\ G_3(x,y,z)&=\int_0^1 t^2\Big(yF_1(tx,ty,tz)-xF_2(tx,ty,tz)\Big)dt\\ &=\int_0^1 t^2\big[y(y-z)-x(z-x)\big]\,dt=\big[y(y-z)-x(z-x)\big]\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\big[y(y-z)-x(z-x)\big]}{3}\\ &=\frac{\big[x^2+y^2-z(x+y)\big]}{3}. \end{aligned}$$

Por lo que el campo

$$\boxed{G(x,y,z)=\frac{1}{3}\Big((z^2+y^2-x(y+z),x^2+z^2-y(x+z),x^2+y^2-z(x+y)\Big),}$$

es un potencial vector del campo F.

3 Integrales de Línea

En este tema extendemos la noción de integral en un intervalo al caso en el que el dominio de integración es una curva. Se denominan generalmente integrales de línea y son de gran importancia en física o mécanica a la hora de estudiar el trabajo, la circulación o la energía potencial.

1.1 Definiciones generales

Integral de Trayectoria Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva de clase $\mathcal{C}^1([a,b])$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces se define **la integral de f sobre la curva α** o integral de trayectoria como

$$\boxed{\int_\alpha f\,ds = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\,dt.}$$

Observar que en las condiciones anteriores, se tiene que

$$\boxed{\int_\alpha f\,ds = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)\sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2}\,dt.}$$

El siguiente caso especial, en el que $f(x) = 1$, recupera el concepto de longitud que dimos previamente.

Definición Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva de clase $\mathcal{C}^1([a,b])$, entonces su longitud está definida como

$$\boxed{\ell(\alpha) = \int_\alpha ds = \int_a^b ||\alpha'(t)||\,dt = \int_a^b \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2}\,dt.}$$

A continuación, estableceremos el concepto fundamental para la integración de funciones vectoriales.

Integral de Línea Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva de clase $\mathcal{C}^1([a,b])$ y $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una campo vectorial continuo, entonces se define **la integral de F sobre la curva α** o **integral de línea de F a lo largo de α** como

$$\boxed{\int_\alpha F\cdot ds = \int_a^b \langle F\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\rangle\,dt.}$$

Observar que la integral de línea es un caso particular de la integral de trayectoria si consideramos la función $g(t) = \langle F\big(\alpha(t)\big), \vec{t}(t)\rangle$, donde $\vec{t}(t)$ es el vector tangente unitario a α.

EJEMPLO Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por $F(x,y) = (y, x^2 + y)$. Calcular la integral de línea del campo F a lo largo de las siguientes curvas:

(i) la recta de ecuación paramétrica $\alpha(t) = (t,t)$ para $t \in [0,1]$.

(ii) $\beta(t) = (t^2, t)$ para $t \in [0,1]$.

(i) El vector tangente a α es $\alpha'(t) = (1,1)$ y $F(\alpha(t)) = (t, t^2 + t)$, por tanto

$$\boxed{\int_\alpha F \cdot ds = \int_0^1 \langle F\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_0^1 (t^2 + 2t)\, dt = \frac{4}{3}.}$$

(ii) El vector tangente a β es $\beta'(t) = (2t, 1)$ y $F(\beta(t)) = (t, t^4 + t)$, por tanto

$$\boxed{\int_\alpha F \cdot ds = \int_0^1 \langle F\big(\beta(t)\big), \beta'(t)\rangle\, dt = \int_0^1 (2t^2 + t^4 + t)\, dt = \frac{41}{30}.}$$

OBSERVACIÓN El ejemplo anterior muestra que la integral de línea de un campo puede depender del camino que une los puntos extremos. Veremos más adelante que esto no ocurre con los campos conservativos. A continuación realizamos una extensión de la integral de línea a casos de curvas más generales.

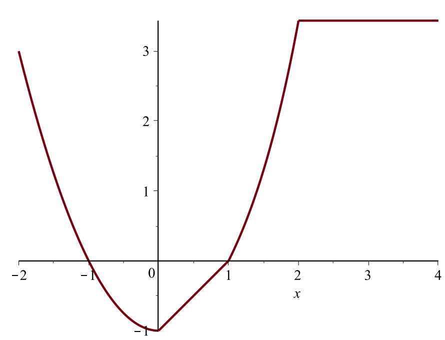

Figure 7: Curva regular a trozos

CURVA REGULAR A TROZOS Una curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se llama **regular a trozos** si el intervalo $[a,b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales la curva es regular, ver Figura 7. En este caso extendemos la definición de integral de f sobre la curva α o integral de trayectoria como

$$\boxed{\int_{\alpha} f\, ds = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\, dt,}$$

donde la integral de la izquierda se calculará sobre cada uno de los subintervalos aprovechando las propiedades de la integral simple de Riemann.

EJEMPLO. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = \big(x^2+y^2, x^2-y^2\big)$ a lo largo de la curva $y = 1-|2-x|$ desde $(1,0)$ hasta $(3,0)$.

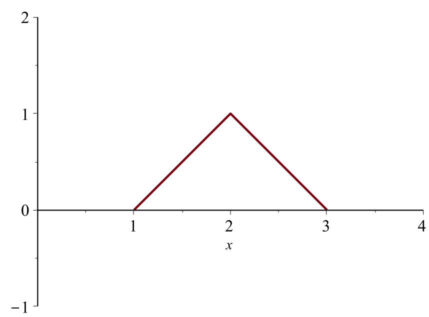

Figure 8: Gráfica de la curva $y = 1-|2-x|$.

Como puede observarse en la Figura 8, la curva es regular a trozos, y está descrita por las siguientes parametrizaciones

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (t, t-1), \quad t\in[1,2] \\ \alpha_2(t) &= (t, 3-t), \quad t\in[2,3]. \end{aligned}}$$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= (1,1), \qquad t\in[1,2] \\ \alpha_2'(t) &= (1,-1), \quad t\in[2,3], \end{aligned}}$$

mientras que el campo restringido a las curvas es

$$\boxed{\begin{aligned} F(\alpha_1(t)) &= \big(t^2+(t-1)^2, t^2-(t-1)^2\big) = \big(2t^2-2t+1, 2t-1\big), \quad t\in[1,2] \\ F(\alpha_2(t)) &= \big(t^2+(3-t)^2, t^2-(3-t)^2\big) = \big(2t^2-6t+9, 6t-9\big), \quad t\in[2,3]. \end{aligned}}$$

Finalmente, la función a integrar será

$$\boxed{\begin{aligned} \langle F(\alpha_1(t)), \alpha_1'(t)\rangle &= 2t^2, & t\in[1,2] \\ \langle F(\alpha_2(t)), \alpha_2'(t)\rangle &= 2t^2-12t+18, & t\in[2,3]. \end{aligned}}$$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\alpha \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt &= \int_1^2 2t^2\, dt + \int_2^3 (2t^2-12t+18)\, dt \\ &= \frac{2t^3}{3}\Big|_1^2 + \left(\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 18t\right)\Big|_2^3 = \frac{16}{3}. \end{aligned}}$$

1.2 PROPIEDADES Las integrales de línea tienen propiedades análogas a las de la integral simple de Riemann, ya que están definidas a través de ellas.

LINEALIDAD RESPECTO AL INTEGRANDO Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular a trozos y $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces

$$\boxed{\int_\alpha (pf+qg)\, ds = p\int_\alpha f\, ds + q\int_\alpha g\, ds.}$$

ADITIVIDAD RESPECTO A LA CURVA DE INTEGRACIÓN Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular a trozos, entonces

$$\boxed{\int_\alpha f\, ds = \int_{\alpha_1} f\, ds + \int_{\alpha_1} f\, ds,}$$

donde α_1 y α_2 forman la curva α.

El uso de parametrizaciones para definir curvas nos permite usar técnicas de cálculo de una variable para deducir propiedades de las curvas, o de las funciones definidas a lo largo de curvas como acabamos de mostrar. Pero una misma curva admite distintas parametrizaciones, por lo que hay que distinguir cuándo una propiedad lo es de la curva o de la parametrización. Por ejemplo, cuando integramos sobre una curva, lo hacemos en el sentido determinado por la parametrización, también llamdo orientación de la curva. Cuando se elije una parametrización de una curva, se define automáticamente un sentido de recorrido de C, empezando en $\alpha(a)$ y acabando en $\alpha(b)$. Si integramos en la dirección contraria, el resultado se multiplica por -1. Vamos a ver este resultado a través de un ejemplo.

Ejemplo. Calcular la integral de línea del campo $F(x,y) = (x, yx)$ a lo largo de semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, con $y \geq 0$ utilizando las siguientes parametrizaciones:

(i) $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\text{sen}(t)), t \in [0,\pi]$.

(ii) $\alpha(t) = (2\cos(t), -2\text{sen}(t)), t \in [-\pi,0]$.

Calculamos en primer lugar los vectores tangentes

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-2\text{sen}(t), 2\cos(t)), \quad && t \in [0,\pi] \\ \beta'(t) &= (-2\text{sen}(t), -2\cos(t)), && t \in [-\pi,0], \end{aligned}}$$

mientras que el campo restringido a las curvas es

$$\boxed{\begin{aligned} F(\alpha(t)) &= \big(2\cos(t), 4\text{sen}(t)\cos(t)\big), \quad && t \in [0,\pi] \\ F(\beta(t)) &= \big(2\cos(t), -4\text{sen}(t)\cos(t)\big), && t \in [-\pi,0]. \end{aligned}}$$

Finalmente, la función a integrar en cada caso será

$$\boxed{\begin{aligned} \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle &= -4\cos(t)\text{sen}(t) + 8\text{sen}(t)\cos^2(t), \quad && t \in [0,\pi] \\ \langle F(\beta(t)), \beta'(t)\rangle &= -4\cos(t)\text{sen}(t) + 8\text{sen}(t)\cos^2(t), && t \in [-\pi,0]. \end{aligned}}$$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\alpha \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt &= \int_0^\pi \big[-4\cos(t)\text{sen}(t) + 8\text{sen}(t)\cos^2(t)\big]\, dt \\ &= \Big[2\cos^2(t) - \frac{8}{3}\cos^3(t)\Big]_0^\pi = \frac{16}{3}. \\ \int_\alpha \langle F(\beta(t)), \beta'(t)\rangle\, dt &= \int_{-\pi}^0 \big[-4\cos(t)\text{sen}(t) + 8\text{sen}(t)\cos^2(t)\big]\, dt \\ &= \Big[2\cos^2(t) - \frac{8}{3}\cos^3(t)\Big]_{-\pi}^0 = -\frac{16}{3}. \end{aligned}}$$

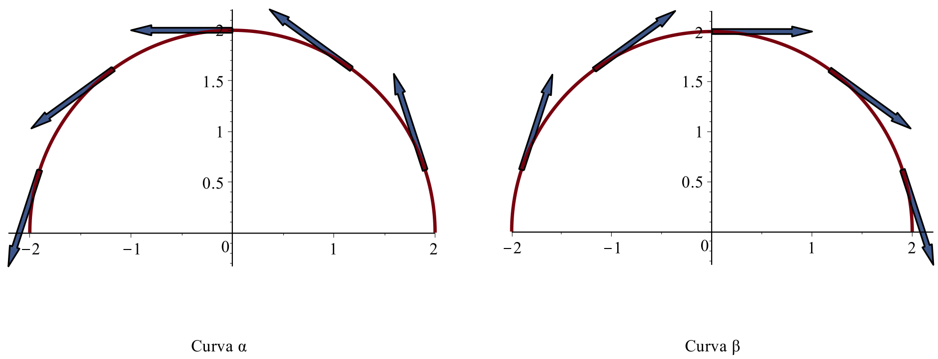

Figure 9: Gráfica de las curvas α y β y sus campos tangentes.

1.3 Integración de Línea de campos conservativos

Un caso especialmente importante, es el de la integración de los campos denominados conservativos. Recordemos que un campo $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina conservativo si existe $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y tal que $F = \nabla u$. En este caso u se denomina potencial (escalar) de F. Si u es un potencial de f, entonces todos los potenciales de F se describen como $u + k$, donde $k \in \mathbb{R}$.

Si aplicamos la Regla de la Cadena, resulta que si F es conservativo con potencial u, entonces la variación de la función u a lo largo de la curva α; es decir, la derivada de la función escalar $u\big(\alpha(t)\big)$, está dada por $u'\big(\alpha(t)\big) = \langle \nabla u(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = \langle F\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\rangle$. Por tanto, haciendo uso de la Regla de Barrow resulta que

Si F es un campo conservativo y u es un potencial de F, entonces

$$\boxed{\int_\alpha F \cdot ds = \int_a^b u'\big(\alpha(t)\big)\, dt = u\big(\alpha(b)\big) - u\big(\alpha(a)\big).}$$

En particular, si α es una curva cerrada; es decir $\alpha(b) = \alpha(a)$, entonces

$$\boxed{\int_\alpha F \cdot ds = 0.}$$

En algunas ocasiones, la integración de línea de un campo en $\mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, puede reducirse a una integración múltiple en un dominio del plano. Para ello, definiremos previamente el concepto de orientación de una curva en el plano: Si $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada y simple; esto es $\alpha(b) = \alpha(a)$ y $\alpha : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es inyectiva, diremos que α está positivamente orientada si recorre su traza $\alpha([a,b])$ en sentido antihorario.

TEOREMA DE GREEN Supondamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto elemental del plano, cuya frontera ∂D es la traza de una curva positivamente orientada. Consideremos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$, donde Ω es un abierto que contiene a $\bar{D} = D \cup \partial D$, y supongamos que $F = (F_1, F_2)$. Entonces

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy.}$$

La utilidad del Teorema de Green estriba en que podemos calcular la integral de línda de un campo, sin necesidad de parametrizar la curva ∂D. Nótese que si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una curva de clase $\mathcal{C}^1([a,b])$ que parametriza ∂D, entonces

$$\boxed{\int_a^b \langle F\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_{\partial D} F \cdot ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy}$$

Naturalmente, si el campo F es conservativo, sabemos que el término de la izquierda en las identidades anteriores es 0. También podemos obtener este resultado utilizando el Teorema de Green y la Identidad de Schwartz de derivadas cruzadas: Si $F = \nabla u$ con $u \in \mathcal{C}^2(D)$, entonces $F_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $F_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, lo que implica que

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}}$$

El Teorema de Green puede utilizarse para calcular el área de una región plana como una integral de línea. Para ello es preciso encontrar un campo $F = (F_1, F_2)$ tal que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Por tanto, basta considerar $F = (F_1, F_2)$ donde $F_1(x,y) = -\dfrac{y}{2}$ y $F_2(x,y) = \dfrac{x}{2}$, para tener el resultado siguiente:

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto elemental del plano, cuya frontera ∂D es la traza de una curva positivamente orientada, entonces

$$\boxed{A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y, x)\, ds.}$$

Ejemplo. Calcular el trabajo realizado por el campo $F(x,y) = (y + 3x, 2y - x)$ a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

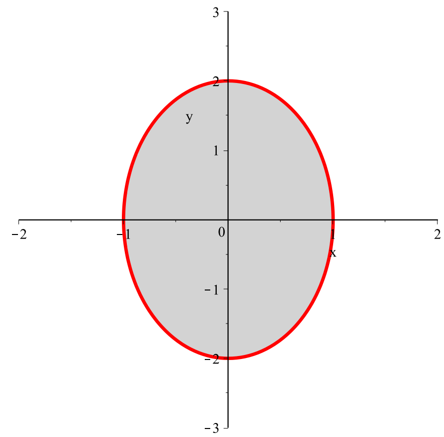

Figure 10: Gráfica de ∂D y D.

Como la elipse es la frontera del recinto elíptico que se muestra en la Figura 10 podemos aplicar el Teorema de Green en el plano.

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_D (-2)\, dx\, dy = -4\pi,}$$

ya que el área de una elipse es πab donde a, b son los semiejes de la elipse, en nuestro caso $a = 1$ y $b = 2$.

Si no hacemos uso del teorema de Green debemos parametrizar la elipse.

$$\boxed{\alpha(t) = \big(\cos(t), 2\mathrm{sen}(t)\big), \;\; t \in [0, 2\pi].}$$

Por otro lado,

$$\boxed{\alpha'(t) = \big(-\mathrm{sen}(t), 2\cos(t)\big) \text{ y } \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = -2 + \mathrm{sen}(t)\cos(t).}$$

Por tanto,

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \big[-2 + \mathrm{sen}(t)\cos(t) \big] dt = \left[-2t + \frac{\mathrm{sen}^2(t)}{2} \right]_0^{2\pi} = -4\pi.}$$

Ejemplo. Calcular el trabajo realizado por el campo $F(x,y) = (5 - xy - y^2, -2xy + x^2)$ a lo largo del cuadrado C de vértices $P = (0,0)$, $Q = (1,0)$ $R = (1,1)$ y $S = (0,1)$.

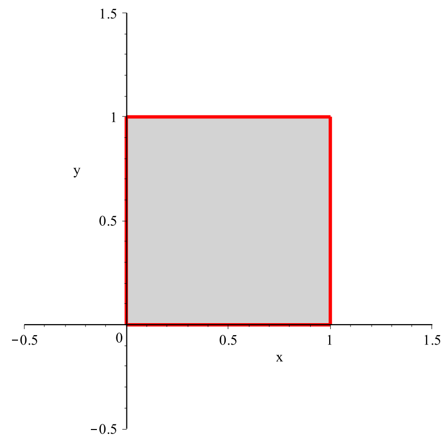

Figure 11: Gráfica de C y D tal que $\partial D = C$.

El cuadrado es la frontera del intervalo bidimensional $D = [0,1] \times [0,1]$ que se muestra en la Figura 11 por lo que podemos aplicar el Teorema de Green en el plano.

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D 3x\, dxdy = 3\int_0^1\int_0^1 x\, dxdy = 3\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$