ÀLGEBRA I CÀLCUL MULTIVARIABLE

Álgebra Lineal y Geometría

1. Espacios Vectoriales

Objetivos

- ⊙ Conocer el concepto de espacio vectorial y sus propiedades.
- ⊙ Conocer los conceptos de sistema generador e independencia lineal.
- ⊙ Saber determinar una base de un espacio vectorial.
- ⊙ Calcular la matriz de cambio de base.

1.1 Definiciones

Un espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna y otra operación externa que cumplen ciertas propiedades fundamentales. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores y a los elementos del cuerpo, escalares.

Definición Sea E un conjunto no vacío, en el que hay definidas una operación interna y otra externa denominadas suma y producto por escalares, respectivamente.

$$\begin{array}{rccc} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & & & \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \longrightarrow & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ & & & \\ & (\lambda, \vec{u}) & \longrightarrow & \lambda \vec{u} \end{array}$$

Denominamos espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales a la terna $(E, +, \cdot)$, si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) El par $(E, +)$ verifica las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de grupo abeliano.

(a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativa)

(b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)

(c) existe un elemento de E, $\vec{0}$, denominado elemento neutro de E, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, para todo $\vec{u} \in E$.

(d) para todo elemento $\vec{u} \in E$, existe un elemento de E denotado por $-\vec{u}$, y denominado elemento opuesto de $\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in E$ se cumple.

(e) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$.

(f) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$.

(g) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$.

(h) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Los elementos de un espacio vectorial se denominan vectores, y los números reales reciben el nombre de escalares.

Ejemplo Los siguientes conjuntos con las operaciones definidas en cada caso son espacios vectoriales

(i) El conjunto $\mathbb{R}^3 = \big\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\big\}$ con las operaciones

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{y} \quad \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

(ii) El conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios con coeficiente reales de grado menor o igual que n con las operaciones habituales

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n, \\ \lambda p(x) &= \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n. \end{aligned}$$

(iii) El conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$ de las matrices de orden $m \times n$ con las operaciones suma de matrices y producto por escalares visto en Càlcul.

Un subconjunto F no vacío de un espacio vectorial $(E, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de E si se cumplen las siguientes propiedades

(i) $\vec{u}, \vec{v} \in F \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in F$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in F \Longrightarrow \lambda \vec{u} \in F$.

De forma equivalente podríamos comprobar que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in F$ se verifica que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in F$.

Entre los subespacios vectoriales de $(E, +, \cdot)$ tenemos los llamados triviales que son el $\{0\}$ y el total E.

PROPOSICIÓN Si F es un subespacio vectorial de $(E,+,\cdot)$, entonces $\vec{0}\in F$.

Demostración Sea $\vec{u}\in F$, entonces $-\vec{u}\in F \Longrightarrow \vec{u}+\big(-\vec{u}\big)=\vec{0}\in F$.

EJEMPLOS Probar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales o no del espacio correspondiente.

(1) $F=\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\}\subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

En primer lugar observamos que $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in F$. Comprobamos el resto de propiedades:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & 0\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\in F,$$

ya que es una matriz con el elemento $_{12}$ nulo. Además,

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{pmatrix}\in F,$$

ya que es una matriz con el elemento $_{12}$ nulo.

(2) $F=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\big\}\subset\mathbb{R}^2$.

En primer lugar observamos que $(0,0)\in F$. Comprobamos el resto de propiedades:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\in F,$$

ya que si sumamos las dos coordenadas obtenemos que

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=x_1+y_1+x_2+y_2=0+0=0$$

mientras que

$$\alpha(x_1,y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1)\in F,$$

ya que si sumamos las coordenadas obtenemos que

$$\alpha x_1+\alpha y_1=\alpha(x_1+y_1)=0.$$

(3) $F=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\big\}\subset\mathbb{R}^2$.

En primer lugar observamos que $(0,0)\notin F$, por tanto F no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

1.2 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Sea $S=\big\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\big\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial E. Un vector $\vec{u}$ es una combinación lineal de los vectores de S, si existen escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ tales que

$$\boxed{\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m.}$$

Una combinación lineal se denomina nula si es igual al vector $\vec{0}$. Cuando todos sus escalares son nulos obtenemos la combinación lineal trivial; es decir,

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_m.$$

Definición Un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ de vectores de un espacio vectorial E se llama libre si su única combinación lineal nula es la combinación lineal trivial. En caso contrario, el conjunto S se denomina ligado. Los vectores de un conjunto libre se denominan linealmente independientes, mientras que los de un conjunto ligado se denominan linealmente dependientes.

Ejemplos Expresar el vector $\vec{u} = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de
(a) $S = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2, -1) = \lambda(1, 0) + \beta(0, 1) = (\lambda, \beta).$$

Igualando componentes obtenemos que $\lambda = 2$ y $\beta = -1$. Por tanto,

$$\boxed{(2, -1) = 2 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot \beta(0, 1).}$$

(b) $S = \{\vec{v}_1 = (2, 2), \vec{v}_2 = (4, 1)\}$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2, -1) = \lambda(2, 2) + \beta(4, 1) = (2\lambda + 4\beta, 2\lambda + \beta).$$

Igualando componentes obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 2\lambda + 4\beta \\ -1 &= 2\lambda + \beta \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es $\lambda = -1$ y $\beta = 1$. Por tanto,

$$\boxed{(2, -1) = (-1) \cdot (2, 2) + 1 \cdot (4, 1).}$$

(c) $S = \{\vec{w}_1 = (0, 1), \vec{w}_2 = (2, 1), \vec{w}_3 = (-1, -2)\}$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2,-1)=\lambda(0,1)+\beta(2,1)+\gamma(-1,-2)=(2\beta-\gamma,\lambda+\beta-2\gamma).$$

Igualando componentes obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2&=2\beta-\gamma \\ -1&=\lambda+\beta-2\gamma \end{aligned}\right\}$$

que es compatible e indeterminado y las soluciones son $\lambda=-5+3\beta$ y $\gamma=2\beta-2$. Por tanto,

$$\boxed{(2,-1)=(-5+3\beta)\cdot(0,1)+\beta\cdot(2,1)+(2\beta-2)(-1,-2).}$$

Observamos que existen infinitas combinaciones lineales de los vectores de S que nos dan el vector $\vec{u}$.

(d) $S=\{\vec{z}_1=(4,-6),\vec{z}_2=(-6,9)\}$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2,-1)=\lambda(4,-6)+\beta(-6,9)=(4\lambda-6\beta,-6\lambda+9\beta).$$

Igualando componentes obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2&=4\lambda-6\beta \\ -1&=-6\lambda+9\beta \end{aligned}\right\}$$

que es incompatible. Por tanto, el sistema no tiene solución y el vector $\vec{u}$ no se puede expresar como combinación lineal de los elementos de S. Observar que

$$3\vec{z}_1+2\vec{z}_2=\vec{0}.$$

Por lo que S es un sistema ligado y el vector $\vec{u}$ es independiente de los vectores de S.

Ejemplos Comprobar si los vectores $\vec{u}=(3,1,2)$ y $\vec{v}=(4,-1,2)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Planteamos el sistema que nos proporciona la combinación lineal nula

$$(0,0,0)=\lambda(3,1,2)+\beta(4,-1,2)=(3\lambda+4\beta,\lambda-\beta,2\lambda+2\beta).$$

Por tanto,

$$\left.\begin{aligned} 0&=3\lambda+4\beta \\ 0&=\lambda-\beta \\ 0&=\lambda+\beta \end{aligned}\right\}\Longrightarrow\lambda=\beta=0.$$

Como la única solución del sistema es la nula, el sistema de vectores $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente.

Comprobar si los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (3, -3, 0)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Planteamos el sistema que nos proporciona la combinación lineal nula

$$(0, 0, 0) = \lambda(-1, 1, 0) + \beta(3, -3, 0) = (-\lambda + 3\beta, \lambda - 3\beta, 0).$$

Por tanto,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\lambda + 3\beta \\ 0 &= \lambda - 3\beta \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda = 3\beta.$$

Existen infinitas combinaciones lineales no nulas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, por lo que el sistema de vectores $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente dependiente. Observar que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

Proposición Un conjunto de vectores S con al menos 2 elementos, es libre si y sólo si ningún vector de S es combinación lineal del resto.

Demostración Sea $S = \big\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\big\}$ con $m \geq 2$. Supongamos que

$$\vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \widehat{\vec{v}_j} + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m,$$

para algún $j = 1, \dots, m$, donde $\widehat{\vec{v}_j}$ significa que el vector $\vec{v}_j$ no aparece en la combinación. Entonces,

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots - \vec{v}_j + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m$$

es una combinación lineal de los vectores de S no trivial, ya que $\lambda_j = -1 \neq 0$. Por tanto, S es ligado.

Recíprocamente, si S es ligado existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_j \vec{v}_j + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m.$$

Supongamos que $\lambda_j \neq 0$, entonces

$$\vec{v}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\vec{v}_1 - \cdots - \widehat{\vec{v}_j} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_j}\vec{v}_m;$$

es decir, v_j se puede obtener como una combinación lineal del resto.

Proposición Sea $S = \big\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\big\}$ un subconjunto libre de un espacio vectorial E. Entonces,

(i) $\vec{0} \notin S$.

(ii) Todos los subconjuntos de S son libres.

(iii) Si $S = \{\vec{v}_1\}$, S es libre si y sólo si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.

(iv) Dado $\vec{v} \in E$, el conjunto $S \cup \{\vec{v}\}$ es libre si y sólo si $\vec{v} \notin \left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$.

(v) Sean $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i \in S$. El conjunto S_1 obtenido al reemplazar en S el vector $\vec{v}_i$ por $\lambda \vec{v}_i$ es libre.

(vi) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i, \vec{v}_j \in S$. El conjunto S_2 obtenido al reemplazar en S el vector $\vec{v}_i$ por $\vec{v}_i + \lambda \vec{v}_j$ es libre.

Ejemplo Sea $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un subconjunto ligado de un espacio vectorial E. Demostrar, o en caso contrario dar un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

(i) El vector $\vec{u}$ depende linealmente de los otros dos.

(ii) Uno de los tres vectores depende linealmente de los otros dos.

(i) No necesariamente el vector $\vec{u}$ es el que depende linealmente de los otros dos.

Supongamos que tomamos $\vec{u}$ y $\vec{w}$ independientes. Entonces,

$$S = \{\vec{u}, \vec{w}, -\vec{w}\}$$

es ligado, pero $\vec{u}$ no es combinación lineal de los otros dos.

(ii) En este caso la afirmación es verdadera.

Si S es ligado existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}.$$

Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces

$$\boxed{\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha} \vec{w}.}$$

Ejemplo Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (1,1,0), \vec{w} = (k,0,1)\}.$$

¿ Para qué valores de k el conjunto S es ligado?.

Método 1 Como los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ son linealmente independientes, construimos la matriz de coordenadas de los vectores e imponemos que tenga rango 2. Calculamos el determinante e imponemos que se anule.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ k & 0 & 1\end{pmatrix} = -k.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{el conjunto } S \text{ es ligado sii } k=0.}$$

Método 2 Como los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ son linealmente independientes, imponemos que el vector $\vec{w}$ sea combinación lineal del resto.

$$\begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$$

es decir, tenemos que resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} k &= \lambda+\beta\\ 0 &= \lambda+\beta\\ 1 &= \lambda\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \lambda=1,\ \beta=-1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{el conjunto } S \text{ es ligado sii } k=0.}$$

1.3 Base de un espacio vectorial

Sea $S=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\}$ un subconjunto finito de un espacio vectorial E. Denominamos conjunto generado por S, y se denota por $\langle S\rangle$, a aquél subespacio cuyos elementos son todas las combinaciones lineales de los elementos de S; es decir,

$$\boxed{\langle S\rangle = \{\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_m\vec{v}_m;\ \ \lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}\}.}$$

Dados un conjunto finito S y $F=\langle S\rangle$, el conjunto S recibe el nombre de sistema de generadores de F.

Observación Si $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ es un sistema de generadores de F, entonces todo elemento de F se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S.

Definición Sea E un espacio vectorial con un sistema de generadores finito S; es decir, tal que $E = \langle S \rangle$. Decimos que E es un espacio vectorial de dimensión finita.

Proposición Sea $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ un sistema de generadores finito de un espacio vectorial E.

(i) Si $\vec{v} \in E$, entonces $S \cup \{\vec{v}\}$ es un sistema de generadores de E.

(ii) Si para algún i, $\vec{v}_i \in S$ es tal que $\vec{v}_i$ es combinación lineal de los elementos de $S \setminus \{\vec{v}_i\}$, entonces $S \setminus \{\vec{v}_i\}$ es también es un sistema de generadores de E.

(iii) Existe un subconjunto B de S que es libre y sistema generador de E.

(iv) Sean $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i \in S$. Entonces, el conjunto S_1 obtenido al reemplazar el vector $\vec{v}_i$ de S por $\lambda\vec{v}_i$ es un sistema generador de E.

(v) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i, \vec{v}_j \in S$. Entonces, el conjunto S_2 obtenido al reemplazar el vector $\vec{v}_i$ de S por $\vec{v}_i + \lambda\vec{v}_j$ es un sistema generador de E.

Definición Llamamos base de un espacio vectorial E a un sistema de generadores finito del espacio vectorial E que sea libre.

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. Al número de vectores de una base cualquiera se le llama dimensión del espacio vectorial.

Todo vector de un espacio vectorial E se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de una base cualquiera B de ese espacio vectorial.

Se llaman coordenadas de un vector $\vec{v} \in E$ respecto de una base $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ de E a los números $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\boxed{\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_m\vec{v}_m.}$$

Notación Las coordenadas de un vector se suelen denotar de la siguiente manera

$$\boxed{[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.}$$

EJEMPLO (1) El conjunto $C = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, denominada base canónica.

En primer lugar tenemos que ver que el conjunto de vectores C genera $\mathbb{R}^3$. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(x,y,z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

En segundo lugar debemos comprobar que son linealmente independientes. Para ello, basta observar que la matriz formada por los vectores es invertible y por tanto tiene rango 3. Observar que

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}^3) = 3.}$$

(2) El conjunto $C = \big\{1, x, \dots, x^n\big\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$, denominada base canónica.

En primer lugar tenemos que ver que el conjunto de vectores C genera $\mathbb{R}_n[x]$. Sea $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n.$$

En segundo lugar, debemos comprobar que son linealmente independientes. Para ello, basta observar que cada elemento de la base es un polinomio de grado diferente. Observar que las coordenadas del vector $p(x)$ en la base canónica son $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, y que

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1.}$$

EJEMPLO Demostrar que la dimensión de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$ es 4.

Consideramos el conjunto

$$C = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En primer lugar vemos que C es libre,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

implica que

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.}$$

Comprobamos ahora que el conjunto C genera,

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Por tanto el conjunto C es una base de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$, y la dimensión es 4.

Definición Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial E y consideramos $F = \langle S \rangle$. Se llama rango de S a la dimensión de F; es decir, al número de vectores linealmente independientes de S.

Observación Para determinar si una colección de vectores es libre construimos la matriz de coordenadas, hacemos su m.e.r.f. y estudiamos el rango de dicha matriz. El rango de la matriz es la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores y las filas no nulas constituyen una base.

1.4 Cambio de base en un espacio vectorial

Si tenemos $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ dos bases de un mismo espacio vectorial E, estamos interesados en conocer como expresar las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base B', $[\vec{v}]_{B'}$, en función de las coordenadas de $[\vec{v}]_B$.

Ejemplo Sean las bases $B = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (-1,1), \vec{v}_2 = (2,-1)\}$. Consideramos el vector $\vec{v} = (1,1)$ cuyas coordenadas en la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Queremos calcular $[\vec{v}]_{B'}$. Para ello debemos resolver el sistema que resulta de

$$(1,1) = \alpha(-1,1) + \beta(2,-1);$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 1 = \alpha - \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta = 2, \ \alpha = 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.}$$

¿Qué relación hay entre $[\vec{v}]_B$ y $[\vec{v}]_{B'}$? ¿Podemos ver alguna regla? Observemos que las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B' se obtienen como la solución del sistema escrito en forma

matricial siguiente
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}.$$
Por tanto,
$$\boxed{[\vec{v}]_B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}[\vec{v}]_{B'}.}$$

La matriz que aparece en la relación anterior esta formada por las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B.

Definición Sean B y B' dos bases de un mismo espacio vectorial E de dimensión n. La matriz de cambio de base de B' a B, denotada por $[I_E]_{B'B}$ es

$$\boxed{[I_E]_{B'B}=\Big([\vec{u}_1]_B,[\vec{u}_2]_B,\dots,[\vec{u}_n]_B\Big)\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n),}$$

donde $B'=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$.

En el ejemplo anterior,
$$[I_E]_{B'B}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Proposición (Fórmula del cambio de base) Sean B y B' dos bases de un mismo espacio vectorial E de dimensión n, y $\vec{v}\in E$. Entonces,

$$\boxed{[\vec{v}]_B=[I_E]_{B'B}[\vec{v}]_{B'}.}$$

Observación
$$[I_E]_{BB'}=[I_E]_{B'B}^{-1}.$$

Ejemplo En el espacio vectorial $E=\mathbb{R}_2[x]$ consideramos las siguientes bases
$$C=\{1,x,x^2\},\ B=\{1,1-x,x+x^2\},\ B'=\{1+3x,2+x+x^2,1+x+x^2\}.$$
Obtener las coordenadas del vector $p(x)=1+2x+4x^2$ en cada una de las bases.

En primer lugar calculamos las coordenadas del vector $p(x)$ en la base canónica C,

$$\boxed{[p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.}$$

Necesitamos ahora las matrices de cambio de base

$$\boxed{[I_E]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [I_E]_{B'C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Aplicando la fórmula del cambio de base obtenemos que

$$[p(x)]_B = [I_E]_{BC}^{-1}[p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$[p(x)]_{B'} = [I_E]_{B'C}^{-1}[p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}.$$

Problemas Resueltos

Problema 1. Hallar la dimensión del siguiente subespacio vectorial y una base:

(i) $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + t = 0\}$.

En primer lugar buscamos un sistema de generadores. Observar que $t = -2x + y - z$ y por tanto,

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, -2x + y - z) = x(1, 0, 0, -2) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1);$$

es decir,

$$\boxed{\vec{v}_1 = (1, 0, 0, -2), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 1), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, -1) \text{ es un sistema de generadores.}}$$

Ahora estudiamos la dependencia o independencia lineal de los vectores analizando el rango de la matriz de coordenadas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior tiene rango 3 y por tanto

$$\boxed{\text{los vectores } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 \text{ son base del } F_1.}$$

Problema 2. En el espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto de vectores $S = \big\{(2, 0, -1, 1), (-1, 1, -2, 0), (0, 2, -5, 1), (5, -1, 0, 2)\big\}$ y el espacio generado por S, F=$\langle S \rangle$.

(i) Calcular el rango de F.

(ii) Dar una base de F.

(iii) Comprobar si los vectores $\vec{w}_1 = (-4, 0, 2, -2)$ y $\vec{w}_2 = (2, 1, -3, 1)$ están en F.

(i) El rango de S es el número máximo de vectores linealmente independiente de S.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{rang}(F) = 2.}$$

(ii) De la expresión matricial anterior deducimos que una base de F es

$$\boxed{\vec{v}_1 = (1, -1, 2, 0),\ \vec{v}_2 = (0, 2, -5, 1).}$$

(iii) Podemos proceder de dos formas.

Método 1 Un vector estará en F si es combinación lineal de los elementos de la base. Por tanto, tenemos que resolver el sistema

$$(-4, 0, 2, -2) = \lambda(1, -1, 2, 0) + \beta(0, 2, -5, 1);$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} -4 &= \lambda \\ 0 &= -\lambda + 2\beta \\ 2 &= 2\lambda - 5\beta \\ -2 &= \beta \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\text{El vector } \vec{w}_1 \text{ si pertenece a } F.}$$

Método 2 Calculamos la m.e.r.f de la matriz formada por los vectores de la base y el vector en estudio. Si el rango aumenta no estará en F, en caso contrario si.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{El vector } \vec{w}_1 \text{ si pertenece a } F.}$$

En el caso del vector $\vec{w}_2$, aplicando el segundo método obtendríamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{El vector } \vec{w}_2 \text{ no pertenece a } F.}$$

Si aplicáramos el primer método obtendríamos un sistema incompatible.

Problemas

Problema 3. Determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectorial del correspondiente espacio vectorial:

(i) $F_1 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) $F_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

(iii) $F_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 2\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

(iv) $F_4 = \big\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 0\big\} \subset \mathbb{R}_n[x]$.

Problema 4. Calcular los subespacios generados por los subconjuntos que se indican:

(i) $S = \big\{(1,-1),(1,0)\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) $S = \big\{1 - x, x^2\big\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

(iii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(iv) $S = \big\{(1,-1,0,1),(1,1,1,1)\big\} \subset \mathbb{R}^4$.

Problema 5. Expresar el vector $r(x) = 3x^3 - 2x + 4 \in \mathbb{R}_3[x]$ como combinación lineal de

(i) $S = \big\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, p_4(x) = x^3\big\}$.

(ii) $S = \big\{p_1(x) = 3, p_2(x) = 1 - 2x, p_3(x) = 1 + x^2, p_4(x) = x^3\big\}$.

Problema 6. Hallar el vector de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto de la base

$$B = \{(2, -1, 1), (1, 0, 2), (0, -1, 4)\}$$

sean

(i) $(-1, 1, 2)$.

(ii) $(2, 0, 2)$.

Problema 7. Determinar para que valores de z el vector $\vec{v} = (5, 1, z)$ pertenezca al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$\vec{u}_1 = (7, 0, -1), \vec{u}_2 = (-1, 3, 0), \vec{u}_3 = (-2, 1, 0).$$

Problema 8. En el espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto de vectores $S = \big\{(2, 0, -1, 1), (-1, 1, -2, 0), (0, 2, -5, 1), (5, -1, 0, 2)\big\}$ y el espacio generado por S, F=$\langle S \rangle$.

(i) Calcular el rango de F.

(ii) Dar una base de F.

(iii) Comprobar si los vectores $\vec{w}_1 = (-4, 0, 2, -2)$ y $\vec{w}_2 = (2, 1, -3, 1)$ están en F.

Problema 9. Comprobar si los vectores que se indican son linealmente independientes o linealmente dependientes:

(i) $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 3, 0)$ y $\vec{u}_3 = (2, 3, 1)$.

(ii) $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 2x^2 + x$, $p_3(x) = x^2 + 3$.

(iii) $\vec{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$.

Problema 10. Sea $\big\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big\}$ un subconjunto ligado de un espacio vectorial E. Demostrar, o en caso contrario dar un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

(i) El vector $\vec{u}$ depende linealmente de los otros dos.

(ii) Uno de los tres vectores depende linealmente de los otros dos.

Problema 11. Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (1,1,0), \vec{w} = (k,0,1)\}.$$

¿ Para qué valores de k el conjunto S es ligado?.

Problema 12. Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$S = \{\vec{u} = (4,1,2,-5), \vec{v} = (0,1,h,k), \vec{w} = (2,1,-1,3)\}.$$

¿ Para qué valores de k, h el conjunto S es ligado?.

Problema 13. Sean E un espacio vectorial y $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un conjunto libre de vectores de E. Demostrar que el conjunto $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u}\}$ es también libre.

Problema 14. Sea $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un conjunto independiente de vectores de un espacio vectorial E. Determinar si el conjunto $B = \{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ es linealmente independiente o dependiente.

Problema 15. Comprueba si los siguientes subconjuntos son base de $\mathbb{R}^3$, y en caso afirmativo halla las coordenadas en dicha base del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que se indica:

$$B_1 = \{\vec{u}_1 = (-1,0,1), \vec{u}_2 = (-1,0,0), \vec{u}_3 = (0,2,-1)\}, \vec{v} = (-3,2,1).$$

$$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (-1,0,1), \vec{u}_3 = (5,2,-1)\}, \vec{v} = (1,2,3).$$

$$B_3 = \{\vec{u}_1 = (1,1,2), \vec{u}_2 = (2,1,2), \vec{u}_3 = (-1,0,1)\}, \vec{v} = (-3,0,2).$$

Problema 16. Hallar la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales y una base de cada subespacio:

(i) $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + t = 0\}$.

(ii) $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0, x + y = 0\}$.

(iii) $F_3 = \langle (2,-1,4,2), (0,1,-3,1) \rangle$.

(iv) $F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y + 2z - t = 0,\ x + 2y + 4z - 3t = 0\}$.

Problema 17. Hallar la condición que debe cumplir el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para formar una base de $\mathbb{R}^3$, junto con los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$.

Problema 18. Hallar la condición que debe cumplir el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para formar una base de $\mathbb{R}^3$, junto con los vectores $(1, 0, -1)$ y $(3, 1, 0)$.

Problema 19. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y los vectores $\vec{u}_1$,$\vec{u}_2$ cuyas coordenadas en la bese B son

$$[\vec{u}_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{u}_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ también es una base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Consideramos el vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$. Hallar las coordenadas de $\vec{w}$ en la base B'.

(iii) Hallar las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en la base B'.

Problema 20. Sean $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión 3, E. Sabiendo que

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_3. \end{aligned}$$

Hallar las matrices de cambio de base $[I_E]_{BB'}$ y $[I_E]_{B'B}$.

Problema 21. Comprobar que $B' = \{\vec{u}_1 = (2, 1, -1), \vec{u}_2 = (1, 0, 4), \vec{u}_3 = (2, 3, -2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y dar las matrices de cambio $[I_{\mathbb{R}^3}]_{BB'}$ y $[I_{\mathbb{R}^3}]_{B'B}$, donde B es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas de un vector $\vec{v}$, cuyas coordenadas en base B' son $[\vec{v}]_{B'} = (1, 0, -1, 2)$.

Problema 22. En el espacio de polinomios de orden menos o igual que 3, $\mathbb{R}_3[x]$, consideramos las bases canónic, C y $N = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$, donde

$$q_1(x) = 1 - 2x + x^2 - 3x^3, q_2(x) = -2x + 4x^2 - x^3, q_3(x) = 2x^2 - x^3, q_4(x) = -x^2 - x^3.$$

(a) Hallar $[I]_{NC}$ y $[I]_{CN}$.

(b) Hallar $[q(x)]_N$, donde $q(x) = 2 - x + x^2$.

(c) Si $[p(x)]_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, hallar $[p(x)]_C$.

2. Aplicaciones lineales

Objetivos

⊙ Conocer el concepto de aplicación lineal y matriz asociada (Identificación).
⊙ Conocer la relación entre las matrices asociadas a una misma aplicación lineal en diferentes bases.
⊙ Calcular los valores y vectores propios de un endomorfismo (o una matriz).
⊙ Saber determinar si un endomorfismo (o una matriz) es diagonalizable.
⊙ Saber determinar una base de vectores propios y la matriz diagonal de un endomorfismo diagonalizable (o una matriz).

2.1 Definiciones

En este apartado se estudian las funciones entre espacios vectoriales y sus propiedades más relevantes así como su relación con las matrices. Una aplicación lineal es una correspondencia entre espacios vectoriales que preserva las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar.

Definición Sean E y F espacios vectoriales reales. Una correspondencia $f : E \longrightarrow F$ se denomina aplicación lineal si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in E$, entonces $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in E$, entonces $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Ejemplos (a) Dado $k \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(\vec{u}) = k\vec{u}$ es una aplicación lineal.

Comprobamos que se cumplen las dos propiedades:

(i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(\vec{u}+\vec{v}) = k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

(b) La aplicación $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definida por $f(p(x)) = p'(x)$ es una aplicación lineal.

Comprobamos que se cumplen las dos propiedades:

(i) Si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces $f(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x))$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces $f(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda f(p(x))$.

Las siguientes propiedades nos permiten conocer las principales características de las aplicaciones lineales.

Propiedades Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces,

(i) Conociendo las imágenes mediante f de los vectores de una base de E, se puede calcular también la imagen de cualquier vector de E.

(ii) La imagen del vector nulo de E mediante la aplicación lineal f es el vector nulo de F.

(iii) La imagen de un subespacio vectorial de E mediante f es, a su vez, un subespacio vectorial de F.

Clasificación de las aplicaciones lineales

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces,

(i) Si f es inyectiva, se denomina monomorfismo.

(ii) Si f es sobreyectiva o exhaustiva, se denomina epimorfismo.

(iii) Si f es biyectiva, se denomina isomorfismo.

(iv) Si $E = F$, f se denomina endomorfismo.

(v) Si $E = F$ y f es un isomorfismo, se denomina automorfismo.

2.2 Operaciones entre aplicaciones lineales

De ahora en adelante, denotamos por $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales E y F.

Operaciones En el conjunto $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ definimos las siguientes operaciones:

(i) Dadas $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, definimos la suma, $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, como la aplicación lineal

$$(f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}), \quad \text{para todo } \vec{u} \in E.$$

(ii) Para todo $k \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, definimos el producto por un escalar, $k \cdot f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, como la aplicación lineal

$$(k \cdot f)(\vec{u}) = k \cdot f(\vec{u}), \quad \text{para todo } \vec{u} \in E.$$

(iii) Dadas $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ y $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F, G)$, definimos la composición, $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, G)$, como la aplicación lineal

$$(g \circ f)(\vec{u}) = g\big(f(\vec{u})\big), \quad \text{para todo } \vec{u} \in E.$$

(iv) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,F)$ biyectiva, entonces existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F,E)$ tal que

$$(g \circ f) = I_E \quad \text{y } (f \circ g) = I_F.$$

Llamamos a dicha función inversa de f, y la denotamos por f^{-1}.

2.3 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Los siguientes subespacios son de gran importancia en el estudio de las aplicaciones lineales.

Definiciones Dada $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,F)$ se llama núcleo de f, y se representa por $\text{Ker}(f)$, al conjunto

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \left\{\vec{u} \in E : \; f(\vec{u}) = \vec{0}\right\}.}$$

Es decir, el núcleo de f está formado por todos los elementos de E que se transforma en el vector nulo de F. Observar que $\text{Ker}(f) \subset E$.

Dada $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,F)$ se llama imagen de f, y se representa por $\text{Im}(f)$, al conjunto

$$\boxed{\text{Im}(f) = \left\{\vec{v} \in F : \quad \text{existe } \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}\right\} = f(E).}$$

Es decir, la imagen de f está formada por todos los elementos de F que son imagen de algún vector de E. Observar que $\text{Im}(f) \subset F$.

Proposición Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,F)$. Entonces,

(i) Los conjuntos $\text{Ker}(f)$ y $\text{Im}(f)$ son subespacios vectoriales de E y F, respectivamente.

(ii) La aplicación f es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

(iii) Si f es inyectiva y $S \subset E$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, el conjunto $f(S)$ es linealmente independiente.

(iv) $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{E})$.

(v) Si los espacios vectoriales E y F tienen la misma dimensión, se puede asegurar que existe entre ellos una aplicación lineal biyectiva.

(vi) Si el conjunto $\left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\right\}$ es un conjunto de generadores de E, el conjunto $\left\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_m)\right\}$ es un conjunto de generadores de $\text{Im}(f)$.

Demostración (i)

(i) Sean $\vec{u}, \vec{w} \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces de la linealidad de la aplicación f tenemos que

$$\boxed{f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{w}) = \vec{0}.}$$

Por tanto, $\operatorname{Ker}(f)$, es un subespacio de E.

Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \operatorname{Im}(f)$, y $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in E$ tales que $f(\vec{w}_1) = \vec{u}_1$ y $f(\vec{w}_2) = \vec{u}_2$, entonces de la linealidad de la aplicación f tenemos que

$$\boxed{f(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha f(\vec{w}_1) + \beta f(\vec{w}_2) = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2.}$$

Por tanto, $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ está en la imagen y $\operatorname{Im}(f)$, es un subespacio de F.

(iii) Supongamos que $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$, entonces $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_m)\}$ es un conjunto independiente si la única solución del siguiente sistema es la trivial

$$\lambda_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \lambda_m f(\vec{u}_m) = \vec{0}.$$

De la linealidad de la aplicación f tenemos que

$$\vec{0} = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \lambda_m f(\vec{u}_m) = f(\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_m\vec{u}_m),$$

como la aplicación es inyectiva deducimos que

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_m\vec{u}_m = \vec{0}.$$

Finalmente, aplicando que el conjunto S es libre deducimos que

$$\boxed{\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.}$$

(iv) Supongamos que la dimensión de E es n y que el conjunto $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base. Sea $\vec{v} \in \operatorname{Im}(f)$, entonces existe $\vec{u} \in E$ talque $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Expresamos el vector $\vec{u}$ en la base B,

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n.$$

Por la linealidad de f obtenemos que

$$\vec{v} = f(\vec{u}) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{u}_n).$$

Por tanto, los vectores $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ son un sistema de generadores de $\operatorname{Im}(f)$ y en consecuencia

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{E}).}$$

Teorema de la Dimensión Si E y F son espacios vectoriales de dimensión finita y $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, entonces

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).}$$

En particular, f es sobreyectiva si y sólo si $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$. Mientras que, f es inyectiva si y sólo si $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$.

2.4 Matriz asociada a una aplicación lineal

En este apartado consideramos las bases de los espacios vectoriales E y F de dimensiones n y m, dadas respectivamente por $B_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$.

Definición Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$. La matrix asociada a f en las bases B_1, B_2 es aquella que tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)$ en la base B_2; es decir,

$$\boxed{[f]_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),}$$

donde $f(\vec{u}_i) = a_{1i}\vec{v}_1 + \cdots + a_{mi}\vec{v}_m$.

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x - 2y$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$, respectivamente.
Consideramos $C_1 = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ y $C_2 = \{\vec{v}_1 = 1\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$, respectivamente. Entonces, $f(\vec{e}_1) = 1 - 0 = 1 \cdot \vec{v}_1$ y $f(\vec{e}_2) = 0 - 2 = -2 \cdot \vec{v}_1$. Por tanto,

$$\boxed{[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2)}$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, 4x)$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.
Consideramos $C_1 = \{\vec{v}_1 = 1\}$ y $C_2 = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Entonces, $f(\vec{v}_1) = (1, 4) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2$. Por tanto,

$$\boxed{[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1).}$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x - 3y, 5x + y)$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.
Consideramos $C_1 = C_2 = \{\vec{e_1} = (1, 0), \vec{e_2} = (0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces, $f(\vec{e_1}) = (1, 5) = 1 \cdot \vec{e_1} + 5 \cdot \vec{e_2}$ y $f(\vec{e_2}) = (-3, 1) = -3 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$. Por tanto,

$$\boxed{[f]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2).}$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - z)$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.
Consideramos $C_1 = \{\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)\}$ y $C_2 = \{\vec{v_1} = (1, 0), \vec{v_2} = (0, 1)\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Entonces, $f(\vec{e_1}) = (1, 2) = 1 \cdot \vec{v_1} + 2 \cdot \vec{v_2}$, $f(\vec{e_2}) = (-1, 3) = -1 \cdot \vec{v_1} + 3 \cdot \vec{v_2}$ y $f(\vec{e_3}) = (1, -1) = 1 \cdot \vec{v_1} - 1 \cdot \vec{v_2}$. Por tanto,

$$\boxed{[f]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 3).}$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x - 3y$. Hallar la matrix asociada a f en las bases $B = \{\vec{u}_1 = (2, 1), \vec{u}_2 = (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $C = \{\vec{e_1} = 1\}$ de $\mathbb{R}$.
Valoramos la función en los elementos de la base, $f(\vec{u}_1) = 1 = 1 \cdot \vec{e_1}$ y $f(\vec{u}_2) = 5 = 5 \cdot \vec{e_1}$. Por tanto,

$$\boxed{[f]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2).}$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x - 3y$. Hallar la matrix asociada a f en las bases $C = \{\vec{e_1} = (1, 0), \vec{e_2} = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{\vec{u_1} = \frac{1}{3}\}$ de $\mathbb{R}$.
Valoramos la función en los elementos de la base, $f(\vec{e_1}) = 2 = 6 \cdot \vec{u_1}$ y $f(\vec{e_2}) = -3 = -9 \cdot \vec{u_1}$. Por tanto,

$$\boxed{[f]_{CB} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2).}$$

TEOREMA Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$. Entonces:

(a) $[f]_{B_1B_2}$ es una matrix de orden $m \times n$.

(b) Dado $\vec{u} \in E$, $[f(\vec{u})]_{B_2} = [f]_{B_1B_2}[\vec{u}]_{B_1}$.

(c) $f(B_1)$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}\big([f]_{B_1B_2}\big)$ y $\mathrm{dimKer}(f) = n - \mathrm{rang}\big([f]_{B_1B_2}\big)$.

EJERCICIO Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a - b, b - 2c, 3a - 2b - 2c).$$

(i) Demostrar que f es una aplicación lineal
(ii) Calcular $[f]_{C_1C_2}$, donde C_i, $i = 1, 2$ son las bases canónicas.
(iii) Hallar las dimensiones de $\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$.

(i) En primer lugar verificamos las propiedades de ser una aplicación lineal. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ y $p_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(p_1(x) + p_2(x)) &= \big((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 2(c_1 + c_2), 3(a_1 + a_2) - 2(b_1 + b_2) - 2(c_1 + c_2)\big) \\ &= \big(a_1 - b_1, b_1 - 2c_1, 3a_1 - 2b_1 - 2c_1\big) + \big(a_2 - b_2, b_2 - 2c_2, 3a_2 - 2b_2 - 2c_2\big) \\ &= f(p_1(x)) + f(p_2(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda p_1(x)) &= \big(\lambda(a_1 - b_1), \lambda(b_1 - 2c_1), \lambda(3a_1 - 2b_1 - 2c_1)\big) \\ &= \lambda\big(a_1 - b_1, b_1 - 2c_1, 3a_1 - 2b_1 - 2c_1\big) \\ &= \lambda f(p_1(x)). \end{aligned}$$

(ii) Consideramos las bases canónicas $C_1 = \{1, x, x^2\}$ y $C_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Entonces,

$$f(1) = (1, 0, 3), \quad f(x) = (-1, 1, -2), \quad f(x^2) = (0, -2, -2).$$

Por tanto,

$$\boxed{[f]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 3).}$$

(iii) En primer lugar calculamos el $\mathrm{Ker}(f) = \{p(x) : f(p(x)) = 0\}$; es decir,

$$\boxed{f(p(x)) = (a - b, b - 2c, 3a - 2b - 2c) = (0, 0, 0) \quad \Longrightarrow \quad a = 2c, \quad b = 2c.}$$

Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \{(2c, 2c, c) : c \in \mathbb{R}\} \quad \Longrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker}(f) = 1.}$$

Aplicando el **Teorema de las dimensiones** obtenemos que

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}(f) = 3 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 2.}$$

Proposición Sean B_1, B_2 y B_3 bases de los espacios vectoriales E, F, y G, respectivamente. Sean $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$, $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F; G)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $[f + g]_{B_1B_2} = [f]_{B_1B_2} + [g]_{B_1B_2}$.

(ii) $[\lambda f]_{B_1B_2} = \lambda[f]_{B_1B_2}$.

(iii) $[h \circ f]_{B_1B_3} = [h]_{B_2B_3}[f]_{B_1B_2}$.

(iv) Si f es un isomorfismo, $[f^{-1}]_{B_2B_1} = \Big([f]_{B_1B_2}\Big)^{-1}$.

Cambios de bases

De ahora en adelante V_1, N_1 serán bases del espacio vectorial E y V_2, N_2 serán bases del espacio vectorial F.

Proposición Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$. Entonces:

(i) $[f]_{N_1V_2} = [f]_{V_1V_2}[I_E]_{N_1V_1}$.

(ii) $[f]_{V_1N_2} = [I_F]_{V_2N_2}[f]_{V_1V_2}$.

(iii) $[f]_{N_1N_2} = [I_F]_{V_2N_2}[f]_{V_1V_2}[I_E]_{N_1V_1}$.

Ejercicio Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(1, 0) = (-1, 2, 2) \quad \text{y} \quad f(0, 1) = (1, 0, 1).$$

(i) Calcular la matriz asociada a f en las bases canónicas.

(ii) Obtener la expresión explícita de la aplicación.

(iii) Dadas $N = \{(1, 1), (2, 3)\}$, obtener la matrix de $[f]_{NC_2}$.

(i) Para hallar $[f]_{C_1C_2}$, basta colocar las imágenes de la base canónica C_1 en las columnas de la matriz:

$$[f]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 2).$$

(ii) Si las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^2$ en base canónica son (x, y), entonces:

$$f(x,y) = [f]_{C_1C_2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-x+y, 2x, 2x+y).$$

(iii) Según la Proposición anterior $[f]_{NC_2} = [f]_{C_1C_2}[I_{\mathbb{R}^2}]_{NC_1}$, y por tanto

$$[f]_{NC_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Endomorfismos

3.1 Vectores y valores propios

Definición Sea $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo sobre un espacio vectorial E de dimensión n. El escalar λ es un **valor propio** de f, si existe un vector $\vec{v} \in E$ no nulo, $\vec{v} \neq 0$, tal que

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.$$

Entonces, cada vector $\vec{u} \in E$ tal que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ se denomina **vector propio de f de valor propio λ**. El conjunto de vectores propios asociados a un autovalor es un espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 1; ya que $\vec{0} \in E$ y verifica la condición $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$.

A veces también se utiliza la nomenclatura autovalor (VAP) y autovector (VEP). El conjunto de valores propios de un endomorfismo f se denota por $\sigma(f)$, y se denomina **espectro de f**.

Observación Si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de f y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores propios no nulos asociados a cada uno ellos, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.

Para ello basta considerar la combinación lineal

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v}$$

y aplicar imágenes a ambos lados de la igualdad, entonces

$$f\big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\big) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Aplicando la linealidad de la función tenemos que

$$\vec{0} = \alpha f\big(\vec{u}\big) + \beta f\big(\vec{v}\big) = \alpha\lambda_1\vec{u} + \beta\lambda_2\vec{v} = -\lambda_1\beta\vec{v} + \beta\lambda_2\vec{v} = \beta\vec{v}\big(\lambda_2 - \lambda_1\big).$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{u} \neq 0$, tenemos que

$$\boxed{\beta = \alpha = 0;}$$

es decir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.

De ahora en adelante supondremos fijada una base E del espacio vectorial E y denotaremos por $A = [f]_V$.

Observación Para que λ sea un valor propio de f es necesario y suficiente que

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda I) \neq 0,$$

o de forma equivalente que $\mathrm{rang}(f - \lambda I) < n$ o que $\det(f - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = 0$.

Definición Llamamos **polinomio característico de f**, y lo denotaremos por $p_f(x)$, al polinomio

$$\boxed{p_f(x) = \det(A - xI) \in \mathbb{R}_n[x].}$$

La ecuación $p_f(x) = \det(A - xI) = 0$, se denomina **ecuación característica de f**. Por tanto,

$$\boxed{\text{los valores propios de } f \text{ son las raíces de la ecuación característica de } f.}$$

Observación El polinomio característico, y por tanto la ecuación característica, de un endomorfismo no depende de la base elegida.

Determinación de los vectores propios Una vez conocemos los valores propios de un endomorfismo a través de su ecuación característica podemos hallar los vectores propios asociados. Para ello basta determinar una base de los subespacios vectoriales

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I),}$$

ya que si $\vec{v} \in E$ es **vector propio de** f entonces $\vec{v} \neq 0$ y existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, y por tanto $(f - \lambda I)(\vec{v}) = 0$; es decir,

$$\boxed{\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f - \lambda I).}$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x, y, z) = (4x - 2y + 5z, 5x - 3y + 5z, 4z).$$

Determinar la ecuación característica y el espectro de f. Hallar los vectores propios asociados.

En primer lugar sea C la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\boxed{A = [f]_C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 5 \\ 5 & -3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\big[(4-\lambda)(-3-\lambda) + 10\big] = (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda). \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación característica de f es

$$\boxed{(4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0,}$$

y el espectro es

$$\boxed{\sigma(f) = \{-1, 2, 4\}.}$$

Para hallar los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios basta hallar los núcleos.

(a) $\mathrm{Ker}(A - 4I) = \langle(5, 5, 2)\rangle$, ya que

$$\boxed{(A-4I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y+5z \\ 5x-7y+5z \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = \frac{5}{2}z.}$$

(b) $\operatorname{Ker}(A-2I) = \langle (1,1,0) \rangle$, ya que

$$\boxed{(A-2I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2y+5z \\ 5x-5y+5z \\ -2z \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0, x = y.}$$

(c) $\operatorname{Ker}(A+I) = \langle (2,5,0) \rangle$, ya que

$$\boxed{(A+I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x-2y+5z \\ 5x-2y+5z \\ 5z \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0, y = \frac{5}{2}x.}$$

3.2 Endomorfismo diagonalizables

Cuando queremos estudiar un endomorfismo a partir de su matriz asociada, resulta de interés conocer si existe una base tal que la matriz asociada respecto a dicha base sea la más simple posible; es decir, una matriz diagonal. Si existe tal base, se dice que el endomorfismo es **diagonalizable**.

Observación: Si $V = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base de un espacio vectorial E de dimensión n, en la que el endomorfismo f diagonaliza, entonces

$$\boxed{A = [f]_V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},}$$

y por tanto

$$\boxed{f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n;}$$

es decir, los escalares λ_i son valores propios de f y los vectores $\vec{u}_i$ son vectores propios de f.

Caracterización de los endomorfismo diagonalizables Un endomorfismo f, es diagonalizable si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $p_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_s)^{m_s}$.

(ii) $m_i = \text{dimKer}(f-\lambda_i I)$, para todo $i = 1,\ldots,s$.

Observación: En general, se tiene que

$$\boxed{1 \leq \dim \text{Ker}(f-\lambda_i I) \leq m_i,}$$

y el endomorfismo diagonaliza si la igualdad superior se da. Lo que en particular implica que, si $p_f(x)$ descompone como producto de factores simple; es decir,

$$p_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n),$$

f, es diagonalizable.

Observación Si f es un endomorfismo diagonalizable, y denotamos por B a la base de vectores propios, entonces

$$\boxed{[f]_C = [I_E]_{BC}[f]_B[I_E]_{CB} = [I_E]_{BC}[f]_B[I_E]_{BC}^{-1},}$$

donde $[I_E]_{BC}$ es la matrix que expresa los vectores propios en la base canónica.

Matrices diagonalizables

Como cada matrix cuadrada de orden n se puede identificar con un endomorfismo sobre un espacio vectorial de dimensión n, podemos extender los conceptos de valor propio, vector propio, Ker, polinomio y ecuación característica y diagonalización al caso de matrices.

Problemas resueltos

Problema 23. Clasifica la siguiente función, halla una base y las ecuaciones implícitas de $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f)$

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(3y,0).$$

Indicación: Para encontrar una base o las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $\mathrm{Im}(f)$ basta hallar el subespacio vectorial generado por las columnas de la matrix asociada a f en una base cualquiera, y después encontrar sus ecuaciones. Esto es debido a que $\vec{u}\in \mathrm{Im}(f)$ sii $f(\vec{v})=\vec{u}$, y por tanto

$$\boxed{\vec{u}=f(\vec{v})=[f]_V[\vec{v}]_B,}$$

es decir, $\vec{u}\in \mathrm{Im}(f)$ si es combinación lineal de las columnas de $[f]_V$, y las coordenadas de la combinación lineal serán $[\vec{v}]_B$.

(a) Calculamos la matriz asociada a f en base canónica C

$$\boxed{A=[f]_C=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}}$$

Hallamos el núcleo de f:

$\mathrm{Ker}(f)=\langle(1,0)\rangle$, ya que

$$\boxed{(A)(\vec{u})=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3y\\ 0\end{bmatrix}=\vec{0} \quad\Longleftrightarrow\quad y=0.}$$

Por tanto, $\dim\mathrm{Ker}(f)=1$, y las ecuaciones implícitas son

$$\boxed{y=0.}$$

La aplicación no es ni inyectiva ni exhaustiva.

Aplicando el Teorema de las dimensiones tenemos que $\dim\mathrm{Im}(f)=1.$ Una base de $\mathrm{Im}(f)$ está formada por las columnas l.i. de la matriz, en este caso

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \langle (3,0) \rangle \Longrightarrow y = 0.}$$

Problema 24. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios.

En primer lugar calculamos el polinomio característico:

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 2).$$

Por tanto, la ecuación característica de f es

$$\boxed{(\lambda - 4)^2(\lambda + 2) = 0,}$$

y el espectro es

$$\boxed{\sigma(f) = \{-2, 4\} \text{ con } m_1 = 1 \text{ y } m_2 = 2.}$$

Para determinar si el endomorfismo es diagonalizable tenemos que hallar los subespacios de vectores propios asociados a cada uno de los valores propios y estudiar la dimensión de cada uno de ellos.

(a) $\mathrm{Ker}(A + 2I) = \langle (-1, -1, 2) \rangle$, ya que

$$\boxed{(A + 2I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 2y + z \\ -2x + 4y + z \\ 4(x + y + z) \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = -\frac{z}{2}.}$$

(b) $\mathrm{Ker}(A - 4I) = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 2) \rangle$, ya que

$$(A-4I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x-2y+z \\ -2x-2y+z \\ 4x+4y-2z \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad z = 2x+2y.$$

Como $\dim\mathrm{Ker}(A-4I) = 2$ que coincide con la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico, el endomorfismo f diagonaliza. La matriz diagonal correspondiente y una base de vectores propios son

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } P = [I]_{NC} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo que se cumple

$$[f]_C = [I]_{NC}[f]_N[I]_{CN} = [I]_{NC}[f]_N[I]_{NC}^{-1},$$

donde N es la base de vectores propios.

Problema 25. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios.

En primer lugar calculamos el polinomio característico:

$$p_f(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 8-\lambda & 1 \\ 5 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Por tanto, la ecuación característica de f es

$$(9-\lambda)^2(3-\lambda) = 0,$$

y el espectro es

$$\boxed{\sigma(f)=\{3,9\},\text{ con } m_1=1 \text{ y } m_2=2.}$$

Para determinar si el endomorfismo es diagonalizable tenemos que hallar los subespacios de vectores propios asociados a cada uno de los valores propios y estudiar la dimensión de cada uno de ellos.

(a) $\operatorname{Ker}(A-3I)=\langle(1,0,-1)\rangle$, ya que

$$(A-3I)(\vec{u})=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 5 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-2y+2z\\ x+5y+z\\ 5x+y+5z\end{bmatrix}=\vec{0} \iff y=0, z=-x.$$

(b) $\operatorname{Ker}(A-9I)=\langle(0,1,1)\rangle$, ya que

$$(A-9I)(\vec{u})=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x-2y+2z\\ x-y+z\\ 5x+y-z\end{bmatrix}=\vec{0} \iff x=0, y=z.$$

Como $\dim\operatorname{Ker}(A-9I)=1$ que **no** coincide con la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico que es 2, el endomorfismo f **no** diagonaliza.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 26. Determina si las siguientes aplicaciones son lineales y, en caso de que lo sean, halla la matriz asociada a f en las bases canónicas.

(a) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(3y,x)$.

(b) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ f(x,y)=(x,-y+5x,3x+y)$.

(c) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x^2,2y)$.

(d) $f:\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)\longrightarrow\mathbb{R},\ f(A)=\operatorname{tr}(A)$.

Problema 27. Clasifica las siguientes funciones, halla una base y las ecuaciones implícitas de $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f)$:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (3y, 0)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (4x, -y + 2x, 3x + y)$.

(c) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ f(x, y) = (x - y + t, 2x + y + z + 3t, x + y - t, y + z + t)$.

Problema 28. Demostrar que una aplicación lineal f es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

Problema 29. Determinar la relación entre los parámetros a, b y c para que la matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sea diagonalizable.

Problema 30. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios.

Problema 31. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ el endomorfismo definido por

$$f(a + bx + cx^2) = 3a + 2b + 2c + bx - (4a + 4b + 3c)x^2.$$

(a) Demostrar que f es un automorfismo.

(b) Demostrar que $f^2 = I_{\mathbb{R}_2[x]}$.

(c) Demostar que f es diagonalizable.

(d) Hallar una base de vectores propios.

Problema 32. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios y determinar la forma diagonal de A.

Problema 33. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base B formada por los vectores $v_1 = (1, 1),\ v_2 = (1, 2)$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular la matriz de f en la base canónica.

(b) Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios y determinar la forma diagonal.