ÀLGEBRA I CÀLCUL MULTIVARIABLE

Curs 2017-2018

EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVOS

- Calcular el Polinomio de Taylor de segundo orden de una función.
- Saber determinar los extremos libres de una función de varias variables.
- Saber determinar extremos condicionados en situaciones simples.

En este tema estudiamos los diferentes tipos de problemas relacionados con el cálculo de extremos de funciones de varias variables. Para ello introduciremos en primer lugar las derivadas de orden superior que nos permitirán hablar de la fórmula de Taylor y proporcionan la herramienta básica para las condiciones necesarias de extremos libres. En el caso de extremos en compactos, la situación se hace bastante más compleja que en el caso de funciones de variable real, e introduciremos una función auxiliar denominada función de Lagrange, que nos permitirá dar la condición necesaria de extremo condicionado. La condición suficiente la analizaremos sólo mediante el Teorema de Weiertrass.

1. POLINOMIO DE TAYLOR

1.1 DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES. MATRIZ HESSIANA

A lo largo del tema trabajamos con funciones reales de varias variable, $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \mathring{A}$ tales que f es diferenciable en $B_r(\mathbf{a})$, llamamos **derivada parcial de segundo orden de f en a, respecto de x_i y x_j** a la derivada respecto de x_j en $\mathbf{a}$ de la función $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$; es decir,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{a})}$$

OBSERVACIÓN. En el caso de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tendríamos las siguientes derivadas de orden dos

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.}$$

Otras notaciones usuales son

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_{ij} f = f_{x_i x_j}.}$$

EJEMPLO. Calcular las derivadas parciales de orden dos de la función $f(x,y) = xy^2 + \sin(x + 2y)$.

El Dominio de la función f es $\mathbb{R}^2$, y es diferenciable por ser suma y composición de funciones elementales. En primer lugar calculamos las derivadas parciales de orden uno.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + \cos(x+2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2\cos(x+2y).}$$

Estas funciones son a su vez diferenciables, por lo que las derivadas parciales de segundo orden existen y valen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x+2y), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2y - 4\sin(x+2y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y - 2\sin(x+2y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y - 2\sin(x+2y). \end{array}}$$

DEFINICIÓN. Las derivadas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ se denominan **derivadas cruzadas**, y son en general diferentes, aunque en casos como el ejemplo anterior coinciden. Se verifica el siguiente resultado que nos dice cúando las derivadas cruzadas coinciden.

TEOREMA DE SCHWARZ. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \mathring{A}$, si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y son continuas en $B_r(\mathbf{a})$, entonces existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$, y además,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).}$$

Observación. Podemos definir las derivadas parciales de cualquier orden de forma recurrente. Por ejemplo,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big).}$$

Definición. Decimos que $f : A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es de **clase $\mathcal{C}^{(r)}(A)$** si existen las derivadas parciales de todos los órdenes hasta r y son continuas. En particular, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A)$, si f es continua y existen las derivadas parciales de orden uno y son continuas.

Definición. Sea $f : A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de $\mathcal{C}^{(2)}(A)$ y $\mathbf{a} \in \mathring{A} = A$. Llamamos **matriz Hessiana de f en $\mathbf{a}$** a la matriz que contínene a las derivadas parciales de orden dos; es decir,

$$\boxed{H_f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.}$$

Observación. La matriz Hessiana de una función de clase $\mathcal{C}^{(2)}(A)$ es una matrix simétrica.

1.2 Fórmula de Taylor de orden dos.

Nuestro próximo objetivo es definir un polinomio que aproxime a la función en el entorno de un punto. En el caso de varias variables, nos limitaremos a polinomios de orden dos.

Polinomio de Taylor. Sea $f : A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de $\mathcal{C}^{(2)}(A)$ y $\mathbf{a} \in \mathring{A} = A$. Llamamos **Polinomio de Taylor de orden dos de f en $\mathbf{a}$** al polinomio dado por

$$\boxed{P_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).}$$

Observación. Podemos escribir el Polinomio de Taylor de forma más compacta usando productos escalares, el vector gradiente y la matriz Hessiana

$$P_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla(f)(\mathbf{a}), (\mathbf{x}-\mathbf{a})\rangle + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}).$$

En particular, para $n = 2$ si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, tenemos

$$\begin{aligned} P_f(\mathbf{a})(x,y) = f(a_1,a_2) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)(x-a_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)(y-a_2)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)(x-a_1)(y-a_2). \end{aligned}$$

Ejemplo. Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de la función $f(x,y) = xe^{(x+2y)}$ entorno del punto $(0,0)$.

La función $f \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ por ser producto y composición de funciones elementales. En este caso, el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(0,0)$ tiene por expresión:

$$\begin{aligned} P_f(0,0)(x,y) = f(0,0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2. \end{aligned}$$

Debemos calcular las derivadas parciales de orden uno y dos y valorarlas en el $(0,0)$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = (1+x)e^{(x+2y)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{(x+2y)}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{(x+2y)} + (1+x)e^{(x+2y)} = (2+x)e^{(x+2y)}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4xe^{(x+2y)}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(1+x)e^{(x+2y)}, \end{aligned}$$

y en particular

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(0,0)=0, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1, & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=2. \end{array}}$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(0,0)$ es:

$$\boxed{P_f(0,0)(x,y) = x + x^2 + 2xy.}$$

Fórmula de Taylor. Sea $f : A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de $\mathcal{C}^{(2)}(A)$ y $\mathbf{a} \in \mathring{A} = A$. Entonces, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{a}+\mathbf{v} \in A$, se verifica que

$$\boxed{\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) &= P_f(\mathbf{a})(\mathbf{a}+\mathbf{v}) + ||\mathbf{v}||^2 F_2(\mathbf{a},\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) v_i v_j + ||\mathbf{v}||^2 F_2(\mathbf{a},\mathbf{v}), \end{aligned}}$$

donde

$$\boxed{\lim_{\mathbf{v} \to 0} F_2(\mathbf{a},\mathbf{v}) = 0.}$$

2. Extremos libres de funciones reales

Caso real En el curso de Matemàtiques 1, realizamos el estudio de extremos de funciones reales de variable real. Se presentaban dos situaciones distintas.

⊙ Extremos libres

$f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(A)$

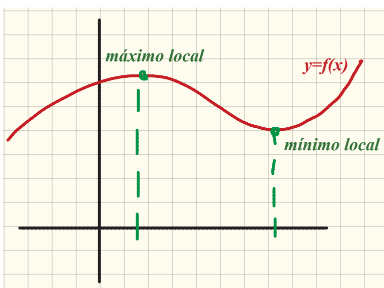
(i) Condición necesaria:

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = x_0, x_1, \dots$ (ptos críticos)

(ii) Condición suficiente:

$f''(x_i) > 0$, x_i es un mínimo.

$f''(x_j) < 0$, x_j es un máximo.



⊙ Extremos en compactos

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^0([a,b])$

(i) Candidatos a extremos:

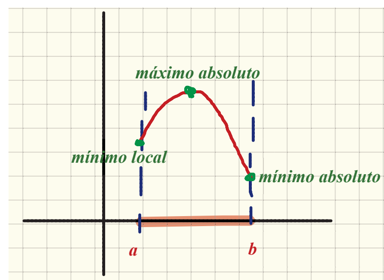
(a) Pts de no derivabilidad.

(b) Ptos críticos. $f'(x) = 0$

(c) Ptos frontera. a, b

(ii) Teorema de Weierstrass:

Valoramos la función en los candidatos.

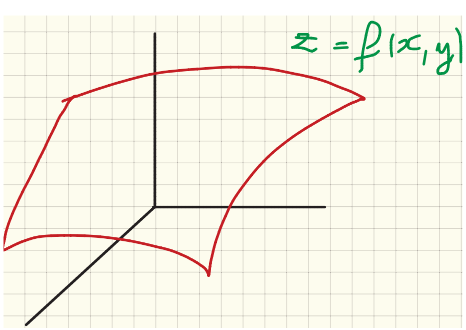


En el caso $n \geq 2$ también tendremos dos casos diferenciados, según trabajemos con conjuntos abiertos o con conjuntos compactos dados por restricciones en las variables. La dificultad aparece debido a que en el caso de varias variables, las fronteras de los conjuntos no son puntos como en el caso real, si no curvas, o incluso superficies.

⊙ Extremos libres

(i) Condición necesaria

(ii) Condición suficiente

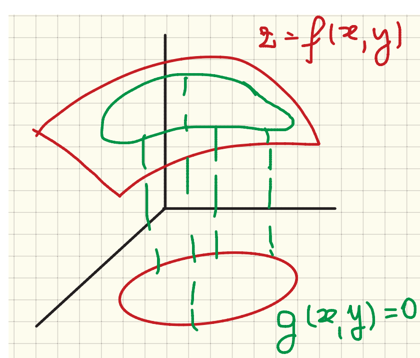


⊙ Extremos en compactos

(i) Candidatos a extremos

(ii) Teorema de Weierstrass:

Valoramos la función en los candidatos.



2.1 Condición necesaria de extremo libre.

Teorema Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$, si $\mathbf{a} \in A$ es un extremo libre, entonces $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, o de manera equivalente $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) = 0$, para cada $j = 1, \dots, n$.

Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$, llamamos **punto crítico de f o punto estacionario** a un punto $\mathbf{a} \in A$ tal que $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Observación. El Teorema anterior nos dice que los candidatos a extremo libre de una función diferenciable son los puntos críticos o estacionarios. Pero esta condición no es suficiente; es decir, existen puntos críticos que no son extremos.

Ejemplo. La función $f(x, y) = x^2 - y^2$, es diferenciable y sus puntos críticos son

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (0, 0).}$$

Sin embargo dicho punto no es un extremo de la función, ya que

$$\boxed{f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0) \text{ mientras que } f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0).}$$

Notar que el $(0, 0)$ es el centro de la cuádrica paraboloide hiperbólico o silla de montar, ver la Figura .

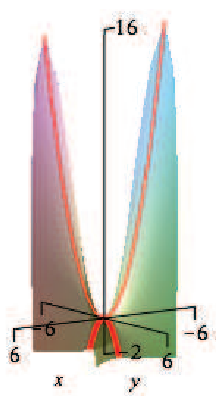


Figure 1: Punto crítico no extremo

Interpretación geométrica de los puntos críticos

Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$ y $(a,b) \in A$ un punto crítico; es decir, $\nabla f(a,b) = 0$. Entonces, el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (a,b) es horizontal; es decir,

$$\boxed{z = f(a,b),}$$

ya que

$$\boxed{0 = \begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-f(a,b) & D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-f(a,b) & 0 & 0 \end{vmatrix} = z - f(a,b).}$$

Ejemplo. Los planos tangentes a las superficies $z = x^2 + y^2 + 2$ y $z = x^2 - y^2$ en los puntos $(0,0,2)$ y $(0,0,0)$, respectivamente son horizontales.

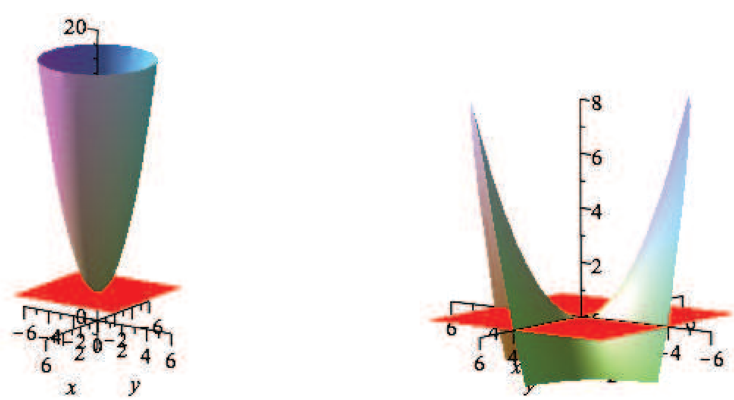


Figure 2: Plano tangente horizontal

2.2 Condición suficiente de extremo libre.

El próximo objetivo es poder clasificar los puntos estacionarios de la función. Para ello será útil considerar la matriz Hessiana que es la que tiene la información que proporcionan las derivadas de segundo orden, como ocurría en el caso real.

Definición. Dada una matriz $\mathsf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, consideramos los determinantes de las matrices de orden i, $i = 1, \dots, n$, construidas eligiendo las i primeras filas y columnas de M;

$$\Delta_i = \det \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{ii} \end{bmatrix},$$

a los que llamaremos **menores principales**.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(A)$, entonces

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\right)(a) & \cdots & \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\right)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\right)(a) & \cdots & \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}\right)(a) \end{bmatrix}$$

es la matriz hessiana de f en a. De ahora en adelante condideraremos que Δ_i, $i = 1, \ldots, n$ denota los determinantes de los menores principales de la matriz Hessiana de una función f en $\mathbf{a}$ que es crítico.

Condición suficiente de extremo libre Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(A)$ y si $\mathbf{a} \in A$ un punto estacionario de f. Entonces,

(i) Si todos los determinantes Δ_i, $i = 1, \ldots, n$, tienen signo positivo, entonces la función tiene un mínimo en $\mathbf{a}$.

(ii) Si los determinantes Δ_i, $i = 1, \ldots, n$, tienen signo alterno (comenzando con un valor negativo), entonces la función tiene un máximo en $\mathbf{a}$.

(iii) En cualquier otro caso hay duda.

En el caso de funciones de dos variables podemos dar un resultado más ajustado.

Condición suficiente de extremo libre $n = 2$. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(A)$ y si $(a, b) \in A$ un punto estacionario de f. En este caso,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \det Hf(a, b).$$

Entonces,

(i) Si $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces la función tiene un mínimo en (a, b).

(ii) Si $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces la función tiene un máximo en $\mathbf{a}$.

(iii) Si $\Delta_2 < 0$, entonces la función tiene un punto de silla en (a, b).

(iv) Si $\Delta_2 = 0$ hay duda.

Observación. Cuando $\Delta_2 > 0$, no se puede verificar que $\Delta_1 = 0$, ya que en ese caso $\Delta_2 = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$.

3. Extremos condicionados

3.1 Introducción

Estudiamos en esta sección el problema de hallar extremos de una función en el caso en el que las variables están sujetas a verificar alguna condición.

Ejemplo. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la recta $x + y = 1$.

Observar que se trata de buscar los puntos de la recta $x + y = 1$ que se encuentran más cercanos al origen de coordenadas y aquellos que están más alejados, ya que la función distancia es $d(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$. Por otro lado, $\nabla f = 0$ sii $\nabla d = 0$, ya que

$$\boxed{\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{2d} \text{ y } \frac{\partial d}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{2d}.}$$

Podemos resolver el problema usando un argumento geométrico, ver Figura 3 .

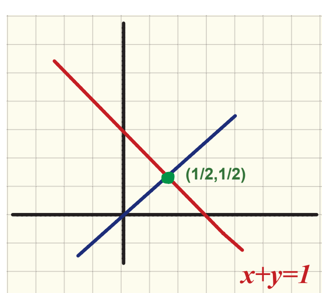


Figure 3: Distancia al origen de los puntos de la recta $x + y = 1$.

Por tanto, podemos concluir que no existe máximo absoluto ni relativo y que el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un mínimo absoluto. También podemos despejar una de las variables de la ecuación $x + y = 1$, ya que ambas son explícitas y reducir el problema a un problema de extremos libres en una dimensión menor.

$$\boxed{\text{Hallar los extremos de } h(x) = f(x, y = 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2.}$$

En este caso, los candidatos a extremo son los puntos que anulan la derivada

$$\boxed{h'(x) = 4x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}.}$$

De nuevo la geometría nos hace concluir que no existe máximo absoluto ni relativo y que el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un mínimo absoluto.

Observar que

$$\boxed{\nabla f(1/2, 1/2) = (1, 1) \text{ y } \nabla g(1/2, 1/2) = (1, 1); \text{ es decir, son iguales.}}$$

Ejemplo. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

De nuevo se trata de calcular los puntos de la hipérbola que distan más y menos del origen de coordenadas. Podemos resolver el problema usando un argumento geométrico, ver Figura 4.

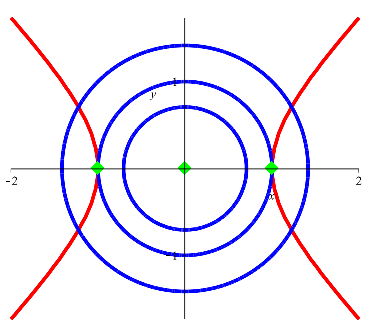


Figure 4: Distancia al origen de los puntos de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

Por tanto, podemos concluir que no existe máximo absoluto ni relativo y que los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son un mínimos absoluto.

En este caso **NO** podemos despejar una de las variables de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$, ya que ninguna de ellas es explícita. Supongamos que ignaramos esta advertencia y reducimos el problema a un problema de extremos libres en una dimensión menor.

$$\boxed{\text{Hallar los extremos de } h(x) = f(x, y^2 = x^2 - 1) = 2x^2 - 1.}$$

En este caso, los candidatos a extremo son los puntos que anulan la derivada

$$\boxed{h'(x) = 4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y^2 = -1. \text{ Imposible}}$$

Lo que ocurre en este caso, es que justo en los puntos donde se producen los mínimos de la función la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ no define una función diferenciable, ya que al despejar tendríamos,$y = \sqrt{x^2 - 1}$, que no es derivable ni en 1 ni en -1.

Necesitamos un método que nos permita tratar todos los casos de forma unificada.

Observar que de nuevo

$$\boxed{\nabla f(\pm 1, 0) = (\pm 2, 0) \text{ y } \nabla g(\pm 1, 0) = (\pm 2, 0)\text{; es decir, son iguales.}}$$

3.2 Función de Lagrange. Multiplicadores de Lagrange

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f, g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^1(A)$ y g verifica que $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ para cada $\mathbf{x} \in A$ tal que $g(\mathbf{x}) = 0$, el problema consiste en

$$\boxed{\text{hallar los extremos de } f \text{ en el conjunto } K = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = 0\}.}$$

Aunque en los problemas siguientes buscamos extremos globales de f sobre K, como todo extremo global es local, determinaremos primero los candidatos a extremo local y posteriormente decidiremos, evaluando la función f sobre ellos quienes corresponden a extremos absolutos.

La técnica denominada de los Multiplicadores de Lagrange, establece que si $\mathbf{a} \in K$ es un extremo local de f en K debe existir un número $\lambda \in \mathbb{R}$, denominado Multiplicador de Lagrange tal que $\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla g(\mathbf{a}) = 0$, o de manera equivalente $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) = 0$, para cada $j = 1, \dots, n$. Como son incógnitas las coordenadas de $\mathbf{a}$ y λ, las anteriores y $g(\mathbf{a}) = 0$ configuran un sistema, generalmente no lineal, de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas.

Definición. Dadas $f, g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$, llamamos función de lagrange a la función $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$.

Cuando $n \geq 3$ podemos también considerar una nueva restricción $h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$ y plantear el

$$\boxed{\text{cálculo de extremos de } f \text{ en el conjunto } K = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = 0\}.}$$

Para ello, es preciso que las dos restriciones sean independientes, en el sentido de que $\nabla g(\mathbf{x})$ y $\nabla h(\mathbf{x})$ sean linealmente independientes en cada punto $\mathbf{x} \in K$. Si esta condición se satisface, EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, establece ahora que si $\mathbf{a} \in K$ es un extremo (local) de f en K deben existir dos números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, denominados MULTIPLICADOR DE LAGRANGE DE g Y DE h, respectivamente, tales que $\nabla f(\mathbf{a}) + \lambda \nabla g(\mathbf{a}) + \mu \nabla h(\mathbf{a}) = 0$, o de manera equivalente $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) + \lambda \left(\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) + \mu \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_j}\right)(\mathbf{a}) = 0$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Como son incógnitas las coordenadas de $\mathbf{a}$, λ y μ, las anteriores y $g(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a}) = 0$ configuran un sistema, generalmente no lineal, de $n+2$ ecuaciones con $n+2$ incógnitas.

DEFINICIÓN. Dadas $f, g, h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$, llamamos **función de Lagrange a la función** $L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) + \mu h(\mathbf{x})$.

A modo de resumen, el método para hallar los extremos condicionados consiste en:

(i) Construir la función de Lagrange, $L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) + \mu h(\mathbf{x})$.

(ii) Hallamos los puntos críticos de L.

(iii) Utilizar el Teorema de Weiestrass cuando K es compacto o consideraciones geométricas, para clasificar los puntos críıticos obtenidos en (ii).

EJEMPLO. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

La función de Lagrange es

$$\boxed{L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1).}$$

Hallamos las derivadas parciales de L respecto de x, y, λ.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 2x(1+\lambda), \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2y - 2\lambda y = 2y(1-\lambda), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 - y^2 - 1.}$$

Observar que como λ es lineal, la parcial de L respecto de λ siempre va a ser igual a la condición. Resolvemos el sistema

$$\boxed{\left.\begin{array}{rl} 2x(1+\lambda) = & 0 \\ 2y(1-\lambda) = & 0 \\ x^2 - y^2 = & 1 \end{array}\right\}.}$$

Si $x = 0$, entonces de la última ecuación $-y^2 = 1$, lo que es imposible. Si $\lambda = -1$, de la segunda ecuación $y = 0$, y de la tercera, $x = \pm 1$. Por tanto, los puntos críticos son

$$\boxed{(\pm 1, 0) \text{ con multiplicador } \lambda = -1.}$$

Las cuestiones geométricas referidas en la Introducción nos llevan a concluir que ambos son mínimos absolutos y que no existen máximos.

Problemas resueltos

Problema 1. Responder a las siguientes cuestiones:

(i) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función e^{x-y} en el punto $(1, 0)$.

(ii) Hallar la ecuación del plano tangente y la recta normal en el punto $(1, 1, 0)$ de la superficie

$$x^3 - x^2 y + \frac{z}{y^2} + e^{xz} = 1.$$

(i) El polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(1, 0)$ tiene por expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} P_f(1,0)(x,y) = f(1,0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)(x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)(x-1)y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)y^2. \end{aligned}}$$

Haciendo los cálculos:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{x-y},}$$

y en particular

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=e, & \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-e, & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=e, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)=e, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)=-e. \end{array}}$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(1,0)$ es:

$$\boxed{e+e(x-1)-ey+\tfrac{1}{2}e(x-1)^2+\tfrac{1}{2}ey^2-e^{(x-1)y}}$$

(ii) Sea $g(x,y,z)=x^3-x^2y+\frac{z}{y^2}+e^{xz}-1$. Para hallar tanto el plano tangente como la recta normal a la superficie $g(x,y,z)=0$ en el punto $(1,1,0)$ necesitamos hallar el gradiente de la función g es dicho punto:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}=3x^2-2xy+ze^{xz}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=-x^2-2\frac{z}{y^3}, \qquad \frac{\partial g}{\partial z}=\frac{1}{y^2}+xe^{xz}}$$

Por tanto, $\nabla g(1,1,0)=(1,-1,2)$, luego la ecuación del plano tangente a la superficie $x^3-x^2y+\dfrac{z}{y^2}+e^{xz}=1$ en el punto $(1,1,0)$ es:

$$(x-1)-(y-1)+2z=0$$

es decir,

$$\boxed{x-y+2z=0}$$

Y la ecuación paramétrica de la recta normal a la superficie $x^3-x^2y+\dfrac{z}{y^2}+e^{xz}=1$ en el punto $(1,1,0)$ es:

$$\boxed{x=1+\lambda, \qquad y=1-\lambda, \qquad z=2\lambda, \qquad \lambda\in\mathbb{R}}$$

Problema 2. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=4y-2x-x^2y.$$

(i) Calcular los extremos de f en $\mathbb{R}^2$.

(ii) Calcular los extremos de f sobre el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4y+x=0\}$.

(i) Como la función f es polinómica es diferenciable de cualquier orden y podemos aplicar las condiciones necesaria y suficiente para el cálculo de extremos libre.

(a) Condición necesaria:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2 - 2xy = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4 - x^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right).}$$

(b) Condición suficiente:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ \\ -2x & 0 \end{pmatrix}$$

Valoramos el hessiano en cada una de los candidatos a extremos.

$$\boxed{Hf\left(2, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Como el determinante es $-16 < 0$, el punto es un punto de silla de la función.

$$\boxed{Hf\left(-2, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Como el determinante es $-16 < 0$, el punto es un punto de silla de la función.

(ii) En este caso se trata de un problema de extremos condicionados, pero como la condición es explícita podemos sustituirla directamente en la función.

$$h(y) = f(x = -4y, y) = 12y - 16y^3 \implies h'(y) = 12 - 48y^2 = 0 \implies y = \pm\frac{1}{2}.$$

Para estudiar el carácter del punto estacionario calculamos la derivada segunda.

$$h''(y) = -96y \implies h''\left(\frac{1}{2}\right) = -48.$$

Por tanto, el punto $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ es un máximo relativo de f sobre la recta $4y + x = 0$.

$$h''(y) = -96y \implies h''\left(-\frac{1}{2}\right) = 48.$$

Por tanto, el punto $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo relativo de f sobre la recta $4y + x = 0$.

Problema 3. Hallar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x, y) = -2x^4 + x^2y - y^3$

Como la función es diferenciable por ser polinómica podemos aplicar las condiciones necesarias y suficientes de extremo libre.

CONDICIÓN NECESARIA:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -8x^3 + 2xy = 2x(-4x^2 + y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 - 3y^2 = 0 \end{aligned}}$$

De la primera ecuación tenemos que $x = 0$ o bien $y = 4x^2$ por tanto sustituyendo en la segunda ecuación tenemos que:

$$\boxed{\text{si } x = 0 \to y = 0 \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{si } y = 4x^2 \to x^2 - 3(4x^2)^2 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{1}{48}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \to y = \frac{1}{12}$$

Por tanto, los puntos estacionarios son:

$$\boxed{P_1 = (0,0)\ ,\ P_2 = (-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{12})\ ,\ P_3 = (\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{12})}$$

Por otro lado,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -24x^2 + 2y & 2x \\ 2x & -6y \end{pmatrix}$$

Por lo que,

$$\boxed{Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{no podemos concluir si es máximo o mínimo.}}$$

$$\boxed{Hf(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 = \frac{1}{12} > 0\ ,\ \text{y por tanto } P_2 \text{ es un máximo}}$$

$$\boxed{Hf(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 = \frac{1}{12} > 0\ ,\ \text{y por tanto } P_2 \text{ es un máximo}}$$

Problema 4. Hallar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) =$sen $x+$sen y en el intervalo $(-2\pi,\pi)$x$(-2\pi,\pi)$.

Como la función es diferenciable por ser suma de senos podemos aplicar las condiciones necesarias y suficientes de extremo libre.

Condición necesaria:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos(x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos(y) = 0 \end{aligned}}$$

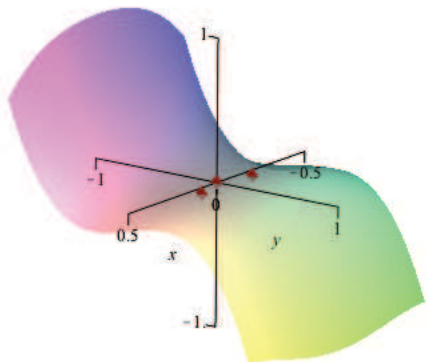


Figure 5: Gráfica $f(x,y) = -2x^4 + x^2y - y^3$ y de los puntos críticos

Al ser un intervalo abierto no se valora la función en -2π y π, anulándose $\cos(x)$ y $\cos(y)$ en los múltiples enteros impares de $\frac{\pi}{2}$ $\left(x = \frac{\pi}{2}(2k-1), y = \frac{\pi}{2}(2h-1)\right)$ en el interior de dicho intervalo, para todo $k, h \in \mathbb{Z} \in [-1, 1]$.

Por tanto, los puntos estacionarios son:

$$\boxed{P_1 = (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})\ ,\ P_2 = (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})\ ,\ P_3 = (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ P_4 = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})}$$

$$\boxed{P_5 = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})\ ,\ P_6 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\ ,\ P_7 = (\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})\ ,\ P_8 = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})\ , P_9 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$$

Por otro lado,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(x) & 0 \\ 0 & -\mathrm{sen}(y) \end{pmatrix}$$

Por lo que,

$$\boxed{Hf(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0\ ,\ \text{y por tanto } P_1 \text{ es un máximo}}$$

Figure 6: $f(x,y) =$sen $x+$sen y

$$\boxed{Hf(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_2 < 0 \text{ , y por tanto } P_2 \text{ es un punto de inflexión}}$$

$$\boxed{Hf(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \text{ , y por tanto } P_3 \text{ es un máximo}}$$

$$\boxed{Hf(P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_2 < 0 \text{ , y por tanto } P_4 \text{ es un punto de inflexión}}$$

$$\boxed{Hf(P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \text{ , y por tanto } P_5 \text{ es un mínimo}}$$

$$\boxed{Hf(P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_2 < 0 \text{ , y por tanto } P_6 \text{ es un punto de inflexión}}$$

$$\boxed{Hf(P_7) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \text{ , y por tanto } P_7 \text{ es un máximo}}$$

$$\boxed{Hf(P_8) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_2 < 0 \text{ , y por tanto } P_8 \text{ es un punto de inflexión}}$$

$$\boxed{Hf(P_9) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \text{ , y por tanto } P_9 \text{ es un máximo}}$$