# TRIGONOMETRÍA PLANA LOGARÍTMICA

## LECCIÓN XXXVI

### Uso de las tablas trigonométricas artificiales

La Trigonometría plana logarítmica tiene por objeto aplicar el utilísimo instrumento de cálculo que son los logaritmos a la resolución de los triángulos; y esto con el único fin de abreviar las operaciones.

Pero, como en algunas de las fórmulas a emplear aparecen, com hemos visto, sumas o restas, es preciso transformarlas previamente en otras que no las contengan, lo cual acarrea tales variaciones, que ya ni es posible trabajar exclusivamente con los datos ni aplicar la clasificación de Ocagne.

Para mayor claridad y brevedad, tomaremos los mismos casos ya resueltos en la Trigonometría plana natural, y para cada uno de ellos haremos las transformaciones pertinentes.

En cuanto a tablas, usaremos las contenidas en la ya citada obra de Sánchez Ramos, desde la página 100 a la 201.

Estas tablas contienen los logaritmos de las funciones trigonométricas desde 0° a 90°, de 30 en 30 segundos, y se las llama «tablas trigonométricas artificiales», debido a que en un principio se llamaba a los logaritmos «números artificiales».

Su manejo es idéntico al ya explicado para las «tablas trigonométricas naturales», y, puesto que nuestros lectores ya están familiarizados, además, con el manejo de los logaritmos, omitiremos las instrucciones generales sobre su uso.

No obstante, tendremos que explicar la particularidad que estas tablas presentan desde la página 100 a la 119 para el seno y tangente de los ángulos comprendidos entre 0° y 3°, y para el coseno y cotangente de los comprendidos entre 87° y 90°.

Resulta que en estos intervalos, para las funciones citadas y, como es natural, para sus recíprocas, los incrementos de los logaritmos de las funciones, correspondientes a los incrementos del ángulo, son tales, que el método «*regula falsi*» o de «partes proporcionales» da errores demasiado grandes para que pueda aplicarse.

Se admiten, entonces, las expresiones :

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = \frac{\text{sen } (\alpha + \Delta \alpha)}{\alpha + \Delta \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\tan \alpha}{\alpha} = \frac{\tan (\alpha + \Delta \alpha)}{\alpha + \Delta \alpha},$$

en las que $\alpha$ es un ángulo comprendido entre 0° y 3°, y, para nuestras aplicaciones, contenido en las tablas, y $\Delta \alpha$ un incremento menor que el intervalo de las mismas.

Estas expresiones, a pesar de ser también erróneas, permiten interpolar con mayor exactitud.

Para ello se toman logaritmos, con lo que se tiene :

$$\log \text{sen } (\alpha + \Delta \alpha) = \log (\alpha + \Delta \alpha) + [\log \text{sen } \alpha - \log \alpha]$$
$$\log \tan (\alpha + \Delta \alpha) = \log (\alpha + \Delta \alpha) + [\log \tan \alpha - \log \alpha]$$

De manera que el logaritmo-seno o logaritmo-tangente que se busca vale el logritmo del número que expresa el ángulo en segundos más la expresión encerrada en los corchetes, y cuyo valor $\overline{6},685$ en caracteres gruesos, encabeza la columna especial de las páginas citadas. Este valor debe ser completado con las cifras de la subcolumna de la izquierda, si se trata de un seno, y de la derecha, si se trata de una tangente.

Ejemplo: Determinar log-sen $0° 44' 16''$.

Se tendrá:

$$\log \operatorname{sen} 0°44'16'' = \begin{cases} \log 2656 \text{ (número de segun-} \\ \quad\text{dos del arco dado)} = 3{,}424228 \\ \log \operatorname{sen} 0°44'10'' - \log 0°44'10'' = \overline{6}{,}685563 \end{cases}$$

$$\overline{2}{,}109791$$

Si se tratara de la cosecante o de la cotangente (que, por ser recíprocas de las dos anteriores, resultan, como hemos dicho, afectadas del mismo fenómeno), se tendría:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha},$$

y, en consecuencia:

$$\log \operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{colog} \operatorname{sen} \alpha$$

y

$$\log \cot \alpha = \operatorname{colog} \tan \alpha.$$

Así, por ejemplo, si se nos hubiera propuesto log cosec $0° 44' 16''$, hubiéramos operado exactamente a como lo hemos hecho, determinando después el cologaritmo de aquel resultado. Se hubiera obtenido 1,890209.

Al tratarse de un coseno, cotangente, secante o tangente de un ángulo comprendido entre 87° y 90°, tomaremos el ángulo complementario y trabajaremos la cofunción, con lo que nos hallaremos en el caso anterior.

Ejemplo 1.° : Determinar log cot $88° 10' 23''$.

Como

$$\cot 88° 10' 23'' = \tan 1° 49' 37'',$$

también

$$\log \cot 88° 10' 23'' = \log \tan 1° 49' 37'',$$

y, operando como en el caso anterior, tendremos :

$$\log \tan 1^\circ 49' 37'' = \left( \begin{array}{ll} \log 6577 & = 3{,}818028 \\ \log \tan 1^\circ 49' 30'' - \log 1^\circ 49' 30'' & = \overline{6}{,}685722 \\ \hline & \overline{2}{,}503747 \end{array} \right.$$

y, por lo tanto :

$$\log \cot 88^\circ\, 10'\, 23'' = \overline{2}{,}503747.$$

Ejemplo 2.° Determinar $\log \tan 87^\circ\, 50'\, 06''$.

Como

$$\tan 87^\circ\, 50'\, 06'' = \frac{1}{\cot 87^\circ\, 50'\, 06''}$$

$$\log \tan 87^\circ 50' 06'' = \operatorname{colog} \cot 87^\circ 50' 06'' = \operatorname{colog} \tan 2^\circ 09' 54''$$

$$\log \tan 2^\circ 09' 54'' = \left( \begin{array}{ll} \log 7794 & = 3{,}891760 \\ \log \tan 2^\circ 09' 50'' - \log 2^\circ 09' 50'' & = \overline{6}{,}685781 \\ \hline & \overline{2}{,}577541 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{colog} \tan 2^\circ\, 09'\, 54'' = 1{,}422459,$$

y, por lo tanto :

$$\log \tan 87^\circ\, 50'\, 06'' = 1{,}422459,$$

Resumen : En cualquiera de los casos mencionados deberemos referirnos, para las determinaciones numéricas, al seno o a la tangente de un ángulo comprendido entre 0° y 3°.

## Resolución logarítmica de los triángulos planos

Volviendo a emprender los cinco casos de resolución de los triángulos planos y trabajando, para mayor claridad y posibilidad de comparación, los mismos ejemplos dados en Trigonometría natural, tendremos :

1.er caso : Se dan un lado y dos ángulos.
Sean, por ejemplo, los $b$, B y C.
Se tiene, inmediatamente :

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

Para el cálculo de $a$, estableceremos :

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} \qquad a = \frac{b \text{ sen A}}{\text{sen B}},$$

y para el de $c$ :

$$\frac{c}{\text{sen C}} = \frac{b}{\text{sen B}} \qquad c = \frac{b \text{ sen C}}{\text{sen B}},$$

Ejemplo : Resolver el triángulo en el que

$b = 16$ m., $\quad B = 80^\circ 20' \quad$ y $\quad C = 60^\circ 50' 10''$.

Se tendrá :

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 141^\circ 10' 10'' = 38^\circ 49' 50''$$

$$a = \frac{b \text{ sen A}}{\text{sen B}}$$

$$\log a = \begin{cases} \log b = \log 16 & = 1,204120 \\ \log \operatorname{sen} A = \log \operatorname{sen} 38^\circ 49' 50'' & = \bar{1},797281 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} B = \operatorname{colog} \operatorname{sen} 80^\circ 20' & = 0,006211 \end{cases}$$

$$1,007612$$

$a = 10,176$ m.

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B};$$

$$\log c = \begin{cases} \log b = \log 16 & = 1,204120 \\ \log \operatorname{sen} C = \log \operatorname{sen} 60^\circ 50' 10'' & = \bar{1},941129 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} B = \operatorname{colog} \operatorname{sen} 80^\circ 20' & = 0,006211 \end{cases}$$

$$1,151460$$

$c = 14,172$ m.

## LECCIÓN XXXVIII

### Resolución logarítmica de los triángulos planos

(Continuación)

2.° caso: Se dan dos lados y el ángulo comprendido.

Sean, por ejemplo, los $a$, $c$ y B.

Partiendo de la fórmula del seno, estableceremos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

de donde:

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} C}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \cos \frac{A+C}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan \frac{A+C}{2}}{\tan \frac{A-C}{2}},$$

y como :

$$A+B+C = 180^\circ$$

$$A+C = 180^\circ - B$$

$$\frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2},$$

y, por lo tanto :

$$\tan \frac{A+C}{2} = \cot \frac{B}{2}$$

y

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\cot \frac{B}{2}}{\tan \frac{A-C}{2}}.$$

Mediante esta fórmula, llamada de Neper, resulta posible calcular $\dfrac{A - C}{2}$, y como $\dfrac{A + C}{2}$ es conocido, por ser, como se acaba de ver, igual a $90° - \dfrac{B}{2}$, podremos calcular A y C mediante las relaciones :

$$\frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2} = A$$

$$\frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2} = C.$$

El tercer lado lo determinaremos a partir de los ángulos B y A, y el lado $a$, por la fórmula del seno.

Tendremos :

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

de donde :

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

Ejemplo : Resolver un triángulo en el que $a = 26$, $c = 47$ y $B = 123° 42'$.

Al aplicar a este caso particular la fórmula de Neper, cambiaremos en ella el orden de $a$ y $c$, así como el de A y C, lo cual no altera la igualdad, ya que equivale a multiplicar ambos miembros por $-1$, evitándose así el manejo de las cantidades negativas a que daría lugar el hecho de ser, en el problema propuesto, $c > a$.

Tendremos, pues :

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\cot\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{C-A}{2}}$$

de donde :

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cdot\cot\frac{B}{2}.$$

$$\log\tan\frac{C-A}{2}=\begin{cases}\log\,(c-a)=\log 21 & =1{,}322219\\ \log\cot\dfrac{B}{2}=\log\cot 61°51' & =\bar{1}{,}728412\\ \operatorname{colog}\,(c+a)=\operatorname{colog} 73 & =\bar{2}{,}136677\end{cases}$$

$$\bar{1}{,}187308$$

$$\frac{C-A}{2}=8°\,45'\,02'',$$

y como :

$$\frac{C+A}{2}=90°-\frac{B}{2}=28°\,09',$$

será :

$$C=28°\,09'+8°\,45'\,02''=36°\,54'\,02''$$

y

$$A=28°\,09'-8°\,45'\,02''=19°\,23'\,58''.$$

Para el cálculo de $b$, estableceremos :

$$b = \frac{a \text{ sen B}}{\text{sen A}}$$

$$\log b = \left( \begin{array}{lll} \log a & = \log 26 & = 1{,}414973 \\ \log \text{sen B} & = \log \text{sen } 123^\circ 42' & = \bar{1}{,}920099 \\ \text{colog sen A} & = \text{colog sen } 19^\circ 23' 58'' & = 0{,}478663 \\ \hline & & \bar{1}{,}813735 \end{array} \right.$$

$b = 65{,}12$ m.

## LECCIÓN XXXIX

### Resolución logarítmica de los triángulos planos

(Continuación)

3.$^{er}$ caso : Se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos ; por ejemplo, los $a$, $b$ y A.

Estableceremos :

$$\text{sen B} = \frac{b \text{ sen A}}{a},$$

lo que da lugar a tres casos, según resulte ser sen $\text{B} \gtreqless 1$ o, lo que es lo mismo, log sen $\text{B} \gtreqless 0$.

El primer resultado indica que los datos no corresponden a ningún triángulo ; el segundo, que el ángulo B es recto, y el tercero, denota la existencia de dos ángulos, que, como sabemos, son suplementarios y a los que llamaremos $\text{B}_1$ y $\text{B}_2$, los cuales, si al ser $b \gtreqless v$

verifican también $B_1 \gtreqless A$ y $B_2 \gtreqless A$, dan lugar a dos triángulos distintos, que son:

$$\begin{matrix} a & b \\ A & B_1 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} a & b \\ A & B_2 \end{matrix}$$

En caso de que uno de ellos no verifique la condición, se forma un solo triángulo con el ángulo que la cumple.

Los terceros ángulos C se determinan mediante la relación:

$$C = 180° - (A + B)$$

y el tercer lado por la fórmula:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C},$$

Ejemplo 1.°: Resolver un triángulo en el que

$$a = 94 \text{ m.}, \quad b = 71 \text{ m.} \quad \text{y} \quad A = 48°\,09'\,22''.$$

Siguiendo el método expuesto, tendremos:

$$\log \text{sen } B = \left( \begin{array}{lll} \log b & = \log 71 & = 1{,}851258 \\ \log \text{sen } A & = \log \text{sen } 48°09'22'' & = \bar{1}{,}872138 \\ \text{colog } a & = \text{colog } 94 & = \bar{2}{,}026872 \end{array} \right.$$

$$\overline{\bar{1}{,}750268}$$

$$B_1 = 34°\,14'\,31'' \qquad B_2 = 145°\,45'\,29''.$$

Como $B_2$ no cumple con la condición indicada, debe ser desechado.

El ángulo C vale:

$$C = 180° - (A + B) = 180° - 82° 23' 53'' = 97° 36' 07''$$

y el lado $c$:

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

$$\log c = \begin{cases} \log a & = \log 94 & = 1{,}973128 \\ \log \text{sen } C & = \log \text{sen } 97° 36' 07'' & = \bar{1}{,}996166 \\ \text{colog sen } A & = \text{colog sen } 48° 09' 22'' & = 0{,}127864 \end{cases}$$

$$2{,}097158$$

$c = 125{,}07$ m.

Ejemplo 2.°: Resolver un triángulo en el que

$a = 26$ cm., $\quad b = 30$ cm. $\quad$ y $\quad A = 44° 12'$

Análogamente al ejemplo anterior, tendremos:

$$\log \text{sen } B = \begin{cases} \log b & = \log 30 & = 1{,}477121 \\ \log \text{sen } A & = \log \text{sen } 44° 12' & = \bar{1}{,}843336 \\ \text{colog } a & = \text{colog } 26 & = \bar{2}{,}585027 \end{cases}$$

$$\bar{1}{,}905484$$

$B_1 = 53° 33' 15''$ $\qquad$ $B_2 = 126° 26' 45''$.

Como ambos cumplen con las condiciones impuestas, debemos proseguir la resolución de dos triángulos.

Los terceros ángulos valdrán:

$$C_1 = 180° - (A + B_1) \qquad C_2 = 180° - (A + B_2)$$
$$C_1 = 180° - 97° 45' 15'' \qquad C_2 = 180° - 170° 38' 45''$$
$$C_1 = 82° 14' 45'' \qquad C_2 = 9° 21' 15''$$

y los terceros lados :

$$\log c = \begin{cases} \log a & = \log 26 & = 1{,}414973 \\ \log \operatorname{sen} C & = \log \operatorname{sen} 82^\circ 14' 45'' & = \bar{1}{,}996010 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A & = \operatorname{colog} \operatorname{sen} 44^\circ 12' & = 0{,}156664 \end{cases}$$

$$1{,}567647$$

$c = 36{,}95$ cm.

$$\log c = \begin{cases} \log a & = \log 26 & = 1{,}414973 \\ \log \operatorname{sen} C & = \log \operatorname{sen} 9^\circ 21' 15'' & = \bar{1}{,}210951 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A & = \operatorname{colog} \operatorname{sen} 44^\circ 12' & = 0{,}156664 \end{cases}$$

$$0{,}782588$$

$c = 6{,}061$ cm.

## LECCIÓN XL

### *Resolución logarítmica de los triángulos planos*

(Conclusión)

4.º caso : Se dan los tres lados $a$, $b$ y $c$.
Para el cálculo del ángulo A, partimos de :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A,$$

y obtenemos, sucesivamente :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

y como :

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} \quad \text{(véase lección XIV)}$$

será :

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c + a)\;(b + c - a)}{2\,b\,c}.$$

Si hacemos :

$$b + c + a = 2\,p,$$

siendo $p$ el semiperímetro, será también :

$$b + c - a = 2\,p - 2\,a = 2\;(p - a),$$

y substituyendo, tendremos :

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2\,p \cdot 2\;(p - a)}{2\,b\,c}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{p\;(p - a)}{b\,c}.$$

Como este caso de resolución de triángulos resulta más breve y más exacto, calculando los ángulos en función de tangentes utilizaremos la relación :

$$\tan^2 \frac{A}{2} + 1 = \sec^2 \frac{A}{2}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 1$$

substituyendo en la siguiente forma y en función del $\cos^2 \frac{A}{2}$ hallado, tendremos :

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{b\,c}{p\ (p - a)} - 1$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{b\,c - p\ (p - a)}{p\ (p - a)} =$$

$$= \frac{b\,c - p\,b - p\,c + p^2}{p\ (p - a)} =$$

$$= \frac{p\ (p - c) - b\ (p - c)}{p\ (p - a)}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - b)\ (p - c)}{p\ (p - a)},$$

que es la fórmula llamada de Borda.

De manera análoga hubiéramos obtenido para los ángulos B y C:

$$\tan^2 \frac{B}{2} = \frac{(p-c)\,(p-a)}{p\,(p-b)}$$

$$\tan^2 \frac{C}{2} = \frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}.$$

Ejemplo: Resolver un triángulo en el que

$a = 20$ m., $b = 30$ m. y $c = 40$ m.

Aplicando lo anteriormente expuesto, tendremos:

$$2p = 20 + 30 + 40 = 90$$
$$p = 45$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{lcl} \log (p-b) & = \log 15 & = 1{,}176091 \\ \log (p-c) & = \log 5 & = 0{,}698970 \\ \text{colog } p & = \text{colog } 45 & = \bar{2}{,}346787 \\ \text{colog } (p-a) & = \text{colog } 25 & = \bar{2}{,}602060 \\ \hline & & \bar{2}{,}823908 \end{array} \right.$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \bar{1}{,}411954$$

$$\frac{C}{2} = 14^\circ\, 28'\, 39''$$

$$A = 28^\circ\, 57'\, 18'' ;$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{lcl} \log\,(p-c) & = \log 5 & = 0{,}698970 \\ \log\,(p-a) & = \log 25 & = 1{,}397940 \\ \operatorname{colog} p & = \operatorname{colog} 45 & = \overline{2}{,}346787 \\ \operatorname{colog}\,(p-b) & = \operatorname{colog} 15 & = \overline{2}{,}823909 \\ \hline & & \overline{1}{,}267606 \end{array}\right.$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \overline{1}{,}633803$$

$$\frac{B}{2} = 23^\circ\, 17'\, 01''$$

$$B = 46^\circ\, 34'\, 02'' \,;$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{lcl} \log\,(p-a) & = \log 25 & = 1{,}397940 \\ \log\,(p-b) & = \log 15 & = 1{,}176091 \\ \operatorname{colog} p & = \operatorname{colog} 45 & = \overline{2}{,}346787 \\ \operatorname{colog}\,(p-c) & = \operatorname{colog} 5 & = \overline{1}{,}301030 \\ \hline & & 0{,}221848 \end{array}\right.$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = 0{,}110924$$

$$\frac{C}{2} = 52^\circ\, 14'\, 19''$$

$$C = 104^\circ\, 28'\, 38''.$$

# APÉNDICE I

La costumbre de medir los arcos de circunferencia en grados, minutos y segundos sexagesimales está plenamente justificada en Astronomía, por cuanto permite establecer entre unidades de arco y unidades de tiempo equivalencias expresables mediante números enteros y sencillos.

Pero, en cuestiones de máquinas, esta relación no tiene interés, por lo que resulta descartada la necesidad del sistema sexagesimal. Por otra parte, la conveniencia de enlazar directamente la medida del arco y su longitud con el radio, ha inducido a adoptar el sistema circular, cuya unidad de medida de arcos y ángulos es el «radián», expresándose sus partes mediante simples fracciones decimales.

Así como el «grado» es un arco cuya longitud es igual a la $\frac{1}{360}$ parte de la circunferencia, el «radián» no es más que un arco cuya longitud es igual a la del radio.

A consecuencia de esta definición, resulta que «tantas veces un arco (rectificado) contenga al radio, tantos radianes medirá». Por lo tanto, si la longitud de un arco es $l$, y la del radio $r$, su medida $\alpha$ en radianes valdrá:

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Esta fórmula tan simple es la que cumple el *desideratum* expuesto en el segundo párrafo de esta lección.

Resulta, pues, que una circunferencia (360°) tiene:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2\,\pi\, r}{r} = 2\,\pi \text{ radianes},$$

una semicircunferencia (180°):

$$\alpha = \frac{\pi\, r}{r} = \pi \text{ radianes},$$

y un cuadrante (90°):

$$\alpha = \frac{\frac{x\, r}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}.$$

Partiendo de la segunda de estas equivalencias, resulta que un radián vale:

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}141592} = 57^\circ\, 17'\, 43''$$

(esta operación viene efectuada como se explica en el último párrafo de esta lección).

Como consecuencia inmediata a la existencia de los dos sistemas de medida, aparece el problema del cambio de unidades. Para resolverlo, consideremos una semicircunferencia (180° ó $\pi$ radianes) y un arco cualquiera cuya medida sexagesimal sea $n$ y su medida circular $\alpha$. Existirá la siguiente correspondencia :

$$\begin{array}{cc} 180^\circ & \pi \\ n & \alpha \end{array}$$

Las dos magnitudes son proporcionales y, por lo tanto, se puede establecer :

$$\frac{180^\circ}{n} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

En el cambio de unidades pueden presentarse dos casos (que explicaremos a continuación mediante ejemplos), según se dé $n$ o $\alpha$.

1.$^{er}$ caso : Siendo $n = 20^\circ\,32'$, determinar $\alpha$.
De la proporción anteriormente establecida, deducimos :

$$\alpha = \frac{n \times \pi}{180^\circ} = \frac{20^\circ\,30' \times 3{,}1416}{180^\circ}.$$

Después de expresar los arcos en minutos, se tiene :

$$\alpha = \frac{1230 \times 3{,}1416}{10800} = 0{,}35779 \text{ radianes.}$$

2.° caso : Siendo $\alpha = 1{,}286$, determinar $n$.
De la proporción anteriormente establecida, deducimos :

$$n = \frac{180^\circ \times \alpha}{\pi} = \frac{180^\circ \times 1{,}286}{3{,}141592}.$$

Para determinar $n$ en grados, minutos y segundos se podrían reducir a segundos los 180°, y el resultado, que también vendría expresado en segundos, convertirlo nuevamente en complejo; pero es más expedito efectuar la operación tal como está indicada, reduciendo el primer residuo que se encuentre (que son grados) a minutos, continuando entonces la división hasta un segundo residuo, que vendrá expresado en minutos y que deberán reducirse a segundos, continuando otra vez la división, la cual deberá terminarse al bajar la última cifra del dividendo o continuarla ya como decimal ordinaria.

Así, en el caso que nos ocupa, se tiene:

| | |
|---|---|
| 1,286 | |
| × 180 | |
| 10288 | |
| 1286 | |
| 231480000 | 3141592 |
| 11568560 | 73° 40′ 56″ |
| 2143784 | |
| × 60 | |
| 128627040 | |
| 2963360 | |
| × 60 | |
| 177801600 | |
| 20722000 | |
| 1872448 | |

o sea:

$$\alpha = 73^\circ\, 40'\, 56''.$$

Para la conversión de grados, minutos y segundos sexagesimales en radianes, puede también utilizarse la tabla XII de la página 227 de la citada obra de Sánchez Ramos. También aparecen en algunos formularios tablas dispuestas para dicha conversión, y para la inversa.

F I N I S O P E R A E

## INDICE