DIVERTIMENTO CON WAVELETS

Lluis Ferrer-Arnau, ferrer@eel.upc.edu

Departamento Ingeniería Electrónica, U.P.C.

Resumen

En este trabajo se presenta una pequeña introducción a las wavelets. Estas se interpretan como otra forma de mirar la información, formada por diferentes niveles o capas. En concreto se pone el ejemplo de una wavelet basada en la descomposición de una señal en una capa formada por el valor medio de las muestras tomadas de dos en dos y otra capa formada por su diferencia, esto equivaldría al procedimiento que hacemos los electrónicos cuando refiriéndonos a un amplificador diferencial preferimos hablar de la tensión en modo común y la tensión diferencial en lugar de hablar del valor de tensión de cada entrada. En la conferencia se podrá escuchar diferentes melodías musicales descompuestas en diferentes capas mediante wavelets y se podrá apreciar el efecto que se produce debido al aliasing que ello comporta. También se proponen las wavelets como una forma de codificar un mensaje.

1. Introduction

Para introducir las wavelets se utilizará como ejemplo el de un circuito que tiene dos tensiones de entrada, fig. 1.

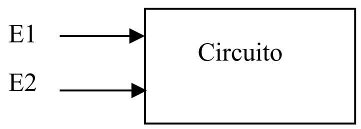

Fig 1*Circuito electrónico*

Es común en estos circuitos trabajar con dos variables nuevas que son la tensión en modo común y la tensión diferencial.

$$Vc = \frac{E1 + E2}{2} = \text{Tensión en modo comun}$$

$$Vd = \text{E1} - \text{E2} = \text{tensión diferencial}$$

Este mismo concepto lo podemos aplicar a una secuencia numérica, en lugar de guardar los números, lo que haremos es guardar la media y la diferencia tomados de 2 en dos. A continuación pondremos un ejemplo.

2. Ejemplo de descomposición wavelet

La señal de entrada es el array de números de la fig. 2. La transformada wavelet que se empleara en este ejemplo es una variante de la transformada Haar.
El procedimiento a seguir es el siguiente:

- Se halla la media de los números. A este array se le llamara aproximación. Fig. 3.
- Se halla la diferencia de los números. A este array se le llamará detalles. Fig. 4.
- Se guardan solo la mitad de las medias y las diferencias. A este procedimiento se le llama downsample. Fig. 5
- Se guarda en un array las cuatro medias seguidas de las cuatro diferencias. Se observara que hemos pasado del array de la fig. 2 al de la fig. 6. Hemos transformada un array de 8 números en otro también de 8 números.

8	**6**	**10**	**40**	**4**	**6**	**8**	**10**

Fig. 2 *Array de números, equivalente a nuestra señal*

7	**8**	**25**	**22**	**5**	**7**	**9**	**5**

Fig. 3*. Media de los números. Tensión en modo común.*

-2	**4**	**30**	**-36**	**2**	**2**	**2**	**-10**

Fig. 4. *Diferencia de los números. Tensión diferencial*

7		**25**		**5**		**9**	
-2		**30**		**2**		**2**	

Fig. 5*. Downsample de la media y la diferencia*

7	**25**	**5**	**9**	**-2**	**30**	**2**	**2**

Fig. 6. *Señal formada por las cuatro medias (aproximación) y las cuatro diferencias (detalles)*

Se ha demostrado como hacer la descomposición wavelet de una señal en un solo nivel. Este procedimiento se puede repetir con las aproximaciones de cada nivel hasta que se llegue a un nivel que solo tenga una muestra.
En la fig. 7, se puede ver la descomposición de la señal en 3 niveles. En cada nivel la mitad de sus números son aproximación y la otra mitad son detalles.

	8	6	10	40	4	6	8	10
N 1	7	25	5	9	-2	30	2	2
N 2	16	7	18	4				
N 3	11,5	-9						

Fig. 7. *Descomposición wavelets de 3 niveles*

En el primer nivel de descomposición tenemos:

- Aproximación: 7 // 25 // 5 // 9
- Detalles: -2 // 30 // 2 // 2

En el segundo nivel hay:

- Aproximación: 16 // 7
- Detalles: 18 /7 4

En el tercer y último nivel hay:

- Aproximación: 11,5
- Detalle: -9

Por último en la fig. 8 se muestra la descomposición wavelet completa de la señal original.

Senyal	8	6	10	40	4	6	8	10
Trans.	11,5	-9	18	4	-2	30	2	2

Fig. 8 *Señal original y Transformada wavelet de 3 niveles*

3. Reconstrucción wavelet

En el apartado anterior se ha visto como hacer la descomposición wavelet de una señal, ahora se verá el proceso inverso, como pasar de la transformada wavelet a la señal original. Para simplificar la explicación se hará la reconstrucción de un solo nivel, concretamente del primer nivel a la señal original.
Los pasos a seguir son los siguientes:

- Primero hacer upsample tanto en la aproximación como en los detalles. Esto equivale a poner un cero entre cada dos muestras de la señal.
- Aplicar la operación inversa o de síntesis para la aproximación y para los detalles.
- Sumar la aproximación reconstruida y los detalles reconstruidos.

Up d	-2	0	30	0	2	0	2	0
D_Re	1	-1	-15	15	-1	1	-1	1
Up a	7	0	25	0	5	0	9	0
A_Re	7	7	25	25	5	5	9	9

Fig 9. *Proceso de reconstrucción de la señal.*

El significado de cada fila de la fig. 9 es el siguiente:

- Up d: Los detalles después de hacer upsample.
- D_Re: Reconstrucción de los detalles.
- Up a: Aproximación después de hacer upsample.
- A_Re: Reconstrucción de la aproximación.

Lo último que nos queda es sumar las dos capas, la capa de los detalles reconstruidos más la capa de la aproximación reconstruida, tal como se muestra en la Fig. 10.

D_Re	1	-1	-15	15	-1	1	-1	1

+

A_Re	7	7	25	25	5	5	9	9

=

Señal	8	6	10	40	4	6	8	10

Fig. 10 *Señal = Suma de la capa, o nivel, de aproximaciones mas la capa de los detalles.*

La operación inversa para reconstruir las aproximaciones es la suma de dos en dos y la de los detalles es la media de la diferencia de un numero menos el anterior. Las formulas se detallan en las ecuaciones siguientes:

$$RA(n) = x(n) + x(n-1)$$

$$RD(n) = \frac{-x(n) + x(n-1)}{2}$$

El proceso de descomposición wavelet se puede esquematizar tal como se ve en la fig. 11. Para obtener los detalles se aplica un filtro, u operación, H1 y después se hace downsample y para obtener las aproximaciones de aplica el filtro L1 y finalmente también se hace downsample.

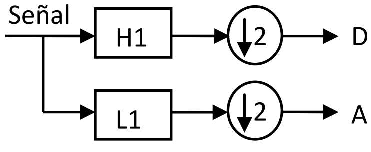

Fig 11*. Esquema de descomposición wavelet.*

El proceso de reconstrucción es el inverso, tal como puede verse en la Fig. 12.

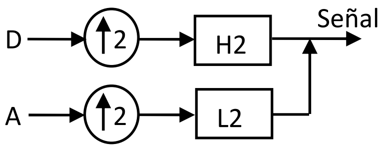

Fig 12 *Esquema de la reconstrucción wavelet.*

Como se ha dicho este proceso de descomponer una señal en dos, una aproximación y un detalle se puede ir repitiendo de forma iterativa con la capa de aproximación resultante, tal y como se puede observar en la Fig. 3, donde la señal se descompone en tres niveles de detalle más un nivel de aproximación. Una forma de reconstruir la señal a partir de ese nivel de descomposición es reconstruyendo cada nivel por separado y al final sumarlos todos, ya que las wavelets cumplen con el principio de superposición, tan empleado en la resolución de circuitos eléctricos.
En la Fig. 13 se puede ver el proceso de reconstrucción de la señal de la Fig. 2 como la suma de 4 capas o señales que corresponden a tres niveles de detalle y uno de aproximación reconstruidos por separado.

D_1	**1**	**-1**	**-15**	**15**	**-1**	**1**	**-1**	**1**
				+				
D_2	**-9**	**-9**	**9**	**9**	**-2**	**-2**	**2**	**2**
				+				
D_3	**4,5**	**4,5**	**4,5**	**4,5**	**-4,5**	**-4,5**	**-4,5**	**-4,5**
				+				
A_3	**11,5**	**11,5**	**11,5**	**11,5**	**11,5**	**11,5**	**11,5**	**11,5**
				=				
Señal	**8**	**6**	**10**	**40**	**4**	**6**	**8**	**10**

Fig. 13*. Descomposición de una señal en 4 capas o niveles*

4. Respuesta frecuencial de las wavelets.

Para obtener las aproximaciones de la descomposición wavelet se ha hecho la media de las muestras tomadas de dos en dos. Esta operación se puede poner en forma de ecuación en diferencias, sería la siguiente:

$$A(n) = L1 = \frac{x(n) + x(n+1)}{2}$$

Esta ecuación se puede interpretar como un filtro. Al igual pasa con la operación realizada para obtener los detalles:

$$D(n) = H1 = x(n+1) - x(n)$$

La respuesta frecuencial de estos filtros se puede ver en la Fig. 14.

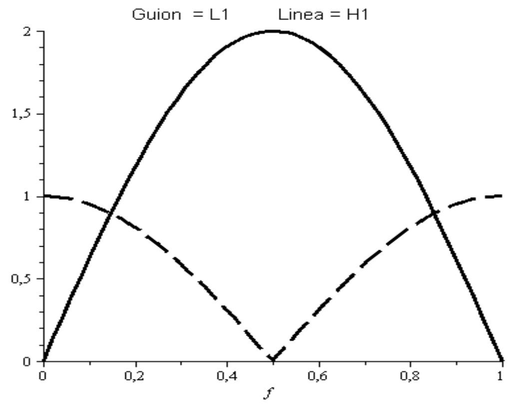

Fig. 14 *Respuesta frecuencial del filtro de aproximación L1 y del filtro de los detalles H1*

Se puede observar que la operación de hacer la media de dos muestras equivale a un filtro pasa bajos, aunque no es de buena calidad. Por el contrario la operación de obtener la diferencia es un filtro pasa altos.
Lo mismo pasa con las operaciones que hay que realizar para reconstruir la señal.
La operación para reconstruir las aproximaciones es:

$$RA(n) = L2 = x(n) + x(n-1)$$

Para reconstruir los detalles la operación es:

$$RD(n) = \mathrm{H2} = \frac{-x(n) + x(n-1)}{2}$$

En la fig. 15 se puede ver la respuesta frecuencial de estas dos operaciones

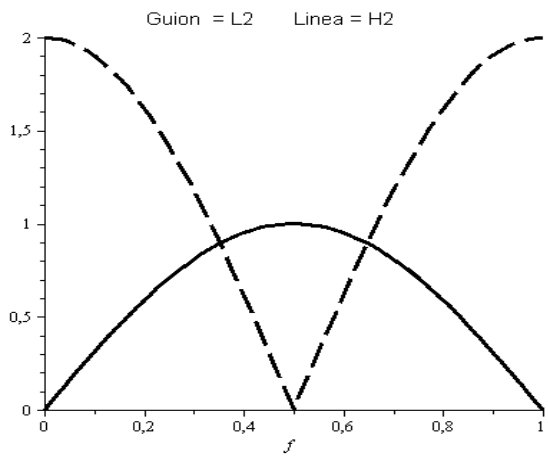

Fig. 15*. Respuesta frecuencial del los filtros L2 y H2*

La idea es que dada una señal se aplica un filtro pasa bajos que la suaviza y por lo tanto obtenemos una versión aproximada de esta. Después se hace dowsample que equivale a reducir la frecuencia de muestreo, para no tener aliasing la frecuencia de corte del filtro tendría que ser 0,25 y se puede ver que en nuestro caso no se cumple, por lo cual al hacer la descomposición aparecerá aliasing. La gracia de las wavelets es que cuando se reconstruye la señal el aliasing se cancela.

Para obtener los detalles se aplica un filtro pasa altos, la idea es que en los detalles obtengamos las variaciones o transitorios de la señal, en este caso también habrá aliasing.
Suponiendo que tuviéramos wavelets con respuesta frecuencial perfecta, al hacer la descomposición cada nivel o capa de detalles equivaldría a una franja de frecuencias. Esto se refleja en la Fig. 16.

	FRECUENCIAS DIGITALES		
SEÑAL	**0 - 0,5**		
N1	**0 - 0,25**		**0,25 - 0,5**
N2	**0 – 0,125**	**0,125 – 0,25**	

Fig 16. *Descomposición frecuencial que se obtiene al hacer la descomposición wavelet.*

5. Aplicaciones de las wavelets

Actualmente las wavelets se aplican en muchos campos, aunque sus principales aplicaciones están en la compresión de señales y en la detección de transitorios.
A continuación se explicaran muy brevemente.
Compresión de señales: Se descompone una señal en aproximaciones y detalles. Si la señal es suave los detalles serán cero o muy pequeños, pudiéndose despreciar y quedarnos solo con la aproximación y los detalles que tengan un valor elevado. De esta forma reducimos el número de muestras que tenemos que guardar, ya que los ceros no se guardan.
Detección de transitorios: Cuando un valor de los detalles es elevado indica que la señal presenta un cambio brusco o transitorio, por lo cual no solo detectamos si la señal presenta transitorios sino también en que instante ocurren.
En este artículo se va a proponer otra aplicación que el autor no ha visto antes propuesta en ningún sitio. Es la aplicación de wavelets para la codificación de mensajes. En el siguiente apartado se expondrá un ejemplo

6. Codificación de mensajes con wavelets

Se expondrá un ejemplo simple de codificación de un mensaje y se hará con una wavelet basada en la suma de 2 en 2 y en la resta de 2 en 2, pequeña variante de la utilizada hasta ahora. La ventaja de esta wavelet es que la transformada de una señal formada por números enteros también son números enteros.
El mensaje que se quiere codificar es “ALBRETAS”,
Los pasos a seguir serán los siguientes:

- Pasar el mensaje a código ASCII:

Men.	65	76	66	82	69	84	65	83

- Se hace la descomposición de un nivel del código ASCII

Wav.	141	148	153	148	11	16	15	18

- Se interpretaría la transformada wavelet como el código ASCII del mensaje a enviar, resultando el siguiente mensaje. “ìöÖö♂►☼↨”. Otra opción sería enviar el código como una secuencia numérica “141, 148, 153, 148, 11, 16, 15 y 18”, esta sería la única opción en el caso de que algún número de la transformada fuera negativo.

Este es solo un ejemplo a nivel de “divertimento”. Hay que remarcar que se abren muchas más opciones como descomponer en mensaje en 3 niveles de detalles o el de emplear otra wavelet diferente.

7. Divertimento con wavelets

Quien lea este articulo sin haber asistido a la conferencia puede no acabar de entender este título un poco atrevido.
En la conferencia se aplico la descomposición wavelets a diferentes melodías escuchándolas por capas separadas, lo cual debido al aliasing que se ha comentado anteriormente producía efectos sonoros curiosos.
Por último se empleo una wavelet que introduce mucha distorsión en la descomposición para descomponer un pequeño discurso sonoro en diferentes capas, juntándolas de forma aleatoria de forma de que quedaran dos grupos, como un sonido estéreo. Lo curioso es que escuchando el mensaje en estéreo, una descomposición por altavoz, solo se oía ruido. Pero al sumarlos matemáticamente, o escuchándolos de forma mono, se podía entender un pequeño discurso perfectamente.
Si alguien está interesado en esta pequeña demostración, solicitándolo por e-mail se le será facilitada.

8. Conclusiones

Se ha intentado hacer una breve introducción en el inmenso mundo de las wavelets, incidiendo en los aspectos básicos como son dividir una señal en aproximaciones y detalles, los filtros pasa bajos y pasa altos, así como el downsample y el upsample.
Aunque no cualquier operación puede ser una wavelet, se ha demostrado que de wavelets hay muchas. Solo hay unas condiciones que hay que cumplir para que se pueda descomponer y recomponer perfectamente una señal. El estudio de dichas condiciones no entra en el objetivo de este artículo, quien esté interesado puede buscar en la bibliografía. Por último se ha presentado una nueva aplicación de las wavelets como es la codificación de mensajes.

Referencias

[1] I. Daubechies, “Ten lectures on wavelets”, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992
[2] S. Mallat, “A wavelet tour of signal processing”, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1998
[3] A.V. Oppenheimer and R. Schafer, “Digital signal processing”, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 1975.