

ÀLGEBRA I CÀLCUL MULTIVARIABLE

Curs 2017-2018

INTEGRACIÓN MÚLTIPLE DE RIEMANN

OBJETIVOS

- ⊙ Conocer el concepto de Integración Múltiple de Riemann.
- ⊙ Saber determinar cuándo una función es integrable.
- ⊙ Calcular integrales en regiones generales.
- ⊙ Hallar áreas y volúmenes.

OBSERVACIÓN. A modo de recordatorio tenéis la Teoría de Integración simple de Riemann, ejemplos y problemas resueltos como un primer apartado. Este tema forma parte de Matemàtiques I. La Teoría de Integración múltiple de Riemann, y por tanto el temario del curso, comienza en la página 18.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE RIEMANN

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Consideramos el intervalo $[a, b]$, donde $a < b$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función **positiva y acotada**. El **objetivo** es determinar el área encerrada por la gráfica de f y las rectas $x = a$, $x = b$ y $y = 0$, ver Figura 7.

La idea es aproximar el área mediante las áreas de rectángulos contenidos o que contienen a la región, utilizando particiones del intervalo $[a, b]$, ver Figura 2.

Por **partición del intervalo** $[a, b]$, entendemos un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ se denota por $\mathcal{P}([a, b])$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y acotada, correspondiendo con cada partición definimos

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\} \text{ y } m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\},$$

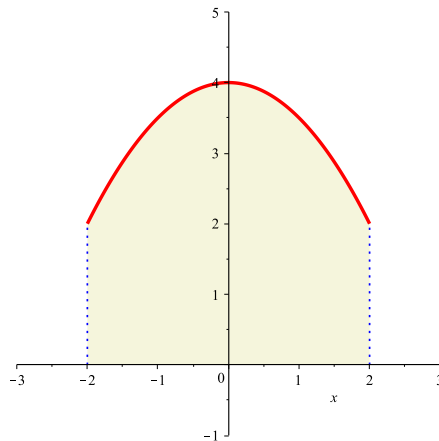


Figure 1: Gráfica de $f(x) = 4 - \frac{x^2}{2}$ en $[-2, 2]$

y las sumas **superior e inferior de Riemann**, respectivamente como

$$U(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \quad \text{y} \quad L(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i).$$

La suma de las áreas de los rectángulos cuya base es el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y altura es M_i será una aproximación por exceso del área buscada (ver Figura 2 derecha). Mientras que la suma de las áreas de los rectángulos cuya base es el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y altura es m_i será una aproximación por defecto del volumen buscado (ver Figura 2 izquierda)

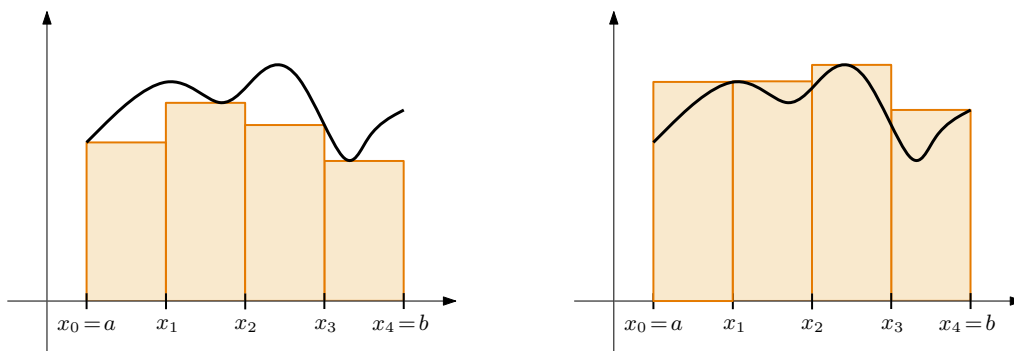


Figure 2: Aproximación por rectángulos

Una partición P' con un mayor número de subintervalos que P se denomina **más fina**. Si consideramos una partición más fina la aproximación que obtenemos, tanto por exceso como por defecto, es mejor; es decir, $L(P, f) \leq L(P', f)$ y $U(P', f) \leq U(P, f)$, ver Figura 3.

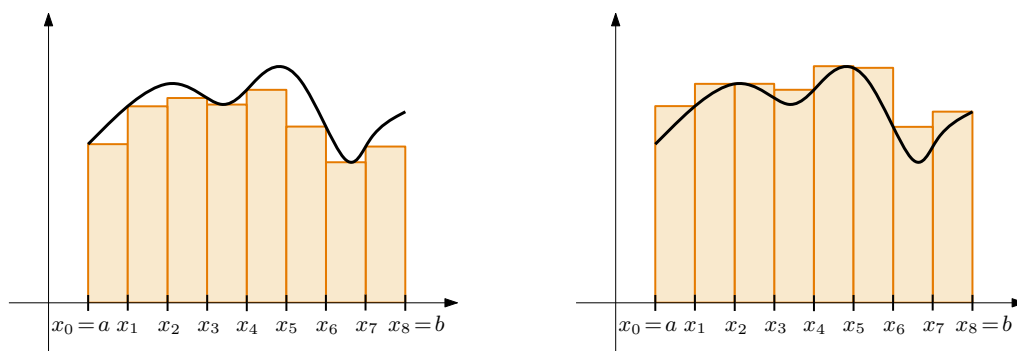


Figure 3: Aproximación por una partición más fina

Definimos la **integral superior e inferior de Riemann**, respectivamente como

$$\bar{I} = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} U(P, f) \quad \text{y} \quad \underline{I} = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(P, f).$$

Decimos que un función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, es **INTEGRABLE RIEMANN** en $[a, b]$, si $\underline{I} = \bar{I}$. Llamamos a este valor común integral de f en $[a, b]$ y lo denotamos por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Como f está acotada en $[a, b]$ existen números $m, M \in \mathbb{R}$, tales que

$$m \leq f(x) \leq M \text{ para todo } x \in [a, b].$$

De aquí que, para toda P ,

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a),$$

de modo que los números $L(P, f)$ y $U(P, f)$ forman un conjunto acotado. Esto demuestra que las **integrales superior e inferior están definidas para toda función acotada**. La cuestión de su igualdad y por tanto de la integrabilidad de f es más delicada.

EJEMPLO Si f es una función constante, entonces f es integrable. Específicamente, si $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx = k(b-a)$.

Ahora trataremos de la existencia de la integral y de sus propiedades básicas. Supondremos cada vez, sin mencionarlo, que f es acotada.

CRITERIO DE INTEGRABILIDAD Una función f es integrable Riemann en $[a, b]$ sii para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

El criterio de integrabilidad nos indica que si la **diferencia entre el exceso y el defecto** ($U(P, f) - L(P, f)$) es tan pequeño como queramos ($\varepsilon > 0$), entonces la función es integrable; ver Figura 4.

Los siguientes resultados cuya demostración se basa en el anterior nos muestran qué tipo de funciones son integrables.

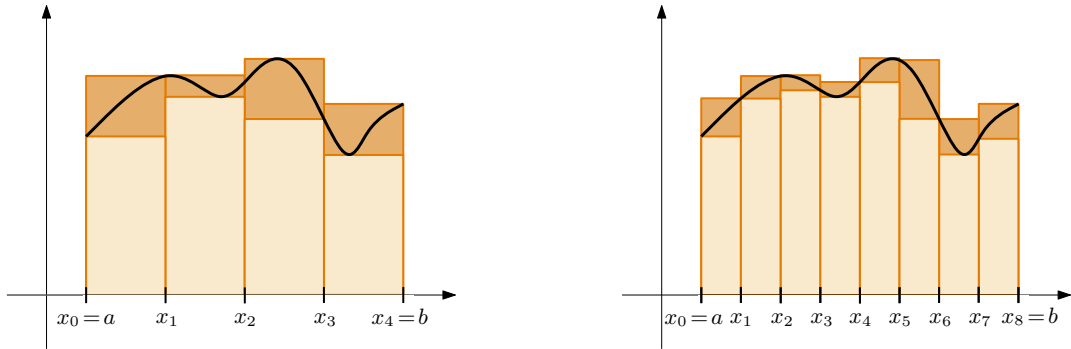


Figure 4: Criterio de integrabilidad

TEOREMA Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$.

TEOREMA Si f es continua en $[a, b]$ excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$.

TEOREMA Si f es integrable en $[a, b]$ y g coincide con f excepto en un número finito de puntos, entonces g es integrable Riemann en $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

TEOREMA Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$.

PROPIEDADES Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) **Linealidad**

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) **Monotonía** Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

(iii) **Aditividad** Si $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(iv) $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

(v) $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y además

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(vi) Si $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\Phi \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

Por convenio diremos que $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ y $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Nos preocupamos ahora de como calcular el valor de la integral.

Decimos que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **primitiva de f en $[a, b]$** si y sólo si F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Si F y G son dos primitivas de f en $[a, b]$ se diferencian en una constante. Lo que nos lleva a la definición de integral indefinida de f . Si F es una primitiva de f en $[a, b]$ definimos la **integral indefinida de f** como el conjunto de todas las primitivas y lo denotamos por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ donde } C \in \mathbb{R}.$$

EJEMPLO Dada $f(x) = x$, la integral indefinida de f es

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

OBSERVACIÓN Debéis repasar en este punto el cálculo de primitivas efectuado en el curso de Fonaments Matemàtics.

Nos preguntamos ahora si toda función integrable en $[a, b]$ tiene una primitiva. Para ello dada una función f integrable Riemann en $[a, b]$, definimos la **función integral de f en $[a, b]$** como

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Observar que $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(x) dx$.

EJEMPLO Dada $f(x) = 2$, calcular la función integral de f en $[1, 4]$. Para resolver la cuestión usaremos la interpretación de la integral como el área bajo la gráfica de f . Como es una función constante el área pedida es el de un rectángulo de base $x - 1$ y altura 2, ver Figura 5. Por tanto,

$$F(x) = \int_1^x 2 dt = 2(x - 1).$$

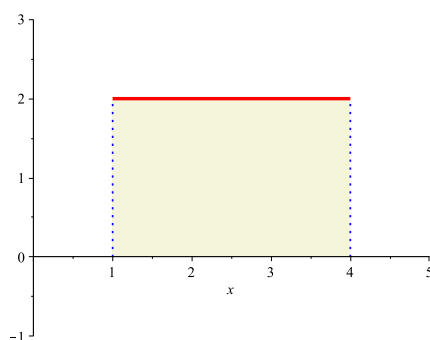


Figure 5: Interpretación de $F(x)$ con $f(x) = 2$ en $[1, 4]$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÀLCULO Sea f integrable en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ su función integral. Entonces,

- (i) F es continua en $[a, b]$.
- (ii) Si f es continua en $x_0 \in (a, b)$, F es derivable en x_0 y además, $F'(x_0) = f(x_0)$.

El último apartado nos dice que si f es continua en $[a, b]$, su función integral es una primitiva de f , lo que da repuesta a la cuestión sobre la existencia de primitivas.

OBSERVACIÓN Toda función continua en $[a, b]$ tiene una primitiva y es integrable, pero existen funciones que son integrales y que no tienen primitivas. Por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ es integrable en $[0, 4]$ por ser continua excepto en $x = 1$, pero no existe un función continua y derivable en $(0, 4)$ cuya derivada sea f .

El siguiente resultado nos dice como podemos calcular la integral definida de una función a través de una primitiva de la misma.

REGLA DE BARROW Sea f es integrable en $[a, b]$. Si existe una función F derivable en (a, b) tal que $F' = f$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

OBSERVACIÓN Existen funciones de las que conocemos que tienen primitiva pero no sabemos expresarlas como composición de funciones elementales. Por ejemplo: $f(x) = e^{x^2}$.

Sabemos que si f es continua su función integral es una primitiva y aunque no podamos expresarla en términos de funciones elementales podemos trabajar con ella. Esto es debido a que $F'(x) = f(x)$ y por tanto podríamos seguir derivando y utilizar el polinomio de Taylor de F para encontrar una aproximación.

EJEMPLO Consideramos $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, entonces $F'(x) = e^{x^2}$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO Sea f integrable en $[a, b]$. Si M y m designan el supremo y el ínfimo de f en $[a, b]$, respectivamente, entonces existe un número real c tal que $m \leq c \leq M$ y

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Además, si f es continua en $[a, b]$, $c = f(x_0)$ para algún $x_0 \in [a, b]$.

TEOREMA CAMBIO DE VARIABLE Si $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable con derivada continua y si f es continua en un intervalo que contiene a la imagen de g , entonces

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(y)) g'(y) dy.$$

EJEMPLO Dados, $a, R \in \mathbb{R}$ con $R > 0$, calcular $\int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx$.

Consideraremos $g: [0, \pi] \rightarrow [a-R, a+R]$ el cambio de variable $g(\theta) = a + R \cos \theta$, que habitualmente se representa como $x = a + R \cos \theta$.

Claramente $g(0) = a + R$, mientras que $g(\pi) = a - R$ y además $g'(\theta) = -R \operatorname{sen} \theta$. Como en este caso $f(x) = \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$, tenemos que

$$f(g(\theta)) = \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} = R \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = R \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta} = R |\operatorname{sen} \theta| = R \operatorname{sen} \theta,$$

donde hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$. Aplicando la fórmula del cambio de variable, obtenemos que

$$\int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx = - \int_{a+R}^{a-R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx = R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta d\theta.$$

Para evaluar esta última integral tendremos en cuenta que como $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\theta]$, resulta que $\frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right]$ es una primitiva de $\operatorname{sen}^2 \theta$ por lo que aplicando la Regla de Barrow,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

y, en definitiva, tenemos que

$$\int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx = \frac{\pi}{2} R^2, \quad \text{para cada } a \in \mathbb{R} \text{ y cada } R > 0.$$

TEOREMA INTEGRACIÓN POR PARTES Sea f, g integrable en $[a, b]$ y F, G dos primitivas de f y g respectivamente. Entonces,

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

EJEMPLO Calcular la integral definida $\int_0^1 xe^x dx$.

Utilizaremos el método de integración por partes.

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 \\ = e - e + 1 = 1.$$

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES

CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS Tal cómo hemos visto antes, la integral definida es una generalización del proceso del cálculo de áreas. Ahora bien, el área de un recinto es siempre positiva, mientras que la integral puede ser positiva, negativa o nula. Por tanto, en la aplicación de la integral al cálculo de áreas, debe tenerse en cuenta el signo de cada uno de los recintos limitados por el eje OX, y tomar el valor absoluto de los mismos. Su suma es el área.

EJEMPLO Sea $f(x) = 2x$. Calcular el área encerrada por la gráfica de f y el eje de abscisas en el intervalo $[-1, 1]$. La representación de dicha área se encuentra en la figura 6.

$$A = \int_{-1}^1 |2x| dx = \int_{-1}^0 -2x dx + \int_0^1 2x dx = -x^2 \Big|_{-1}^0 + x^2 \Big|_0^1 = 2.$$

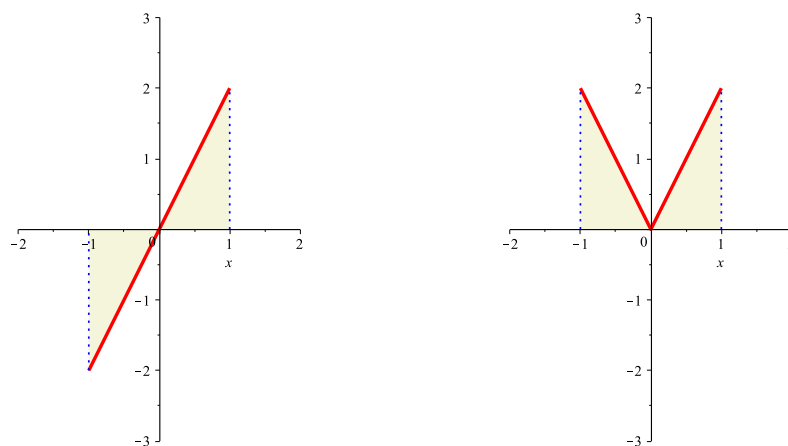


Figure 6: Gráfica de $f(x) = 2x$ y de $g(x) = |2x|$ en $[-1, 1]$

Con algunas modificaciones podemos extender la aplicación de la integral definida para definir el área de una región comprendida entre dos curvas.

Área de una región entre dos curvas: Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y se verifica que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g , y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, es

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Observaciones: (i) Las gráficas de f y g pueden estar situadas de cualquier manera respecto del eje OX .

(ii) Si unas veces se cumple que $g(x) \leq f(x)$ y otras veces que $f(x) \leq g(x)$, entonces el área de la región comprendida entre f y g sobre el intervalo $[a, b]$, viene dada por la fórmula

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

En la práctica, no se suele trabajar con el valor absoluto, puesto es más fácil dibujar las gráficas de f y g , calculando los puntos de intersección de ambas, y sumar una o más integrales para obtener el área deseada.

CÁLCULO DE VOLÚMENES A continuación mostraremos una serie de fórmulas que son muy utilizadas para el cálculo del volumen de algunos sólidos. La justificación de estas fórmulas se hará cuando abordemos la teoría de integración múltiple.

Fórmula de Cavalieri En este apartado veremos cómo se calcula el volumen de algunos sólidos mediante las áreas de sus secciones. Sea S un sólido en \mathbb{R}^3 y consideramos uno de los tres ejes coordenados, por ejemplo el eje x , cortamos el sólido por planos ortogonales al eje OX y denotamos por $A(x)$ el área de la intersección obtenida. El sólido estará comprendido entre los planos $x = a$ y $x = b$. Entonces, el volumen del sólido está dado por

$$V(S) = \int_a^b A(x) dx.$$

EJEMPLO La sección de un sólido paralela a la base a una altura z de la misma, es un anillo circular de radio interno z^2 y radio externo \sqrt{z} . Sabiendo que el sólido tiene una altura uno, hallar el volumen del mismo.

Para calcular el volumen utilizamos la fórmula de Cavalieri o cálculo del volumen de un sólido mediante el área de sus secciones. En este caso las secciones son anillos circulares de radios $r_1 = z^2$ y $r_2 = \sqrt{z}$. Por tanto,

$$V = \pi \int_0^1 (r_2^2 - r_1^2) dz = \int_0^1 (z - z^4) dz = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^5}{5} \right)_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Volumen de un sólido de revolución respecto del eje OX Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si giramos la región comprendida entre la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje OX , obtenemos un sólido de revolución. El volumen de dicho sólido está dado por la fórmula

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Esta fórmula se deduce de la fórmula de Cavalieri teniendo en cuenta que en este caso las secciones obtenidas son círculos de radio $r = f(x)$, y que el área de un círculo es πr^2 .

Volumen de un sólido de revolución respecto del eje OY .

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ continua y $a > 0$. Si giramos la región comprendida entre la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje OY , obtenemos un sólido de revolución. El volumen de dicho sólido está dado por la fórmula

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

EJERCICIOS

Problema 1. Se consideran las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$. Se define

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi], \\ g(x) & \text{si } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

- (i) Hallar la función integral de $h(x)$, $H(x) = \int_0^x h(t) dt$.
- (ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OX.
- (iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre 0 y π alrededor del eje OY.

- (i) Como la función h está definida a trozos su función integral H también lo estará. Por tanto, debemos distinguir $x \in [0, \pi]$ y $x \in [\pi, 2\pi]$.

$$\bullet x \in [0, \pi] \quad H(x) = \int_0^x h(t) dt = \int_0^x \sin t dt = -(\cos t)_0^x = 1 - \cos x.$$

$$\bullet x \in [\pi, 2\pi] \quad H(x) = \int_0^x h(t) dt = \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x t^2 dt = 2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)_\pi^x = 2 + \frac{x^3 - \pi^3}{3}.$$

- (ii) La fórmula del volumen de un sólido de revolución alrededor del eje x generado por la función f desde $x = a$ hasta $x = b$ es $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. En nuestro caso

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right)_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

- (iii) La fórmula del volumen del sólido generado al girar la función $f(x)$ entre a y b alrededor del eje OY es $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$. En nuestro caso:

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v' dx = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right] = - (x \cos x)_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + (\sin x)_0^\pi = \pi.$$

Problema 2. Sea $f : [-1, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

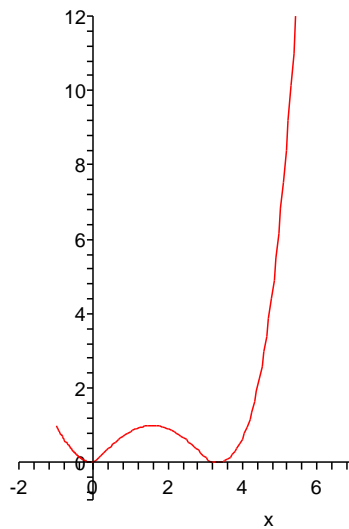
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{sen}x & 0 \leq x < \pi, \\ (x - \pi)^3 & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

- (i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $[-1, 2\pi]$.
- (ii) Calcular el área encerrada bajo la gráfica de f desde $x = -1$ hasta $x = 2\pi$.
- (iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre -1 y π alrededor del eje OX.

- (i) La función f es continua en $[-1, 2\pi] - \{0, \pi\}$ por estar definida mediante funciones elementales. En $x = 0, \pi$, debemos calcular los límites laterales.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}x = 0 \end{array} \right\} \implies f \text{ es continua en } 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{sen}x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - \pi)^3 = 0. \end{array} \right\} \implies f \text{ es continua en } \pi.$$



Por otro lado, la función f es derivable en $(-1, 2\pi) - \{0, \pi\}$ por ser una función polinómica o sinusoidal. Calculamos f' en el interior de los distintos intervalos de definición.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 < x < 0, \\ \cos x & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 3(x - \pi)^2 & \text{si } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Para hallar $f'(0)$ y $f'(\pi)$ podemos estudiar los límites laterales en los cambios de definición. Si los límites laterales existen podremos decir si la función es derivable, pero si no existe alguno de ellos no podremos deducir nada y tendremos que ir a la definición de derivada.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \end{array} \right\} \implies f \text{ no es derivable en } 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} 3(x - \pi)^2 = 0 \end{array} \right\} \implies f \text{ no es derivable en } \pi.$$

(ii) El área encerrada bajo la gráfica de f desde $x = -1$ hasta $x = 2\pi$ está dada por:

$$A = \int_{-1}^{2\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x - \pi)^3 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^0 - (\cos x)_0^{\pi} + \left(\frac{(x - \pi)^4}{4}\right)_{\pi}^{2\pi} = \frac{7}{3} + \frac{\pi^4}{4}.$$

(iii) El volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ entre -1 y π alrededor del eje OX está dado por:

$$V = \pi \int_{-1}^0 x^4 dx + \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \pi \left(\frac{x^5}{5}\right)_{-1}^0 + \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi^2}{2}.$$

Problema 3. Sea $f : [-1, 2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 0), \\ e^x & \text{si } x \in [0, 1], \\ e \cdot x & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

- (i) Hallar la función integral de $f(x)$, $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.
- (ii) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje $y = 0$.
- (iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje OX.
- (iv) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OY.

- (i) Como la función f es continua salvo quizás en un número finito de puntos, es integrable; además como está definida a trozos su función integral F también lo estará. Por tanto, debemos distinguir $x \in [-1, 0]$, $x \in [0, 1]$ y $x \in [1, 2]$.

$$\bullet x \in [-1, 0] \quad F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)_{-1}^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

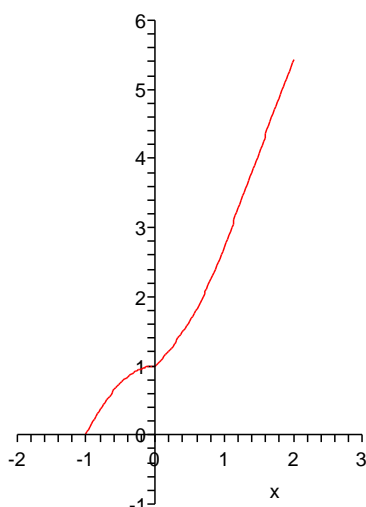
$$\bullet x \in [0, 1] \quad F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 (1 - t^2) dt + \int_0^x e^t dt = \frac{2}{3} + (e^t)_0^x = -\frac{1}{3} + e^x.$$

$$\bullet x \in [1, 2] \quad F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^x e \cdot t dt = \left(-\frac{1}{3} + e + e\frac{t^2}{2}\right)_1^x = -\frac{1}{3} + \frac{e}{2} + e\frac{x^2}{2}.$$

- (ii) El área limitada por la gráfica de f y el eje y es $A = \int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) = -\frac{1}{3} + \frac{5e}{2}$.

- (iii) La fórmula del volumen de un sólido de revolución alrededor del eje x generado por la función f desde $x = a$ hasta $x = b$ es $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. En nuestro caso:

$$V = \pi \left(\int_{-1}^0 (1 - x^2)^2 dx + \int_0^1 e^{2x} dx + \int_1^2 e^2 x^2 dx \right) = \pi \left[\left(x + \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^0 + \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)_0^1 + \left(e^2\frac{x^3}{3}\right)_1^2 \right] = \pi \left(\frac{1}{30} + e^2\frac{17}{6} \right).$$



- (iv) La fórmula del volumen del sólido generado al girar la función $f(x)$ entre a y b alrededor del eje OY es $V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$. En nuestro caso:

$$V = 2\pi \int_0^1 xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v' dx = e^x dx & v = e^x \end{array} \right] = 2\pi \left[(xe^x)_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right] = 2\pi [e - (e^x)_0^1] = 2\pi.$$

Problema 4. Sea $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin(x)$.

- (i) Hallar el área limitada por la gráfica de f y el eje OX.
- (ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje OX.
- (iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje OY.
- (iv) Un sólido tiene como base la región limitada por $\sin(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi$ y el eje OX, y sus secciones perpendiculares al eje OX son rectángulos de altura $\cos^2(x)$. Hallar el volumen del sólido.

- (i) Como la función f es positiva en $[0, \pi]$, el área será:

$$A = \int_0^\pi \sin(x) dx = (-\cos x)_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.$$

(ii) La fórmula del volumen de un sólido de revolución alrededor del eje OX generado por la función f desde $x = a$ hasta $x = b$ es $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right)_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

(iii) La fórmula del volumen del sólido generado al girar la función $f(x)$ entre a y b alrededor del eje OY es $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin(x) dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v' dx = \sin(x) dx & v = -\cos(x) \end{array} \right] =$$

$$2\pi \left[(-x\cos(x))_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) dx \right] = 2\pi [\pi + (\sin(x))_0^\pi] = 2\pi^2.$$

(iv) Como las secciones del sólido son rectángulos, de base $\sin x$ y altura $\cos^2 x$, podemos aplicar la fórmula de Cavalieri:

$$V = \int_0^\pi A(x) dx = \int_0^\pi \sin(x)\cos^2(x) dx = -\left(\frac{\cos^3(x)}{3}\right)_0^\pi = -\frac{\cos^3(\pi)}{3} + \frac{\cos^3(0)}{3} = \frac{2}{3}.$$

INTEGRAL DOBLE SOBRE RECTÁNGULOS

En este tema vamos a extender la definición de integración de Riemann para funciones reales de variable real al caso de funciones de varias variables.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Por **intervalo bidimensional** entendemos un rectángulo de la forma $R = [a, b] \times [c, d]$, donde $a < b$ y $c < d$.

Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y acotada. El **objetivo** es determinar el volumen encerrado por la gráfica de f y los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ y $z = 0$, ver Figura 7.

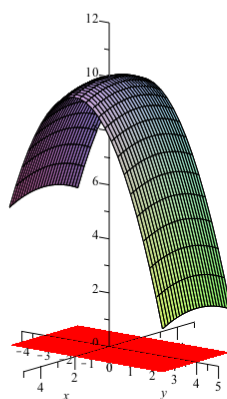


Figure 7: Gráfica de $f(x, y) = 24 - \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{2}$ en $[-2, 2] \times [-3, 4]$

La idea es aproximar el volumen mediante volúmenes de paralelepípedos contenidos o que contienen a la región, mediante particiones del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, Figura 8.

Consideramos una partición P del intervalo $[a, b]$ y otra partición Q del intervalo $[c, d]$

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_m = d$$

Estas dos particiones generan una partición del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ dada por los subintervalos $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$. El conjunto

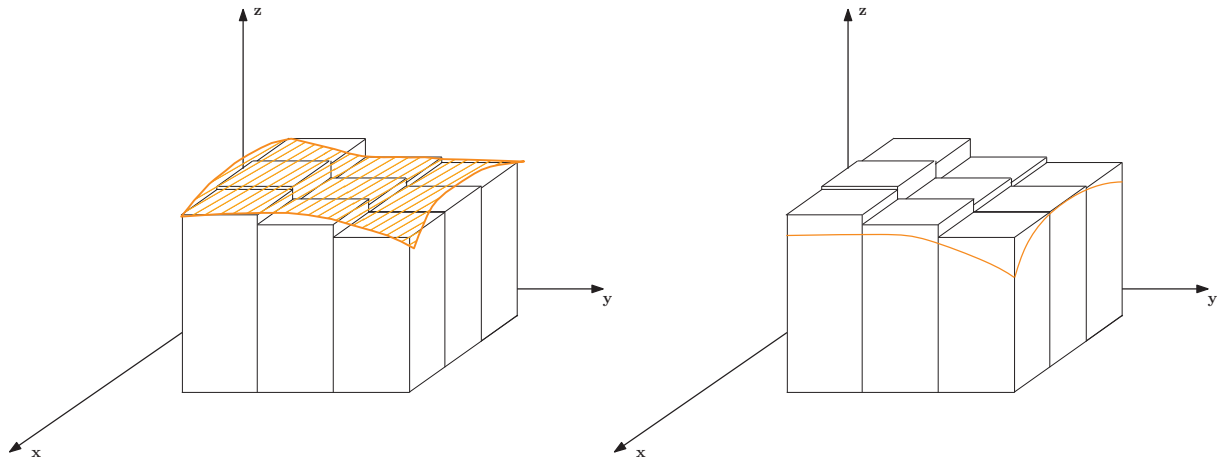


Figure 8: Aproximación por paralelepípedos

de todas las particiones generadas de esta forma se denotará por $\mathcal{P}(R)$. Si en cada uno de ellos consideramos $M_{ij} = \sup_{x \in I_{ij}} \{f(x)\}$ y $m_{ij} = \inf_{x \in I_{ij}} \{f(x)\}$, la suma de los volúmenes de los paralelepípedos cuya base es el intervalo I_{ij} y altura es M_{ij} será una aproximación por exceso del volumen buscado (ver Figura 8 derecha)

$$U(P \times Q, f) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} M_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j).$$

Mientras que la suma de los volúmenes de los paralelepípedos cuya base es el intervalo I_{ij} y altura es m_{ij} será una aproximación por defecto del volumen buscado (ver Figura 8 izquierda)

$$L(P \times Q, f) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} m_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j).$$

Definimos la **integral superior e inferior de Rieman**, respectivamente como

$$\bar{I} = \inf_{P \times Q \in \mathcal{P}(R)} U(P \times Q, f) \quad \text{y} \quad \underline{I} = \sup_{P \times Q \in \mathcal{P}(R)} L(P \times Q, f)$$

Decimos que un función $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, es **INTEGRABLE RIEMANN** en $[a, b] \times [c, d]$, si $\underline{I} = \bar{I}$. Llamamos a este valor común integral doble de f en $[a, b] \times [c, d]$ y lo denotamos por

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad \circ \quad \iint_R f(x, y) dx dy \quad \circ \quad \int \int_R f$$

TEOREMA DE FUBINI Si $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua**, entonces es integrable Riemann en $[a, b] \times [c, d]$ y además

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

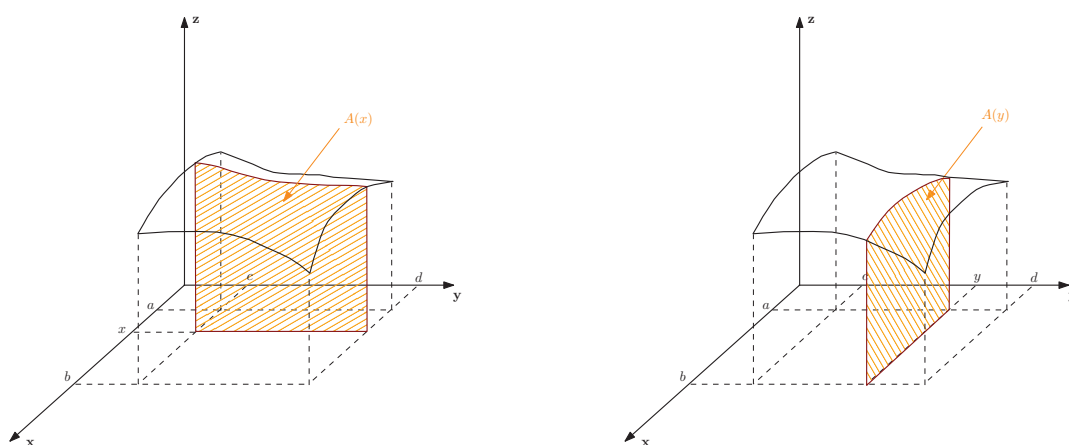


Figure 9: Integración Reiterada

El método que proporciona el Teorema de Fubini se denomina **Integración por reiteración**. La interpretación cuando $f \geq 0$ es la siguiente, si fijamos la variable x obtenemos una región plana cuya área es una función continua $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Entonces, la integral doble es $\int \int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b A(x) dx$, ver Figura 9 izquierda. De forma alternativa, si fijamos la variable y obtenemos una región plana cuya área es una función continua $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Entonces, la integral doble es $\int \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy$, ver Figura 9 derecha. Obsérvese que esta interpretación nos sirve además como una demostración de la fórmula de Cavalieri vista en el capítulo anterior.

PROPIEDADES Sean $f, g : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y acotadas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) **Linealidad**

$$\int \int_R (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \int \int_R f(x, y) dx dy + \beta \int \int_R g(x, y) dx dy.$$

(ii) **Monotonía** Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$

$$\int \int_R f(x, y) dx dy \geq \int \int_R g(x, y) dx dy.$$

(iii) **Aditividad** Si $R = R_1 \cup R_2$ donde $\overset{\circ}{R}_1 \cap \overset{\circ}{R}_2 = \emptyset$

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_{R_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{R_2} f(x, y) dx dy.$$

EJEMPLO 1 Hallar la integral doble de la función $f : [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y^2$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^2 (x + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x + y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(2x + \frac{8}{3} \right) dx = x^2 + \frac{8}{3}x \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Si $a < b$, $c < d$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$, hallar $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$. Evaluar también el caso en el que $a = -1, b = 1, c = 0, d = 1$.

Aplicando el **Teorema de Fubini**, resulta que

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_c^d dx = \int_a^b \left[x^2 d + \frac{d^3}{3} - x^2 c - \frac{c^3}{3} \right] dx \\ &= \int_a^b \left[x^2(d - c) + \frac{(d^3 - c^3)}{3} \right] dx = \left[(d - c) \frac{x^3}{3} + (d^3 - c^3) \frac{x}{3} \right]_a^b \\ &= (d - c) \frac{(b^3 - a^3)}{3} + (d^3 - c^3) \frac{(b - a)}{3} \\ &= \frac{1}{3} (b - a)(d - c)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd), \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $B^3 - A^3 = (B - A)(A^2 + B^2 + AB)$. En particular, cuando $a = -1, b = 1, c = 0, d = 1$, la sustitución de estos valores en la expresión anterior determina que

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \frac{4}{3}.$$

Nota: El Teorema de Fubini puede ser usado también en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \left[y^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_a^b dy \\ &= \int_c^d \left[y^2(b-a) + \frac{(b^3 - a^3)}{3} \right] dy = \left[(b-a) \frac{y^3}{3} + (b^3 - a^3) \frac{y}{3} \right]_c^d \\ &= (b-a) \frac{(d^3 - c^3)}{3} + (b^3 - a^3) \frac{(d-c)}{3} \\ &= \frac{1}{3} (b-a)(d-c)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd). \end{aligned}$$

INTEGRAL DOBLE SOBRE REGIONES MÁZ GENERALES

Hasta ahora la integral doble solo se ha definido para funciones cuyo dominio es un rectángulo. Sin embargo podemos extender la definición a regiones más generales sin demasiada dificultad.

Las regiones sobre las que vamos a definir la integral se denominan **pseudointervalos** y serán principalmente de tres tipos.

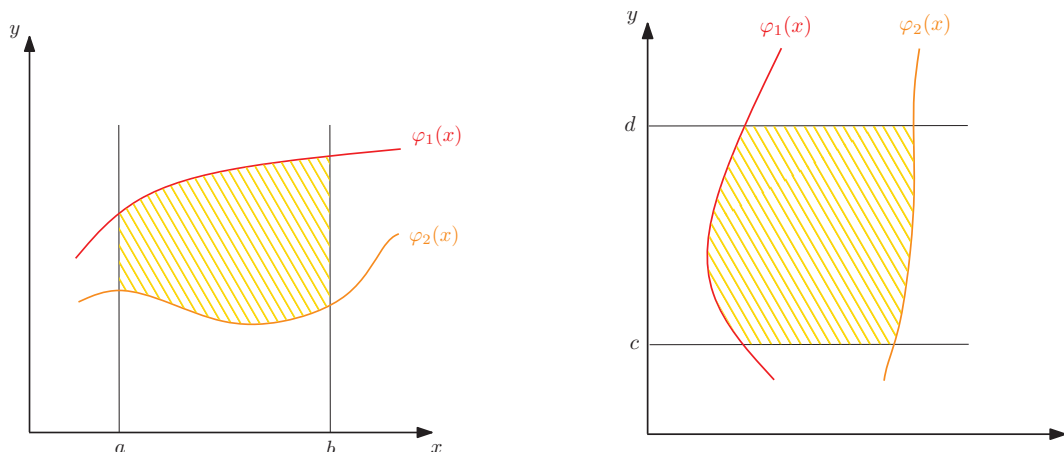


Figure 10: Región Tipo I (izquierda) Región Tipo II (derecha)

TIPO I Sean $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua, tales que $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Las regiones de tipo I son las de la forma (ver Figura 10 izquierda)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

TIPO II Sean $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables con derivadas continuas tales que $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Las regiones de tipo II son las de la forma (ver Figura 10 derecha)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

TIPO III Son regiones que se pueden descomponerse en un número finito de regiones de Tipo I o Tipo II.

Sea D una región de Tipo I. Supongamos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en D . Entonces,

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Sea D una región de Tipo II. Supongamos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en D . Entonces,

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Para las regiones de Tipo III la integral se define como la suma de las integrales en cada una de las regiones.

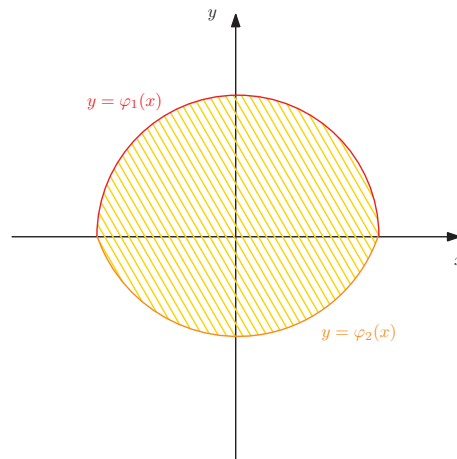


Figure 11: Región Tipo I y II

Observación: Ciertas regiones son del Tipo I y II a la vez, ver Figura 11. En este caso la integral doble sobre la región puede realizarse de cualquiera de las dos maneras y el resultado coincide. Aunque a veces la integral se complica y hay que elegir la forma más adecuada.

EJEMPLO 3 Se consideran la función $f(x, y) = \frac{xy}{8}$ y el pseudointervalo

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4, \quad x - 1 \leq y \leq 2x \right\}.$$

Determinar el valor $\int \int_D f$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \int \int_D f &= \int_2^4 \left[\int_{x-1}^{2x} f(x, y) dy \right] dx = \frac{1}{8} \int_2^4 \left[\int_{x-1}^{2x} xy dy \right] dx = \frac{1}{8} \int_2^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x-1}^{2x} dx \\ &= \frac{1}{16} \int_2^4 x \left[4x^2 - (x-1)^2 \right] dx = \frac{1}{16} \int_2^4 \left[3x^3 + 2x^2 - x \right] dx \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \frac{1}{16} \left[192 + \frac{128}{3} - 8 - 12 - \frac{16}{3} + 2 \right] = \frac{317}{24}. \end{aligned}$$

APLICACIONES: CÁLCULO DE ÁREAS

Si D es un pseudointervalo, definimos el **área de D** como

$$\int \int_D dx dy.$$

Por ejemplo, si D es una región acotada de Tipo I, entonces su área está dada como

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx dy = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx.$$

CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL DOBLE

Como pudimos comprobar en el estudio de la Integración simple de Riemann, una de las técnicas más usuales en el cálculo de integrales es el **cambio de variables**, cuyo objetivo es transformar la integral a calcular en otra más sencilla. Nuestro próximo objetivo es extender esta técnica al caso de integrales dobles.

TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE Sea D un pseudointervalo y $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función inyectiva, $\mathcal{C}^1(D)$ y tal que $\det(dF(u, v)) \neq 0$ para todo $(u, v) \in D$. Si $f : F(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $F(D)$ es un pseudointervalo, entonces

$$\int \int_{F(D)} f(x, y) dx dy = \int_D (f \circ F)(u, v) |\det(dF(u, v))| du dv$$

El cambio de variable más habitual para \mathbb{R}^2 es el cambio a **Coordenadas Polares**

$$\begin{aligned} F: \quad (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\} \\ (r, \theta) &\longrightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned} \quad \implies \quad |\det dF| = r$$

Observar que si $0 < R_1 < R_2$ y $0 < \alpha < \beta$, el cambio a coordenadas polares transforma el sector circular de radio interior R_1 , radio exterior R_2 y arcos comprendidos entre α y β en el rectángulo $R = (R_1, R_2) \times (\alpha, \beta)$.

EJEMPLO 4 Determinar el área del disco de centro el origen y radio $R > 0$.

El disco en cuestión es $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Si F es el cambio a *coordenadas polares*, resulta que $D = F((0, R) \times (0, 2\pi))$, lo que implica que

$$\text{Área}(D) = \int \int_D dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^R 2\pi r dr = \pi \left[r^2 \right]_0^R = \pi R^2.$$

INTEGRAL TRIPLE DE RIEMANN

La Teoría de integración en tres variables es idéntica a la Teoría de Integración en el caso bidimensional. Nos limitaremos aquí a utilizar la integración por reiteración y a describir los pseudointervalos y el cambio de variable.

Por **intervalo tridimensional** entendemos un prisma recto de la forma $P = [A, B] \times [a, b] \times [c, d]$, donde $A < B$, $a < b$ y $c < d$. La herramienta fundamental en este apartado es el **Teorema de Fubini**, que establece que si $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ con $P = [A, B] \times [a, b] \times [c, d]$ es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \iiint_P f &= \int_A^B \left[\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx = \int_A^B \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z) dy \right] dz \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_A^B \left[\int_c^d f(x, y, z) dz \right] dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_A^B f(x, y, z) dx \right] dz \right] dy \\ &= \int_c^d \left[\int_A^B \left[\int_a^b f(x, y, z) dy \right] dx \right] dz = \int_c^d \left[\int_a^b \left[\int_A^B f(x, y, z) dx \right] dy \right] dz. \end{aligned}$$

El Teorema de Fubini, permite calcular integrales múltiples mediante la evaluación reiterada de integrales de funciones de una variable.

Un **pseudointervalo tridimensional** es un subconjunto descrito en una de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x), \phi(x, y) \leq z \leq \rho(x, y)\} \\ P_2 &= \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \psi(x) \leq z \leq \varphi(x), \phi(x, z) \leq y \leq \rho(x, z)\} \\ P_3 &= \{(x, y, z) : a \leq y \leq b, \psi(y) \leq x \leq \varphi(y), \phi(y, x) \leq z \leq \rho(y, x)\} \\ P_4 &= \{(x, y, z) : a \leq y \leq b, \psi(y) \leq z \leq \varphi(y), \phi(y, z) \leq x \leq \rho(y, z)\} \\ P_5 &= \{(x, y, z) : a \leq z \leq b, \psi(z) \leq x \leq \varphi(z), \phi(z, x) \leq y \leq \rho(z, x)\} \\ P_6 &= \{(x, y, z) : a \leq z \leq b, \psi(z) \leq y \leq \varphi(z), \phi(z, y) \leq x \leq \rho(z, y)\}, \end{aligned}$$

donde $\psi, \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son derivables con derivada continua y $\phi, \rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas en Ω abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a un intervalo de la forma $[a, b] \times [c, d]$. Por tanto, si para $j = 1, \dots, 6$, $f_j: P_j \rightarrow \mathbb{R}$ es continua aplicando el **Teorema de Fubini** obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \int \int \int_{P_1} f_1 &= \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \left[\int_{\phi(x,y)}^{\rho(x,y)} f_1(x,y,z) dz \right] dy \right] dx \\
 \int \int \int_{P_2} f_2 &= \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \left[\int_{\phi(x,z)}^{\rho(x,z)} f_2(x,y,z) dy \right] dz \right] dx \\
 \int \int \int_{P_3} f_3 &= \int_a^b \left[\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \left[\int_{\phi(y,x)}^{\rho(y,x)} f_3(x,y,z) dz \right] dx \right] dy \\
 \int \int \int_{P_4} f_4 &= \int_a^b \left[\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \left[\int_{\phi(y,z)}^{\rho(y,z)} f_4(x,y,z) dx \right] dz \right] dy \\
 \int \int \int_{P_5} f_5 &= \int_a^b \left[\int_{\psi(z)}^{\varphi(z)} \left[\int_{\phi(z,x)}^{\rho(z,x)} f_5(x,y,z) dy \right] dx \right] dz \\
 \int \int \int_{P_6} f_6 &= \int_a^b \left[\int_{\psi(z)}^{\varphi(z)} \left[\int_{\phi(z,y)}^{\rho(z,y)} f_6(x,y,z) dx \right] dy \right] dz
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Calcular el volumen del tetraedro T limitado por los planos $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ e $\{y - x + z = 1\}$.

Los vértices del tetraedro son $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$, de manera que puede ser descrito como el siguiente *pseudointervalo*:

$$T = \left\{ (x, y, z) : -1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 + x, \quad 0 \leq z \leq 1 + x - y \right\}.$$

Así pues, tenemos que

$$\begin{aligned}
 v(T) &= \int \int \int_T dz dy dx = \int_{-1}^0 \left[\int_0^{1+x} \left[\int_0^{1+x-y} dz \right] dy \right] dx = \int_{-1}^0 \left[\int_0^{1+x} (1+x-y) dy \right] dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left[(1+x-y)^2 \right]_0^{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1+x)^2 dx = \frac{1}{6} \left[(1+x)^3 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Observar que la sección del tetraedro en el punto de abscisa x por el plano paralelo al plano $\{x = 0\}$ es el triángulo rectángulo de lado $1 + x$ cuyo área es $A(x) = \frac{1}{2}(1+x)^2$. El volumen del tetraedro es por tanto $v(T) = \int_{-1}^0 A(x) dx$.

Nota: El tetraedro también puede ser descrito como el pseudointervalo

$$T = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq y \leq 1, \quad y - 1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq z \leq 1 + x - y \right\},$$

de manera que

$$\begin{aligned} v(T) &= \int \int \int_T dz dy dx = \int_0^1 \left[\int_{y-1}^0 \left[\int_0^{1+x-y} dz \right] dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_{y-1}^0 (1+x-y) dx \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1+x-y)^2 \right]_{y-1}^0 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 dy = -\frac{1}{6} \left[(1-y)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Además, el tetraedro puede ser asimismo descrito como otros pseudointervalos, como por ejemplo,

$$T = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, \quad z-1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1+x-z \right\}.$$

En este caso el cálculo del volumen de T sigue los pasos anteriores, cambiando entre sí el papel de las variables y y z .

APLICACIONES

CÁLCULO DE VOLÚMENES

Si P es un pseudointervalo, definimos el **volumen de P** como

$$\int \int \int_P dx dy dz.$$

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativa y continua, entonces

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx dy$$

representa el volumen del sólido definido por $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ ya que

$$\int \int \int_S dx dy dz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_0^{f(x,y)} dx dy dz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx dy$$

En general si f y g son ambas continuas en D y $f \geq g$ en D , la integral doble

$$\int \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx dy$$

representa el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de g y f en D .

TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un pseudointervalo y $F : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función inyectiva, $\mathcal{C}^1(P)$ y tal que $\det(dF) \neq 0$ para todo $(u, v, w) \in P$. Si $f : F(P) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $F(P)$ es un pseudointervalo, entonces

$$\int \int_{F(P)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_P (f \circ F)(u, v, w) |\det(dF(u, v, w))| du dv dw$$

Los cambios de variable más habituales para \mathbb{R}^3 son el cambio a [Coordenadas Cilíndricas](#)

$$F: \begin{array}{ll} (0 + \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\} \\ (r, \theta, z) & \longrightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{array} \implies |\det DF| = r,$$

y también el cambio a [Coordenadas Esféricas](#)

$$F: \begin{array}{ll} (0 + \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\} \\ (r, \theta, \varphi) & \longrightarrow (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \end{array}$$

en cuyo caso, $|\det DF| = r^2 \sin \varphi$.

EJEMPLO 6 Calcular el volumen del sólido S comprendido entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

El cono y el paraboloides se cortan en los puntos cuya tercera coordenada satisface $z^2 = z$, es decir para $z = 0$ y $z = 1$. Por tanto, si F denota el cambio a *coordenadas cilíndricas*, entonces $S = F(P)$, donde P es el pseudointervalo

$$P = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \leq r \leq \sqrt{z} \right\},$$

donde hemos tenido en cuenta que como $0 \leq z \leq 1$, entonces $0 \leq z \leq \sqrt{z} \leq 1$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} v(S) &= \int \int_S dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_z^{\sqrt{z}} r dr \right] d\theta \right] dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} [r^2]_z^{\sqrt{z}} d\theta \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [z - z^2] \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] dz = \pi \int_0^1 [z - z^2] dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

VALOR PROMEDIO

En las secciones anteriores hemos visto como las integrales múltiples pueden utilizarse para calcular volúmenes y áreas de regiones de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 , respectivamente. Otros conceptos tales como, masa, valor promedio, centro de masas, y momentos de inercia pueden definirse mediante la integración múltiple. Estos conceptos son de particular importancia en física e ingeniería.

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, es un dominio de integración. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de densidad continua, entonces definimos la **masa de Ω** como el valor de la integral doble

$$m(\Omega) = \int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

Cuando f es una función continua arbitraria, es decir, no necesariamente positiva, llamamos **valor promedio o valor medio de f sobre la región Ω** al cociente

$$\bar{f} = \frac{\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy}{\int \int_{\Omega} dx dy}.$$

EJEMPLO. Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = x\sqrt{1+y^3}$ sobre la región limitada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$ y $x = 1$.

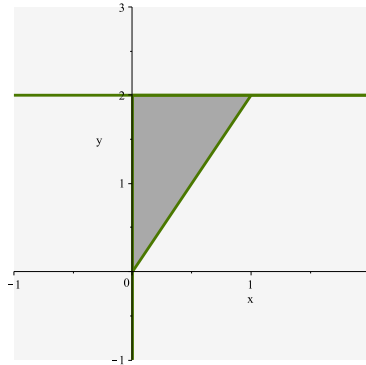
Debemos hallar dos integrales. Por un lado, el área de la región

$$\int \int_{\Omega} dx dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} dx dy = \int_0^2 x \Big|_0^{\frac{y}{2}} dy = \int_0^2 \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{4} \Big|_0^2 = 1.$$

Observar que al tratarse de un triángulo de base 1 y altura 2, podríamos haber calculado el área como base por altura dividido entre dos obteniendo el valor 1 de la integral.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} x \sqrt{1+y^3} dx dy &= \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} x \sqrt{1+y^3} dx dy = \int_0^2 \frac{x^2}{2} \sqrt{1+y^3} \Big|_0^{\frac{y}{2}} dx = \int_0^2 \frac{y^2}{8} \sqrt{1+y^3} dy \\ &= \frac{1}{36} \left(\sqrt{1+y^3} \right)^3 \Big|_0^2 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Figure 12: Región de integración Ω

CENTRO DE MASAS

Por analogía al caso discreto definimos el **centro de masas de un dominio** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con densidad $f(x, y) \geq 0$, como el punto de coordenadas

$$x_c = \frac{\int \int_{\Omega} x f(x, y) dx dy}{\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy} \quad y_c = \frac{\int \int_{\Omega} y f(x, y) dx dy}{\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy}.$$

Cuando la densidad es constante, el centro de masas se obtiene como

$$x_c = \frac{\int \int_{\Omega} x dx dy}{\int \int_{\Omega} dx dy} \quad y_c = \frac{\int \int_{\Omega} y dx dy}{\int \int_{\Omega} dx dy};$$

y es denominado **centroide de Ω** .

MOMENTO DE INERCIA

El **momento de inercia** es una medida de la resistencia que opone un cuerpo a modificar su estado ante un movimiento rotacional. Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud escalar llamada momento de inercia. Sin embargo, en el caso más general posible la inercia rotacional debe representarse por medio de un conjunto de momentos de inercia y componentes que forman el llamado tensor de inercia. La descripción tensorial es necesaria para el análisis de sistemas complejos, como por ejemplo en movimientos giroscópicos.

El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, L , el **momento de inercia del mismo** se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia r de cada partícula a dicho eje:

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

En el caso de un medio continuo se generaliza mediante el uso de integrales:

$$I = \int \int_{\Omega} r^2(x, y) f(x, y) \, dx dy,$$

siendo f la función de densidad y $r(x, y)$ la distancia de un punto $(x, y) \in \Omega$ al eje L . En este caso I se denomina **momento de inercia de Ω respecto del eje L** .

Los **momentos de inercia respecto de los ejes x e y** se denotan por I_x e I_y , respectivamente

$$I_x = \int \int_{\Omega} y^2 f(x, y) \, dx dy, \quad I_y = \int \int_{\Omega} x^2 f(x, y) \, dx dy.$$

La suma de ambos momentos se denomina **momento polar de inercia I_0 respecto del origen**:

$$I_0 = \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) f(x, y) \, dx dy.$$

Finalmente, observar que las mismas definiciones se pueden dar para el caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sustituyendo las integrales dobles por triples.

EJEMPLO. Calcular el momento polar de inercia de una lámina de densidad constante $k > 0$ formada por un anillo circular de radio interno r_1 y radio externo $r_2 > r_1 > 0$.

La región Ω de integración es

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$$

que en coordenadas polares puedes describirse como

$$\Omega = \{(r, \theta) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) : r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Teniendo en cuenta que el **determinante Jacobiano del cambio a polares es r** , obtenemos

$$I_0 = \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy = k \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta = 2\pi k \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_1}^{r_2} = \frac{\pi}{2} k (r_2^4 - r_1^4).$$

EJERCICIOS

Problema 5. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $\{z = 0\}$ y la gráfica de la función $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$ en el cuadrado $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Sabemos que el volumen del sólido descrito es $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f$, integral que será evaluada utilizando el *Teorema de Fubini*. Así pues, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y dy \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \underbrace{\left[-\operatorname{cos} y \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{1} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Nota: Nuevamente, el Teorema de Fubini puede ser usado también en la forma

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \underbrace{\left[\operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\substack{|| \\ 1}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y dy = \left[-\cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Problema 6. Calcular el volumen del sólido limitado por los planos $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$, $\{x = 1\}$, $\{y = 1\}$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.

Si consideramos la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^4$, entonces una breve reflexión geométrica determina que el sólido en cuestión coincide con el limitado por el plano $\{z = 0\}$ y la gráfica de f en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, de manera que su volumen es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^4) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{5} \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Nota: El cálculo del volumen también puede efectuarse en la forma

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^4) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^4 x \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y^4 \right] dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Problema 7. Calcular el volumen del sólido limitado por los planos $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$, $\{x = 1\}$, $\{y = \frac{\pi}{2}\}$ y la superficie $z = \operatorname{sen} y$.

Si consideramos la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \operatorname{sen} y$, entonces el sólido en cuestión coincide con el limitado por el plano $\{z = 0\}$ y la gráfica de f en el rectángulo $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, de manera que su volumen es

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y dy \right] dx = \int_0^1 \left[-\cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Nota: El cálculo del volumen también puede efectuarse en la forma

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \left[\int_0^1 dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y dy = \left[-\cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Problema 8. Encontrar el valor promedio de la función $f(x, y) = x \operatorname{sen}^2(xy)$ en el cuadrado $C = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Como $\mathbf{a}(C) = \pi^2$, el valor promedio de la función dada en C es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \iint_C f &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left[\int_0^\pi x \operatorname{sen}^2(xy) dy \right] dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left[\int_0^\pi x [1 - \cos(2xy)] dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left[xy - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2xy) \right]_0^\pi dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi [2x\pi - \operatorname{sen}(2x\pi)] dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left[x^2\pi + \frac{1}{2\pi} \cos(2x\pi) \right]_0^\pi = \frac{1}{8\pi^3} [2\pi^4 - 1 + \cos(2\pi^2)] \end{aligned}$$

Problema 9. La temperatura en cada punto del cubo $C = [-1, 1]^3$ es proporcional al cuadrado de su distancia al origen de coordenadas. Determinar la temperatura media en el cubo y los puntos del mismo cuya temperatura coincide con la media.

La función temperatura es $T(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$, donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. Como $\mathbf{v}(C) = 2^3 = 8$, el valor medio de la temperatura en C está determinado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \iiint_C T &= \frac{k}{8} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz \right] dy \right] dx \\ &= \frac{k}{8} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 dy \right] dx = \frac{k}{8} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \left[2(x^2 + y^2) + \frac{2}{3} \right] dy \right] dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-1}^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{3} \right]_{-1}^1 dx = \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \left[x^2 + \frac{2}{3} \right] dx = \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_{-1}^1 dx = k. \end{aligned}$$

Finalmente los puntos en los cuales la temperatura coincide con la promedio serán aquéllos en los que $T(x, y, z) = k$, es decir los puntos del conjunto $\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$, que resulta ser la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 1.

Problema 10. Determinar el área del disco de radio R centrado en el punto $P = (a, b)$.

El disco está descrito como $D = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}$, de manera que también puede ser considerado como el *pseudointervalo*

$$D = \left\{ (x, y) : a - R \leq x \leq a + R, \quad b - \sqrt{R^2 - (x - a)^2} \leq y \leq b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2} \right\},$$

y por tanto, tenemos que

$$a(D) = \int \int_D dx dy = \int_{a-R}^{a+R} \left[\int_{-\sqrt{R^2 - (x-a)^2}}^{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}} dy \right] dx = 2 \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2 - (x-a)^2} dx = \pi R^2.$$

Nota: Comprobamos que el resultado no depende más que del radio y es por tanto independiente de las coordenadas del centro. En particular, cuando el centro se sitúa sobre el eje de abscisas, es decir $b = 0$, entonces la mitad del disco es el recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$ cuando $x \in [a - R, a + R]$. En el problema hemos demostrado que $\int_{a-R}^{a+R} f(x) dx = \frac{\pi}{2} R^2$.

Problema 11. Si $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$, hallar $\int \int_S e^{x+y} dy dx$.

El conjunto S es el cuadrado de vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ y $D = (0, -1)$ y cuyos lados son los segmentos

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \{(x, 1 - x) : 0 \leq x \leq 1\}, & s_{BC} &= \{(x, 1 + x) : -1 \leq x \leq 0\}, \\ s_{CD} &= \{(x, -x - 1) : -1 \leq x \leq 0\}, & s_{DA} &= \{(x, -1 + x) : 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

De forma equivalente, S es unión de los pseudointervalos

$$S_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, -1 - x \leq y \leq 1 + x\}, S_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 + x \leq y \leq 1 - x\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \int_S e^{x+y} dy dx &= \int_{-1}^0 \left[\int_{-(1+x)}^{1+x} e^{x+y} dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_{-1+x}^{1-x} e^{x+y} dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[e^{x+y} \right]_{-(1+x)}^{1+x} dx + \int_0^1 \left[e^{x+y} \right]_{-1+x}^{1-x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[e^{1+2x} - e^{-1} \right] dx + \int_0^1 \left[e - e^{-1+2x} \right] dx \\ &= \left[\frac{e^{1+2x}}{2} \right]_{-1}^0 - e^{-1} + e - \left[\frac{e^{-1+2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} - e^{-1} + e - \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Problema 12. Determinar el volumen del sólido interior a la superficie $z = x^2 + y^2$ limitado por los planos $\{z = 0\}$, $\{z = 10\}$.

El sólido en cuestión puede ser descrito como el *pseudointervalo*¹

$$P = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq 10, \quad -\sqrt{z} \leq y \leq \sqrt{z}, \quad -\sqrt{z - y^2} \leq x \leq \sqrt{z - y^2} \right\},$$

de manera que

$$\begin{aligned} v(P) &= \int \int \int_P dx dy dz = \int_0^{10} \left[\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left[\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx \right] dy \right] dz = 2 \int_0^{10} \left[\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z - y^2} dy \right] dz \\ &= \int_0^{10} \pi z dz = \left[\frac{\pi z^2}{2} \right]_0^{10} = 50\pi. \end{aligned}$$

Nota: Observar que el corte de P en z con el plano paralelo al plano $\{z = 0\}$ es el disco centrado en el origen y de radio \sqrt{z} , cuyo área es precisamente $A(z) = z\pi$, de donde obtenemos que $v(P) = \int_0^{10} A(z) dz$.

Problema 13. Determinar el volumen de la bola de radio R centrada en el origen de coordenadas.

La bola está descrita como $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, de manera que también puede ser considerada como el *pseudointervalo*²

$$B = \left\{ (x, y, z) : -R \leq x \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} v(B) &= \int \int \int_B dz dy dx = \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left[\int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz \right] dy \right] dx \\ &= 2 \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \right] dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R \\ &= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

¹Posteriormente efectuaremos el cálculo de este área empleando la técnica del *cambio de variables* en integración múltiple.

²Efectuaremos también el cálculo de este área empleando la técnica del *cambio de variables*.

Problema 14. Dados $a < b$ y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y positiva, demostrar que el volumen del sólido contenido entre los planos $\{x = a\}$, $\{x = b\}$ y la superficie creada por la rotación de la gráfica de f en torno del eje x es igual a $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

La superficie generada por la rotación de la gráfica de f en torno del eje x tiene como ecuación implícita $y^2 + z^2 = f(x)^2$, de manera que el sólido en cuestión puede ser descrito como el pseudointervalo

$$S = \left\{ (x, y, z) : a \leq x \leq b, -f(x) \leq y \leq f(x), -\sqrt{f(x)^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{f(x)^2 - y^2} \right\},$$

de forma que,

$$\begin{aligned} v(S) &= \int \int \int_S dz dy dx = \int_a^b \left[\int_{-f(x)}^{f(x)} \left[\int_{-\sqrt{f(x)^2 - y^2}}^{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} dz \right] dy \right] dx \\ &= 2 \int_a^b \left[\int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{f(x)^2 - y^2} dy \right] dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Problema 15. Si $0 < a < b$, evaluar $\int \int_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ donde

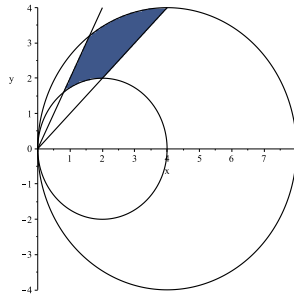
$$D = \left\{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \right\}.$$

Si F es el cambio a a *coordenadas polares*, resulta que $D = F((a, b) \times (0, \frac{\pi}{2}))$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \int \int_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \ln r^2 d\theta dr = 2 \int_a^b r \ln r \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] dr \\ &= \pi \int_a^b r \ln r dr = \left[\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right]_a^b = \frac{1}{4} \left[2b^2 \ln b - 2a^2 \ln a + a^2 - b^2 \right], \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\frac{r^2}{4} [2 \ln r - 1]$ es una primitiva de $r \ln r$.

Problema 16. Sea $S \in \mathbb{R}^2$ el conjunto limitado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4x$ y $x^2 + y^2 = 8x$ y las rectas $y = x$ e $y = 2x$. Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, evaluar $\int \int_S f$.

Figure 13: Recinto S

Si F denota el cambio a *coordenadas polares*, como $x = r\cos\theta$ e $y = r\sen\theta$, resulta que las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4x$ y $x^2 + y^2 = 8x$ se expresan en las nuevas coordenadas como $r^2 - 4r\cos\theta = 0$ y $r^2 - 8r\cos\theta = 0$, respectivamente. Por tanto, teniendo en cuenta que r debe ser positivo, las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4x$ y $x^2 + y^2 = 8x$ corresponden respectivamente a los conjuntos

$$C_1 = \left\{ (4\cos\theta, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

$$C_2 = \left\{ (8\cos\theta, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Por otra parte, las semirectas $y = x$ e $y = 2x$ contenidas en el primer cuadrante se expresan en las nuevas coordenadas como $r\sen\theta = r\cos\theta$ y $r\sen\theta = 2r\cos\theta$, respectivamente, es decir como $\operatorname{tg}\theta = 1$ y $\operatorname{tg}\theta = 2$, que corresponden respectivamente a los conjuntos

$$r_1 = \left\{ \left(r, \frac{\pi}{4} \right) : r > 0 \right\} \quad \text{y} \quad r_2 = \left\{ (r, \theta_0) : r > 0, \theta_0 = \operatorname{arctg} 2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

donde hemos tenido en cuenta que S se sitúa en el primer cuadrante (recordar que $\operatorname{tg}\theta = 1$ si y sólo si $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ y que $\operatorname{tg}\theta = 2$ si y sólo si $\theta = \theta_0, \pi + \theta_0$).

En conclusión, en coordenadas polares $S = F(P)$, donde P es el pseudointervalo

$$P = \left\{ (r, \theta) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \theta_0 \quad 4\cos\theta \leq r \leq 8\cos\theta \right\}$$

y en consecuencia,

$$\iint_S f = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0} \left[\int_{4\cos\theta}^{8\cos\theta} r f(r\cos\theta, r\sen\theta) dr \right] d\theta.$$

Problema 17. Usar el cambio de variables $x = u-v$, $y = 2u-v$ para evaluar $\iint_P xy \, dx dy$ donde P es el paralelogramo comprendido entre las rectas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$.

Si $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por $F(u, v) = (u - v, 2u - v)$, entonces $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, es biyectiva, de hecho $u = y - x$ y $v = y - 2x$, es decir $F^{-1}(x, y) = (y - x, y - 2x)$,³ y además

$$D_{(u,v)}F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \implies \det D_{(u,v)}F = 1.$$

Por otra parte, P es el paralelogramo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (3, 4)$ y $D = (1, 2)$, lo que implica que $P = F([0, 1] \times [-2, 0])$, por lo que aplicando el *Teorema del Cambio de Variables* resulta que

$$\begin{aligned} \int \int_P xy \, dx dy &= \int_0^1 \int_{-2}^0 (u - v)(2u - v) \, dudv = \int_0^1 \left[\int_{-2}^0 (2u^2 - 3uv + v^2) \, dv \right] du \\ &= \int_0^1 \left[2u^2v - \frac{3uv^2}{2} + \frac{v^3}{3} \right]_{-2}^0 du = \int_0^1 \left[4u^2 + 6u + \frac{8}{3} \right] du \\ &= \left[\frac{4u^3}{3} + 3u^2 + \frac{8u}{3} \right]_0^1 = \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

Problema 18. Determinar el volumen del cilindro de eje la recta $x = y = 0$ (eje z), altura $h > 0$ y radio $R > 0$.

El cilindro en cuestión es $C = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Si F es el cambio a *coordenadas cilíndricas*, resulta que $C = F((0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, h))$, lo que implica que

$$\begin{aligned} v(C) &= \int \int \int_C dx dy dz = \int_0^h \left[\int_0^R \left[\int_0^{2\pi} r \, d\theta \right] dr \right] dz = \int_0^h \left[\int_0^R 2\pi r \, dr \right] dz \\ &= \pi \int_0^h [r^2]_0^R dz = \pi R^2 \int_0^h dz = \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Problema 19. Determinar el volumen del sólido S interior a la superficie $z = x^2 + y^2$ limitado por los planos $\{z = 0\}$, $\{z = 10\}$.

Si F denota el cambio a *coordenadas cilíndricas*, entonces $S = F(P)$, donde P es el pseudointervalo

$$P = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq z \leq 10, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{z} \right\}.$$

³Observar que F es una función lineal.

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} v(S) &= \int \int_S dx dy = \int_0^{10} \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{z}} r dr \right] d\theta \right] dz = \frac{1}{2} \int_0^{10} \left[\int_0^{2\pi} [r^2]_0^{\sqrt{z}} d\theta \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{10} z \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] dz = \pi \int_0^{10} z dz = \frac{\pi}{2} [z^2]_0^{10} = 50\pi. \end{aligned}$$

Nota: Recordar que en el Problema 12 este volumen ha sido calculado como el correspondiente a un pseudointervalo.

Problema 20. Calcular el volumen del sólido S comprendido entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

El cono y el paraboloides se cortan en los puntos cuya tercera coordenada satisface $z^2 = z$, es decir para $z = 0$ y $z = 1$. Por tanto, si F denota el cambio a *coordenadas cilíndricas*, entonces $S = F(P)$, donde P es el pseudointervalo

$$P = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z \leq r \leq \sqrt{z} \right\},$$

donde hemos tenido en cuenta que como $0 \leq z \leq 1$, entonces $0 \leq z \leq \sqrt{z} \leq 1$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} v(S) &= \int \int_S dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_z^{\sqrt{z}} r dr \right] d\theta \right] dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} [r^2]_z^{\sqrt{z}} d\theta \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [z - z^2] \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] dz = \pi \int_0^1 [z - z^2] dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Problema 21. Calcular $\int \int \int_S (x^2 + y^2)^2 dx dy dz$, donde S es el sólido comprendido entre el plano $\{z = 2\}$ y la superficie $x^2 + y^2 = 2z$.

Si F denota el cambio a *coordenadas cilíndricas*, entonces $S = F(P)$, donde P es el pseudointervalo

$$P = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2z} \right\}.$$

Por otra parte, si $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, entonces $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4$ y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S f &= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2z}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr \right] d\theta \right] dz = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2z}} r^5 dr \right] d\theta \right] dz \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2z}} d\theta \right] dz = \frac{4}{3} \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} z^3 d\theta \right] dz = \frac{8\pi}{3} \int_0^2 z^3 dz = \frac{2\pi}{3} [z^4]_0^2 = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

Problema 22. Determinar el volumen de la bola de radio R centrada en el origen de coordenadas.

La bola en cuestión es $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Si F es el cambio a coordenadas esféricas, resulta que $B = F((0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi))$, lo que implica que

$$\begin{aligned} v(B) &= \iiint_B d\varphi d\theta dr = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi r^2 \sin\varphi d\varphi \right] d\theta \right] dr = \int_0^R r^2 \left[\int_0^{2\pi} \underbrace{\left[-\cos\varphi \right]_0^\pi}_{\frac{2}{1}} d\theta \right] dr \\ &= 2 \int_0^R r^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] dr = 4\pi \int_0^R r^2 dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Nota: Recordar que en el Problema 13 este volumen ha sido calculado como el correspondiente a un pseudointervalo.

Problema 23. Dado $R > 0$, calcular el volumen de la *Bóveda de Viviani*, el sólido B limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$.

Siguiendo los pasos dados en el Problema 16, la circunferencia $x^2 + y^2 = 2Ry$ está descrita en *coordenadas polares* como $r^2 - 2rR\sin\theta = 0$, es decir como $r = 2R\sin\theta$. Como $r > 0$, la circunferencia corresponde a $C = \{(2r\sin\theta, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Por tanto, si F denota el cambio a *coordenadas cilíndricas*, entonces $B = F(P)$, donde P es el pseudointervalo

$$P = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 2R\sin\theta, \quad -\sqrt{4R^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4R^2 - r^2} \right\},$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
 v(B) &= \int \int \int_S dz dy dx = \int_0^\pi \left[\int_0^{2R\sin\theta} \left[\int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} r dz \right] dr \right] d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \left[\int_0^{2R\sin\theta} r \sqrt{4R^2-r^2} dr \right] d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^\pi \left[(4R^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2R\sin\theta} d\theta \\
 &= \frac{16}{3} \pi R^3 - \frac{2}{3} \int_0^\pi \left[(4R^2-4R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \right] d\theta = \frac{16}{3} \pi R^3 - \frac{16R^3}{3} \int_0^\pi \left[(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \right] d\theta \\
 &= \frac{16}{3} \pi R^3 - \frac{16R^3}{3} \int_0^\pi |\cos\theta|^3 d\theta = \frac{16}{3} \pi R^3 - \frac{16R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta + \frac{16R^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3\theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Como $\cos^3\theta = \cos\theta\cos^2\theta = \cos\theta(1-\sin^2\theta) = \cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta$, tenemos que $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta$ es una primitiva de $\cos^3\theta$. Utilizando este resultado, obtenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3\theta d\theta = \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{2}{3}$$

y finalmente

$$v(B) = \frac{16}{3} \pi R^3 - \frac{16R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta + \frac{16R^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3\theta d\theta = \frac{16}{3} R^3 \left[\pi - \frac{4}{3} \right] = \frac{16}{9} R^3 [3\pi - 4].$$