

ÀLGEBRA I CÀLCUL MULTIVARIABLE

Curs 2017-2018

ÀLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

1. ESPACIOS VECTORIALES

OBJETIVOS

- ⊙ Conocer el concepto de espacio vectorial y sus propiedades.
- ⊙ Conocer los conceptos de sistema generador e independencia lineal.
- ⊙ Saber determinar una base de un espacio vectorial.
- ⊙ Calcular la matriz de cambio de base.

1.1 DEFINICIONES

Un espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna y otra operación externa que cumplen ciertas propiedades fundamentales. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores y a los elementos del cuerpo, escalares.

DEFINICIÓN Sea E un conjunto no vacío, en el que hay definidas una operación interna y otra externa denominadas **suma** y **producto por escalares**, respectivamente.

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E & \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longrightarrow \vec{u} + \vec{v} & (\lambda, \vec{u}) &\longrightarrow \lambda \vec{u} \end{aligned}$$

Denominamos **espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R}** de los números reales a la terna $(E, +, \cdot)$, si se cumplen las siguientes propiedades:

- El par $(E, +)$ verifica las siguientes propiedades que lo dotan de estructura de grupo abeliano.
 - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (**asociativa**)
 - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (**commutativa**)

(c) existe un elemento de E , $\vec{0}$, denominado **elemento neutro de E** , tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, para todo $\vec{u} \in E$.

(d) para todo elemento $\vec{u} \in E$, existe un elemento de E denotado por $-\vec{u}$, y denominado **elemento opuesto de \vec{u}** , tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in E$ se cumple.

$$(e) (\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}.$$

$$(f) \alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}.$$

$$(g) (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}).$$

$$(h) 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

Los elementos de un espacio vectorial se denominan **vectores**, y los números reales reciben el nombre de **escalares**.

EJEMPLO Los siguientes conjuntos con las operaciones definidas en cada caso son espacios vectoriales

(i) El conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{y} \quad \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

(ii) El conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios con coeficiente reales de grado menor o igual que n con las operaciones habituales

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n, \\ \lambda p(x) &= \lambda(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \\ &= \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n. \end{aligned}$$

(iii) El conjunto $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$ de las matrices de orden $m \times n$ con las operaciones suma de matrices y producto por escalares visto en Cálcul.

Un subconjunto F no vacío de un espacio vectorial $(E, +, \cdot)$ es un **subespacio vectorial de E** si se cumplen las siguientes propiedades

$$(i) \vec{u}, \vec{v} \in F \implies \vec{u} + \vec{v} \in F.$$

$$(ii) \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \vec{u} \in F \implies \lambda \vec{u} \in F.$$

De forma equivalente podríamos comprobar que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in F$ se verifica que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$.

Entre los subespacios vectoriales de $(E, +, \cdot)$ tenemos los llamados **triviales** que son el $\{0\}$ y el total E .

PROPOSICIÓN Si F es un subespacio vectorial de $(E, +, \cdot)$, entonces $\vec{0} \in F$.

Demostración Sea $\vec{u} \in F$, entonces $-\vec{u} \in F \implies \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \in F$.

EJEMPLOS Probar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales o no del espacio correspondiente.

$$(1) F = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

En primer lugar observamos que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$. Comprobamos el resto de propiedades:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in F,$$

ya que es una matriz con el elemento $_{12}$ nulo. Además,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \in F,$$

ya que es una matriz con el elemento $_{12}$ nulo.

$$(2) F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En primer lugar observamos que $(0, 0) \in F$. Comprobamos el resto de propiedades:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F,$$

ya que si sumamos las dos coordenadas obtenemos que

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$$

mientras que

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in F,$$

ya que si sumamos las coordenadas obtenemos que

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) = 0.$$

$$(3) F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En primer lugar observamos que $(0, 0) \notin F$, por tanto F no es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 .

1.2 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Sea $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial E . Un vector \vec{u} es una **combinación lineal de los vectores de S** , si existen **escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$** tales que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m.$$

Una combinación lineal se denomina **nula** si es igual al vector $\vec{0}$. Cuando todos sus escalares son nulos obtenemos la **combinación lineal trivial**; es decir,

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_m.$$

DEFINICIÓN Un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ de vectores de un espacio vectorial E se llama **libre** si su única combinación lineal nula es la combinación lineal trivial. En caso contrario, el conjunto S se denomina **ligado**. Los vectores de un conjunto libre se denominan **linealmente independientes**, mientras que los de un conjunto ligado se denominan **linealmente dependientes**.

EJEMPLOS Expresar el vector $\vec{u} = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de
(a) $S = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2, -1) = \lambda(1, 0) + \beta(0, 1) = (\lambda, \beta).$$

Igualando componentes obtenemos que $\lambda = 2$ y $\beta = -1$. Por tanto,

$$(2, -1) = 2 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot \beta(0, 1).$$

$$(b) S = \{\vec{v}_1 = (2, 2), \vec{v}_2 = (4, 1)\}$$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2, -1) = \lambda(2, 2) + \beta(4, 1) = (2\lambda + 4\beta, 2\lambda + \beta).$$

Igualando componentes obtenemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 2\lambda + 4\beta \\ -1 = 2\lambda + \beta \end{array} \right\}$$

cuya solución es $\lambda = -1$ y $\beta = 1$. Por tanto,

$$(2, -1) = (-1) \cdot (2, 2) + 1 \cdot (4, 1).$$

$$(c) S = \{\vec{w}_1 = (0, 1), \vec{w}_2 = (2, 1), \vec{w}_3 = (-1, -2)\}$$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2, -1) = \lambda(0, 1) + \beta(2, 1) + \gamma(-1, -2) = (2\beta - \gamma, \lambda + \beta - 2\gamma).$$

Igualando componentes obtenemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 2\beta - \gamma \\ -1 = \lambda + \beta - 2\gamma \end{array} \right\}$$

que es compatible e indeterminado y las soluciones son $\lambda = -5 + 3\beta$ y $\gamma = 2\beta - 2$. Por tanto,

$$(2, -1) = (-5 + 3\beta) \cdot (0, 1) + \beta \cdot (2, 1) + (2\beta - 2)(-1, -2).$$

Observamos que existen infinitas combinaciones lineales de los vectores de S que nos dan el vector \vec{u} .

$$(d) S = \{\vec{z}_1 = (4, -6), \vec{z}_2 = (-6, 9)\}$$

Escribimos el vector como combinación lineal de los elementos de S

$$(2, -1) = \lambda(4, -6) + \beta(-6, 9) = (4\lambda - 6\beta, -6\lambda + 9\beta).$$

Igualando componentes obtenemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 4\lambda - 6\beta \\ -1 = -6\lambda + 9\beta \end{array} \right\}$$

que es incompatible. Por tanto, el sistema **no tiene solución y el vector \vec{u} no se puede expresar como combinación lineal de los elementos de S** . Observar que

$$3\vec{z}_1 + 2\vec{z}_2 = \vec{0}.$$

Por lo que S es un sistema ligado y el vector \vec{u} es independiente de los vectores de S .

EJEMPLOS Comprobar si los vectores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ y $\vec{v} = (4, -1, 2)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Planteamos el sistema que nos proporciona la combinación lineal nula

$$(0, 0, 0) = \lambda(3, 1, 2) + \beta(4, -1, 2) = (3\lambda + 4\beta, \lambda - \beta, 2\lambda + 2\beta).$$

Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 3\lambda + 4\beta \\ 0 = \lambda - \beta \\ 0 = \lambda + \beta \end{array} \right\} \implies \lambda = \beta = 0.$$

Como la única solución del sistema es la nula, el sistema de vectores $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente.

Comprobar si los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (3, -3, 0)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Planteamos el sistema que nos proporciona la combinación lineal nula

$$(0, 0, 0) = \lambda(-1, 1, 0) + \beta(3, -3, 0) = (-\lambda + 3\beta, \lambda - 3\beta, 0).$$

Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -\lambda + 3\beta \\ 0 = \lambda - 3\beta \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \implies \lambda = 3\beta.$$

Existen infinitas combinaciones lineales no nulas de los vectores \vec{u}, \vec{v} , por lo que el sistema de vectores $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente dependiente. Observar que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

PROPOSICIÓN Un conjunto de vectores S con al menos 2 elementos, es libre si y sólo si ningún vector de S es combinación lineal del resto.

Demostración Sea $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ con $m \geq 2$. Supongamos que

$$\vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \widehat{\vec{v}_j} + \dots + \lambda_m \vec{v}_m,$$

para algún $j = 1, \dots, m$, donde $\widehat{\vec{v}_j}$ significa que el vector \vec{v}_j no aparece en la combinación. Entonces,

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots - \vec{v}_j + \dots + \lambda_m \vec{v}_m$$

es una combinación lineal de los vectores de S no trivial, ya que $\lambda_j = -1 \neq 0$. Por tanto, S es ligado.

Recíprocamente, si S es ligado existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_j \vec{v}_j + \dots + \lambda_m \vec{v}_m.$$

Supongamos que $\lambda_j \neq 0$, entonces

$$\vec{v}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \vec{v}_1 - \dots - \widehat{\vec{v}_j} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_j} \vec{v}_m;$$

es decir, v_j se puede obtener como una combinación lineal del resto.

PROPOSICIÓN Sea $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ un subconjunto libre de un espacio vectorial E . Entonces,

- (i) $\vec{0} \notin S$.
- (ii) Todos los subconjuntos de S son libres.
- (iii) Si $S = \{\vec{v}_1\}$, S es libre si y sólo si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.
- (iv) Dado $\vec{v} \in E$, el conjunto $S \cup \{\vec{v}\}$ es libre si y sólo si $\vec{v} \notin \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$.
- (v) Sean $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i \in S$. El conjunto S_1 obtenido al reemplazar en S el vector \vec{v}_i por $\lambda \vec{v}_i$ es libre.
- (vi) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i, \vec{v}_j \in S$. El conjunto S_2 obtenido al reemplazar en S el vector \vec{v}_i por $\vec{v}_i + \lambda \vec{v}_j$ es libre.

EJEMPLO Sea $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un subconjunto ligado de un espacio vectorial E . Demostrar, o en caso contrario dar un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

- (i) El vector \vec{u} depende linealmente de los otros dos.
- (ii) Uno de los tres vectores depende linealmente de los otros dos.

- (i) **No necesariamente** el vector \vec{u} es el que depende linealmente de los otros dos.

Supongamos que tomamos \vec{u} y \vec{w} independientes. Entonces,

$$S = \{\vec{u}, \vec{w}, -\vec{w}\}$$

es ligado, pero \vec{u} no es combinación lineal de los otros dos.

- (ii) **En este caso la afirmación es verdadera.**

Si S es ligado existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}.$$

Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha} \vec{w}.$$

EJEMPLO Consideramos el subconjunto de \mathbb{R}^3

$$S = \{\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (1, 1, 0), \vec{w} = (k, 0, 1)\}.$$

¿ Para qué valores de k el conjunto S es ligado?.

Método 1 Como los vectores \vec{u} , \vec{v} son linealmente independientes, construimos la matriz de coordenadas de los vectores e imponemos que tenga rango 2. Calculamos el determinante e imponemos que se anule.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} = -k.$$

Por tanto,

el conjunto S es ligado sii $k = 0$.

Método 2 Como los vectores \vec{u} , \vec{v} son linealmente independientes, imponemos que el vector \vec{w} sea combinación lineal del resto.

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

es decir, tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} k = \lambda + \beta \\ 0 = \lambda + \beta \\ 1 = \lambda \end{array} \right\} \implies \lambda = 1, \beta = -1.$$

Por tanto,

el conjunto S es ligado sii $k = 0$.

1.3 BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ un subconjunto finito de un espacio vectorial E . Denominamos **conjunto generado por S** , y se denota por $\langle S \rangle$, a aquél subespacio cuyos elementos son *todas* las combinaciones lineales de los elementos de S ; es decir,

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

Dados un conjunto finito S y $F = \langle S \rangle$, el conjunto S recibe el nombre de **sistema de generadores de F** .

OBSERVACIÓN Si $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ es un sistema de generadores de F , entonces todo elemento de F se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S .

DEFINICIÓN Sea E un espacio vectorial con un sistema de generadores finito S ; es decir, tal que $E = \langle S \rangle$. Decimos que E es un **espacio vectorial de dimensión finita**.

PROPOSICIÓN Sea $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ un sistema de generadores finito de un espacio vectorial E .

- (i) Si $\vec{v} \in E$, entonces $S \cup \{\vec{v}\}$ es un sistema de generadores de E .
- (ii) Si para algún i , $\vec{v}_i \in S$ es tal que \vec{v}_i es combinación lineal de los elementos de $S \setminus \{\vec{v}_i\}$, entonces $S \setminus \{\vec{v}_i\}$ es también un sistema de generadores de E .
- (iii) Existe un subconjunto B de S que es libre y sistema generador de E .
- (iv) Sean $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i \in S$. Entonces, el conjunto S_1 obtenido al reemplazar el vector \vec{v}_i de S por $\lambda\vec{v}_i$ es un sistema generador de E .
- (v) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_i, \vec{v}_j \in S$. Entonces, el conjunto S_2 obtenido al reemplazar el vector \vec{v}_i de S por $\vec{v}_i + \lambda\vec{v}_j$ es un sistema generador de E .

DEFINICIÓN Llamamos **base de un espacio vectorial E** a un **sistema de generadores finito del espacio vectorial E** que sea libre.

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. Al número de vectores de una base cualquiera se le llama **dimensión del espacio vectorial**.

Todo vector de un espacio vectorial E se puede expresar de **forma única** como combinación lineal de los vectores de una base cualquiera B de ese espacio vectorial.

Se llaman **coordenadas de un vector $\vec{v} \in E$** respecto de una base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ de E a los números $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_m\vec{v}_m.$$

NOTACIÓN Las coordenadas de un vector se suelen denotar de la siguiente manera

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO (1) El conjunto $C = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , denominada **base canónica**.

En primer lugar tenemos que ver que el conjunto de vectores C genera \mathbb{R}^3 . Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

En segundo lugar debemos comprobar que son linealmente independientes. Para ello, basta observar que la matriz formada por los vectores es invertible y por tanto tiene rango 3. Observar que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

(2) El conjunto $C = \{1, x, \dots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$, denominada **base canónica**.

En primer lugar tenemos que ver que el conjunto de vectores C genera $\mathbb{R}_n[x]$. Sea $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n.$$

En segundo lugar, debemos comprobar que son linealmente independientes. Para ello, basta observar que cada elemento de la base es un polinomio de grado diferente. Observar que las coordenadas del vector $p(x)$ en la base canónica son (a_0, a_1, \dots, a_n) , y que

$$\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1.$$

EJEMPLO Demostrar que la dimensión de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ es 4.

Consideramos el conjunto

$$C = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En primer lugar vemos que C es libre,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

implica que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Comprobamos ahora que el conjunto C genera,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el conjunto C es una base de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$, y la dimensión es 4.

DEFINICIÓN Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial E y consideramos $F = \langle S \rangle$. Se llama **rango de S** a la **dimensión de F** ; es decir, al número de vectores linealmente independientes de S .

OBSERVACIÓN Para determinar si una colección de vectores es libre construimos la matriz de coordenadas, hacemos su m.e.r.f. y estudiamos el rango de dicha matriz. El rango de la matriz es la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores y las filas no nulas constituyen una base.

1.4 CAMBIO DE BASE EN UN ESPACIO VECTORIAL

Si tenemos $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ dos bases de un mismo espacio vectorial E , estamos interesados en conocer como expresar las coordenadas de un vector \vec{v} en la base B' , $[\vec{v}]_{B'}$, en función de las coordenadas de $[\vec{v}]_B$.

EJEMPLO Sean las bases $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ y $B' = \{\vec{v}_1 = (-1, 1), \vec{v}_2 = (2, -1)\}$. Consideramos el vector $\vec{v} = (1, 1)$ cuyas coordenadas en la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Queremos calcular $[\vec{v}]_{B'}$. Para ello debemos resolver el sistema que resulta de

$$(1, 1) = \alpha(-1, 1) + \beta(2, -1);$$

es decir,

$$\left. \begin{array}{l} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 1 = \alpha - \beta \end{array} \right\} \implies \beta = 2, \alpha = 3.$$

Por tanto,

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

¿Qué relación hay entre $[\vec{v}]_B$ y $[\vec{v}]_{B'}$? ¿Podemos ver alguna regla? Observemos que las coordenadas de \vec{v} en la base B' se obtienen como la solución del sistema escrito en forma

matricial siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [\vec{v}]_{B'}.$$

La matriz que aparece en la relación anterior esta formada por las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B .

DEFINICIÓN Sean B y B' dos bases de un mismo espacio vectorial E de dimensión n . La **matriz de cambio de base de B' a B** , denotada por $[I_E]_{B'B}$ es

$$[I_E]_{B'B} = \left([\vec{u}_1]_B, [\vec{u}_2]_B, \dots, [\vec{u}_n]_B \right) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n),$$

donde $B' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$.

En el ejemplo anterior,

$$[I_E]_{B'B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSICIÓN (FÓRMULA DEL CAMBIO DE BASE) Sean B y B' dos bases de un mismo espacio vectorial E de dimensión n , y $\vec{v} \in E$. Entonces,

$$[\vec{v}]_B = [I_E]_{B'B} [\vec{v}]_{B'}.$$

OBSERVACIÓN

$$[I_E]_{BB'} = [I_E]_{B'B}^{-1}.$$

EJEMPLO En el espacio vectorial $E = \mathbb{R}_2[x]$ consideramos las siguientes bases

$$C = \{1, x, x^2\}, \quad B = \{1, 1-x, x+x^2\}, \quad B' = \{1+3x, 2+x+x^2, 1+x+x^2\}.$$

Obtener las coordenadas del vector $p(x) = 1 + 2x + 4x^2$ en cada una de las bases.

En primer lugar calculamos las coordenadas del vector $p(x)$ en la base canónica C ,

$$[p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Necesitamos ahora las matrices de cambio de base

$$[I_E]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [I_E]_{B'C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la fórmula del cambio de base obtenemos que

$$[p(x)]_B = [I_E]_{BC}^{-1} [p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$[p(x)]_{B'} = [I_E]_{B'C}^{-1} [p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}.$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. Hallar la dimensión del siguiente subespacio vectorial y una base:

$$(i) F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + t = 0\}.$$

En primer lugar buscamos un sistema de generadores. Observar que $t = -2x + y - z$ y por tanto,

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, -2x + y - z) = x(1, 0, 0, -2) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1);$$

es decir,

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0, -2), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 1), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, -1) \text{ es un sistema de generadores.}$$

Ahora estudiamos la dependencia o independencia lineal de los vectores analizando el rango de la matriz de coordenadas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior tiene rango 3 y por tanto

$$\text{los vectores } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 \text{ son base del } F_1.$$

Problema 2. En el espacio vectorial de \mathbb{R}^4 se considera el conjunto de vectores $S = \{(2, 0, -1, 1), (-1, 1, -2, 0), (0, 2, -5, 1), (5, -1, 0, 2)\}$ y el espacio generado por S , $F = \langle S \rangle$.

(i) Calcular el rango de F .

(ii) Dar una base de F .

(iii) Comprobar si los vectores $\vec{w}_1 = (-4, 0, 2, -2)$ y $\vec{w}_2 = (2, 1, -3, 1)$ están en F .

(i) El rango de S es el número máximo de vectores linealmente independiente de S .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\text{rang}(F) = 2.$$

(ii) De la expresión matricial anterior deducimos que una base de F es

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 2, 0), \vec{v}_2 = (0, 2, -5, 1).$$

(iii) Podemos proceder de dos formas.

Método 1 Un vector estará en F si es combinación lineal de los elementos de la base. Por tanto, tenemos que resolver el sistema

$$(-4, 0, 2, -2) = \lambda(1, -1, 2, 0) + \beta(0, 2, -5, 1);$$

es decir,

$$\left. \begin{array}{l} -4 = \lambda \\ 0 = -\lambda + 2\beta \\ 2 = 2\lambda - 5\beta \\ -2 = \beta \end{array} \right\}$$

El vector \vec{w}_1 si pertenece a F .

Método 2 Calculamos la m.e.r.f de la matriz formada por los vectores de la base y el vector en estudio. Si el rango aumenta no estará en F , en caso contrario si.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El vector \vec{w}_1 si pertenece a F .

En el caso del vector \vec{w}_2 , aplicando el segundo método obtendríamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El vector \vec{w}_2 no pertenece a F .

Si aplicáramos el primer método obtendríamos un sistema incompatible.

PROBLEMAS

Problema 3. Determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectorial del correspondiente espacio vectorial:

$$(i) F_1 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

$$(ii) F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$(iii) F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$(iv) F_4 = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 0\} \subset \mathbb{R}_n[x].$$

Problema 4. Calcular los subespacios generados por los subconjuntos que se indican:

$$(i) S = \{(1, -1), (1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$(ii) S = \{1 - x, x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x].$$

$$(iii) S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

$$(iv) S = \{(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Problema 5. Expresar el vector $r(x) = 3x^3 - 2x + 4 \in \mathbb{R}_3[x]$ como combinación lineal de

$$(i) S = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, p_4(x) = x^3\}.$$

$$(ii) S = \{p_1(x) = 3, p_2(x) = 1 - 2x, p_3(x) = 1 + x^2, p_4(x) = x^3\}.$$

Problema 6. Hallar el vector de \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas con respecto de la base

$$B = \{(2, -1, 1), (1, 0, 2), (0, -1, 4)\}$$

sean

- (i) $(-1, 1, 2)$.
- (ii) $(2, 0, 2)$.

Problema 7. Determinar para que valores de z el vector $\vec{v} = (5, 1, z)$ pertenezca al subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 generado por los vectores

$$\vec{u}_1 = (7, 0, -1), \vec{u}_2 = (-1, 3, 0), \vec{u}_3 = (-2, 1, 0).$$

Problema 8. En el espacio vectorial de \mathbb{R}^4 se considera el conjunto de vectores $S = \{(2, 0, -1, 1), (-1, 1, -2, 0), (0, 2, -5, 1), (5, -1, 0, 2)\}$ y el espacio generado por S , $F = \langle S \rangle$.

- (i) Calcular el rango de F .
- (ii) Dar una base de F .
- (iii) Comprobar si los vectores $\vec{w}_1 = (-4, 0, 2, -2)$ y $\vec{w}_2 = (2, 1, -3, 1)$ están en F .

Problema 9. Comprobar si los vectores que se indican son linealmente independientes o linealmente dependientes:

- (i) $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 3, 0)$ y $\vec{u}_3 = (2, 3, 1)$.
- (ii) $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 2x^2 + x$, $p_3(x) = x^2 + 3$.
- (iii) $\vec{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$.

Problema 10. Sea $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un subconjunto ligado de un espacio vectorial E . Demostrar, o en caso contrario dar un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

- (i) El vector \vec{u} depende linealmente de los otros dos.
- (ii) Uno de los tres vectores depende linealmente de los otros dos.

Problema 11. Consideramos el subconjunto de \mathbb{R}^3

$$S = \{\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (1, 1, 0), \vec{w} = (k, 0, 1)\}.$$

¿ Para qué valores de k el conjunto S es ligado?.

Problema 12. Consideramos el subconjunto de \mathbb{R}^4

$$S = \{\vec{u} = (4, 1, 2, -5), \vec{v} = (0, 1, h, k), \vec{w} = (2, 1, -1, 3)\}.$$

¿ Para qué valores de k, h el conjunto S es ligado?.

Problema 13. Sean E un espacio vectorial y $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un conjunto libre de vectores de E . Demostrar que el conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u}\}$ es también libre.

Problema 14. Sea $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ un conjunto independiente de vectores de un espacio vectorial E . Determinar si el conjunto $B = \{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ es linealmente independiente o dependiente.

Problema 15. Comprueba si los siguientes subconjuntos son base de \mathbb{R}^3 , y en caso afirmativo halla las coordenadas en dicha base del vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que se indica:

$$B_1 = \{\vec{u}_1 = (-1, 0, 1), \vec{u}_2 = (-1, 0, 0), \vec{u}_3 = (0, 2, -1)\}, \vec{v} = (-3, 2, 1).$$

$$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (-1, 0, 1), \vec{u}_3 = (5, 2, -1)\}, \vec{v} = (1, 2, 3).$$

$$B_3 = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 2), \vec{u}_2 = (2, 1, 2), \vec{u}_3 = (-1, 0, 1)\}, \vec{v} = (-3, 0, 2).$$

Problema 16. Hallar la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales y una base de cada subespacio:

(i) $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + t = 0\}$.

(ii) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0, x + y = 0\}$.

(iii) $F_3 = \langle (2, -1, 4, 2), (0, 1, -3, 1) \rangle$.

(iv) $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + 2z - t = 0, x + 2y + 4z - 3t = 0\}$.

Problema 17. Hallar la condición que debe cumplir el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para formar una base de \mathbb{R}^3 , junto con los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$.

Problema 18. Hallar la condición que debe cumplir el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para formar una base de \mathbb{R}^3 , junto con los vectores $(1, 0, -1)$ y $(3, 1, 0)$.

Problema 19. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base de \mathbb{R}^2 y los vectores \vec{u}_1, \vec{u}_2 cuyas coordenadas en la base B son

$$[\vec{u}_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{u}_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Demostrar que $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ también es una base de \mathbb{R}^2 .
- (ii) Consideramos el vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$. Hallar las coordenadas de \vec{w} en la base B' .
- (iii) Hallar las coordenadas de los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 en la base B' .

Problema 20. Sean $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión 3, E . Sabiendo que

$$\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3.$$

Hallar las matrices de cambio de base $[I_E]_{BB'}$ y $[I_E]_{B'B}$.

Problema 21. Comprobar que $B' = \{\vec{u}_1 = (2, 1, -1), \vec{u}_2 = (1, 0, 4), \vec{u}_3 = (2, 3, -2)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , y dar las matrices de cambio $[I_{\mathbb{R}^3}]_{BB'}$ y $[I_{\mathbb{R}^3}]_{B'B}$, donde B es la base canónica de \mathbb{R}^3 . Hallar las coordenadas de un vector \vec{v} , cuyas coordenadas en base B' son $[\vec{v}]_{B'} = (1, 0, -1, 2)$.

Problema 22. En el espacio de polinomios de orden menos o igual que 3, $\mathbb{R}_3[x]$, consideramos las bases canónica, C y $N = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$, donde

$$q_1(x) = 1 - 2x + x^2 - 3x^3, q_2(x) = -2x + 4x^2 - x^3, q_3(x) = 2x^2 - x^3, q_4(x) = -x^2 - x^3.$$

(a) Hallar $[I]_{NC}$ y $[I]_{CN}$.

(b) Hallar $[q(x)]_N$, donde $q(x) = 2 - x + x^2$.

(c) Si $[p(x)]_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, hallar $[p(x)]_C$.

2. APLICACIONES LINEALES

OBJETIVOS

- ⊙ Conocer el concepto de aplicación lineal y matriz asociada (Identificación).
- ⊙ Conocer la relación entre las matrices asociadas a una misma aplicación lineal en diferentes bases.
- ⊙ Calcular los valores y vectores propios de un endomorfismo (o una matriz).
- ⊙ Saber determinar si un endomorfismo (o una matriz) es diagonalizable.
- ⊙ Saber determinar una base de vectores propios y la matriz diagonal de un endomorfismo diagonalizable (o una matriz).

2.1 DEFINICIONES

En este apartado se estudian las funciones entre espacios vectoriales y sus propiedades más relevantes así como su relación con las matrices. Una aplicación lineal es una correspondencia entre espacios vectoriales que preserva las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar.

DEFINICIÓN Sean E y F espacios vectoriales reales. Una correspondencia $f : E \longrightarrow F$ se denomina **aplicación lineal** si se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in E$, entonces $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
- (ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in E$, entonces $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

EJEMPLOS (a) Dado $k \in \mathbb{R}$, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(\vec{u}) = k\vec{u}$ es una aplicación lineal.

Comprobamos que se cumplen las dos propiedades:

- (i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(\vec{u} + \vec{v}) = k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
- (ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

(b) La aplicación $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definida por $f(p(x)) = p'(x)$ es una aplicación lineal.

Comprobamos que se cumplen las dos propiedades:

- (i) Si $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces $f(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x))$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces $f(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda f(p(x))$.

Las siguientes propiedades nos permiten conocer las principales características de las aplicaciones lineales.

PROPIEDADES Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces,

- (i) Conociendo las imágenes mediante f de los vectores de una base de E , se puede calcular también la imagen de cualquier vector de E .
- (ii) La imagen del vector nulo de E mediante la aplicación lineal f es el vector nulo de F .
- (iii) La imagen de un subespacio vectorial de E mediante f es, a su vez, un subespacio vectorial de F .

CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces,

- (i) Si f es **inyectiva**, se denomina **monomorfismo**.
- (ii) Si f es **sobreyectiva** o **exhaustiva**, se denomina **epimorfismo**.
- (iii) Si f es **biyectiva**, se denomina **isomorfismo**.
- (iv) Si $E = F$, f se denomina **endomorfismo**.
- (v) Si $E = F$ y f es un isomorfismo, se denomina **automorfismo**.

2.2 OPERACIONES ENTRE APLICACIONES LINEALES

De ahora en adelante, denotamos por $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales E y F .

OPERACIONES En el conjunto $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ definimos las siguientes operaciones:

- (i) Dadas $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, definimos la **suma**, $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, como la aplicación lineal

$$(f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}), \quad \text{para todo } \vec{u} \in E.$$

- (ii) Para todo $k \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, definimos el **producto por un escalar**, $k \cdot f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, como la aplicación lineal

$$(k \cdot f)(\vec{u}) = k \cdot f(\vec{u}), \quad \text{para todo } \vec{u} \in E.$$

- (iii) Dadas $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ y $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F, G)$, definimos la **composición**, $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, G)$, como la aplicación lineal

$$(g \circ f)(\vec{u}) = g(f(\vec{u})), \quad \text{para todo } \vec{u} \in E.$$

(iv) Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ biyectiva, entonces existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F, E)$ tal que

$$(g \circ f) = I_E \quad \text{y} \quad (f \circ g) = I_F.$$

Llamamos a dicha función **inversa de f** , y la denotamos por f^{-1} .

2.3 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Los siguientes subespacios son de gran importancia en el estudio de las aplicaciones lineales.

DEFINICIONES Dada $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ se llama **núcleo de f** , y se representa por $\text{Ker}(f)$, al conjunto

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \vec{0}\}.$$

Es decir, el núcleo de f está formado por todos los elementos de E que se transforma en el vector nulo de F . Observar que $\text{Ker}(f) \subset E$.

Dada $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ se llama **imagen de f** , y se representa por $\text{Im}(f)$, al conjunto

$$\text{Im}(f) = \{\vec{v} \in F : \text{existe } \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}\} = f(E).$$

Es decir, la imagen de f está formada por todos los elementos de F que son imagen de algún vector de E . Observar que $\text{Im}(f) \subset F$.

PROPOSICIÓN Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$. Entonces,

- (i) Los conjuntos $\text{Ker}(f)$ y $\text{Im}(f)$ son subespacios vectoriales de E y F , respectivamente.
- (ii) La aplicación f es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.
- (iii) Si f es inyectiva y $S \subset E$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, el conjunto $f(S)$ es linealmente independiente.
- (iv) $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(E)$.
- (v) Si los espacios vectoriales E y F tienen la misma dimensión, se puede asegurar que existe entre ellos una aplicación lineal biyectiva.
- (vi) Si el conjunto $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es un conjunto de generadores de E , el conjunto $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_m)\}$ es un conjunto de generadores de $\text{Im}(f)$.

DEMOSTRACIÓN (i)

(i) Sean $\vec{u}, \vec{w} \in \text{Ker}(f)$, entonces de la linealidad de la aplicación f tenemos que

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{w}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\text{Ker}(f)$, es un subespacio de E .

Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \text{Im}(f)$, y $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in E$ tales que $f(\vec{w}_1) = \vec{u}_1$ y $f(\vec{w}_2) = \vec{u}_2$, entonces de la linealidad de la aplicación f tenemos que

$$f(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha f(\vec{w}_1) + \beta f(\vec{w}_2) = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2.$$

Por tanto, $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ está en la imagen y $\text{Im}(f)$, es un subespacio de F .

(iii) Supongamos que $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$, entonces $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_m)\}$ es un conjunto independiente si la única solución del siguiente sistema es la trivial

$$\lambda_1 f(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_m f(\vec{u}_m) = \vec{0}.$$

De la linealidad de la aplicación f tenemos que

$$\vec{0} = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_m f(\vec{u}_m) = f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_m \vec{u}_m),$$

como la aplicación es inyectiva deducimos que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_m \vec{u}_m = \vec{0}.$$

Finalmente, aplicando que el conjunto S es libre deducimos que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

(iv) Supongamos que la dimensión de E es n y que el conjunto $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base. Sea $\vec{v} \in \text{Im}(f)$, entonces existe $\vec{u} \in E$ talque $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Expresamos el vector \vec{u} en la base B ,

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n.$$

Por la linealidad de f obtenemos que

$$\vec{v} = f(\vec{u}) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{u}_n).$$

Por tanto, los vectores $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ son un sistema de generadores de $\text{Im}(f)$ y en consecuencia

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(E).$$

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN Si E y F son espacios vectoriales de dimensión finita y $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$, entonces

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

En particular, f es **sobreyectiva** si y sólo si $\dim \text{Im}(f) = \dim F$. Mientras que, f es **inyectiva** si y sólo si $\dim \text{Im}(f) = \dim E$.

2.4 MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

En este apartado consideramos las bases de los espacios vectoriales E y F de dimensiones n y m , dadas respectivamente por $B_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$.

DEFINICIÓN Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$. La **matrix asociada a f en las bases B_1, B_2** es aquella que tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$ en la base B_2 ; es decir,

$$[f]_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m \times n),$$

donde $f(\vec{u}_i) = a_{1i}\vec{v}_1 + \cdots + a_{mi}\vec{v}_m$.

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x - 2y$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} , respectivamente.

Consideramos $C_1 = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ y $C_2 = \{\vec{v}_1 = 1\}$ las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} , respectivamente. Entonces, $f(\vec{e}_1) = 1 - 0 = 1 \cdot \vec{v}_1$ y $f(\vec{e}_2) = 0 - 2 = -2 \cdot \vec{v}_1$. Por tanto,

$$[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2)$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, 4x)$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Consideramos $C_1 = \{\vec{v}_1 = 1\}$ y $C_2 = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ las bases canónicas de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , respectivamente. Entonces, $f(\vec{v}_1) = (1, 4) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2$. Por tanto,

$$[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1).$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x - 3y, 5x + y)$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Consideramos $C_1 = C_2 = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ la base canónica de \mathbb{R}^2 . Entonces, $f(\vec{e}_1) = (1, 5) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 5 \cdot \vec{e}_2$ y $f(\vec{e}_2) = (-3, 1) = -3 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$. Por tanto,

$$[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 2).$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - z)$. Hallar la matrix asociada a f en las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Consideramos $C_1 = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ y $C_2 = \{\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1)\}$ las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 , respectivamente. Entonces, $f(\vec{e}_1) = (1, 2) = 1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2$, $f(\vec{e}_2) = (-1, 3) = -1 \cdot \vec{v}_1 + 3 \cdot \vec{v}_2$ y $f(\vec{e}_3) = (1, -1) = 1 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2$. Por tanto,

$$[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 3).$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x - 3y$. Hallar la matrix asociada a f en las bases $B = \{\vec{u}_1 = (2, 1), \vec{u}_2 = (1, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 y $C = \{\vec{e}_1 = 1\}$ de \mathbb{R} .

Valoramos la función en los elementos de la base, $f(\vec{u}_1) = 1 = 1 \cdot \vec{e}_1$ y $f(\vec{u}_2) = 5 = 5 \cdot \vec{e}_1$. Por tanto,

$$[f]_{BC} = [1 \quad 5] \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2).$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x - 3y$. Hallar la matrix asociada a f en las bases $C = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 y $B = \{u_1 = \frac{1}{3}\}$ de \mathbb{R} .

Valoramos la función en los elementos de la base, $f(\vec{e}_1) = 2 = 6 \cdot u_1$ y $f(\vec{e}_2) = -3 = -9 \cdot u_1$. Por tanto,

$$[f]_{CB} = [6 \quad -9] \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2).$$

TEOREMA Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$. Entonces:

- (a) $[f]_{B_1 B_2}$ es una matrix de orden $m \times n$.
- (b) Dado $\vec{u} \in E$, $[f(\vec{u})]_{B_2} = [f]_{B_1 B_2} [\vec{u}]_{B_1}$.

(c) $f(B_1)$ es un sistema generador de $\text{Im}(f)$.

(d) $\text{rang}(f) = \text{rang}([f]_{B_1 B_2})$ y $\dim \text{Ker}(f) = n - \text{rang}([f]_{B_1 B_2})$.

EJERCICIO Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a - b, b - 2c, 3a - 2b - 2c).$$

(i) Demostrar que f es una aplicación lineal

(ii) Calcular $[f]_{C_1 C_2}$, donde C_i , $i = 1, 2$ son las bases canónicas.

(iii) Hallar las dimensiones de $\text{Ker}(f)$ y $\text{Im}(f)$.

(i) En primer lugar verificamos las propiedades de ser una aplicación lineal. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ y $p_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(p_1(x) + p_2(x)) &= ((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 2(c_1 + c_2), 3(a_1 + a_2) - 2(b_1 + b_2) - 2(c_1 + c_2)) \\ &= (a_1 - b_1, b_1 - 2c_1, 3a_1 - 2b_1 - 2c_1) + (a_2 - b_2, b_2 - 2c_2, 3a_2 - 2b_2 - 2c_2) \\ &= f(p_1(x)) + f(p_2(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda p_1(x)) &= (\lambda(a_1 - b_1), \lambda(b_1 - 2c_1), \lambda(3a_1 - 2b_1 - 2c_1)) \\ &= \lambda(a_1 - b_1, b_1 - 2c_1, 3a_1 - 2b_1 - 2c_1) \\ &= \lambda f(p_1(x)). \end{aligned}$$

(ii) Consideramos las bases canónicas $C_1 = \{1, x, x^2\}$ y $C_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathbb{R}^3 respectivamente. Entonces,

$$f(1) = (1, 0, 3), \quad f(x) = (-1, 1, -2), \quad f(x^2) = (0, -2, -2).$$

Por tanto,

$$[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 3).$$

(iii) En primer lugar calculamos el $\text{Ker}(f) = \{p(x) : f(p(x)) = 0\}$; es decir,

$$f(p(x)) = (a - b, b - 2c, 3a - 2b - 2c) = (0, 0, 0) \implies a = 2c, \quad b = 2c.$$

Por tanto,

$$\text{Ker}(f) = \{(2c, 2c, c) : c \in \mathbb{R}\} \implies \dim \text{Ker}(f) = 1.$$

Aplicando el **Teorema de las dimensiones** obtenemos que

$$\dim \text{Im}(f) = 3 - \dim \text{Ker}(f) = 2.$$

PROPOSICIÓN Sean B_1, B_2 y B_3 bases de los espacios vectoriales E, F , y G , respectivamente. Sean $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$, $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F; G)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (i) $[f + g]_{B_1 B_2} = [f]_{B_1 B_2} + [g]_{B_1 B_2}$.
- (ii) $[\lambda f]_{B_1 B_2} = \lambda [f]_{B_1 B_2}$.
- (iii) $[h \circ f]_{B_1 B_3} = [h]_{B_2 B_3} [f]_{B_1 B_2}$.
- (iv) Si f es un **isomorfismo**, $[f^{-1}]_{B_2 B_1} = \left([f]_{B_1 B_2}\right)^{-1}$.

CAMBIOS DE BASES

De ahora en adelante V_1, N_1 serán bases del espacio vectorial E y V_2, N_2 serán bases del espacio vectorial F .

PROPOSICIÓN Sea $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$. Entonces:

- (i) $[f]_{N_1 V_2} = [f]_{V_1 V_2} [I_E]_{N_1 V_1}$.
- (ii) $[f]_{V_1 N_2} = [I_F]_{V_2 N_2} [f]_{V_1 V_2}$.
- (iii) $[f]_{N_1 N_2} = [I_F]_{V_2 N_2} [f]_{V_1 V_2} [I_E]_{N_1 V_1}$.

EJERCICIO Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(1, 0) = (-1, 2, 2) \quad \text{y} \quad f(0, 1) = (1, 0, 1).$$

- (i) Calcular la matriz asociada a f en las bases canónicas.
- (ii) Obtener la expresión explícita de la aplicación.
- (iii) Dadas $N = \{(1, 1), (2, 3)\}$, obtener la matrix de $[f]_{N C_2}$.

(i) Para hallar $[f]_{C_1 C_2}$, basta colocar las imágenes de la base canónica C_1 en las columnas de la matriz:

$$[f]_{C_1 C_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 2).$$

(ii) Si las coordenadas de un vector de \mathbb{R}^2 en base canónica son (x, y) , entonces:

$$f(x, y) = [f]_{C_1 C_2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-x + y, 2x, 2x + y).$$

(iii) Según la Proposición anterior $[f]_{NC_2} = [f]_{C_1 C_2} [I_{\mathbb{R}^2}]_{NC_1}$, y por tanto

$$[f]_{NC_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

3. ENDOMORFISMOS

3.1 VECTORES Y VALORES PROPIOS

DEFINICIÓN Sea $f : E \rightarrow E$ un **endomorfismo** sobre un espacio vectorial E de dimensión n . El escalar λ es un **valor propio** de f , si existe un vector $\vec{v} \in E$ no nulo, $\vec{v} \neq 0$, tal que

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Entonces, cada vector $\vec{u} \in E$ tal que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ se denomina **vector propio de f de valor propio λ** . El conjunto de vectores propios asociados a un autovalor es un espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 1; ya que $\vec{0} \in E$ y verifica la condición $f(\vec{0}) = \lambda \vec{0}$.

A veces también se utiliza la nomenclatura autovalor (VAP) y autovector (VEP). El conjunto de valores propios de un endomorfismo f se denota por $\sigma(f)$, y se denomina **espectro de f** .

OBSERVACIÓN Si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de f y \vec{u} y \vec{v} son vectores propios no nulos asociados a cada uno ellos, entonces \vec{u} y \vec{v} son **linealmente independientes**.

Para ello basta considerar la combinación lineal

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \implies \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v}$$

y aplicar imágenes a ambos lados de la igualdad, entonces

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Aplicando la linealidad de la función tenemos que

$$\vec{0} = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha\lambda_1\vec{u} + \beta\lambda_2\vec{v} = -\lambda_1\beta\vec{v} + \beta\lambda_2\vec{v} = \beta\vec{v}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{u} \neq 0$, tenemos que

$$\beta = \alpha = 0;$$

es decir los vectores \vec{u} y \vec{v} son **linealmente independientes**.

De ahora en adelante supondremos fijada una base E del espacio vectorial E y denotaremos por $A = [f]_V$.

OBSERVACIÓN Para que λ sea un valor propio de f es necesario y suficiente que

$$\text{Ker}(f - \lambda I) \neq 0,$$

o de forma equivalente que $\text{rang}(f - \lambda I) < n$ o que $\det(f - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = 0$.

DEFINICIÓN Llamamos **polinomio característico de f** , y lo denotaremos por $p_f(x)$, al polinomio

$$p_f(x) = \det(A - xI) \in \mathbb{R}_n[x].$$

La ecuación $p_f(x) = \det(A - xI) = 0$, se denomina **ecuación característica de f** . Por tanto,

los valores propios de f son las raíces de la ecuación característica de f .

OBSERVACIÓN El polinomio característico, y por tanto la ecuación característica, de un endomorfismo no depende de la base elegida.

DETERMINACIÓN DE LOS VECTORES PROPIOS Una vez conocemos los valores propios de un endomorfismo a través de su ecuación característica podemos hallar los vectores propios asociados. Para ello basta determinar una base de los subespacios vectoriales

$$\text{Ker}(f - \lambda I) = \text{Ker}(A - \lambda I),$$

ya que si $\vec{v} \in E$ es **vector propio de f** entonces $\vec{v} \neq 0$ y existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, y por tanto $(f - \lambda I)(\vec{v}) = 0$; es decir,

$$\vec{v} \in \text{Ker}(f - \lambda I).$$

EJEMPLO Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x, y, z) = (4x - 2y + 5z, 5x - 3y + 5z, 4z).$$

Determinar la ecuación característica y el espectro de f . Hallar los vectores propios asociados.

En primer lugar sea C la base canónica de \mathbb{R}^3 , entonces

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 & 5 \\ 5 & -3 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 5 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda)[(4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10] = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda). \end{aligned}$$

Por tanto, la **ecuación característica de f** es

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0,$$

y el **espectro** es

$$\sigma(f) = \{-1, 2, 4\}.$$

Para hallar los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios basta hallar los núcleos.

(a) $\text{Ker}(A - 4I) = \langle (5, 5, 2) \rangle$, ya que

$$(A - 4I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y + 5z \\ 5x - 7y + 5z \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \iff x = y = \frac{5}{2}z.$$

(b) $\text{Ker}(A - 2I) = \langle (1, 1, 0) \rangle$, ya que

$$(A - 2I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 5z \\ 5x - 5y + 5z \\ -2z \end{bmatrix} = \vec{0} \iff z = 0, x = y.$$

(c) $\text{Ker}(A + I) = \langle (2, 5, 0) \rangle$, ya que

$$(A + I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - 2y + 5z \\ 5x - 2y + 5z \\ 5z \end{bmatrix} = \vec{0} \iff z = 0, y = \frac{5}{2}x.$$

3.2 ENDOMORFISMO DIAGONALIZABLES

Cuando queremos estudiar un endomorfismo a partir de su matriz asociada, resulta de interés conocer si existe una base tal que la **matriz asociada** respecto a dicha base sea la más simple posible; es decir, una **matriz diagonal**. Si existe tal base, se dice que el endomorfismo es **diagonalizable**.

OBSERVACIÓN: Si $V = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base de un espacio vectorial E de dimensión n , en la que el endomorfismo f diagonaliza, entonces

$$A = [f]_V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

y por tanto

$$f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n;$$

es decir, los escalares λ_i son valores propios de f y los vectores \vec{u}_i son vectores propios de f .

CARACTERIZACIÓN DE LOS ENDOMORFISMO DIAGONALIZABLES Un endomorfismo f , es diagonalizable si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_s)^{m_s}$.
- (ii) $m_i = \dim \text{Ker}(f - \lambda_i I)$, para todo $i = 1, \dots, s$.

OBSERVACIÓN: En general, se tiene que

$$1 \leq \dim \text{Ker}(f - \lambda_i I) \leq m_i,$$

y el endomorfismo diagonaliza si la igualdad superior se da. Lo que en particular implica que, si $p_f(x)$ **descompone como producto de factores simple**; es decir,

$$p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

f , es diagonalizable.

OBSERVACIÓN Si f es un endomorfismo diagonalizable, y denotamos por B a la base de vectores propios, entonces

$$[f]_C = [I_E]_{BC} [f]_B [I_E]_{CB} = [I_E]_{BC} [f]_B [I_E]_{BC}^{-1},$$

donde $[I_E]_{BC}$ es la matrix que expresa los vectores propios en la base canónica.

MATRICES DIAGONALIZABLES

Como cada matrix cuadrada de orden n se puede identificar con un endomorfismo sobre un espacio vectorial de dimensión n , podemos extender los conceptos de valor propio, vector propio, Ker, polinomio y ecuación característica y diagonalización al caso de matrices.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 23. Clasifica la siguiente función, halla una base y las ecuaciones implícitas de $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3y, 0).$$

Indicación: Para encontrar una base o las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $\text{Im}(f)$ basta hallar el subespacio vectorial generado por las columnas de la matriz asociada a f en una base cualquiera, y después encontrar sus ecuaciones. Esto es debido a que $\vec{u} \in \text{Im}(f)$ sii $f(\vec{v}) = \vec{u}$, y por tanto

$$\vec{u} = f(\vec{v}) = [f]_V [\vec{v}]_B,$$

es decir, $\vec{u} \in \text{Im}(f)$ si es combinación lineal de las columnas de $[f]_V$, y las coordenadas de la combinación lineal serán $[\vec{v}]_B$.

(a) Calculamos la matriz asociada a f en base canónica C

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallamos el núcleo de f :

$\text{Ker}(f) = \langle (1, 0) \rangle$, ya que

$$(A)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \iff y = 0.$$

Por tanto, $\dim \text{Ker}(f) = 1$, y las ecuaciones implícitas son

$$y = 0.$$

La aplicación **no es ni inyectiva ni exhaustiva**.

Aplicando el Teorema de las dimensiones tenemos que $\dim \text{Im}(f) = 1$. Una base de $\text{Im}(f)$ está formada por las columnas l.i. de la matriz, en este caso

$$\text{Im}(f) = \langle (3, 0) \rangle \implies y = 0.$$

Problema 24. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios.

En primer lugar calculamos el polinomio característico:

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 2 - \lambda & 1 \\ 4 & 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 2).$$

Por tanto, la ecuación característica de f es

$$(\lambda - 4)^2(\lambda + 2) = 0,$$

y el espectro es

$$\sigma(f) = \{-2, 4\} \text{ con } m_1 = 1 \text{ y } m_2 = 2.$$

Para determinar si el endomorfismo es diagonalizable tenemos que hallar los subespacios de vectores propios asociados a cada uno de los valores propios y estudiar la dimensión de cada uno de ellos.

(a) $\text{Ker}(A + 2I) = \langle (-1, -1, 2) \rangle$, ya que

$$(A + 2I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 2y + z \\ -2x + 4y + z \\ 4(x + y + z) \end{bmatrix} = \vec{0} \iff x = y = -\frac{z}{2}.$$

(b) $\text{Ker}(A - 4I) = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 2) \rangle$, ya que

$$(A - 4I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - 2y + z \\ -2x - 2y + z \\ 4x + 4y - 2z \end{bmatrix} = \vec{0} \iff z = 2x + 2y.$$

Como $\dim \text{Ker}(A - 4I) = 2$ que coincide con la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico, el **endomorfismo f diagonaliza**. La matriz diagonal correspondiente y una base de vectores propios son

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } P = [I]_{NC} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo que se cumple

$$[f]_C = [I]_{NC}[f]_N[I]_{CN} = [I]_{NC}[f]_N[I]_{NC}^{-1},$$

donde N es la base de vectores propios.

Problema 25. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios.

En primer lugar calculamos el polinomio característico:

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & 2 \\ 1 & 8 - \lambda & 1 \\ 5 & 1 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)^2(3 - \lambda).$$

Por tanto, la **ecuación característica de f** es

$$(9 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0,$$

y el espectro es

$$\sigma(f) = \{3, 9\}, \text{ con } m_1 = 1 \text{ y } m_2 = 2.$$

Para determinar si el endomorfismo es diagonalizable tenemos que hallar los subespacios de vectores propios asociados a cada uno de los valores propios y estudiar la dimensión de cada uno de ellos.

(a) $\text{Ker}(A - 3I) = \langle (1, 0, -1) \rangle$, ya que

$$(A - 3I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2y + 2z \\ x + 5y + z \\ 5x + y + 5z \end{bmatrix} = \vec{0} \iff y = 0, z = -x.$$

(b) $\text{Ker}(A - 9I) = \langle (0, 1, 1) \rangle$, ya que

$$(A - 9I)(\vec{u}) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x - 2y + 2z \\ x - y + z \\ 5x + y - z \end{bmatrix} = \vec{0} \iff x = 0, y = z.$$

Como $\dim \text{Ker}(A - 9I) = 1$ que **no coincide con la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico** que es 2, el endomorfismo f **no diagonaliza**.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 26. Determina si las siguientes aplicaciones son lineales y, en caso de que lo sean, halla la matriz asociada a f en las bases canónicas.

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3y, x)$.
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, -y + 5x, 3x + y)$.
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2, 2y)$.
- (d) $f : \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \text{tr}(A)$.

Problema 27. Clasifica las siguientes funciones, halla una base y las ecuaciones implícitas de $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3y, 0)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (4x, -y + 2x, 3x + y)$.

(c) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (x - y + t, 2x + y + z + 3t, x + y - t, y + z + t)$.

Problema 28. Demostrar que una aplicación lineal f es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

Problema 29. Determinar la relación entre los parámetros a , b y c para que la matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sea diagonalizable.

Problema 30. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo que tiene como matrix asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios.

Problema 31. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ el endomorfismo definido por

$$f(a + bx + cx^2) = 3a + 2b + 2c + bx - (4a + 4b + 3c)x^2.$$

(a) Demostrar que f es un automorfismo.

(b) Demostrar que $f^2 = I_{\mathbb{R}_2[x]}$.

(c) Demostrar que f es diagonalizable.

(d) Hallar una base de vectores propios.

Problema 32. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene como matriz asociada en base canónica

$$A = [f]_C = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios y determinar la forma diagonal de A .

Problema 33. Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^2 cuya matriz en la base B formada por los vectores $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, 2)$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular la matriz de f en la base canónica.
- (b) Determinar si f es diagonalizable, y en su caso, hallar una base de vectores propios y determinar la forma diagonal.